UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

ENSEÑANZA DE LA LINEALIZACIÓN COMO CIERRE DE LA BRECHA ENTRE EL CONCEPTO DE FUNCIONES POLINÓMICAS Y SU CONTEXTUALIZACIÓN CON EL MUNDO REAL

STEVEN GIRALDO GIRALDO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
MEDELLÍN, COLOMBIA
2024

ENSEÑANZA DE LA LINEALIZACIÓN COMO CIERRE DE LA BRECHA ENTRE EL CONCEPTO DE FUNCIONES POLINÓMICAS Y SU CONTEXTUALIZACIÓN CON EL MUNDO REAL

STEVEN GIRALDO GIRALDO

TRABAJO FINAL DE MAESTRÍA PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE:

MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DIRECTOR (A):

PhD en Matemáticas JOSE MANUEL GOMEZ GUERRA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS

MEDELLÍN, COLOMBIA

2024

Lema

La educación no es llenar un cubo, sino encender un fuego. Los maestros son los portadores de la antorcha del conocimiento, encendiendo las llamas de la curiosidad y la exploración en los corazones de sus estudiantes.

William Butler Yeats

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que han contribuido de manera significativa a la realización de este Trabajo Final de Maestría, que marca el cierre de una etapa importante en mi formación académica.

En primer lugar, deseo agradecer a mi familia, y en particular a mi querida madre, por su apoyo incondicional a lo largo de este desafiante proceso. Su constante ánimo, comprensión y apoyo emocional han sido fundamentales en mi trayecto académico.

Agradezco profundamente a mi director de trabajo de grado, el Dr. José Manuel Gómez Guerra, por su valiosa orientación, su disposición para ayudarme a desarrollar esta investigación y su sabiduría en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales. Sus consejos expertos y su paciencia fueron esenciales para la culminación de este proyecto.

A mis compañeros de maestría, les agradezco por la colaboración, el intercambio de ideas y el apoyo mutuo a lo largo de esta travesía académica. Cada uno de ustedes ha enriquecido mi formación y ha contribuido al ambiente de aprendizaje.

Y agradezco a Wuilder y a Dahiana por estar siempre dispuestos a ayudarme en cualquier momento con las mas sinceras ganas de hacerlo.

Resumen.

El objetivo del trabajo es reducir la brecha entre los conceptos teóricos y la realidad de los estudiantes al enseñar la linealización de funciones polinómicas mediante la modelación de situaciones contextualizadas. Se realizó una revisión bibliográfica analizando estudios de investigación sobre pensamiento variable y aprendizaje significativo en educación matemática. Se sugieren actividades que emplean datos reales de consumo de agua para entender la facturación, mientras que el software Tracker se emplea para analizar movimiento parabólico y caída libre. Se busca que los estudiantes apliquen sus conocimientos de física y matemáticas para modelar fenómenos del mundo real. El trabajo se centra en los marcos normativos nacionales e internacionales para la educación matemática y la innovación educativa. La meta es fomentar el progreso de la instrucción y el conocimiento de las matemáticas en Colombia.

Palabras clave: linealización, modelación, funciones polinómicas, pensamiento variacional, aprendizaje significativo.

Teaching linearization as a bridge between the concept of polynomial functions and their contextualization with the real world

Abstract

The objective of the work is to reduce the gap between theoretical concepts and the reality of students by teaching the linearization of polynomial functions through modeling of contextualized situations. A bibliographic review was carried out analyzing research studies on variable thinking and meaningful learning in mathematics education. Activities are suggested that use real water consumption data to understand billing, while Tracker software is used to analyze parabolic motion and free fall. Students are expected to apply their knowledge of physics and mathematics to model real-world phenomena. The work focuses on national and international regulatory frameworks for mathematics education and educational innovation. The goal is to promote the progress of mathematics instruction and knowledge in Colombia.

Keywords: linearization, modeling, polynomial functions, variational thinking, meaningful learning.

Contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Introducción

Este trabajo consiste en una monografía que investiga el uso del aprendizaje significativo y la modelización matemática como estrategias instruccionales para enseñar la idea de linealización de funciones polinómicas en el bachillerato. La linealización es una herramienta que simplifica las funciones no lineales al convertirlas en rectas más sencillas y listas para el análisis mediante técnicas como la finalización de cuadrados o la aplicación de logaritmos. Sin embargo, los estudiantes frecuentemente tienen dificultades para comprender y aplicar esta noción de manera significativa mientras resuelven problemas.

Este proyecto investigará antecedentes sobre propuestas didácticas basadas en modelación matemática para la enseñanza de la linealización en la literatura científica. El propósito consiste en recolectar, examinar y sintetizar los conocimientos sobre estas técnicas educativas, analizando su fundamentación, metodologías y logros logrados. Para acercar el concepto de linealización a la realidad y necesidades de los estudiantes, se espera que se detalle el estado del arte en cuanto al potencial de la modelación matemática y el aprendizaje significativo.

Si bien no habrá una implementación directa de actividades didácticas, sí se realizará una propuesta para su diseño. Esto podría implicar el análisis de situaciones cotidianas modeladas mediante funciones polinómicas, el uso de software de análisis de vídeo para contextualizar conceptos y el desarrollo de habilidades de modelización matemática por parte de los estudiantes.

La monografía se organiza de la siguiente manera: un marco teórico sobre modelización y aprendizaje significativo; una disciplina matemática sobre funciones polinómicas y lineales; un análisis crítico de trabajos de investigación anteriores en este campo; la creación de una propuesta didáctica potencialmente útil sobre el tema; y, finalmente, conclusiones y acciones didácticas sugeridas derivadas del estudio realizado.

Así, el proyecto tiene como objetivo mejorar la enseñanza y el aprendizaje significativo de la noción de linealización de funciones polinómicas en la educación mediática mediante la exploración y caracterización de estrategias de enseñanza contextualizadas centradas en el modelado matemático.

1. Aspectos Preliminares

1.1. Selección y delimitación del tema

El trabajo presentado está planteado como una monografía de compilación o revisión de trabajos investigativos de corte cualitativo etnográfico sobre la enseñanza de la linealización de funciones polinómicas mediante el modelamiento de situaciones para contextualización del concepto en contribución del pensamiento variacional.

1.2. Planteamiento del Problema

1.2.1 Antecedentes

Una investigación exhaustiva se realizó en nivel local, nacional e internacional en relación con el tema de la enseñanza de la linealización; Sin embargo, se reportaron pocos estudios específicamente enfocados en la enseñanza del concepto de la linealización; por lo tanto, se analizaron los trabajos que tratan de la linealización sin plantear directamente su enseñanza.

Gianluca Bontempi y Mauro Birattari presentaron en 2004 un enfoque atractivo para cerrar la brecha entre el análisis teórico y los métodos de los investigadores para sistemas lineales y el mundo aparentemente no lineal en el que viven los estudiantes. Este enfoque consiste en descomponer un complejo problema de control no lineal en un número de problemas lineales más simples. En su trabajo, también revisaron cómo la comunidad de aprendizaje autónomo aborda el tema del control de sistemas lineales (Bontempi y Birattari, 2004).

Los estudiantes pueden enfrentar dificultades durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en especial en la escuela obligatoria. En 2009, Héctor Anelli se propuso demostrar que estas dificultades podían convertirse en un obstáculo cuando se desarrollaban soluciones a situaciones educativas que no daban suficiente consideración a la distinción entre los conceptos mencionados en el análisis y selección (Agnelli, Konic, Peparelli, Zona y Flores, 2009).

"Linealización: los estudiantes olvidan el punto de operación" es un artículo que Roubal presentó en 2010 y propone una manera de mejorar la enseñanza de la metodología de la linealización. Para demostrar su punto, utiliza el modelo clásico de laboratorio de un pedúnculo invertido en un automóvil (Roubal, Jirk y Petr Stecha, 2010). Además, en 2012, Zonia Cristina, profesora de la Universidad Nacional de Colombia, desarrolló una propuesta con sus alumnos de noveno grado de la Institución Educativa Cocorná. Su enfoque se centró en la idea de una función lineal, abordándola desde la perspectiva de modelar situaciones físicas y geométricas y comparando los resultados obtenidos utilizando este enfoque con un modelo de enseñanza tradicional (Giraldo, 2012).

El concepto de linealización ha sido empleado para estudiar las propiedades características de las cónicas mediante el modelado de situaciones cotidianas. Esto ha posibilitado el crecimiento de una estructura cognitiva donde se logra interpretar y extrañar datos, ya que hace unos años ha habido una falta de razón en el manejo de datos hechos en un momento y llevados un "modelo" para describir sus características y realizar un análisis independiente (Fiebiger, 2014). De manera similar, el artículo de 2018 "Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la función mediante lineal la modelación de situaciones" examinó cómo los estudiantes aprenden la función de las líneas a través de un enfoque didáctico que desarrolla tareas que involucran el modelado de situaciones en contexto (Campeón, Aldana y Villa, 2018).

Chintia Rojas diseñó estrategias didácticas experimentales orientadas a laboratorio en 2021 en relación con la conexión entre los estilos de aprendizaje de los estudiantes y las metodologías educativas para comprender conceptos abstractos como los de control. Las estrategias combinaron la metodología educativa activa y el estilo de aprendizaje de Felder y Silverman para cubrir 4 conceptos de control de sistemas dinámicos, entre los cuales la linealización. Según las encuestas de percepción, los resultados fueron positivos, con una aprobación de la sesión de casi el 90% de los estudiantes a quienes se les aplicó la estrategia didáctica y una claridad del 97% en el concepto (Rojas, 2021). Durante el mismo año, Octavio Córdoba desarrolló una estrategia didáctica para la función cuadrática que impulsara el aprendizaje significativo, investigativo y crítico al usar el programa GeoGebra para resolver problemas en contexto (Córdoba, 2021).

1.2.2 Descripción del problema

En todo el programa de bachillerato, hay una evidente falta de contexto para el concepto de función lineal, lo que dificulta entender cómo podría usarse para gestionar otras funciones. Es evidente que se pone énfasis en la capacidad de resolución de ecuaciones funcionales, lo que favorece el cumplimiento de los protocolos. Preguntar a alguien qué significa ser competente y tener conocimientos de matemáticas suele dar como resultado la capacidad de realizar cálculos con facilidad, lo que conduce a una práctica matemática enfocada en la resolución de problemas algebraicos y minimizar los conceptos involucrados en los objetos matemáticos.

Es fundamental enfatizar que la educación matemática debe ir más allá de la capacidad de realizar operaciones y estimaciones. Es crucial fomentar en los estudiantes una comprensión profunda y significativa de los conceptos matemáticos y su aplicación en circunstancias del mundo real. La función lineal es una herramienta fundamental en la matemática que tiene aplicaciones en diversas áreas, como la física, la economía y la ingeniería, entre otras. Por lo tanto, es fundamental brindarlo de manera contextualizada y significativa, demostrando su valor para resolver problemas cotidianos y del mundo real. Además, es esencial apoyar el desarrollo de competencias y habilidades matemáticas, como el razonamiento lógico, la resolución de problemas y la comunicación matemática, para que los estudiantes puedan utilizar lo aprendido en situaciones novedosas y complejas.

