



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Control predictivo basado en modelo no lineal por modo dual viable

Kelly Johana Ramírez Pérez

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Minas

Medellín, Colombia

2011

Control predictivo basado en modelo no lineal por modo dual

Kelly Johana Ramírez Pérez

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título
de:

Magister en Ingeniería – Ingeniería Química

Director (a):

PhD., Lina María Gómez Echavarría

Codirector (a):

PhD., Hernán Darío Álvarez Zapata

Línea de Investigación:

Modelamiento, Simulación y Control de Sistemas Dinámicos

Grupo de Investigación:

Grupo de Automática de la Universidad Nacional GAUNAL

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Minas

Medellín, Colombia

2011

A Dios, voz de aliento en cada tropiezo y eje principal de mi vida.

A mis padres Arnoldo y Patricia, a quienes agradezco su apoyo y les debo lo que ahora soy.

A mi hermano Sebastián, luz de mis ojos, quien siempre ha creído en mí.

Agradecimientos

A Dios porque sin su ayuda, nada sería posible.

A mis padres Arnoldo Ramírez, Patricia Pérez y mi hermano Sebastián Ramírez por su apoyo y constante voz de aliento durante el desarrollo de este trabajo.

A mi tutores Lina María Echavarría y Hernán Darío Álvarez, por su confianza, paciencia y sabios consejos durante esta investigación.

A Julio Cesar Bermúdez por ser la persona que con paciencia me animó, durante la consecución de este trabajo.

Resumen

En esta investigación se propone un Control Predictivo Basado en Modelo no Lineal (NMPC) por modo dual con estabilidad garantizada, el cual usa un controlador PI dentro de la región terminal. En la formulación de esta estrategia de control, para el cálculo de la región terminal (Ω) y del dominio de atracción se usa la teoría de conjuntos invariantes y un algoritmo aleatorizado del tipo Montecarlo. En la estrategia de conmutación NMPC al PI se restringen los elementos finales de control suavizando considerablemente la conmutación. El NMPC por Modo Dual propuesto es implementado en simulación (software Matlab) en un Reactor Continuamente Agitado, y se compara su desempeño con el obtenido al implementar un NMPC multivariable convencional y dos controladores PI. Finalmente, se concluye que el NMPC por modo dual propuesto es la estrategia de control que además de tener estabilidad garantizada, presenta un mejor desempeño.

Palabras clave: MPC por modo dual, MPC con estabilidad garantizada, región terminal, CSTR, PI, Conjuntos invariantes.

Abstract

This research proposes a Nonlinear Model based Predictive Control (NMPC), with guaranteed stability using a dual mode Model based Predictive Control approach with a PI controller inside terminal region. Within the formulation of this control strategy, a terminal region (Ω) and a attraction domain are calculated using invariant sets theory and a randomized Monte Carlo type algorithm. In addition, this proposal is complemented with a commutation strategy to constrain final control elements smoothing considerably commutation. This Dual Mode NMPC multivariable control is implemented by simulation (Matlab code) over a Continuous Stirred Reactor Tank comparing Dual Mode NMPC with a conventional NMPC multivariable and with two PI controllers. Finally, this article concludes that the NMPC for dual mode is the control strategy that in addition to having stability guaranteed, presents a better performance.

Keywords: MPC by dual mode, MPC with guaranteed stability, terminal region, CSTR, PI, sets invariants.

Contenido

Pág.

Lista de figuras XI

1. El Control de Procesos	3
1.1 Control Predictivo basado en modelo.....	3
1.1.1 Funcionamiento del CPBM.....	4
1.1.2 Clasificación de los CPBM.....	5
1.1.3 CPBM Multivariable.....	5
1.2 Control PI.....	6
1.2.1 Definición	6
1.2.2 Sintonía de controladores PI	8
1.3 Estabilidad	9
1.4 Teoría de Conjuntos invariantes.....	9
1.4.1 Conjunto invariante positivo.....	10
1.4.2 Conjunto invariante de control	10
1.4.3 Máximo conjunto invariante positivo, $O_{\infty}(X)$	10
1.4.4 Conjunto alcanzable a un paso $R(\Phi)$ del conjunto Φ	11
1.4.5 Conjunto predecesor a un paso $Q(\Phi)$ del conjunto Φ	11
1.4.6 Conjunto controlable en i pasos, $Ki(X, \Phi)$ al conjunto Φ	12
1.4.7 Conjunto admisible en i pasos, $Ci(X)$	13
1.4.8 Máximo conjunto invariante de control, $C_{\infty}(X)$	14
1.4.9 Conjunto estabilizable en i pasos, $Si(X, \Phi)$ al conjunto Φ	14
2. CPBM con estabilidad garantizada.....	17
2.1 Controladores predictivos basados en modelo no lineal con estabilidad garantizada.....	17
2.1.1 CPBM con restricción terminal de igualdad.	18
2.1.2 CPBM con costo terminal.	19
2.1.3 CPBM con restricción terminal de desigualdad.....	19
2.1.4 CPBM por modo dual	20
2.1.5 CPBM con costo y restricción terminal	21
3. CPBM POR MODO DUAL	25
3.1 Descripción CPBM por modo dual	25
3.2 Estado del arte de la región terminal y su cálculo	27
3.2.1 Cálculo del conjunto predecesor para sistemas Lineales.....	28
3.2.2 Cálculo del conjunto predecesor para sistemas No lineales	28
3.3 Propuesta de cálculo de la región terminal.....	31
3.3.1 Hallar el conjunto estabilizable $Si(X, Ysp)$	32
3.3.2 Hallar la región controlable β del PID.	36
3.3.3 Intersección del conjunto $Si(X, Ysp)$ con la región β	37
3.4 Cálculo dominio de atracción	37
3.5 Propuesta de conmutación.....	37
4. Ejemplo ilustrativo.....	41

4.1	Modelo de reactor continuamente agitado (CSTR)	41
4.2	Formulación controladores PID.....	44
4.3	Formulación controlador CPBM.....	46
4.4	Formulación controlador CPBM por modo dual	48
4.4.1	Cálculo región terminal Ω	49
4.4.2	Dominio de atracción del CPBM.....	52
4.4.3	Propuesta de conmutación.....	53
4.5	Resultados de simulación controladores.....	58
4.6	Análisis de resultados.....	63
5.	Conclusiones y trabajos futuros.....	65
5.1	Conclusiones	65
5.2	Trabajos futuros.....	65
A.	Anexo: Control predictivo basado en modelo (CPBM).....	67
B.	Anexo: Teoría de estabilidad de Lyapunov	71
B.1	Definiciones básicas	71
	Definición de Estabilidad (Vidyasagar, 1993)	72
B.2	Teoremas de Estabilidad de Lyapunov.	73
C.	Anexo: Métodos de sintonía.....	77
D.	Anexo: Índices de desempeño.....	81
E.	Anexo: Procedimiento cálculo conjunto predecesor	83
F.	Anexo: Algoritmo aleatorizado para el cálculo de conjuntos alcanzables y controlables.	85
	Bibliografía.....	93

Lista de figuras

Figura 1-1: Esquema de Control Predictivo Basado en Modelo	4
Figura 1-2: Pareamiento de las variables de control CSTR.....	6
Figura 1-3: Conjunto alcanzable desde Φ con $U = [u_1, u_2, u_3, u_4]$	11
Figura 1-4: Conjunto predecesor desde Φ con $U = [u_1, u_2, u_3, u_4]$	11
Figura 1-5: Conjunto estabilizable desde Φ	14
Figura 2-1: Clasificación de CPBM no lineal que garantizan estabilidad	18
Figura 3-1: Funcionamiento CPBM por modo dual	26
Figura 3-2: Experimentos realizados en Gutiérrez (2007) para cada condición inicial...	31
Figura 3-3: Metodología propuesta para cálculo de región terminal.....	32
Figura 3-4: Algoritmo de cálculo conjunto alcanzable	34
Figura 3-5: Algoritmo de cálculo conjunto predecesor.....	35
Figura 3-6: Algoritmo de cálculo región controlable PI.....	36
Figura 3-7: Comparación entre modelo lineal y no lineal.....	38
Figura 4-1: Reactor continuamente agitado (CSTR)	42
Figura 4-2: Programación modelo CSTR con controladores PI.....	45
Figura 4-3: Programación PI concentración implementado en Simulink.....	46
Figura 4-4: Programación PI temperatura implementado en Simulink.....	46
Figura 4-5: Programación modelo CSTR con CPBM multivariable.....	48
Figura 4-6: Conjunto estabilizable $S_{45}(X, Y_{sp})$	49
Figura 4-7: Región controlable por el PI.....	50
Figura 4-8: Intersección conjuntos estabilizables y región controlable por el PI	51
Figura 4-9: Comportamiento controlador PI dentro de la región terminal Ω	52
Figura 4-10: Conjunto estabilizable en $S_{10}(X, \Omega)$, o dominio de atracción del CPBM por modo dual.....	53
Figura 4-11: Comparación entre repuesta modelo no lineal y linealizado para Ca	54
Figura 4-12: Comparación entre repuesta modelo no lineal y linealizado para T	54
Figura 4-13: Conjunto estabilizable $S_{19}(X, Y_{sp})$	55
Figura 4-14: Evolución de los estados a lazo cerrado (CPBM dual, convencional y PI) .	59
Figura 4-15: Zoom extendido trayectoria del sistema hasta alcanzar la región terminal Ω	59
Figura 4-16: Evolución de estados en el tiempo	59
Figura 4-17: Acciones de control ejecutadas	60
Figura 4-18: Evolución de los estados a lazo cerrado (CPBM dual, convencional y PI) .	61
Figura 4-19: Zoom extendido Comportamiento CPBM dual fuera de la región terminal Ω	61
Figura 4-20: Evolución de estados en el tiempo	62
Figura 4-21: Acciones de control ejecutadas	62
Figura A-1: Restricciones sobre la variable controlada	69
Figura A-2: Restricciones sobre la variable manipulada y los cambios de la variable manipulada.....	69
Figura A-3: Estrategia de horizonte deslizante.	70