Existe una correlación directa entre el paradigma educativo tradicional que utilizan los profesores y la construcción ineficaz de conceptos por parte de los estudiantes y la falta de experiencias de aprendizaje significativas. Las actividades llevadas a cabo con varios registros representacionales no promueven la practicidad del objeto simbólico ni ayudan a comprender las partes constituyentes del concepto. Debido a la falta de comprensión para identificar el tipo de función, las variables y su relación de dependencia, esto favorece el dominio de procesos algorítmicos y secuenciales en los problemas de situación que implican el concepto de función polinómica. Además, la solución de problemas contextualizados posee un obstáculo.

Se espera que los estudiantes vean las matemáticas como una herramienta para modelar su entorno y su realidad, disipando el mito de que las matemáticas no están relacionadas con la vida diaria. La meta es incrementar su interés en las ciencias, en particular en las matemáticas, presentándolas como una ciencia fácil de comprender, eliminando de manera general la impresión de que es la materia más complicada.

Actualmente, en vez de centrarse en la transmisión de algoritmos para solucionar problemas específicos, los profesores se esfuerzan en mejorar la enseñanza de las ciencias mediante estrategias que desarrollan la capacidad de pensamiento en la resolución de problemas en general. Con el propósito del estructuralismo, se busca establecer una relación entre el modelo teórico y las experiencias prácticas experimentadas en el laboratorio y en la vida cotidiana de los estudiantes. Además, se hace hincapié en la resolución de problemas al considerar la relación entre el todo y las partes, tal como lo propone Bourbaki (Aczel, 2009). De esta manera, el crecimiento de las clases y los procesos de pensamiento adquieren un significado significativo, posibilitando una aplicación efectiva y precisa de los conceptos según las teorías del aprendizaje significativo.

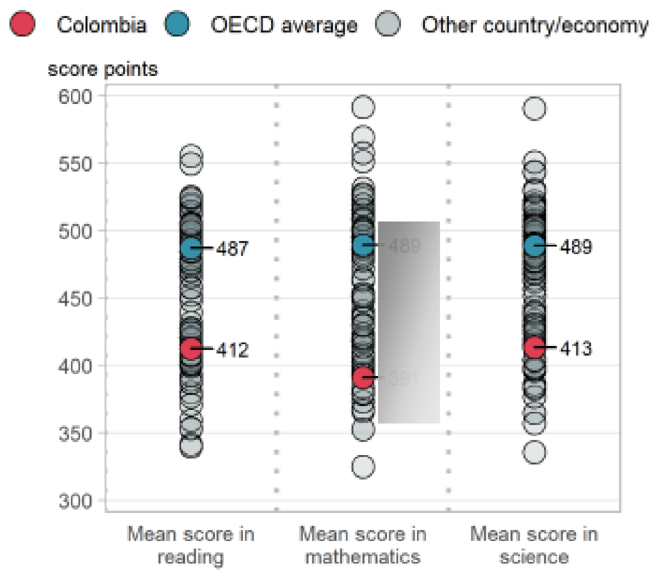
1.2.3 Formulación de la pregunta

¿Cuáles son las estrategias didácticas que pueden ayudar a cerrar la brecha entre el concepto de linealización y su aplicación en el mundo real, en el contexto de las funciones polinómicas?

1.3 Justificación

Se sabe que la ecuación de la recta y el concepto de función son fundamentales en la matemática, tanto en su aplicación teórica como en áreas como la ingeniería, finanzas y medicina. Su importancia proviene de su capacidad para describir fenómenos naturales y comunes. Es necesario abandonar la noción de que la función es sólo un algoritmo y, en cambio, poner énfasis en el hecho de que se origina a partir de la comprensión de situaciones y fenómenos del mundo real. De esta manera, los estudiantes pueden desarrollar habilidades académicas que les permitan modelar situaciones matemáticas complejas y elegir estrategias adecuadas para abordarlas. Pese a ello, según los resultados de las pruebas PISA, Colombia está casi 100 puntos por debajo de la media y sólo un 1% de los estudiantes pueden modelar situaciones complejas en matemáticas.

Figura 1. Panorama del rendimiento en competencia en lectura, matemáticas y ciencias.



Fuente: OECD, base de datos PISA 2018, cuadro I.1.

El objetivo de este trabajo es proponer una estrategia de enseñanza esquematizada para abordar las deficiencias de representación e interpretación de los estudiantes mediante el uso del pensamiento variable, tal como lo establecen los planes de estudio de matemáticas colombianos que se basan en los derechos fundamentales del aprendizaje (DBA). El pensamiento variacional, de acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional (1998), es fundamental para la resolución de problemas relacionados con el estudio de la variación y el cambio, la modelación de procesos de la vida diaria, las ciencias naturales y sociales y las maths en sí mismo propósito. Este concepto se alinea con la normativa educativa vigente en matemáticas contenida en la DBA, que establece que el concepto de función se introduce en séptimo grado con la ecuación recta (y=ax+b) y su representación en gráficos y tablas para modelar situaciones, y concluye en octavo grado con la interpretación de la derivada como función del cambio instantáneo (Ministerio Nacional de Educación de Colombia, 2006).

Se entiende que una función permite modelar la relación entre dos variables, y los DBA se centran en comprender el concepto en lugar de los procedimientos algebraicos y geométricos asociados. Esto implica un cambio significativo en la enseñanza convencional relacionada con la función. Según Vasco (1999), en el aula la función es vista frecuentemente como una fórmula matemática que necesita ser memorizada. Esto conduce a un proceso semiautomático en el que los estudiantes aplican un algoritmo basado en una fórmula, crean una tabla y luego crean un gráfico. Aunque esto requiere la circulación de varias representaciones, deja a los estudiantes con poca o ninguna actividad significativa. El objetivo del DBA "Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas" es modelar situaciones de variación utilizando funciones polinómicas, lo que difiere de los métodos de enseñanza tradicionales.

Aunque es una simplificación para modelos complejos porque la recta tiene pocas variables analíticas y es fácilmente manipulable, el uso de la linealización en colegios y universidades es muy restringido y solo se analiza en laboratorios físicos para análisis de datos y representación gráfica. Por lo tanto, se sugiere utilizar esto como punto de partida para discutir otros conceptos de diversas funciones. La finalidad de la investigadora es reducir la brecha entre el concepto y el contexto, eso que se ha mostrado en múltiples trabajos de investigación, y estas estrategias cumplen con los objetivos del estudio. Además, como resultado de un enfoque constructivista en la pedagogía, se puede contribuir al mejoramiento de la educación colombiana.

1.4. Objetivos

1.4.1 Objetivo General

Explorar la literatura científica en el ámbito escolar para identificar investigaciones que emplean la linealización como estrategia pedagógica para contextualizar diversos temas matemáticos y el modelado de funciones polinómicas en estudiantes de noveno grado.

1.4.2 Objetivos específicos

- Identificar y seleccionar los trabajos más relevantes y actualizados sobre la linealización y el modelado de funciones polinómicas, con el fin de asegurar la calidad y la pertinencia de la información a recopilar.

- Analizar críticamente los trabajos seleccionados, evaluando la coherencia y consistencia de los resultados obtenidos, las limitaciones y posibles sesgos en la metodología empleada, y las implicaciones prácticas para la enseñanza de las matemáticas.
- Sistematizar y sintetizar la información obtenida, a través de una revisión sistemática o una meta síntesis, con el objetivo de generar una síntesis teórica clara y rigurosa sobre el estado del arte en cuanto al uso de la linealización y el modelado de funciones polinómicas en la enseñanza de las matemáticas.
- Identificar las limitaciones y los desafíos en la implementación de la linealización como estrategia didáctica, así como las posibles soluciones y alternativas para superarlos, a partir de la experiencia y la reflexión crítica sobre los trabajos revisados.
- Diseñar una estrategia didáctica basada en la linealización y el modelado de funciones polinómicas, en un contexto educativo específico, con el fin de evaluar su eficacia y pertinencia en la mejora de los aprendizajes de los estudiantes.

2. Marco Referencial

2.1. Marco Teórico (La modelación como proceso en el aula de Matemáticas)

La modelización matemática, según Villa (2007), es el proceso mediante el cual se crea un modelo que representa la realidad o una simplificación de esta en el ámbito científico. Este proceso requiere creatividad para interactuar con el contexto, conocimiento matemático y la elección adecuada de variables para el estudio. El modelo creado sirve para predecir el comportamiento de otros fenómenos asociados que ocurren bajo las mismas circunstancias. En el ámbito educativo, la modelización se entiende como un proceso matemático que parte de una situación real y se analiza con el objetivo de simplificarla y matematizarla. Como una actividad estructurante y organizadora que emplea el conocimiento y las habilidades adquiridas para descubrir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas, se define la disciplina en los lineamientos curriculares, según Treffers y Goffre (MEN, 1998).

Desde 1998, los Lineamientos Curriculares han establecido el modelado de fenómenos del mundo real como uno de los cinco procesos esenciales en la educación matemática, junto con la formulación y resolución de problemas, la comunicación, el razonamiento y la formulación, comparación y aplicación de procedimientos y algoritmos. Sin embargo, el maestro Jhony Villa ha descubierto que en algunas instituciones educativas estas ideas no se han adoptado del todo. Como resultado, el campo de las matemáticas todavía se ve a través de una lente formal y abstracta, con aplicación y contextualización limitadas a situaciones hipotéticas, en lugar de intentar ayudar a los estudiantes a comprender el material y ser capaces de relacionarlo con su vida cotidiana. A pesar de que estos lineamientos han estado en papel durante 24 años, su implementación efectiva en el aula sigue siendo un desafío en algunos contextos educativos.

El objetivo principal no es sólo enseñar a los estudiantes a modelar, sino también ver el modelado como una herramienta o recurso para utilizar las matemáticas que ya saben y aprender el resto que les será útil para modelar fenómenos. La resolución de problemas juega un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, y el modelado ha demostrado ser exitoso para promover la comprensión matemática. El objetivo es ir más allá del simple proceso mecánico de resolver problemas basados en el contexto hacia una conexión matemática entre ideas y conceptos con otras disciplinas y avanzar en el conocimiento matemático hacia un aprendizaje significativo. Los lineamientos curriculares (MEN, 1998) establecen que todos los estudiantes deben experimentar procesos matemáticos que conduzcan al descubrimiento, creación y aplicación de modelos en todos los niveles. Braco et al. (2016) establecen que la modelación matemática como estrategia pedagógica nativa para enseñar la matemática, facilitando una mejor adquisición de los conceptos y su uso en la solución de situaciones reales. Además, presenta un nuevo enfoque para la educación que resulta estimulante para los estudiantes, ya que se les motiva a repensar su entorno y fomentarse en sus conocimientos.