Lista de Símbolos y abreviaturas

Símbolo	Término	Unidad
C	Concentración	(mol/l)
$C_{\infty}(X)$	Máximo conjunto invariante de control	
C_p	Capacidad calorífica de la solución en el reactor	$(cal/g.K)$
F	Caudal del flujo	(l/min)
E/R	Factor exponencial	(K)
H	Horizonte del CPBM	
k_0	Factor de frecuencia	(min^{-1})
K_{Ω}	Ley de control local que actúa dentro de Ω	
$K_i(X, \Phi)$	Conjunto controlable en i pasos, al conjunto Φ .	
$Q(\cdot)$	Conjunto predecesor ó a un paso	
ΔH	Calor de reacción	(cal/mol)
$R(\cdot)$	Conjunto alcanzable	
$S_{H_p}(X, \Omega)$	Conjunto estabilizable en H_p pasos al conjunto Ω	
T	Temperatura en el alimento	(K)
$U.A$	Coefficiente global de la transferencia de calor x Área	
V	Volumen del tanque	(l)
χ	Dominio de atracción del CPBM	

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI
β	Región controlable por el PI	
Ω	Región terminal del CPBM dual	1
ρ	Densidad de la solución en el reactor	(g/l)
ϕ	Conjunto invariante	1

Subíndices

Subíndice	Término
A	Reactivo A
0	Entrada del reactor
j	liquido refrigerante
p	Predicción
c	Control

Abreviaturas

Abreviatura	Término
CPBM	Control predictivo basado en modelo

Introducción

El Control Predictivo Basado en Modelo (CPBM) realiza su primera aparición en la industria a finales de los años 70, donde se origina IDCOM o MPHC (Identification-Command o Model Predictive Heuristic Control, Richalet, et. al, 1978, Cutler and Ramaker 1980). En esta estrategia se usaba un modelo dinámico del proceso para predecir el efecto que tendrían las acciones de control futuras sobre las salidas del sistema. Dichas señales de control eran determinadas minimizando el error predicho, sujeto a restricciones de operación. Esta estrategia consideraba la respuesta al impulso de la planta en la etapa de identificación, permitiendo la inclusión de restricciones en las entradas y salidas.

Posteriormente, el CPBM surge en la academia, en torno a las ideas del control adaptable, desarrollando estrategias para procesos monovariantes formuladas con modelos entrada salida. Es en esta época, donde aparece el Control PredictivoG (GPC) propuesto en Clarke et. al., (1987) donde se usa un modelo de función de transferencia discreta del tipo CARIMA (Controlled Auto-Regressive Integrated Moving Average) para la predicción de las salidas a partir de las acciones de control generadas en el proceso de optimización.

En la mayoría de estos controladores, la estabilidad no está garantizada, requiriéndose un ajuste específico para cada sistema de una forma heurística y sin garantías de éxito (Limón, 2002). Por ello, a partir de los 80's, se han propuesto formulaciones de CPBM tratando de superar el problema de estabilidad, formulando esquemas de CPBM que garantizan estabilidad desde el diseño del controlador mismo.

Tal como se muestra en la sección 3.1, es extensa la literatura reportada por la academia en torno a diseños de Controladores Predictivos Basados en Modelo no lineal con estabilidad garantizada, pero actualmente este tipo de controladores no se encuentra implementado en la industria. Adicional a ello, los procedimientos reportados en la literatura para el cálculo de dichas regiones terminales carecen de una metodología estándar para su cálculo. Muchos autores han optado por realizar un procedimiento que conduce a obtener una región elíptica proveniente de una curva de nivel de una función de Lyapunov, este tipo de geometrías es muy conservadora, ya que se sabe a priori que se obtendrá como resultado una región más pequeña que la verdadera región terminal, lo cual no es conveniente debido a que una disminución en el tamaño de la región terminal prevé una disminución en el tamaño del dominio de atracción del CPBM. Otros autores han optado por aproximar la región terminal por medio de geometrías como polítopos y poliedros, pero a pesar de que el resultado obtenido por estos métodos es más cercano a la región terminal verdadera, el procedimiento realizado para el cálculo de esta aproximación es de alto costo computacional.

Con el fin de obtener una estrategia que fusione los esfuerzos realizados en la academia; esto es, tener un CPBM con estabilidad garantizada para sistemas no lineales, y que además sea implementable en el ámbito industrial, en esta tesis se plantea un CPBM por modo dual, el cual consta de una región terminal dentro de la cual actúa un controlador PI. Se elige este tipo de controlador lineal ya que el 95% de los controladores implementados en la industria son controladores PI, lo que ayuda a acercarse un poco más a la industria, evitando el temor de realizar modificaciones radicales que implica el cambio radical en un controlador.

Adicionalmente, en la búsqueda de un procedimiento que permita mejorar las propuestas existentes para el cálculo de la región terminal, en esta investigación se propone una metodología para el cálculo de dicha región, aplicable a cualquier proceso continuo no lineal. Esta metodología fusiona la teoría de conjuntos invariantes y algoritmos aleatorizados del tipo Monte Carlo y como resultado arroja una aproximación (politopos) al verdadero conjunto, resaltando que esta región es más grande que la que se hubiese obtenido por teoría de Lyapunov (elipse) y a menor costo computacional que si se utilizase los procedimientos actuales para hallar poliedros o piltopos.

Finalmente es preciso mencionar que para implementar esta estrategia de CPBM con estabilidad garantizada, a una planta en la que se dispone de un controlador PI, bastaría con adicionar el CPBM, mientras las demás modificaciones realizadas para el montaje de este controlador, tales como cálculo de la región terminal y propuesta de conmutación, serian transparentes para el industrial, debido a que este procedimiento hace parte del diseño del controlador y se realiza una sola vez y fuera de línea.

OBJETIVO GENERAL

Proponer una estrategia de CPBM por modo dual implementable, que garantice estabilidad.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Seleccionar un Proceso continuo específico y representativo descrito por un modelo de base fenomenológica.
- Describir los CPBM que garantizan estabilidad estudiados en la literatura.
- Describir los métodos para evaluar estabilidad y desempeño de un controlador predictivo basado en modelo.
- Explicar cuáles son las principales ventajas y desventajas de usar CPBM por modo dual para garantizar estabilidad.
- Describir cómo se realiza el cálculo de la región terminal omega por medio de los conjuntos invariantes en sistemas lineales.
- Extender el cálculo de la región terminal omega por medio de conjuntos invariantes a sistemas no lineales, a partir de una metodología ya existente para sistemas lineales.
- Diseñar un CPBM para el proceso continuo elegido, que incorpore la información de la región terminal omega elegida.
- Proponer estrategias de conmutación suave que garanticen estabilidad en el control del proceso.
- Evaluar la estabilidad y el desempeño del controlador diseñado por medio de simulación.

1.El Control de Procesos

Alrededor de los años 40 el cumplimiento de los objetivos de operación de los procesos como seguridad, calidad del producto final, productividad y flexibilidad, se realizaba por medio de un control operado de forma manual. Adicionalmente, se utilizaban grandes tanques para disminuir el efecto de las perturbaciones; sin embargo, las exigencias en la reducción de costos hizo que fuera imposible mantener dicha estrategia y es por ello, que alrededor de los años 50 comienza a utilizarse el control automático, principalmente, la regulación basada en el control realimentado.

Por los años 60, el control de procesos aplica los desarrollos obtenidos en la teoría de control que hasta ahora se habían utilizado principalmente en la industria aeronáutica y junto con el surgimiento de la computadora digital mejoran bastante las técnicas utilizadas para el control de procesos. No obstante, en los años 70 debido a un incremento considerable en los precios de la energía se requiere que el diseño de sistemas de control para la industria de procesos sea más eficiente y así sucesivamente los cambios y transformaciones han generado un mejoramiento continuo del control de procesos. (Luyben, 1999). Es por tal razón, que a finales de los años 70, surgen diversos algoritmos que usaban un modelo de predicción para saber qué efecto tendrían las acciones de control futuras sobre la salida, es decir el Control predictivo basado en modelo (CPBM) realiza su aparición.

A continuación se describe el CPBM y el control proporcional integral derivativo (PID), actualmente estas son las técnicas de control más usuales para el control de procesos, las cuales buscan alcanzar los objetivos de operación de procesos. Posteriormente, y con el fin de establecer un código común acerca del significado de estabilidad, y de suministrar las herramientas necesarias para el entendimiento de esta tesis, en este capítulo se presenta una descripción acerca del concepto de estabilidad, y se suministra la teoría de conjuntos invariantes.

1.1 Control Predictivo basado en modelo

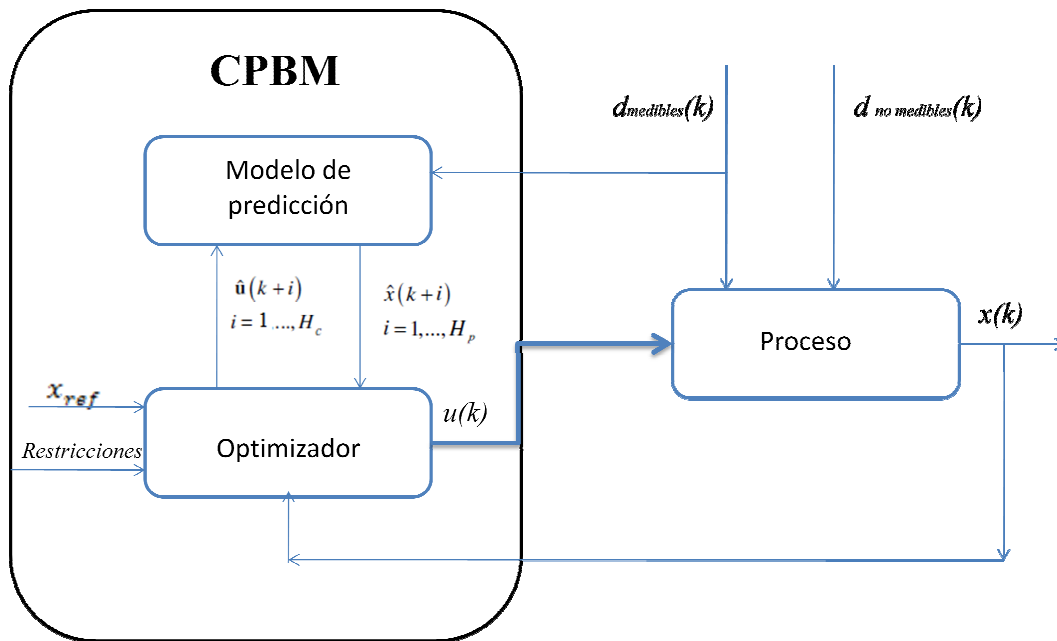
El CPBM más que una técnica de control en sí misma, es una metodología de control con las siguientes características (Camacho and Bordons, 2000):

- Uso explícito de un modelo para predecir la salida del proceso en futuros instantes de tiempo (horizonte).
- Cálculo de las señales de control minimizando una cierta función objetivo.
- Estrategia deslizante, de forma que en cada instante el horizonte se va desplazando hacia el futuro, lo que implica aplicar la primera señal de control en cada instante y desechar el resto, repitiendo el cálculo en cada instante de muestreo.

Así pues, el Control Predictivo Basado en Modelo puede definirse como un método de control combinado (prealimentación + realimentación), en el cual se obtiene una ley de control factible al minimizar una función objetivo que contiene los criterios de funcionamiento deseados del proceso. Para la optimización de dicha función se utilizan las mediciones del proceso y las predicciones realizadas por un modelo apropiado del proceso, de tal forma que se garantice la estabilidad y el desempeño del proceso aún bajo restricciones.

1.1.1 Funcionamiento del CPBM

Figura 1-1: Esquema de Control Predictivo Basado en Modelo.



En la Figura 1-1 se indica un esquema de un proceso operando con un CPBM a lazo cerrado, el objetivo es controlar el estado x (estados ó salida de la planta, según el caso), por medio de las acciones de control, $u(k)$, generadas por un CPBM.

Al CPBM le ingresa el valor actual medido $x(k)$ y la señal de las perturbaciones medibles del proceso. El optimizador postula una secuencia de acciones de control predichas futuras, que son evaluadas en el modelo interno del CPBM para obtener los estados predichos $\hat{x}(k+i)$ con $i = 1, \dots, H_p$, luego el optimizador usa este valor, más las acciones de control predichas futuras, las restricciones, y el estado de referencia, para obtener la secuencia de acciones de control que minimiza el funcional de costo, pero sólo la primera acción de control se envía a la planta, las demás se descartan. Entonces, en el próximo

tiempo de muestreo se mide el valor del estado actual de la planta $x(k+1)$ y se repite nuevamente todo el proceso.

1.1.2 Clasificación de los CPBM

Los algoritmos de CPBM difieren entre sí, principalmente en el modelo usado para representar el proceso, es decir modelo lineal o no lineal.

- *Control Predictivo Basado en Modelo Lineal*

El Control Predictivo Basado en Modelo se dice que es lineal si cumple las siguientes condiciones:

El modelo de predicción es lineal.

No existen restricciones sobre las variables o estados del proceso.

Se usa un funcional de costo cuadrático.

Esto es, si el modelo de predicción es lineal se puede encontrar (reemplazando en el funcional de costo) una acción de control óptima tal que se minimice la función objetivo, que en el caso más común es cuadrática. Además, si no se usan restricciones sobre los estados, es decir, no se tienen no linealidades por saturación entonces lo anterior se cumple a cabalidad.

En la actualidad existen numerosas investigaciones en el tema que permiten denominar al CPBM Lineal como un tema “maduro” y bien fundamentado, donde se pueden garantizar tópicos tan importantes como la estabilidad, optimalidad y la factibilidad de las acciones de control.

- *Control Predictivo Basado en Modelo No lineal*

El Control Predictivo Basado en Modelo no lineal es una variación del CPBM caracterizada por el uso de modelos de sistemas no lineales en la predicción, y/o restricciones de los estados del proceso.

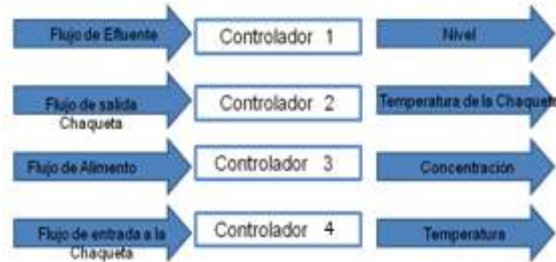
En el CPBM no lineal se requiere generalmente de métodos iterativos para solucionar los problemas de control óptimo en el horizonte de predicción. Mientras estos problemas son convexos en CPBM lineal, en el no lineal no lo son, lo cual plantea desafíos para la teoría de estabilidad y los métodos de solución numérica de la optimización.

1.1.3 CPBM Multivariable

En la actualidad se tienen procesos en los cuales se deben controlar más de una variable simultáneamente. Ejemplo de ello, un Reactor de Tanque Continuasmente Agitado (CSTR), donde se desea controlar la Concentración C_A , la temperatura del reactor T , la Temperatura de la chaqueta T_j , y el Nivel L .

Esto es un problema resuelto si las dinámicas de dichas variables no interactúan entre sí, es decir, no están acopladas; bastaría implementar un controlador para cada variable a controlar, como se muestra en la Figura 1-2.

Figura 1-2: Pareamiento de las variables de control CSTR.



Pero el problema se dificulta cuando lo que se quiere es controlar más de una variable y sus dinámicas están acopladas, como pasa en el CSTR, ya que al implementar un controlador para cada una, los cambios que podrían beneficiar el control de una variable, simultáneamente podrían perjudicar el control de otra, dificultando la sintonía de cada lazo. Es por esto que se hace necesaria la implementación de un controlador multivariable que considere todas las dinámicas a controlar dentro del mismo sistema de control.

Como se menciona en el Anexo A, esta es una de las ventajas que presenta el CPBM ya que permite tratar con facilidad el caso multivariable, bastaría con incluir en el funcional de costo la desviación de cada objetivo de control, la penalización de los cambios en cada acción de control y demás términos que se necesiten. Es claro que aumentar los términos en el funcional de costo implica aumento en los parámetros de sintonía, por lo tanto aumenta la dificultad de sintonía, pero finalmente esto se compensa con el buen funcionamiento de un CPBM multivariable bien diseñado. En el anexo A, se presenta una descripción más detallada acerca del CPBM sus elementos y su funcionamiento.