La representación se ha vuelto un instrumento fundamental para crear escenarios donde se pueden mostrar las conexiones entre las matemáticas y su uso en la resolución de problemas cotidianos. En cualquier nivel educativo, esto hace que dicha relación se encuentra en el centro del proceso de enseñanza y aprendizaje. Por lo tanto, es importante. Además, la modelación permite abordar de forma no tradicional un concepto en el aula, estableciendo raíces cognitivas que fortalecen el pensamiento crítico y reflexivo de los estudiantes, así como su motivación hacia la asignatura. Por lo tanto, se proponen los siguientes principios para implementar la modelación como proceso en el aula de matemáticas.

Principios:

- La modelización matemática no puede abarcar todas las situaciones y fenómenos del mundo real en el aula de clase debido a que algunos de ellos requieren herramientas de un nivel de pensamiento más especializado. Por lo tanto, el docente debe realizar un proceso de descontextualización y recontextualización convirtiéndolos en situaciones que propicien el aprendizaje del estudiante.

- El estudiante debe ser capaz de identificar, a partir de un modelo, tanto la situación modelada como la matemática involucrada, considerando que ambas partes son separadas e interrelacionadas.

- La modelación de un problema o fenómeno del mundo real debe ser utilizada para construir un nuevo objeto matemático dotado de significado y con la intención de motivar al estudiante. Este proceso desarrolla habilidades para el trabajo individual e independiente del estudiante, ya que se requiere poner en juego sus conocimientos matemáticos, del contexto y de la situación, así como sus habilidades para describir, establecer y representar las relaciones existentes.

- En los procesos de modelación, se propone un ciclo simplificado que consta de cuatro fases: comprensión de la tarea, establecimiento del modelo, uso de las matemáticas y explicación del resultado. Este ciclo se vuelve algo dinámico, no teniendo la obligatoriedad de seguirlo en un orden en específico. De esta manera, el estudiante puede enfocarse en las fases que considere más relevantes o adecuadas para su proceso de modelación. Además, el docente debe brindar apoyo en cada una de estas fases, fomentando la autonomía y el pensamiento crítico del estudiante.

2.2. Marco Conceptual – Disciplinar

El objetivo de este trabajo es capacitar a los estudiantes en la comprensión del mundo y en el entendimiento de los elementos de los modelos matemáticos. Israelí (1996) responde que en la historia se han distinguido cuatro estados en la búsqueda de la verdad. La primera fue en la antigua Grecia, durante la era pitagórica, cuando se consideraba que los números eran la forma ideal de caracterizar el universo y se utilizaban sus relaciones. La segunda etapa fue la revolución científica de Galileo. Creía que las leyes que gobiernan el universo estaban escritas en lenguaje matemático y que era responsabilidad del investigador descubrir estas leyes. Posteriormente, surgió la visión mecanicista del cosmos, en la cual todos los fenómenos provienen del movimiento humano y las matemáticas quirúrgicas de la naturaleza y su existencia. Finalmente, a partir de la siglasura de las estructuras matemáticas subyacentes en ellas, se hace referencia a modelos matemáticos desde el siglo XX.

A través de su componente experimental y la expresión de sus leyes en términos de modelos matemáticos, la modelización matemática surgió en la física, especialmente en la mecánica, y ha promovido el desarrollo de las matemáticas. Este método es visto como una tarea científica empleada para generar modelos inéditos de múltiples áreas científicas, como las ciencias naturales, sociales y económicas. Las bases de los modelos matemáticos de otras disciplinas es la física, donde se pueden dar a las variables nuevos significados. Durante la enseñanza de matemáticas, la enseñanza fragmentada y rigurosa se enfrenta como uno de los objetivos de la educación básica, según se establece en los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998). La variación involucra conceptos estructurados que permiten el análisis de situaciones, la organización y el modelado de problemas y situaciones cotidianos. El cálculo algebraico emerge como una generalización del trabajo aritmético con modelos numéricos en situaciones de variación de los valores de las mediciones de cantidades relacionadas funcionalmente, según los Estándares Curriculares de Matemáticas (2003). Uno de los elementos centrales de las matemáticas es el estudio de funciones, que actúa como puente entre la proporcionalidad directa y el cálculo diferencial.

El pensamiento variacional es esencial para comprender y resolver situaciones donde aparecen cambios y fenómenos relacionados con la cantidad. Su objetivo en el aula es identificar, describir, comprender, predecir, cuantificar y modelar cambios en magnitudes, todo lo cual contribuye al avance científico y tecnológico. Una herramienta matemática que nos ayuda a establecer relaciones entre cantidades, así como correspondencias y dependencias es la variación. Al enseñar pensamiento variable, el objetivo es fomentar la observación, la predicción, la formulación y la sugerencia de soluciones a problemas donde se presentan situaciones que involucran variación y cambio. Por lo tanto, enseñar el concepto de variación en el aula es esencial para desarrollar pensadores críticos y creativos que puedan abordar problemas del mundo real. (HOMBRES, 2004; Londoño Orrego & Muñoz Mesa, 2011)

El tema de la variación se aborda desde tres ángulos en los estándares fundamentales de matemáticas (MEN, 2004): patrones y regularidades, procesos algebraicos y análisis de funciones. Como concepto de interdependencia entre variables, su función abarca no sólo la representación de fenómenos o situaciones en contexto, sino también los procesos de experimentación, reflexión, construcción de significado, expresión de generalidades y construcción de relaciones entre el lenguaje algebraico y el modelo desarrollado para resolver problemas específicos. Para fortalecer el desarrollo de habilidades de pensamiento como la observación, la reflexión y la argumentación, entre otras, se busca ver la función como un proceso educativo que sirve de base para el desarrollo de estas habilidades. La función se identifica como un puente entre los cinco conceptos matemáticos (numérico, espacial, variable, aleatorio y Métrico), mostrando la integralidad de las matemáticas.

La modelización es crucial porque permite observar una situación problemática desde una perspectiva matemática. Mientras que el proceso algebraico pretende dar significado matemático a las observaciones, conjeturas, reflexiones y generalizaciones realizadas por los estudiantes, la representación gráfica proporciona una comprensión más integral desde diversos ángulos para que la situación pueda ser reflexionada y analizada. Las situaciones también tienen relaciones con diversos campos de conocimiento, como la biología, la agricultura, la física y la economía. Por lo tanto, estudiar las funciones desde una perspectiva dinámica que enfatiza el cambio y el movimiento permite el desarrollo de procesos de enseñanza y aprendizaje que resaltan la matemática ambiental y su interdisciplinariedad con otros campos del conocimiento.

La relevancia que cobra la enseñanza de las funciones polinómicas a nivel escolar hace requerir que el estudiante posea varios conceptos que se precisan a continuación:

Tabla 1. Conceptos de funciones polinómicas.

Concepto	Definición
Variable	"Símbolo que se emplea para representar cualquier elemento de un conjunto dado." (Leithold, 1992) Establece una relación funcional, variando su valor dependiendo de la situación específica.
Par ordenado	"Dos números reales cualesquiera forman un par (o pareja), y cuando el orden del par tiene importancia, se le llama "par ordenado", además, cada pareja ordenada (x, y) se denomina punto del plano" (Leithold, 1992)
Plano cartesiano	"Se escoge una recta horizontal en el plano geométrico y se le denomina eje x. Se elige una recta vertical y se le llama eje y. El punto de intersección del x y el eje y recibe el nombre de origen y se denota por la letra O" (Leithold, 1992).
Función	Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y,

	entonces se dice que y es una función de la variable independiente. (Hernández, 2014)
Ecuación Polinómica	Ecuación de la forma $a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n = 0$ donde n es un número natural y $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ son números reales (Avirama & Gustín, 2014)

Dependiendo del grado de la función, se encuentran disponibles diferentes tipos de técnicas para linealizar funciones polinómicas. Por ejemplo, la técnica conocida como "completar el cuadrado" se puede utilizar para linealizar funciones cuadráticas. Esto implica reescribir la función como la suma de un cuadrado perfecto y una constante, dando como resultado una función lineal. La técnica de sustitución, que consiste en reemplazar una variable por otra para simplificar la función y convertirla en una función lineal, puede ser utilizada en el caso de las funciones cúbicas.

Al experimentar diversas técnicas para linealizar funciones polinómicas, como la completación del cuadrado o la sustitución, los estudiantes pueden tener una mejor comprensión de los conceptos de las funciones no lineales y cómo se relacionan con las funciones lineales al usar la linealización en el aula.

Para ello se necesitan dos variables: la variable independiente x y la variable dependiente y. Estas variables se utilizan para realizar una transformación matemática de una función no lineal a una función lineal.

Por ejemplo, si se tiene la función no lineal $y = ax^2 + bx + c$, se puede realizar la siguiente transformación.

Primero, expresamos la ecuación cuadrática en la forma completa del cuadrado:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

Luego, para completar el cuadrado, se agrega y se resta el término que completa el trinomio cuadrado perfecto:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + c$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Ahora, si definimos $z = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, obtenemos la ecuación:

$$y = az + d$$

Donde a y d son constantes determinadas por los coeficientes de la ecuación original. Esta forma ajustada es lineal en las variables z y y, lo que facilita el análisis a través de métodos como mínimos cuadrados.

De esta forma, se ha obtenido una ecuación lineal que se puede ajustar a través del método de mínimos cuadrados.

La técnica más utilizada para linealizar cualquier dispersión de datos en funciones no lineales es el método de mínimos cuadrados. Este método consiste en ajustar una recta a los datos de la función no lineal de forma que se minimice la suma de las desviaciones al cuadrado de los datos respecto a la recta ajustada.

El proceso para la linealización mediante el método de mínimos cuadrados implica los siguientes pasos:

- Se grafican los datos de la función no lineal en un diagrama de dispersión.
- Se elige la transformación matemática adecuada para obtener una función lineal.
- Se aplica la transformación a los datos.
- Se ajusta una línea recta a los datos transformados utilizando el método de mínimos cuadrados.
- Se vuelve a transformar la ecuación lineal resultante en la ecuación original.

Un ejemplo del uso del método de cuadrados mínimos para linealizar una función no lineal es ajustar la curva de una función de caída exponencial. En este caso, el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación se puede utilizar para convertir la función exponencial en una función lineal:

$$ln(y) = ln(a) - bx$$

De esta forma se obtiene una ecuación lineal, que se puede ajustar mediante el método de la raíz cuadrada para obtener los valores de a y b que mejor se ajusten a los datos de la función no lineal. Después de eso, para obtener la solución final, la ecuación lineal se transforma nuevamente en la ecuación exponencial original.

Una técnica para aproximar una función no lineal por una línea recta en un punto específico de la función es la linealización por derivada local. El objetivo es obtener la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto de interés usando la derivada de la función, y luego usar esa pendiente para determinar la ecuación de la recta.

El siguiente es el procedimiento para linealizar una función usando la derivada local:

- Decidir sobre un punto de interés dentro de la curva de la función que necesita ser linealizado. Este punto se utilizará como punto tangente para la línea recta.
- Determina la derivada de la función en ese punto. La desviación indica la pendiente de la curvatura en el punto elegido.
- Para determinar la pendiente de la línea recta tangente a la curva en ese punto, utilice la pendiente de la curva en el punto seleccionado.
- Para determinar la línea recta que se empleará como aproximación lineal de la función en el punto seleccionado, utilice la ecuación de la recta con la pendiente y el punto de interés.