1.2 Control PI

Uno de los algoritmos de control realimentado más conocido y usado a nivel industrial es el proporcional Integral Derivativo, abreviado como PID y denominado con esta sigla industrialmente. Más del 90% de todos los lazos de control son PID (Åström and Hägglund, 2001) y la mayoría de estos (aproximadamente el 75%) son PI (Smith y Corripio, 1997), debido a que usualmente no se usa la acción derivativa.

1.2.1 Definición

Los miembros de la familia de controladores PID, incluyen tres acciones: Proporcional (P), Integral (I) y Derivativa (D).

P (acción de control proporcional). Proporciona una salida del controlador que es proporcional al error, es decir:

$$u(t) = K_p \cdot e(t) \tag{1-1}$$

Donde K_p es una ganancia proporcional ajustable. Un controlador proporcional puede controlar cualquier planta estable, pero posee desempeño limitado y error de estado estacionario (off-set).

I (acción de control integral). Da una salida del controlador que es proporcional al error acumulado, lo que implica que es un modo de controlar lento.

$$u(t) = K_i \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau \tag{1-2}$$

$$C_i(s) = \frac{K_i}{s} \tag{1-3}$$

El objetivo de este término es eliminar el error de estado estacionario que se produce cuando se usa sólo la acción proporcional.

D (acción derivativa). Esta acción produce un cambio en la entrada, proporcional a la derivada del error otorgándole al controlador la capacidad de anticiparse a la trayectoria del error. Generalmente esta acción no se usa debido a que al anticiparse, incrementa la velocidad respuesta del sistema, corriendo el riesgo de tomar acciones erróneas.

$$u(t) = K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \tag{1-4}$$

Estas tres acciones de control pueden combinarse para dar lugar a controladores tipo P, I, PD, PID y PI, que es el controlador usado en esta tesis. Para hallar la acción de control a enviar al proceso, bastaría con sumar las contribuciones de las acciones de control presentes según sea el caso, es decir:

PI: Proporcional +Integral

$$u(t) = u_{EE} + K_p e(t) + \frac{K_p}{t_i} \cdot \int_{t_0}^t e(t) dt \tag{1-5}$$

Esta es la formulación para un PI en tiempo continuo de acuerdo con la formulación estándar ISA, donde u_{EE} es el valor de salida del controlador cuando el proceso se encuentra en estado estacionario (salida y_{EE}), hallado con los valores nominales de todas las perturbaciones (d_{EE}), $e(t)$ es el error obtenido como la diferencia entre la variable controlada y , y el valor deseado de dicha variable y_{sp} (error $e(t) = (y_{sp} - y)$ en cada instante de muestreo).

Implementar un controlador PI es una buena elección, debido a que estas dos acciones se complementan; con un control proporcional es necesario que exista error para tener

una acción de control distinta de cero, mientras con la acción integral, un error pequeño positivo siempre dará una acción de control creciente, ó decreciente si fuese negativo, lo que evita que se presente error de estado estacionario.

1.2.2 Sintonía de controladores PI

La palabra sintonizar en términos de control se define como la búsqueda de los parámetros del controlador que logran un buen desempeño del mismo. En el caso del PI, los parámetros a hallar serían la constante proporcional, K_p o en su defecto el valor de la banda proporcional (BP), donde $K_p = 100/BP$ y adicionalmente el tiempo integral t_i .

Nuevamente, es preciso recordar que la familia de los controladores PID, incluido el PI son los controladores más usados a nivel industrial, por lo tanto es de esperarse la amplia bibliografía encontrada, presentando métodos de sintonía de PID (Skogestad, 2001), los cuales sirven también para sintonizar PI. A continuación se presenta el método de optimización de quimiotactismo bacteriano (QB), usado en esta tesis para la sintonización de PID. En el anexo C, se presenta una revisión bibliográfica acerca de otros métodos de sintonía de PID realizada en (Gutiérrez, 2007).

Quimiotactismo bacteriano (QB). El algoritmo de Quimiotactismo Bacteriano (*Bacterial Chemotaxis* en inglés) es un método sistemático para la resolución de problemas de búsqueda y optimización, fue originalmente propuesto como una optimización numérica de los pesos de una red neuronal artificial de propagación hacia adelante.

En los algoritmos de QB se emula el movimiento típico de una colonia de bacterias dentro de un caldo de cultivo, para encontrar la solución óptima a un problema específico. Tales movimientos son una función directa de la concentración de nutrientes en dicho caldo de cultivo. La funcionalidad del movimiento se logra por un cierto código de comunicación que provee información sobre la concentración de nutrientes en varias direcciones alrededor de la posición actual de la colonia. El movimiento que finalmente dará la colonia en el próximo instante será en aquella dirección en la que la concentración de nutrientes incremente. Es decir, el criterio de movimiento típico de una colonia de bacterias se asemeja al criterio de movimiento en busca de un óptimo matemático, de cualquier función multivariable.

Este método de optimización se usa para la sintonía de controladores PID. A continuación se muestran los pasos a seguir para lograr este objetivo (García and Álvarez, 2009) :

- En un primer paso del algoritmo de QB se determinan los intervalos nominales y se establece un valor semilla para cada parámetro a optimizar β (K_p, K_I, etc). De este modo el algoritmo de QB inicia su trabajo explorando varias direcciones en el espacio de los parámetros.
- Se toma de manera provisional el valor semilla de cada uno de los parámetros β_0 . Se calcula el valor de la función objetivo J con los valores actuales y se toma dicho valor como el óptimo inicial J_0 .
- Considerando el intervalo de variación de cada parámetro establecido inicialmente, se determina aleatoriamente matriz de términos de suma S con dimensión igual al número de parámetros a evaluar. Este procedimiento acepta valores negativos o positivos de la matriz.
- Se halla un nuevo valor de parámetro usando la matriz S , es decir, al valor actual del parámetro se le adiciona el valor correspondiente en S . $\beta_{i+1} = \beta_i + S$
- Usando β_{i+1} se determina el valor de la función de objetivo J_{i+1} .

- Si $J_{i+1} > J_i$ entonces β_{i+1} se almacena y se mantiene el S actual. Si $J_{i+1} < J_i$ entonces se mantiene el β_i y se determina aleatoriamente un nuevo S . Si se genera un cierto número de S que producen pasos no validos, se reduce el intervalo de generación de S y se vuelve al paso 3.
- Si todavía no se cumple la condición de parada del algoritmo, se retorna al paso 4. De lo contrario, el algoritmo termina entregando como respuesta el β actual.

Respecto a la condición de parada del algoritmo, existen tres alternativas. La primera considera un número fijo de ciclos de reducción del intervalo de generación de la matriz S . La segunda es un número máximo de pasos validos. La tercera consiste en evaluar el cambio en el valor de la función objetivo, si $J_{i+1} - J_i < \varepsilon$, donde ε es un valor de tolerancia, la optimización concluye.

1.3 Estabilidad

En términos generales el concepto de estabilidad significa que pequeñas desviaciones en la condición inicial, impliquen pequeñas desviaciones en la trayectoria del sistema o que frente a entradas acotadas, el comportamiento de la salida también sea acotado.

Las dos grandes aproximaciones al problema de estabilidad son la estabilidad en el espacio de estado (o estabilidad de Lyapunov) y la estabilidad entrada-salida. Cuando se trata de sistemas no lineales (tratados en la presente investigación) los cuales pueden tener más de un punto de equilibrio, es la estabilidad en el sentido de Lyapunov la que proporciona un marco adecuado para su análisis. De hecho, el análisis de la estabilidad de los controladores predictivos se suele realizar mediante esta teoría (Mayne et al. 2000). En el anexo B, se presenta una recopilación de esta teoría formulada para el caso de sistemas continuos.

Una función de Lyapunov se puede usar para demostrar que un punto de equilibrio de un sistema dinámico es estable. La región del espacio de estados donde esta función de Lyapunov está acotada, es una región de atracción del punto de equilibrio, y constituye un conjunto invariante positivo. Una vez dentro de dicha región, el sistema nunca la abandona.

A partir de esta definición se puede concluir que el concepto de conjunto invariante surge naturalmente a partir de funciones de Lyapunov. Sin embargo, la definición del concepto de invarianza no requiere la introducción de la noción de funciones de Lyapunov, de hecho existe una teoría alrededor de este tema, denominada teoría de conjuntos invariantes la cual se define en la siguiente sección.

1.4 Teoría de Conjuntos invariantes

Los conceptos tales como conjunto invariante positivo o conjunto invariante de control son trascendentales en el análisis de la estabilidad de un sistema dinámico, especialmente cuando el sistema está sujeto a restricciones. Alrededor de estos conceptos se ha formado toda una teoría que los desarrolla, denominada teoría de conjuntos invariantes. A continuación, se presentan algunos conceptos y resultados relativos a la teoría de conjuntos invariantes (Blanchini and Miani, 2008).