Esta técnica se puede utilizar para aproximar cualquier función en un punto específico. Por ejemplo, si se tiene una función cuadrática $f(x) = x^2$, se puede utilizar la linealización por derivada local en el punto $x = 2$ para aproximar la función por una línea recta en ese punto. La derivada de la función cuadrática en $x = 2$ es $f'(2) = 4$, lo que indica que la pendiente de la curva en ese punto es 4. Por lo tanto, la ecuación de la línea recta tangente a la curva en $x = 2$ es $y = 4(x - 2) + 4$, que se puede utilizar como aproximación lineal de la función en el punto x = 2.

Caída Libre:

Un objeto que cae bajo la influencia exclusiva de la gravedad, sin considerar otros factores como la resistencia del aire, se conoce como caída libre. La aceleración causada por la gravedad en la superficie de la Tierra es aproximadamente igual a 9,81 m/s^2 hacia abajo y comúnmente se representa como g.

La velocidad inicial (v_0), la distancia recorrida (d), el tiempo (t), la aceleración debida a la gravedad (g) y la fórmula básica para la caída libre es la siguiente:

$$d = v_o t + \frac{1}{2} g t^2$$

Esta ecuación describe cómo un objeto en caída libre cambia su posición con el tiempo. Si el objeto se deja caer desde el reposo (v0 =0), la ecuación se simplifica a:

$$d = \frac{1}{2}\, g t^2$$

Movimiento Parabólico:

El movimiento parabólico es un tipo de movimiento en el que un objeto se lanza en un ángulo relativo a la horizontal con una determinada velocidad inicial. Este tipo de movimiento combina un componente de caída libre vertical y un componente de movimiento rectilíneo uniforme horizontal.

Las fórmulas básicas para describir el movimiento parabólico en dos dimensiones son:

Posición en el eje horizontal (x):

$$x = v_o\, cos(\theta) \cdot t$$

Donde v_0 es la velocidad inicial, θ es el ángulo de lanzamiento y t es el tiempo.

Posición en el eje vertical (y):

$$y = v_0 \, sin(\theta) \cdot t - \frac{1}{2} \, gt^2$$

Donde v_0 es la velocidad inicial, θ es el ángulo de lanzamiento, t es el tiempo y g es la aceleración debido a la gravedad.

Estas ecuaciones explican cómo un objeto que se mueve con un movimiento parabólico altera su posición en el espacio a medida que pasa el tiempo. La forma de la trayectoria, una curva parabólica con dos dimensiones está determinada por el ángulo de lanzamiento.

En matemáticas y física, es fundamental comprender la caída libre y el movimiento parabólico, dado que estos conceptos se aprovechan en diversas situaciones, tales como el lanzamiento de proyectiles, la trayectoria de objetos en caída libre y la mecánica de vuelo de objetos. Estas fórmulas posibilitan el cálculo y el anticipo del movimiento de objetos bajo la influencia de la gravedad en la Tierra.

La herramienta de análisis de vídeo y modelado de Tracker se fundamenta sobre el campo de Física de código abierto de Java (OSP). Es una aplicación de software gratuita diseñada específicamente para su uso en educación física y campos relacionados como la física y las matemáticas. El aporte de esta herramienta significativa a la transversalización entre las matemáticas y la física en el contexto educativo es su plataforma versátil para analizar y modelar el movimiento de objetos en videos.

Tracker se destaca por varias características clave:

Análisis de vídeo: Tracker permite a los estudiantes descargar películas de entornos del mundo real, como objetos que caen, proyecciones en movimiento o cualquier otra situación relacionada con la película. La capacidad de los estudiantes para marcar y rasterizar objetos en la película les permite medir posiciones y tiempos con precisión.

Computación modelada: los estudiantes pueden crear modelos computacionales basados en datos de video usando Tracker para construir estos modelos. Pueden modificar curvas y ecuaciones para describir el movimiento observado, lo que les permite comprender y predecir cómo se comportarán los objetos en movimiento.

Integración de datos: Tracker puede exportar datos numéricos a libros de cálculo, facilitando el análisis matemático de los resultados. Los estudiantes pueden realizar cálculos, crear gráficos y sacar conclusiones basadas en datos reales.

Disciplinaria Transversalización: La herramienta Tracker fomenta la transversalización efectiva entre la matemática y la física. Los estudiantes pueden usar conceptos matemáticos como funciones, derivadas e integrales para representar y comprender el movimiento. A su vez, se pueden establecer una conexión entre estos conceptos matemáticos y elementos físicos como la dinámica y la cinemática.

Aprendizaje activo: Tracker fomenta el aprendizaje activo al permitir que los estudiantes realicen experimentos virtuales y resuelvan problemas prácticos relacionados con el movimiento y la condición física. Esto fomenta una comprensión conceptual profunda y la resolución de problemas en el contexto del mundo real.

2.3. Marco Legal

En la siguiente tabla se presenta un resumen de las diferentes normas a nivel local, nacional e internacional en que se ve cobijado la propuesta de enseñanza basada en la modelación matemática.

Tabla 2. Normograma

Ámbito	Norma	Texto de la Norma	Contexto
Internacional	Aportes para la enseñanza de la Matemática. UNESCO	La alfabetización matemática es un proceso permanente a lo largo de la existencia, que incluye aquellos conocimientos, destrezas, capacidades, habilidades, principios, valores y actitudes necesarios de incluir en el currículo escolar del área para que los estudiantes latinoamericanos aprendan a desarrollar su potencial, hagan frente a situaciones, tomen decisiones utilizando la información disponible, resuelvan problemas, defiendan y argumenten sus puntos de vista, entre tantos otros aspectos centrales que los habilitan para la inserción en la sociedad como ciudadanos plenos, críticos y responsables.	Resolución de problemas de contexto o de la matemática misma a partir de la construcción de modelos matemáticos, que permitan adelantarse a los resultados que luego de ser analizados permitan su análisis y posterior validación.
Nacional	Constitución Política de Colombia 1991. Cap. II, Artículos: 67,70.	Artículo 67: La educación busca acceso al conocimiento, la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura. Artículo 70: El estado es generador de la investigación, la ciencia y la cultura.	Habla de los aspectos generales de la educación en Colombia, área de matemáticas como obligatoria y fundamental.
	Lineamientos Curriculares, 1998	La modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las	Se considera que todos los alumnos necesitan experimentar procesos

		matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa.	de matematización que conduzcan al descubrimiento, creación y utilización de modelos en todos los niveles.
	Estándares básicos en competencias en matemáticas MEN 2006	Modelar situaciones de cambio de acuerdo con funciones polinómicas.	Busca formar a los estudiantes para que sean capaces de modelar situaciones cotidianas a partir de la aplicación de una serie de pasos.
	Derechos básicos de aprendizaje V2 2016	Sugiere y explica expresiones algebraicas empleando los números reales, utilizando propiedades de la igualdad y de orden para establecer el conjunto solución de relaciones existentes entre las expresiones algebraicas.	Herramienta necesaria para la postulación de modelos, con la utilización de expresiones algebraicas.
Local	Plan de Desarrollo Medellín 2020-2023.	Se asume, pues, la educación como un derecho fundamental consagrado en nuestra Constitución Política, pero también como el corazón de la transformación social, cultural, económica, ciudadana y ambiental.	La concepción que se tiene en relación con el proceso educativo, no solo como el proceso de intercambio de información entre los actores, sino como la estimulación para el desarrollo de capacidades.

3. Diseño metodológico.

3.1. Enfoque con el que se aborda el problema

En el ámbito de la educación matemática, la monografía trata de la modelación como método de enseñanza en el aula. El enfoque de investigación utilizado es cualitativo, lo que implica hacer una revisión exhaustiva del contexto natural en el que ocurren las interacciones y comportamientos relacionados con el aprendizaje. El objetivo es cerrar la brecha entre lo abstracto y la vida cotidiana uniendo conceptos matemáticos con las experiencias del mundo real de los estudiantes. La perspectiva cualitativa se considera apropiada y pertinente para este estudio ya que permite una comprensión más profunda de las experiencias y percepciones de los estudiantes en relación con el tema de investigación.

3.2. Antecedentes

Se dice que uno de los períodos más oscuros de las matemáticas ocurre entre los siglos XVI y XVII, durante el cual las relaciones entre las matemáticas y el medio ambiente están en armonía, en el sentido de que las matemáticas traducen la naturaleza y la naturaleza se somete a las leyes matemáticas. Dada la importancia de estos acontecimientos –algunos procesos que fueron importantes para el desarrollo de los objetos matemáticos ahora aparecen en la matemática escolar– se requiere un examen exhaustivo de estos procesos, teniendo en cuenta los factores que impulsaron a estos científicos a matematizar la ciencia (Mesa y Ochoa, 2011).

Kline (1992) afirma que los matemáticos y científicos de la época recibieron alguna inspiración la visión de la edad media de que todos los fenómenos de la naturaleza están no sólo interconectados, sino todas las acciones de la naturaleza siguen el plan establecido por una única causa primera; lo que compara con lo expuesto por galileo queriendo significar el universo, aprendemos primero su lenguaje y comprendemos los símbolos, en los que está escrito. Es lenguaje matemático, y los símbolos son triángulos, circunferencias y otras figuras geométricas, sin lo que sería imposible comprender ni una palabra de él. Este cambio de paradigma para realizar ciencia, género según Koyre (1997) una revolución galileo-cartesiana.

La matematización, tanto en Galileo como en Descartes, obedece a un proceso de solo investigación científica, ésta resultó como herramienta indispensable para la producción de saber, por esto es posible realizar un vínculo entre los procesos de construcción matemática con los procesos científicos, como de observar, experimentar, conjeturar, sistematizar, validar, entre otros. Se podría decir que la recurrencia de las matemáticas establecía una necesidad por obtener un modelo como algo que diera cuenta de los fenómenos que intentaban explicar. Descartes explicita su idea y convicción de que la esencia de la ciencia eran las matemáticas, porque con ella podían explicarse todos los fenómenos de la naturaleza, ofreciendo demostraciones de ello (Mesa, 2011).

Ahora bien, se habla de que la Modelación Matemática, posibilita espacios propios de actividad científica dentro del aula escolar, como lo afirma Villa-Ochoa et al. (2009) "El proceso de modelación matemática es considerado como una actividad científica en matemáticas que se involucra en la obtención de modelos propios de las demás ciencias", por esto su mayor riqueza a nivel didáctico, se da en la medida en que propicia un contexto científico en los estudiantes. En ese sentido, la actividad científica de algunos protagonistas de los siglos XVI y XVII y la actividad modeladora tiene mucho sentido, cuando se involucran algunos conceptos que fueron productos de la actividad histórica de algunos científicos. Villa-Ochoa et al (2009) cita a Crouch y Haines, diciendo que "Una buena modelación matemática involucra el establecimiento de relaciones entre mundo real y el mundo matemático y la habilidad para moverse entre cada uno de ellos".