Las definiciones que se presentan en esta sección, se basan en el siguiente sistema:

Sea pues un sistema continuo dado por dado por:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)) \tag{1-6}$$

Donde $x \in R^n$ es el estado del sistema, $u \in R^m$ las actuaciones sobre el sistema.

El sistema está sujeto a las siguientes restricciones:

$$u \in U \quad x \in X, \text{ para todo } t$$

1.4.1 Conjunto invariante positivo.

El conjunto $\Phi \subset R^n$ es un invariante positivo para un sistema de la forma:

$$\dot{x} = f(x(t)) \tag{1-7}$$

Si $\forall x(0) \in \Phi$, la solución $x(t) \in \Phi$, para $t > 0$
 Entonces, Si $x(0) \in \Phi$, implica que $x(t) \in \Phi$, $\forall t \in R$ y se dice que Φ es un invariante.

1.4.2 Conjunto invariante de control

El conjunto $\Phi \subset R^n$ es un invariante de control para un sistema de la forma:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)) \tag{1-8}$$

Si existe una ley de control realimentada

$$u(t) = \Psi(y(t))$$

La cual asegura la existencia de la solución en Φ , y ésta, es tal que Φ es un invariante positivo para el sistema a lazo cerrado.

1.4.3 Máximo conjunto invariante positivo, $O_\infty(X)$

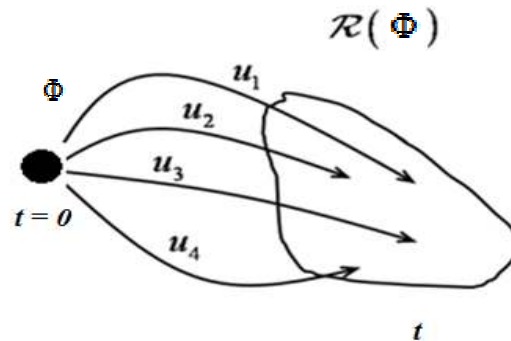
El conjunto $O_\infty(X)$ es el máximo conjunto invariante positivo robusto contenido en X sí y sólo si todo conjunto invariante de control Φ del sistema satisface que:

$$\Phi \subseteq O_\infty(X) \subseteq X \tag{1-9}$$

1.4.4 Conjunto alcanzable a un paso $\mathcal{R}(\Phi)$ del conjunto Φ

Dado un conjunto Φ , el conjunto alcanzable $\mathcal{R}(\Phi)$ desde Φ , en un tiempo $T < +\infty$, es el conjunto de todos los vectores x para los cuales existe $x(0) \in \Phi$, tal que $u(\cdot) \in U$ y $x(T) = x$.

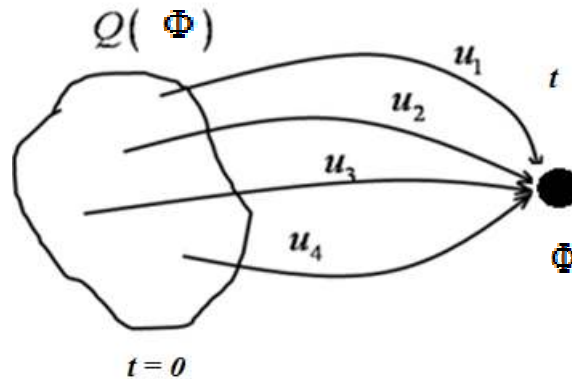
Figura 1-3: Conjunto alcanzable desde Φ con $U = [u_1, u_2, u_3, u_4]$



1.4.5 Conjunto predecesor a un paso $Q(\Phi)$ del conjunto Φ .

Dado un conjunto Φ , el conjunto predecesor $Q(\Phi)$ a Φ en un tiempo $T < +\infty$, es el conjunto de todos los vectores x para los cuales existe $u(\cdot) \in U$ tal que si $x(0) = x$, luego, $x(T) \in \Phi$.

Figura 1-4: Conjunto predecesor desde Φ con $U = [u_1, u_2, u_3, u_4]$



A partir de la definición de conjunto a un paso se puede establecer una condición necesaria y suficiente para garantizar la invariancia de un conjunto.

Teorema 1. Condición geométrica de invariancia

Un conjunto Φ es un *invariante de control* si y sólo si:

$$\Phi \subseteq Q(\Phi) \tag{1-10}$$

1.4.6 Conjunto controlable en i pasos, $K_i(X, \Phi)$ al conjunto Φ

El conjunto controlable en i pasos $K_i(X, \Phi)$, es el conjunto de estados para los cuales existe una secuencia de actuaciones admisibles tal que conduce el sistema hasta el conjunto $\Phi \subseteq X$ en i pasos con una trayectoria admisible.

$$K_i(X, \Phi) = \{x_0 \in X : \forall k = 0, \dots, i - 1, \exists u_k \in U \mid x_k \in X \text{ y } x_i \in \Phi\} \tag{1-11}$$

El conjunto controlable a i pasos, $K_i(X, \Phi)$, indica los estados que pueden alcanzar un determinado conjunto Φ , en i pasos con una evolución admisible mediante una secuencia de actuaciones admisibles.

Este conjunto depende del número de pasos i y representa una secuencia de conjuntos que posee una serie de propiedades:

El cálculo de la secuencia se puede obtener haciendo

$$K_{i+1}(X, \Phi) = Q(K_i(X, \Phi)) \cap X$$

con $K_0(X, \Phi) = \Phi$. 1-12

- El conjunto $K_i(X, \Phi)$ no tiene por qué estar incluido en $K_{i+1}(X, \Phi)$, salvo en el caso en que el conjunto Φ sea un conjunto invariante de control. Así, si $x_0 \in K_i(X, \Phi) \setminus K_{i+1}(X, \Phi)$, entonces el sistema puede llevarse a Φ en i pasos, pero no en i + 1.
- El conjunto $K_\infty(X, \Phi)$ está finitamente determinado si existe un índice i tal que $K_\infty(X, \Phi) = K_i(X, \Phi)$. Al menor índice, i^* , que satisface esta propiedad se denomina índice de determinación.

$$K_\infty(X, \Phi) \triangleq \lim_{i \rightarrow \infty} K_i(X, \Phi) \tag{1-13}$$

- Si existe un índice i , tal que $K_{i+1}(X, \Phi) = K_i(X, \Phi)$ entonces $K_\infty(X, \Phi) = K_i(X, \Phi)$.

Este conjunto se puede extender a sistemas en bucle cerrado controlados por una ley de control $u=h(x)$, dando lugar a:

$$K_i^h(X, \Phi) = \{x_0 \in X^h: x_k \in X^h, \forall k = 0, \dots, i-1, y x_i \in \Phi\} \quad 1-14$$

$$X^h = \{x \in X: h(x) \in U\}$$

Este conjunto satisface las propiedades anteriores y además

$$K_{i+1}^h(X, \Phi) = Q^h(K_i^h(X, \Phi)) \cap X \quad 1-15$$

1.4.7 Conjunto admisible en i pasos, $C_i(X)$

El conjunto admisible en i pasos $C_i(X)$, es el conjunto de estados para los cuales existe una secuencia de actuaciones admisibles tal que la evolución del sistema permanece en el conjunto X durante los instantes siguientes.

$$C_i(X) = \{x_0 \in X: \forall k = 0, \dots, i-1, \exists u_k \in U | x_{k+1} \in X\} \quad 1-16$$

El conjunto $C_i(X)$ representa una secuencia de conjuntos que posee una serie de propiedades:

- El conjunto $C_{i+1}(X) = K_i(X, X)$, ya que $C_i(X)$ es el conjunto admisible en i pasos que únicamente garantiza que la evolución del sistema se conserve dentro de X , sin importar donde llega finalmente. Mientras el conjunto controlable $K_i(X, \Phi)$, indica que la evolución debe conservarse en X y además que debe ser conducido hacia Φ . Luego, $K_i(X, X)$ quiere decir que el sistema evolucione pero no se tiene un conjunto de llegada específico sino simplemente el X , es decir se puede mover en todo el espacio de estados al igual que $C_i(X)$.
- $C_{i+1}(X) \subseteq C_i(X)$ es decir, si un estado es tal que existen $i + 1$ actuaciones admisibles que hacen la evolución del sistema admisible, entonces, también satisface que es admisible en i pasos.
- Si $x_0 \in X \setminus C_i(X)$, entonces no existe una ley de control admisible para la cual la evolución del sistema sea admisible por i pasos o más.
- El conjunto $C_\infty(X)$ es el máximo invariante de control contenido en X , es decir, el conjunto de todos los estados para los cuales existe una ley de control admisible que garantice la satisfacción de las restricciones.
- $C_\infty(X)$ está finitamente determinado si y sólo si existe un índice i^* , tal que $C_{i+1}(X) = C_i(X)$ para todo $i \geq i^*$, Entonces $C_\infty(X) = C_{i^*}(X)$.

Es importante resaltar que los conjuntos $C_i(X)$ en general, no son conjuntos invariantes de control, sin embargo esta secuencia de conjuntos tiende a un conjunto que sí es un conjunto invariante de control y además es el máximo contenido en X .