Badiou (1978) concibe igualmente al modelo matemático como un modelo abstracto que "Se trata, en rigor, de un haz de hipótesis al que suponemos relativamente completo en el campo estudiado y cuya coherencia y cuyo posterior desarrollo deductivo quedan garantizados por una codificación generalmente matemática", tales construcciones deductivas para Badiou han nacido de una convergencia histórica y define al Modelo en general como "un cuerpo de enunciados gracias al cual esa convergencia histórica se ha visto integrada en un discurso único" al cual la cosmología se ha vinculado en cuanto al idealismo del modelo, como vía cercana para su explicación.

Ahora, no cualquier modelo en sí mismo es bueno, es decir, hay ciertos criterios para definir al buen modelo, así como Villa-Ochoa et al (2009), acude a una noción de una buena modelación, pues Badiou (1978) citando a Levi Strauss definen al mejor Modelo como aquel objeto artificial, que sin dejar de ser el más sencillo, responda a la doble condición de no utilizar otros hechos que los considerados y de informar acerca de todos. No es una tarea fácil la construcción de un buen modelo, en la medida en que esta acepción de modelo está ligada a la veracidad del modelo, de los hechos de los que debe dar cuenta y de la forma en que lo hará.

Toda sociedad necesita que el conocimiento que se adquiere en la escuela sea funcional, es decir, que se integre y se resignifique permanentemente en la vida (fuera de la escuela) para transformarla (Suárez y Cordero, 2005). Para Bassanezi (1994) el uso de la modelación en la enseñanza conduce al aprendizaje de contenidos matemáticos que están conectados a otras formas de conocimiento. El trabajo con la modelación matemática no intenta simplemente ampliar el conocimiento sino desarrollar una forma particular de pensar y actuar: produciendo conocimiento, aunando abstracciones y formalizaciones, interconectadas a fenómenos y procesos empíricos considerados como situaciones problemáticas.

3.3. Metodología

El presente trabajo es una monografía recopilatoria basada en la metodología de enseñanza de funciones polinómicas a través de modelamiento matemático en el aula, de acuerdo con la propuesta del profesor Jhony Alexander Villa. El propósito fundamental consiste en cerrar la brecha de conocimiento entre los conceptos teóricos y los contextos de los estudiantes mediante la identificación, análisis, evaluación e interpretación del conocimiento asociado con estas estrategias y métodos de enseñanza.

El trabajo se fundamenta sobre la revisión bibliográfica exhaustiva que incluye fuentes secundarias como resúmenes y síntesis, además de fuentes primarias como libros, artículos científicos, documentos oficiales y entrevistas. Los datos recopilados se eligieron y organizaron de manera lógica y coherente con el objetivo de cerrar la brecha entre los conceptos y el contexto de los estudiantes. Para analizar esta información se empleó la hermenéutica, una técnica interpretativa que permite comprender plenamente el sentido de los textos en sus diversos contextos.

Se buscó contrastar los resultados obtenidos y orientar la enseñanza mediante la modelación en el pensamiento variacional, favoreciendo la adquisición de esquemas conceptuales y la resolución de problemas en el contexto de las funciones polinómicas. Para la búsqueda de información, se utilizó fuentes principales como Google Scholar, especializado en contenido científico-académico, y el repositorio de la Universidad Nacional, que contiene trabajos de grado relacionados con la enseñanza de las ciencias exactas y naturales.

El texto de la monografía siguió la estructura establecida por la universidad, con revisiones constantes por parte del autor y el director del trabajo de grado. Encuentran todas las fuentes utilizadas en el desarrollo del trabajo, en una bibliografía completa.

Numerosas investigaciones han sido objeto de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en general, lo que hace evidente la necesidad de mejorar las estrategias de enseñanza. Esta monografía utiliza la modelación como herramienta para enfocarse en la comprensión significativa del concepto de función polinómica y su aplicación en la enseñanza. Al sistematizar los datos recopilados, se realizó la interpretación de los recursos encontrados, mostrando las relaciones existentes entre los hechos, teorías, programas y bibliografía analizada. Se espera que este trabajo contribuya a la interpretación de las estrategias cognitivas en la enseñanza basada en problemas y en los procesos de generalización en las funciones polinómicas mediante la modelación, con el objetivo de tener un impacto positivo en la enseñanza.

4. Estado del arte

A partir de la revisión bibliográfica, se presentan los siguientes trabajos destacados, que abordan el tema desde diferentes perspectivas y contextos.

Estudiando las funciones polinómicas con el software educativo Geogebra. Este proyecto de investigación tiene como objetivo estimular el desarrollo del pensamiento variable a través del análisis de funciones polinómicas utilizando el programa educativo Geogebra. El enfoque Piagetiano, la teoría de Duval, el aprendizaje significativo de Ausubel, y los estándares curriculares de matemáticas a nivel nacional e internacional son los fundamentos del trabajo. El trabajo evalúa los resultados obtenidos con los estudiantes y diseña talleres de socialización, autoaprendizaje y guiados, enfocados en la modelación de fenómenos de variación (Narvaez, 2015).

Propuesta de secuencia didáctica para fortalecer el pensamiento variacional en el estudio de funciones polinómicas. Este trabajo surge de la experiencia docente como respuesta a la necesidad de disminuir las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, como lo demuestran los resultados de pruebas internas y externas en el área de pensamiento variable a través del tema de funciones polinómicas. El trabajo examina la documentación disponible para la búsqueda y análisis de investigaciones que sustentan las secuencias didácticas mediadas por Excel y GeoGebra, y diseña una secuencia didáctica que toma en cuenta recomendaciones y estrategias encontradas en otras investigaciones (Quiroga & Chacón, 2020).

Propuesta didáctica para abordar el concepto de función a partir de la modelación matemática. Este trabajo propone un enfoque didáctico al concepto de función comenzando con el modelado matemático para apoyar el aprendizaje significativo y el crecimiento del pensamiento variable. El trabajo se basa en la teoría de la modelización matemática, el aprendizaje significativo de Ausubel y el pensamiento variable de Leinhardt. El trabajo involucra una serie de ejercicios utilizando situaciones del mundo real y el uso de herramientas tecnológicas, como GeoGebra y Excel, para representar, analizar y resolver problemas que requieren el uso de funciones (Herrera & Muñoz, 2014).

Modelación de situaciones cotidianas con funciones lineales. Gracias al programa educativo Khan Academy, este artículo proporciona variadas actividades para modelar situaciones cotidianas con funciones lineales. El artículo explica cómo se pueden representar de manera diversa las situaciones cotidianas que implican la relación entre magnitudes, empleando algunos modelos matemáticos, entre ellos las funciones lineales. El artículo también ilustra cómo el uso de Khan Academy facilita el aprendizaje significativo y el desarrollo del pensamiento variacional, permitiendo explorar, manipular y visualizar las funciones lineales.

Linealización de funciones polinómicas mediante el uso de GeoGebra. Este trabajo ofrece una propuesta didáctica para la enseñanza de la linealización de funciones polinómicas mediante el uso de GeoGebra, un programa educativo que permite manipular, explorar y visualizar objetos matemáticos. El trabajo se basa en la teoría de la modelación matemática, el aprendizaje significativo y el pensamiento variable. El trabajo involucra una serie de actividades que involucran situaciones del mundo real y el uso de herramientas tecnológicas, como GeoGebra y Excel, para describir, analizar y resolver problemas que requieren el uso de funciones polinómicas y su linealización. El trabajo se realizó con estudiantes del grado duodécimo de una escuela pública de Bogotá, Colombia, y se evaluaron los resultados de los estudiantes (Gómez, 2018).

Aprendizaje de la linealización de funciones polinómicas mediante el uso de Tracker. Este trabajo presenta una experiencia presencial en la enseñanza de la linealización de funciones polinómicas mediante el uso de Tracker, un software educativo que permite el análisis de películas que representan fenómenos físicos. El trabajo se basa en la teoría de la modelación matemática, el aprendizaje significativo y el pensamiento variable. El trabajo involucra una serie de actividades que involucran situaciones del mundo real y el uso de herramientas tecnológicas, como Tracker y Excel, para representar, analizar y resolver problemas que requieren el uso de funciones polinómicas y su linealización. El trabajo se realizó con estudiantes de último grado de un colegio privado de Medellín, Colombia, y se evaluaron los resultados de los estudiantes (Giraldo & Montoya, 2019).

Linealización de funciones polinómicas mediante el uso de calculadoras gráficas. Este trabajo ofrece una propuesta didáctica para la enseñanza de la linealización de funciones polinómicas mediante el uso de calculadoras gráficas, recurso tecnológico que permite la visualización, cálculo y manipulación de funciones matemáticas. El trabajo se basa en la teoría de la modelación matemática, el aprendizaje significativo y el pensamiento variable. El trabajo involucra una serie de actividades que involucran situaciones del mundo real y el uso de herramientas tecnológicas, como hojas de cálculo y calculadoras gráficas, para representar, analizar y resolver problemas que requieren el uso de funciones polinómicas y su linealización. Se evaluó los resultados obtenidos con los estudiantes, y el trabajo se realizó con estudiantes de grado décimo de un colegio público de Cali, Colombia (Lopez & Sanchez, 2020).

5. Actividades

5.1. Función lineal

Exploración de la Facturación del Acueducto y Alcantarillado

Objetivo de la Actividad:

Fomentar el análisis, la interpretación gráfica y la resolución de problemas en los estudiantes ayudándoles a comprender cómo opera el proceso de facturación del acueducto y alcantarillado utilizando datos reales.

Materiales Necesarios:

Facturas de acueducto y alcantarillado proporcionadas por los estudiantes.
Papel cuadriculado o cuadrantes dibujados en una pizarra.
Calculadoras si es necesario.
Procedimiento:

1. Introducción (10 minutos):

Presentación de la Actividad: Primero se explica el objetivo de la actividad, cómo se estructura una factura de acueducto y alcantarillado y cómo se relacionan los costos con el consumo de agua. La relevancia de entender las facturas de servicios públicos en la vida diaria y su impacto en la toma de decisiones se ejemplifica.

Análisis de la factura: Se muestra una factura genuina o simulada, detallando cada sección (carga fija, costo por metro cuadrado, subtotal, etc.). Mencionar que el costo por metro cúbico surge debido a la cantidad de agua consumida, mientras que el cargo fijo es una tarifa básica independiente del consumo.

Relación entre consumo y costo: muestre cómo el aumento del consumo afecta el costo final de la factura proporcionando fórmulas simples para calcular estos costos. Ofrecer ejemplos prácticos que demuestran cómo incluso pequeños cambios en el consumo pueden tener una influencia significativa en los costes generales.

Aplicaciones prácticas: Presentar ejemplos del mundo real donde comprender la facturación de servicios públicos puede ser útil, como la elaboración de presupuestos familiares y la programación del consumo de agua, entre otras cosas. Ilustre cómo comprender estos proyectos de ley puede ayudarle a tomar decisiones financieras informadas.

Ejemplos y preguntas: utilice una variedad de ejemplos y preguntas interactivas para involucrar a los estudiantes y asegurarse de que comprendan los conceptos que se presentan. Fomente la participación activa haciendo preguntas que vinculen directamente el consumo con el precio en la factura.