1.4.8 Máximo conjunto invariante de control, $C_\infty(X)$

El conjunto $C_\infty(X)$ es el *máximo conjunto invariante de control* contenido en X si y sólo si todo conjunto invariante de control Φ del sistema satisface que:

$$\Phi \subseteq C_\infty(X) \subseteq X \tag{1-17}$$

1.4.9 Conjunto estabilizable en i pasos, $S_i(X, \Phi)$ al conjunto Φ

El conjunto estabilizable en i pasos **al conjunto invariante** (positivo o de control) $\Phi \subseteq X$ es el conjunto de estados $S_i(X, \Phi)$ para los cuales existe una secuencia de actuaciones admisibles tal que conducen el sistema hasta el conjunto invariante Φ , en i pasos con una trayectoria admisible.

$$S_i(X, \Phi) = \{x_0 \in X : \forall k = 0, \dots, i-1, \exists u \in U \mid x_k \in X \text{ y } x_i \in \Phi\} \tag{1-18}$$

Observación. Como se resalta en la definición anterior la diferencia entre $K_i(X, \Phi)$ y $S_i(X, \Phi)$, radica en que para este último el conjunto de llegada Φ , es un invariante (de control ó positivo) mientras para el conjunto controlable, Φ , es un conjunto arbitrario cualquiera.

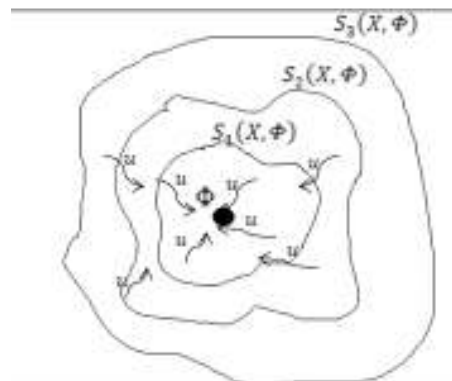
La secuencia $S_i(X, \Phi)$ satisface las siguientes propiedades (Limón, 2002):

- El cálculo de la secuencia se puede obtener haciendo

$$S_{i+1}(X, \Phi) = Q(S_i(X, \Phi)) \cap X \tag{1-19}$$

Con $S_0(X, \Phi) = \Phi$.

Figura 1-5: Conjunto estabilizable desde Φ



- $S_i(X, \Phi) \subseteq S_{i+1}(X, \Phi)$
- Todo conjunto $S_i(X, \Phi)$ es un conjunto invariante de control.
- Sean dos conjuntos invariantes de control Φ_1 y Φ_2 , tales que $\Phi_1 \subseteq \Phi_2$ entonces $S_i(X, \Phi_1) \subseteq S_i(X, \Phi_2)$.
- $S_i(X, S_j(X, \Phi)) = S_{i+j}(X, \Phi)$.
- El conjunto $S_\infty(X, \Phi)$ está finitamente determinado si y sólo si existe un índice i^* , tal que $S_{i+1}(X, \Phi) = S_i(X, \Phi)$ para todo $i \geq i^*$. Además $S_\infty(X, \Phi) = S_i(X, \Phi)$.

Este conjunto se puede extender a sistemas en bucle cerrado controlados por una ley de control $u=h(x)$, dando lugar a:

$$S_i^h(X, \Phi) = \{x_0 \in X^h, x_k \in X^h: \forall k = 0, \dots, i-1, y x_i \in \Phi\} \tag{1-20}$$

$$X^h = \{x \in X: h(x) \in U\}$$

Este conjunto satisface las propiedades anteriores y además

$$S_{i+1}^h(X, \Phi) = Q^h(S_i^h(X, \Phi)) \cap X \tag{1-21}$$

Vale la pena resaltar que todo conjunto $S_i^h(X, \Phi)$ es un invariante positivo del sistema.

Nótese que el conjunto trivial $\{0\}$ es un invariante del sistema (por ser el origen un punto de equilibrio). Por lo tanto el conjunto de estados que son asintóticamente estabilizables al origen en i pasos será $S_i(X, \{0\})$.

El conjunto $S_\infty(X, \Phi)$ es el máximo conjunto estabilizable al invariante Φ y es en general distinto al conjunto $\tilde{S}_\infty(X, \{0\})$, que es el máximo conjunto estabilizable al origen, es decir, el conjunto de estados que pueden ser conducidos al punto de equilibrio por una ley de control admisible satisfaciendo las restricciones.

A raíz de esto, resulta interesante establecer una condición necesaria y suficiente sobre Φ bajo la cual $S_\infty(X, \Phi) = S_\infty(X, \{0\})$, la cual se presenta a continuación.

Teorema 2. Los conjuntos

$$S_\infty(X, \Phi) = S_\infty(X, \{0\}) \tag{1-22}$$

Si y sólo si el conjunto invariante Φ es tal que $\Phi \subseteq S_\infty(X, \{0\})$.

2. CPBM con estabilidad garantizada

Cuando se diseña un controlador, es importante garantizar la estabilidad del sistema en bucle cerrado. En el caso de CPBM existe una amplia literatura dedicada a desarrollar una teoría de estabilidad consistente.

En este capítulo se describe la evolución de las técnicas de CPBM con estabilidad garantizada, resaltando la región terminal Ω como uno de los principales aspectos en el diseño de estos controladores. En adelante entiéndase región terminal, como el conjunto de estados dentro de los cuales el sistema debe estar al final del horizonte de predicción.

A continuación, se exponen los procedimientos encontrados en la literatura para el cálculo de dicha región terminal, los cuales en su gran mayoría son regiones conservadoras como elipses o de alto costo computacional como poliedros, que por ser aproximaciones internas reducen la verdadera región de estabilidad, lo cual es preocupante teniendo en cuenta que ello provoca una reducción en el dominio de atracción de CPBM.

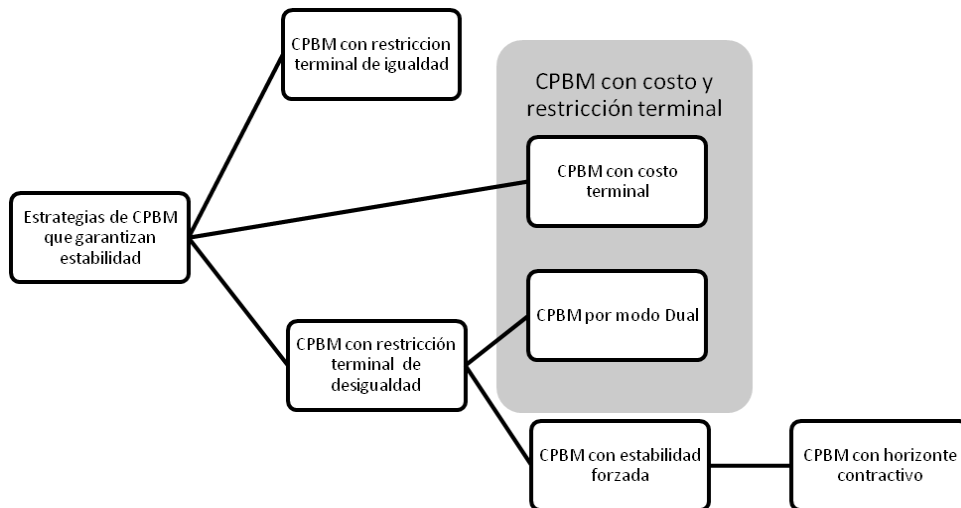
2.1 Controladores predictivos basados en modelo no lineal con estabilidad garantizada

Como ya se dijo la técnica CPBM, aparece por primera vez en la industria. Luego el rápido desarrollo de los controladores predictivos supuso un reto en la comunidad investigadora para dar un soporte teórico bajo el cual se garantizase la estabilidad.

En esta sección se presenta una revisión del estado del arte de los esquemas de control predictivo basado en modelo no lineal que tienen estabilidad garantizada, cuyo denominador común es el uso de la teoría de Lyapunov. Las diferencias presentes entre estos esquemas corresponden principalmente a variaciones en el funcional de costo, tales como agregar un costo terminal y agregar una restricción del estado terminal.

En esta investigación se propone un esquema de clasificación que permite facilitar el entendimiento de esta sección, dicho esquema se presenta en la Figura 2-1.

Figura 2-1: Clasificación de CPBM no lineal que garantizan estabilidad



2.1.1 CPBM con restricción terminal de igualdad.

Este esquema garantiza estabilidad adicionando una restricción terminal, con la cual se obliga al estado ó salida a tomar un valor de cero al final del horizonte de predicción, bajo ciertas condiciones de controlabilidad y observabilidad del sistema.

$$\hat{x}(t + H_p) = 0 \tag{2-1}$$

Si la condición de igualdad es factible, es decir que el sistema al final del horizonte finito está en el origen, entonces el sistema nominal permanece en el origen por tiempo indefinido. Esto permite pensar el horizonte de predicción finito como si se expandiera hasta un horizonte infinito.