2. Observación y Registro (15 minutos):

Guía para la Observación: Distribuir una tabla preimpresa o proyecta una tabla en la pizarra con las columnas "Consumo en metros cúbicos" y "Costo". Y explicar cómo llenar la tabla, cada estudiante debe revisar su factura y registrar la cantidad de metros cúbicos consumidos y el costo correspondiente en la tabla proporcionada. Destacar la importancia de la exactitud en los datos registrados.

Tiempo para Observar y Registrar: Proporcionar a los estudiantes tiempo suficiente para analizar sus facturas y registrar los datos correspondientes en la tabla, asegurando que todos completen esta parte de la actividad.

3. Reflexión y Respuestas (15 minutos):

Haga preguntas a los estudiantes para que reflexionen sobre su factura:
a) ¿Qué significa el cargo fijo? ¿Cuál es el valor del cargo fijo?
b) ¿De qué depende el pago por concepto de acueducto?
c) ¿Qué sucede si aumenta el número de metros cúbicos consumidos?
d) Supongamos que el presupuesto familiar para pagar el servicio es de 20.000 pesos, ¿cuál sería la cantidad máxima de metros cúbicos que se puede consumir?
e) Si no hubo consumo de agua en un periodo determinado, ¿cuál sería el valor de la factura de acueducto?
f) Si debido a una falla (fuga) se registra un consumo de 175 metros cúbicos en tu hogar, ¿cuánto tendrías que pagar?
Fomente la discusión y el intercambio de ideas.

4. Graficación de Datos (20 minutos):

Pida a los estudiantes que utilicen los datos recopilados en la tabla para graficar los puntos en un cuadrante.
En el eje x representarán el "Consumo en metros cúbicos" y en el eje y el "Costo en pesos".
Cada estudiante debe tener su propio gráfico.

5. Análisis de Gráficos y Preguntas (20 minutos):

Con los gráficos listos, guíe a los estudiantes en el análisis:
a) ¿Cuánto tuvo que pagar la persona que consumió la mayor cantidad de agua?
b) ¿Cuánto tuvo que pagar el hogar que no gastó agua?
c) ¿Cuál es el consumo promedio de agua en metros cúbicos?
d) ¿Cuál es el costo promedio del consumo de agua?
e) ¿Cuál sería una forma de calcular el costo para cualquier cantidad de metros cúbicos consumidos?
f) ¿Cuánto se incrementa el costo de la factura por cada metro cúbico adicional consumido?
Fomente la discusión y la resolución de problemas.

6. Conclusiones y Aplicación (10 minutos):

La actividad finaliza destacando la importancia de entender cómo se calculan los costos de servicios como los del acueducto.
Asume que los alumnos reflexionan en su vida cotidiana cómo podrían aplicar lo aprendido para tomar decisiones informadas sobre el consumo de agua.
Esta estrategia de instrucción permite a los estudiantes investigar datos reales relacionados con el consumo de agua y comprender cómo se relaciona con el costo de la factura del acueducto. Además, les ayuda a desarrollar habilidades de análisis de datos y resolución de problemas cuando reflexionan sobre cómo utilizar eficientemente los recursos hidráulicos en sus hogares.

5.2. Actividad cuadrática – Caída libre

Modelado de caída Libre con Tracker

Objetivo de la Actividad:
Enseñar y aplicar conceptos de movimiento en caída libre y modelado matemático utilizando la herramienta Tracker para el análisis de video.

Materiales Necesarios:

Una computadora con el software Tracker instalado.
Un video de un objeto en caída libre, como un objeto que cae desde una altura conocida.
Acceso a una impresora para imprimir gráficos o acceso a una pizarra para dibujar gráficos a mano.

Procedimiento:

1. Introducción (10 minutos):

Comience la lección presentando la idea de caída libre y la aceleración causada por la gravedad. Un elemento que se moviéndose únicamente debido a la gravitación, sin resistencia al aire u otras fuerzas. Se puede describir utilizando la aceleración causada por la gravedad, que es aproximadamente de 9,8 m/s^2 en la superficie de la Tierra.

Analiza las ecuaciones fundamentales, como las ecuaciones de posición y velocidad, que caracterizan la caída libre.

Ecuación de posición: $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2$

- y: posición final.
- y_0: posición inicial.
- v_{0y}: velocidad inicial en dirección vertical.
- t: tiempo

- a: acelaración en dirección vertical (en este caso, la aceleración de la gravedad).

Ecuación de velocidad: $v_y = v_{0y} + at$

- v_y: velocidad final en dirección vertical.

En la caída libre, cuando un objeto se deja caer desde el reposo (con una velocidad inicial de cero), se simplifica la ecuación de posición y velocidad a:

$$y = \frac{1}{2}at^2$$
$$v_y = at$$

Estas simplificaciones resultan de suponer que el objeto se mueve desde el reposo, lo que elimina términos relacionados con la velocidad inicial. Como resultado, la descripción del movimiento se centra principalmente en la aceleración constante debido a la gravedad del objeto y su influencia en la posición y velocidad del objeto en función del tiempo.

Muestre ejemplos visuales de objetos cayendo en el aula para ilustrar el concepto.

2. Grabación del Video (15 minutos):

Explique a los estudiantes que grabarán un video de un objeto que cae desde una altura conocida.
Los grupos deberán grabar el video utilizando dispositivos móviles durante la clase.

3. Demostración del Uso de Tracker (15 minutos):

Demuestre a los estudiantes cómo cargar un video en Tracker y marcar el objeto que cae.
Guíe a los estudiantes a través del proceso de establecer la escala de tiempo y medir las posiciones en cada fotograma del video.
Muestre cómo Tracker puede generar gráficos de posición vs. tiempo y velocidad vs. tiempo automáticamente.

Aquí se presenta una guía para la manipulación del tracker, que igual se busca que los mismos estudiantes interactúen con el programa

Cargar el video:

- Abre el software Tracker en la computadora.
- Ve a "Archivo" y selecciona "Importar Video".
- Busca y selecciona el video de un objeto en caída libre.

Marcar el objeto que cae:

- Reproduce el video dentro del software.
- Usa la herramienta de marcación para seleccionar el objeto que cae. Esto implica trazar su contorno o ubicar un punto de referencia fácilmente identificable en cada fotograma del video.

Establecer la escala de tiempo:

- Define el inicio y el final del movimiento del objeto.
- Indica el tiempo transcurrido entre estos dos puntos.
- En Tracker, configura la escala de tiempo proporcionando estos valores.

Medir las posiciones en cada fotograma:

- Marca la posición del objeto en cada fotograma.
- Puedes utilizar la herramienta de medición para obtener la posición exacta del objeto en cada instante de tiempo del video.

Generar gráficos de posición vs. tiempo y velocidad vs. tiempo:

- Después de medir las posiciones, Tracker automáticamente genera gráficos de posición vs. tiempo y velocidad vs. tiempo.
- Para generar estos gráficos, selecciona las variables que deseas graficar (posición o velocidad) y el tiempo correspondiente. El software calcula los valores y muestra los gráficos.

3. Análisis del Video (20 minutos):

Divida a los estudiantes en grupos y proporcione a cada grupo un video diferente de un objeto en caída libre.
Pídales que utilicen Tracker para analizar el video, midiendo la posición y la velocidad en cada fotograma.
Cada grupo debe generar gráficos de posición vs. tiempo y velocidad vs. tiempo utilizando Tracker.

4. Modelado Matemático (20 minutos):

Pida a los grupos que ajusten una función matemática a los datos que recopilaron utilizando Tracker. Esta función representará el movimiento en caída libre.
Fomente la discusión sobre cómo se relaciona la función ajustada con las ecuaciones de movimiento en caída libre.
Los grupos deben presentar sus modelos matemáticos y discutir los resultados con la clase.

5. Compartir Resultados (15 minutos):

Pida a cada grupo que presente sus hallazgos, incluyendo los gráficos y las ecuaciones matemáticas.
Fomente la discusión sobre las similitudes y diferencias entre los diferentes objetos en caída libre.
Destaque la importancia de la modelización matemática en la física y cómo Tracker facilitó este proceso.

6. Reflexión y Conclusiones (10 minutos):

Termine la lección con una discusión sobre la importancia de la caída libre en física y cómo los modelos matemáticos pueden ayudarnos a comprender y predecir el movimiento.
Asista a los alumnos en su introspección sobre los conocimientos adquiridos y cómo Tracker les brindó ayuda en este proceso.
Esta actividad combina observación del mundo real, análisis de video, modelado matemático y discusión grupal para facilitar la comprensión de los conceptos de libre circulación. En el contexto actual, los estudiantes pueden aplicar sus conocimientos

matemáticos y físicos con Tracker, que se transforma en una herramienta potente que les ayuda en desarrollar habilidades de resolución de problemas y pensamiento crítico.

5.3. Actividad cuadrática – Movimiento Parabólico

Análisis de Movimiento Parabólico con Tracker

Objetivo de la Actividad:
Esta estrategia tiene como objetivo ayudar a los estudiantes a practicar la linealización de datos y las habilidades de modelado matemático y, al mismo tiempo, ayudarlos a comprender y analizar el movimiento paramétrico utilizando la herramienta Tracker.

Materiales Necesarios:

Computadoras o dispositivos con el software Tracker instalado.
Pelota u objeto que pueda lanzarse en el aire.
Un espacio al aire libre o un aula con suficiente espacio vertical para lanzar el objeto.

Procedimiento:

1. Introducción (15 minutos):

Comience la actividad explicando que los estudiantes investigarán el movimiento parabólico, que es un tipo de movimiento en el que un objeto se lanza al aire y sigue una trayectoria curva.
Describe las ideas fundamentales del movimiento parabólico, como la altura inicial, el ángulo de lanzamiento y la aceleración debida a la gravedad.

Esta trayectoria sigue un objeto lanzado al aire y muestra cómo la gravedad afecta su movimiento. Las ecuaciones de posición y velocidad son las principales que caracterizan el movimiento parabólico.

La ecuación de posición vertical para un objeto en movimiento parabólico sin resistencia del aire es:

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

- y: es la posición vertical en un tiempo t
- y_0: posición inicial.
- v_{0y}: velocidad inicial en dirección vertical.
- t: tiempo
- a: aceleración en dirección vertical (en este caso, la aceleración de la gravedad).

Ecuación de velocidad: $v_y = v_{0y} - gt$

- v_y: velocidad final en dirección vertical.

El movimiento horizontal se caracteriza por una velocidad constante y falta de aceleración en esa dirección debido a la ausencia de fuerzas horizontales involucradas (sin tener en cuenta la resistencia del aire). Como resultado, las ecuaciones para el movimiento horizontal son más simples que las del movimiento vertical.

La ecuación de posición horizontal para un objeto en movimiento parabólico es simplemente:

$$x = x_0 + v_{0x}t$$

- x: es la posición horizontal en un tiempo t
- x_0: posición inicial.
- v_{0x}: velocidad inicial en dirección horizontal.
- t: tiempo

2. Experimento de Lanzamiento (20 minutos):

En un espacio al aire libre o en el aula, realice un experimento de lanzamiento. Dar un paseo a un estudiante o grupo que lanza la bicicleta al aire mientras otro estudiante graba el movimiento con una cámara.
Asegúrese de que los estudiantes registren la altura inicial, el ángulo de lanzamiento y la aceleración debido a la gravedad.

3. Uso de Tracker (20 minutos):

En el aula, proporcione a los estudiantes acceso a las computadoras con Tracker.
Explique cómo cargar el video del experimento en Tracker y cómo marcar la posición del objeto en diferentes momentos.
Guíe a los estudiantes para que sigan las instrucciones y obtengan datos precisos del movimiento.

1. Carga del Video:
Abre el software Tracker y selecciona la opción para cargar el video del experimento de movimiento parabólico.
Asegúrate de que el video esté claro y muestra el objeto en movimiento desde un ángulo adecuado.

2. Marcación del Objeto:
En el video, marca el objeto que se lanza. Puedes utilizar herramientas como puntos o líneas para identificar su posición.
Ajusta las marcas a lo largo de la trayectoria del objeto en cada fotograma.

3. Establecimiento de la Escala del Tiempo:
Indica a Tracker la relación entre los fotogramas del video y el tiempo real. Esto implica establecer la escala temporal para obtener mediciones precisas.
Define la duración de tiempo entre los fotogramas. Puedes hacerlo utilizando un reloj de referencia y anotar los intervalos entre fotogramas clave.

4. Medición de Posiciones:
Con el objeto marcado, mide las posiciones en cada fotograma del video. Registra las coordenadas (x,y) para cada instante de tiempo.
Divide la posición en dos componentes: la posición vertical y y la posición horizontal x.

5. Descomposición del Movimiento:
Para comprender la relación entre las componentes vertical y horizontal, divide el movimiento total en dos.
Observa que la posición horizontal es lineal con respecto al tiempo, mientras que la posición vertical es cuadrática debido a la gravedad.

6. Obtención de las Gráficas:

Utilizando las mediciones de posición, genera gráficos por separado de la posición vertical

y vs. tiempo y posición horizontal x vs. tiempo.

Observa que la posición horizontal muestra un comportamiento lineal en función del tiempo, mientras que la posición vertical forma una parábola cuadrática.

7. Análisis de las Gráficas:

Discute con los estudiantes cómo el comportamiento lineal y cuadrático en las gráficas corresponde a la naturaleza del movimiento parabólico.

Relaciona estos hallazgos con las ecuaciones del movimiento y la descomposición vertical y horizontal del mismo.

4. Linealización de Datos (20 minutos):

Una vez que los estudiantes hayan registrado los datos del movimiento parabólico en Tracker, guíelos en el proceso de linealización.

En Tracker, los estudiantes pueden ajustar una línea recta a los datos que representan la posición vertical en función del tiempo.

Ayúdeles a comprender que, en el caso del movimiento parabólico ideal sin resistencia del aire, la relación entre la posición vertical y el tiempo debería ser una función cuadrática, que puede linealizarse al cuadrado de la variable independiente.

Al graficar la posición vertical contra el tiempo al cuadrado en un movimiento parabólico, se obtendría una línea recta. Esto es crucial porque la relación entre la posición vertical y y el tiempo al cuadrado t^2 es lineal en este caso.

La representación gráfica de y vs t^2 facilita la identificación de una línea recta, lo que sugiere una relación lineal entre estas variables en el caso del movimiento vertical bajo gravedad constante.

Cuando se analiza un movimiento parabólico, la ecuación de posición vertical se presenta típicamente como se mencionó:

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Es de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde $a = -\frac{1}{2}g$, $b = v_{0y}$ y $c = y_0$

Haciendo el completamiento de cuadrados y con el cambio de variable de:

$$x = \left(t - \frac{v_{0y}}{g}\right)^2$$

Se puede linealizar la relación. Esto facilita el ajuste de una línea recta a los puntos en el gráfico y vs x. Cuando se obtiene una línea recta:

$$y = mx + d$$

Donde:

- m es la pendiente de la línea, siendo $m = -\frac{1}{2}g$
- d es la ordenada al origen, que tiene el valor de

$$d = \frac{v_{0y}^2 - 2gy_0}{2g}$$

Este enfoque de linealización ayuda a los estudiantes a encontrar la ecuación que modela más fácilmente el movimiento vertical al permitirles comprender y predecir la trayectoria de un objeto que se mueve de manera parabólica mediante el análisis del gráfico lineal obtenido a partir de datos experimentales.

5. Análisis de Datos (20 minutos):

Una vez que se haya realizado la linealización, los estudiantes pueden analizar la ecuación lineal resultante.
Discutan cómo esta ecuación representa la relación entre la posición vertical y el tiempo.
Compararla con la ecuación de una parábola y destacar la relación cuadrática.

6. Modelado y Predicciones (15 minutos):

Utilice la ecuación obtenida para predecir la altura máxima alcanzada por el objeto y su tiempo de vuelo.
Compare las predicciones con los datos reales del experimento.

7. Reflexión (15 minutos):

Pida a los estudiantes que reflexionen sobre lo aprendido en la actividad y cómo el uso de Tracker les ayudó a comprender y modelar el movimiento parabólico.
Fomente la discusión sobre aplicaciones del movimiento parabólico en la física y otras disciplinas.

8. Tarea:

Asigne a los estudiantes un proyecto relacionado con el movimiento parabólico, como buscar ejemplos del mundo real donde este tipo de movimiento sea aplicable.
Utilizando Tracker como una poderosa herramienta para el análisis de datos y el modelado matemático, esta estrategia de enseñanza permite a los estudiantes investigar y comprender el movimiento paramétrico de una manera práctica y visible. Promueve el avance de capacidades de resolución de problemas y comprensión de conceptos físicos relevantes.

6. Conclusiones

En la enseñanza de la linealización de funciones polinómicas, se logró identificar & seleccionar investigaciones recientes y relevantes sobre el uso de la modelación matemática y el aprendizaje significativo. Esto permitió describir con precisión el estado actual del arte en este campo e identificar nuevas direcciones y herramientas que apoyen la integración de estos conceptos en el aula.

Se detectaron tendencias significativas que resaltan la eficacia de la linealización para mejorar la comprensión de conceptos matemáticos complejos. Además, se señalaron limitaciones metodológicas, mostrando la necesidad de estrategias complementarias y ajustes en la implementación.

La síntesis teórica reveló la similitud de múltiples perspectivas en el uso de la linealización y el modelado polinómico. Se resaltaron consolidaciones en la importancia de estas estrategias en la pedagogía matemática actual. Y Se identificaron obstáculos en la aplicación de la linealización en entornos educativos específicos. Además, se sugirieron enfoques alternativos, como combinar métodos didácticos, para mejorar la adaptabilidad y la eficacia en el aula.

Una propuesta didáctica con base en modelación matemática contextualizada fue creada para enseñar bachilleratos a la linealización de funciones polinómicas. Esta requeriría una implementación y validación empírica posterior. Que, a pesar de no haber realizado la implementación directa de las estrategias didácticas, los hallazgos de la investigación apuntan hacia la importancia y el potencial impacto positivo de la linealización y el modelado polinómico en la enseñanza de las matemáticas.

7. Recomendaciones

Para evaluar la efectividad y aplicabilidad de las estrategias didácticas sugeridas, se debe tener en cuenta su implementación práctica en entornos educativos reales. Determinando el impacto de las concretas en el aprendizaje actividades mediante la linealización y el modelado de funciones polinómicas, se han producido datos empíricos.

Ampliar la investigación para examinar la efectividad y adaptabilidad de las estrategias sugeridas teniendo en cuenta diversos contextos y niveles educativos. incorporar comentarios directos de profesores y estudiantes durante el proceso de implementación para obtener conocimientos y mejorar la aplicabilidad de las estrategias.

Expandir la investigación de las funciones polinómicas para incluir otros tipos de funciones, tales como las racionales, las logarítmicas, las exponenciales y trigonométricas. Esto permitiría modelar una gama más amplia de situaciones del mundo real con funciones y apoyaría el desarrollo del pensamiento funcional y variable de los estudiantes. Con otras técnicas de aproximación, como la interpolación, la regresión y el cálculo diferencial, se podría comparar la eficacia de la linealización.

Investigar el uso de herramientas tecnológicas adicionales para el estudio de funciones polinómicas y su linealización, además de GeoGebra, Excel y Tracker. Esto posibilitaría aprovechar las ventajas y potencialidades de cada herramienta y diversificar los recursos didácticos. El papel de las herramientas tecnológicas en el proceso de enseñanza-aprendizaje podría ser examinado, además de su impacto en la comprensión, la motivación y el interés de los alumnos.

8. Referencias bibliográficas

Aczel, A. (2009). El artista y el matemático, la historia de Nicolás Bourbaki, el genio matemático que nunca existió. Barcelona: Gedisa S.A.

Agnelli, H., Konic, P., Peparelli, S., Zón, N. y Flores, P. (2009). La función lineal obstáculo didáctico para la enseñanza de la regresión lineal. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 17, 39-49.

Avirama, L. &. (2014). Una propuesta para la enseñanza de la ecuación cuadrática en la escuela a través de la integración del material manipulativo. Cali.

Badiou, A (1978). El concepto de modelo. Bases para una epistemología materialista de las matemáticas. Ciudad de México: Siglo XXI. Traducción

Bassanezi, R. (1994). Modelling as a Teaching – Learning Strategy. For the Learning of Mathematics 14 (2), 31-35

Blum, & Borromeo. (2009). Mathematical Modelling: Can it be taught and leart? Journal of Mathematical Modelling and Application.

Bontempi, Gianluca & Birattari, Mauro. (2004). From Linearization to Lazy Learning: A Survey of Divide-and-Conquer Techniques for Nonlinear Control (Invited Paper). International Journal of Computational Cognition. 3.

Bravo-Bohórquez, A., Castañeda-Rodriguez, L. J., Hernández-Yomayusa, H. I., & Hernández-Hernández, L. A. (2016). Enseñanza de las matemáticas en ingeniería: Modelación matemática y matemática contextual. Revista Educación En Ingeniería, 11(21), 27–31. https://doi.org/10.26507/rei.v11n21.601

Campeón Becerra, Milton Cesar, Aldana Bermúdez, Eliecer, & Villa Ochoa, Jhony Alexander. (2018). Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la función lineal mediante la modelación de situaciones. Sophia, 14(2), 115-126. https://doi.org/10.18634/sophiaj.14v.2i.629

Cervantes, L. (1015). Modelización Matemática: principios y aplicaciones. Primera edición, ISBN: 978-607-487-855-4 Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Córdoba Echavarría, O. (2021). Diseño de un proyecto de aula que contribuya al aprendizaje significativo crítico de la función cuadrática mediante el software GeoGebra en los estudiantes del grado noveno de la educación básica secundaria. Universidad Nacional de Colombia.

Fiebiger Ochoa, S. (2014). Estudio de las propiedades características de las cónicas a partir de experiencias físicas mediante el uso del concepto de linealización.