Este tipo de CPBM fue propuesto inicialmente para garantizar estabilidad en sistemas LQR con restricciones (Kwon and Pearson, 1977). Luego se propone dicho esquema para un sistema en tiempo discreto, no lineal con restricciones. Finalmente, (Mayne and Michalska, 1990) se formula este controlador para sistemas en tiempo continuo y se relajan las condiciones para garantizar la estabilidad.

Para cumplir esta restricción es necesario realizar una minimización exacta, lo cual en el caso no lineal implica un número infinito de iteraciones en la optimización, que representa un costo computacional muy alto, lo cual hace este esquema poco atractivo, además los problemas de factibilidad de esta técnica llevan a regiones de operaciones muy restringidas. Por esto, solo es útil e implementable en casos lineales.

2.1.2 CPBM con costo terminal.

En este esquema al funcional de costo tradicional se le adiciona un término que penaliza el estado terminal, denominado costo terminal, cabe notar que en este tipo de CPBM no hay restricción terminal.

Inicialmente se propone para sistemas lineales sin restricciones en Bitmead, *et al.* (1990), allí, el costo terminal se propone como:

$$F(x) = \frac{1}{2} x^T P_f x \quad 2-2$$

Donde la matriz P se halla a partir de la ecuación de diferencia de Riccati.

En Rawlings and Muske (1993), se propone para un sistema lineal estable con restricciones politópicas, y se toma como costo terminal, el costo en horizonte infinito resultante de aplicar la realimentación LQR. En Alamir and Bornard (1995) se utiliza esta técnica para sistemas no lineales tomando como costo terminal el costo de un controlador localmente estabilizante durante un periodo suficientemente largo.

Generalmente es necesario tener una restricción terminal, sin embargo en esta clase de CPBM no la hay, pero implícitamente se tiene un requerimiento el cual indica que $X(H_p) \in X_f$ para todos los estados iniciales en un conjunto compacto dado, y esto se satisface al elegir un H_p lo suficientemente grande, por lo tanto basta elegir H_p grande sin necesidad de incluir explícitamente que $X(H_p) \in X_f$.

2.1.3 CPBM con restricción terminal de desigualdad

Desde un punto de vista computacional, ninguna restricción terminal de igualdad (Mayne y Michalska, 1990) puede satisfacerse en un número finito de pasos cuando se aplica CPBM a un proceso no lineal. En este caso, la satisfacción aproximada de la restricción terminal implica que la estabilidad, lograda con la restricción, se pierde dentro de una región alrededor del origen. Por esta razón se propone el CPBM con restricción terminal de desigualdad, en este tipo de CPBM se encuentran: CPBM por modo dual y CPBM con estabilidad forzada.

- CPBM por modo dual.

El CPBM por modo dual hace parte de los CPBM con restricción terminal de desigualdad, pero debido a la importancia que representa este CPBM para esta investigación, se dedica el numeral 2.1.4, a la descripción de su estado del arte.

- CPBM con estabilidad forzada.

Aquí se garantiza estabilidad por medio de una restricción estabilizante, esta restricción puede realizarse sobre los estados o sobre una función de Lyapunov, dentro de estos CPBM se encuentra el CPBM contractivo.

CPBM contractivo

Con el fin de garantizar estabilidad en lazo cerrado en CPBM No Lineal, Yan and Polak, (1993) introdujeron el método de Control Predictivo Basado en Modelo con Restricciones

de Contracción. En este trabajo, se propone una nueva restricción de contracción al problema de optimización, tal restricción de estabilidad impone una contracción previamente establecida en el vector de entrada o de salida. El problema de optimización se formula:

Minimizar un F.C:

$$\min_{u(t), T_c} J(x(t), \overline{u}(t), T_c) \quad 2-3$$

Sujeto a:

$$T_c \in [t + T_1, t + T_2,] \quad 2-4$$

$$\|\overline{x}(t + T_c)\|^2 \leq \alpha^2 \|x(t)\|^2 \quad 2-5$$

$$\max_{r \in [t, t+T_c]} \|\overline{x}(t)\|^2 \leq \beta^2 \|x(t)\|^2 \quad 2-6$$

Donde T_1 es el tiempo mínimo necesario para resolver el problema de optimización, T_2 es un límite superior *a priori* sobre el horizonte de control. Y finalmente las restricciones (51) y (52) con $\alpha: (0, 1]$ y $\beta: [1, \omega)$ se utilizan para garantizar la estabilidad en lazo cerrado y α se denomina factor de contracción.

La principal ventaja de esta propuesta es que garantiza estabilidad exponencial del lazo cerrado al origen, asumiendo que el origen es un punto de equilibrio. Sin embargo esta aproximación no es muy atractiva para aplicaciones, debido a que la factibilidad del problema de optimización en cada instante de muestreo no puede ser garantizada. Además de que la especificación por la función objetivo del comportamiento deseado del controlador, se puede ver afectada por la influencia directa de la elección de los parámetros α y β para el diseño.

En Primbs, *et al*, (2000), se propone otro tipo de CPBM con estabilidad forzada donde se garantiza la estabilidad forzando que una función de control de Lyapunov conocida *a priori*, sea estrictamente decreciente:

$$V(x(k + 1)) < V(x(k)) \quad 2-7$$

Esta restricción se impone en la actuación para el instante actual $u(k)$, y garantiza estabilidad para todo horizonte de predicción H_p .

2.1.4 CPBM por modo dual

En este tipo de CPBM tiene una restricción terminal de desigualdad llamada región terminal (Ω). Fuera de esta región actúa el CPBM tradicional, pero al ingresar a la región terminal, se conmuta a un controlador local $u(x) = Kx$, de allí el nombre de CPBM por modo dual.

Esta estrategia fue propuesta en Michalska and Mayne (1993) para sistemas no lineales en tiempo continuo y sujeto a restricciones. En este trabajo, se elige como región terminal

un invariante positivo del sistema no lineal controlado por un controlador local. Además, para garantizar la factibilidad se introduce como variable de decisión el horizonte de predicción. El controlador así formulado garantiza que conduce al sistema a la región terminal, donde el sistema pasa a regularse por el controlador local que lo estabiliza al origen. De ahí que este controlador se denomine controlador CPBM dual. Las bondades de esta formulación son tan notables, que marcó las futuras líneas de investigación en estabilidad. En Chisci, et al (1996) se extiende el CPBM por modo dual a sistemas discretos no lineales usando un horizonte de predicción fijo, al igual que en Scolaert, et al (1999) donde se estudia la factibilidad como condición suficiente para garantizar estabilidad, en lugar de la optimalidad.

En (Álvarez, 2000) se presenta una formulación de un CPBM contractivo del tipo Sistema de Inferencia Borrosa entrada-salida con realimentación PI de salida (CPBM SIBEs+PI, donde el controlador lineal opera en una vecindad del punto de equilibrio. En este trabajo, la ley de realimentación lineal PI de salida está integrada en el funcional de costo como un término adicional, que permite el manejo unificado de la acción de control, sin realizar una conmutación directa entre los controladores. La novedad frente al funcional de costo original, es un término que penaliza la diferencia entre la acción de control que aplicaría un controlador PI y la que se está evaluando para el CPBM. Esta funcionalidad está en términos de un parámetro, que es un factor de pertenencia borrosa del máximo error absoluto entre la salida de referencia y_{ref} y la salida del proceso.

Un CPBM por modo dual es aplicado a formaciones de robots en Wesselowski and Fierro, (2003) con un controlador basado en linealización por realimentación entrada-salida. En Arpornwichanop and Kittisupakorn,(2004)se implementa un CPBM por modo dual para controlar la concentración de producto en un CSTR, estimada mediante un filtro de filtro de Kalman extendido (EKF). Gutiérrez (2007) formula un CPBM dual, allí se usa una región terminal que se determina mediante un proceso de ensayo y error, como se explica en la sección 3.2.2. Vale la pena resaltar que este autor usa un PI operando dentro de la región terminal, aspecto diferenciador con respecto a otros autores (Limón, 2002, Sznaier and Damborg, 1987) que usan LQR como controlador local.

En adelante la mayoría de los autores han usado CPBM por modo dual, adicionando al funcional de costo un costo terminal, asociado con el comportamiento que debe tener el controlador al entrar en la región Ω , evitando la pérdida de optimalidad que se presenta al conmutar de un controlador a otro, solucionando así la dificultad de conmutación que se presenta en CPBM por modo dual. De acuerdo con la clasificación planteada en el capítulo 2, este tipo de CPBM pasa de llamarse CPBM por modo dual, para formar parte del grupo de CPBM con costo y restricción terminal, que se presenta en la sección 2.1.5. Un ejemplo de ello es el trabajo realizado en Gutiérrez, *et al*, (2008) donde se propone un CPBM con costo y restricción terminal, compuesto por un CPBM no lineal y un controlador predictivo lineal de horizonte infinito (IHMPC) extendido como controlador lineal. En este trabajo se modifica el funcional de costo del CPBM adicionándole el controlador lineal (IHMPC), de manera que éste último garantice la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

2.1.5 CPBM con costo y restricción terminal

Esta es la estructura en la que se enmarcan las más recientes formulaciones del CPBM. Es importante decir que en algunas de las formulaciones propuestas en las que se

garantiza estabilidad con la adición únicamente de una función de coste terminal, implícitamente se impone que la predicción alcance una vecindad del origen. En consecuencia se deben considerar también como formulaciones con restricción terminal.