Giraldo, A., & Montoya, C. (2019). Learning the linearization of polynomial functions using Tracker. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50(7), 1034-1052. 4

Giraldo Castaño, Z. (2012). Aproximación a las funciones desde la modelación de situaciones cinemáticas de física con estudiante de grado noveno de básica secundaria de la Institución Cocorná.

Gómez, J. A., & Gómez, J. A. (2018). Linearization of polynomial functions using GeoGebra. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21(3), 307-334. 2

Herrera, Y. P. & Muñoz, V. E. (2014). Propuesta didáctica para abordar el concepto de función a partir de la modelación matemática.. Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12209/7760.
Israelí, G., La mathématisation du réel. Essai sur la modelisation mathématique, Paris, 1996, Editions du SEUIL.

Khan Academy. (s. f.). Modelación de situaciones cotidianas con funciones lineales. Recuperado de https://es.khanacademy.org/math/algebra-ii-pe-pre-u/xcb2d1a1723269f75:funcion-lineal/xcb2d1a1723269f75:modelacion-real-con-funciones-lineales/a/26410-artculo-modelacin-de-situaciones-cotidianas-con-funciones-lineales

Kline, M. (1992). El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. (Vol 1): Madrid: Alianza

Koyré, A. (1977). Estudios de Historia del pensamiento científico. Ciudad de México: Siglo XXI

Leithold, L. (1992). El cálculo con geometría analítica. México: Industria editorial mexicana.

Londoño, S. M. y Muñoz, L. M. (2011). La modelación matemática: Un proceso para la construcción de relaciones lineales entre dos variables. Tesis de Maestría no publicada. Medellín: Universidad de Antioquia

López, J., & Sánchez, M. (2020). Linearization of polynomial functions using graphing calculators. Journal of Mathematics and Computer Science, 23(1), 1-16. 6

Mesa, Y.M., & Ochoa, J.A. (2011). Modelación Matemática en la Historia de las Matemáticas. Una mirada al concepto de Función Cuadrática (CO).
Ministerio de educación nacional. (1998). Serie de lineamientos curriculares, matemáticas. Bogotá, Colombia.

Ministerio Nacional de Educación de Colombia (2006). Estándares Básicos de Competencias. Bogotá: Colombia.

Narváez Tuirán, J. (2015). Estudiando las funciones polinómicas con el software educativo Geogebra. Opción, 31(3), 897-906.

OECD (2019), PISA 2018 Results (Volume I): What Students Know and Can Do, PISA, OECD Publishing, París, https://doi.org/10.1787/5f07c754-en

Quiroga Garcés, J. D., & Chacón Benavides, J. A. (2020). Propuesta de secuencia didáctica para fortalecer el pensamiento variacional en el estudio de funciones polinómicas. En J. A. Chacón Benavides (Ed.), Didáctica de la matemática: experiencias y reflexiones (pp. 95-118). Editorial UPTC.

Rojas Palacio, C. (2021). Propuesta de estrategia didáctica para la enseñanza de la teoría y la práctica del control de sistemas dinámicos integrando los estilos de aprendizaje. Universidad Nacional de Colombia.

Roubal, Jirka & Husek, Petr & Stecha, Jan. (2010). Linearization: Students Forget the Operating Point. Education, IEEE Transactions on. 53. 413 - 418. 10.1109/TE.2009.2026427.

Suárez, L. y Cordero, F. (2005). Modelación en matemática educativa. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18, 639-644. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Vasco, C. E. (1999). Didáctica de la matemática.

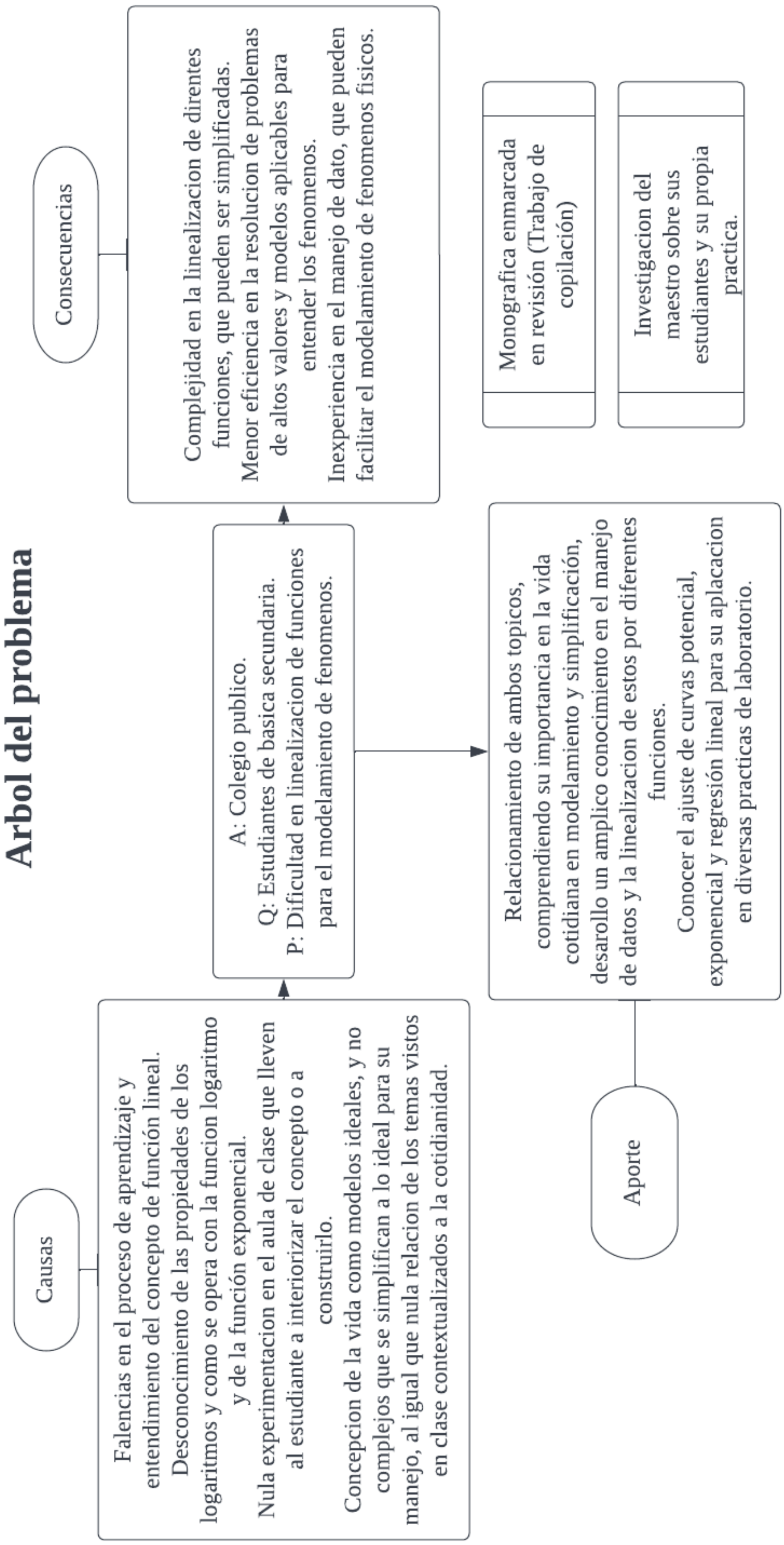
Villa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas: un marco de referencia y un ejemplo. Revista Tecno Lógicas. 19. 51-81

Villa-Ochoa, Jhony; Bustamante, Carlos; Berrio, Mario; Osorio, Aníbal; Ocampo, Diego (2008). El proceso de modelación matemática en las aulas escolares. A propósito de los 10 años de su inclusión en los lineamientos curriculares colombianos. Curso dictado en 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (16 al 18 de octubre de 2008). Valledupar, Colombia.

Villa-Ochoa, J. A., Bustamante, C. A., Berrío, M., Osorio, J. A., & Ocampo, D. A. (2009). Sentido de realidad y modelación matemática. El caso de Alberto. ALEXANDRIA. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2 (2), 159-180

ANEXOS

Anexo A. Árbol del problema



Anexo B. Matriz Antecedentes

Autores	Año	Lugar	Titulo	Logros
Gianluca Bontempi Mauro Birattari	2005	Bruselas	From Linearization to Lazy Learning: A Survey of Divide-and-Conquer Techniques for Nonlinear Control	Mostro brecha existente entre los análisis teóricos sobre sistemas lineales y la aparente no linealidad del mundo a la que se enfrentan los estudiantes. Descomponer un problema complejo de control no lineal en un número de más simple problemas lineales
Héctor Agnelli; Patricia Konic; Susana Peparelli; Nora Zón; Pablo Flores	2009	Buenos Aires	La función lineal obstáculo didáctico para la enseñanza de la regresión lineal	Mostro como los conceptos de función y regresión lineales generan dificultades en el proceso de enseñanza- aprendizaje.
Jirka Roubal; Petr Husek; Jan Stecha	2010	República Checa	Linearization: Students Forget the Operating Point	Propone forma de mejorar la enseñanza de la metodología de linealización por medio de un Modelo de un péndulo invertido en un carro.
Zonia Cristina Giraldo Castaño	2012	Medellín	Aproximación a las funciones desde la modelación de situaciones cinemáticas de física con estudiante de grado noveno de básica secundaria de la Institución Cocorná	Acercarse al modelo de función lineal desde la modelación de situaciones.
Sandra Johana Fiebiger Ochoa	2014	Medellín	Estudio de las propiedades características de las cónicas a partir de experiencias físicas mediante el uso del concepto de linealización	Modelado de situaciones cotidianas se utilizo para el estudio de las propiedades características de las cónicas mediante el concepto de linealización.
Milton Cesar Campeón Becerra; Eliecer Aldana Bermúdez; Jhony Alexander Villa Ochoa	2018	Armenia	Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la función lineal mediante la modelación de situaciones	Analiza la forma cómo aprenden los estudiantes el concepto de función lineal a partir de una ingeniería didáctica, en la cual desarrollarán tareas de modelación de situaciones en contexto.
Cinthia Viviana Rojas Palacio	2021	Medellín	Propuesta de estrategia didáctica para la enseñanza de la teoría y la práctica del control de sistemas dinámicos integrando los estilos de aprendizaje	Diseño estrategias didácticas orientadas a laboratorio, para cuatro conceptos de control de sistemas dinámicos, integrando metodologías educativas activas y el estilo de aprendizaje de Felder y Silverman. Entre estos conceptos se encuentra el de linealización, donde se obtuvo una aprobación de la sesión de casi el 90% de los estudiantes a los que se les aplicó la estrategia didáctica y según encuestas de percepción el 97% obtuvo claridad en el concepto.
Octavio Córdoba Echavarría	2021	Bogotá	Diseño de un proyecto de aula que contribuya al aprendizaje significativo crítico de la función cuadrática mediante el software GeoGebra en los estudiantes del grado noveno de la educación básica secundaria	Estrategia didáctica que dinamice el aprendizaje significativo crítico de la función cuadrática, mediante el uso del software GeoGebra en la resolución de situaciones problema en contexto