Cabe resaltar que la diferencia radical con el Control Predictivo Basado en Modelo por Modo Dual, es que en el CPBM con costo y restricción terminal nunca se conmuta el control, es decir, al funcional de costo se le incorpora un costo terminal, asociado con el comportamiento que debe tener el controlador al entrar en la región Ω , hasta lograr que se alcance el punto de equilibrio.

El primer trabajo en el que se garantiza estabilidad incorporando ambos ingredientes es en (Sznaier and Damborg 1987) en el cual, para sistemas lineales sujetos a restricciones politópicas, se considera como controlador local el LQR y como región terminal un invariante asociado.

Esta misma línea se sigue en (Parisini and Zoppoli 1995) para sistemas no lineales en tiempo discreto con restricciones. Se calcula un controlador lineal basado en la linealización del modelo en torno al punto de equilibrio (análogamente al procedimiento presentado Michalska and Mayne 1993) para el cálculo de la región terminal) y se toma como coste terminal una función proporcional a la función de Lyapunov asociada al sistema linealizado en torno al origen en bucle cerrado.

En (Chen and Allgöwer, 1998) se propone CPBM no lineal con horizonte cuasi-infinito en el cual se optimiza en línea cierto funcional de costo que consiste en una integral del cuadrado del error (ISE por sus siglas en inglés: Integral of Square Error) que incluye un término cuyo costo es de horizonte finito (donde como es usual se ponderan los errores en la salida y las velocidades de cambio de la entrada y la salida) y un costo terminal sujeto a las dinámicas del sistema, restricciones de entrada y a una restricción de desigualdad terminal de estado o región de atracción del sistema (Ω). Este costo adicional que no entra en la integral es un “balanceador” o “aproximador” a una integral de optimización impropia, es decir, la integral de optimización con horizonte infinito. La factibilidad de la restricción de desigualdad terminal, implica que los estados deben estar en cierta región de atracción (Ω) al final de cierto horizonte finito, donde los estados son penalizados de tal forma que el costo terminal limita al término de costo de horizonte infinito del sistema no lineal controlado, mediante un controlador de realimentación de estados (Chen and Allgöwer, 1998). En otras palabras la integral impropia de optimización se aproxima mediante un costo adicional que entra a penalizar al sistema, solo cuando haya entrado en la región de atracción (Ω), donde un controlador de realimentación de estados garantiza estabilidad asintótica.

En (De Nicolao, et al 1998) se propone como costo terminal el costo infinito incurrido por el sistema controlado por el controlador local. Esta opción es una aproximación razonable al coste óptimo en el estado terminal, por lo que el coste del CPBM será próximo al del controlador óptimo. La región terminal es un invariante positivo del sistema controlado por el controlador local. En Magni, et al, 2001), se propone una formulación implementable del controlador predictivo anterior. Se basa en considerar como función de coste terminal una aproximación truncada del coste infinito. Pero lo más destacable de este trabajo es que considera un horizonte de predicción mayor que el de control gracias a la incorporación del controlador local.

En (Jadbabaie, *et al* 2001) se establece la estabilidad de un controlador predictivo para sistemas sin restricciones, tomando como coste Terminal una función de Lyapunov de control y sin restricción terminal.

Vale la pena resaltar que la principal desventaja del CPBM con costo y restricción terminal, al igual que en el CPBM por modo dual es el cálculo de la región Ω y pero esta vez sumado a la dificultad de hallar el término de penalización.

3. CPBM POR MODO DUAL

En este capítulo se describe el funcionamiento del CPBM por modo dual, resaltando la dificultad en el cálculo de la región terminal Ω y la pérdida de optimalidad al conmutar, como los principales aspectos por los cuales esta técnica de control ha perdido protagonismo.

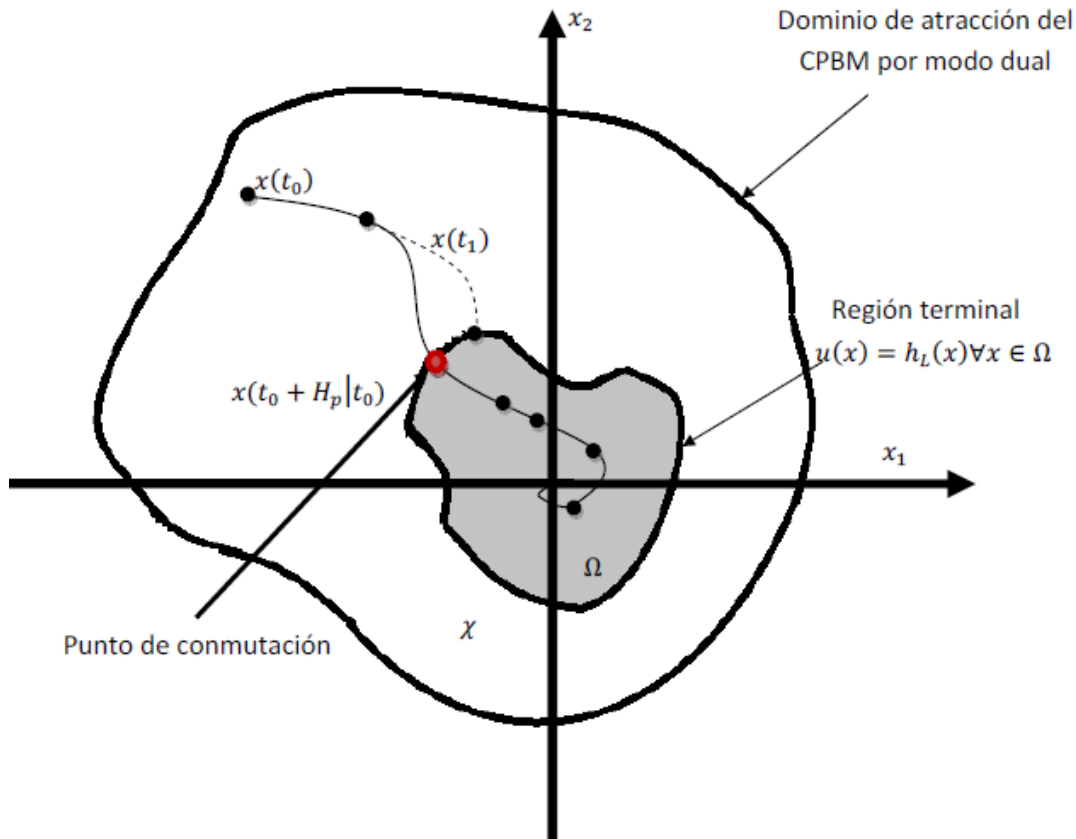
A continuación, se presenta una propuesta de cálculo de la región terminal, con el fin de obtener un procedimiento que permita mejorar las propuestas existentes para el cálculo de la región terminal. Dicha metodología es aplicable a cualquier proceso continuo no lineal. En ella se fusiona la teoría de conjuntos invariantes y algoritmos aleatorizados del tipo Monte Carlo y como resultado arroja una aproximación (politopos) al verdadero conjunto, resaltando que esta región es más grande que la que se hubiese obtenido por teoría de Lyapunov (elipse) y a menor costo computacional que si se utilizase los procedimientos actuales para hallar poliedros o politopos, mencionados en la sección 3.2.2. Finalmente en este capítulo se presenta el cálculo del dominio de atracción del CPBM para el cual se garantiza estabilidad y además se presenta una estrategia de conmutación que restringe el intervalo de acción de las acciones de control, considerando que es en este nuevo intervalo donde el modelo no lineal se comporta como lineal.

3.1 Descripción CPBM por modo dual

El Control Predictivo basado en modelo por modo dual es una técnica con estabilidad garantizada en la cual se tiene una región terminal Ω . Fuera de esta región el CPBM se encarga de controlar y llevar los estados hasta los límites de dicha región, donde se conmuta el control a un controlador local, el cual se encarga de garantizar estabilidad, es decir, retornar los estados a el valor deseado.

En la Figura 3-1 se muestra el funcionamiento de un CPBM por modo dual. La línea sólida indica la trayectoria de lazo cerrado de horizonte finito generada por un controlador predictivo, que al entrar en la región se conmuta con una ley local lineal $h(x)$ que se encarga de llevar el proceso al punto de equilibrio. La línea punteada es la trayectoria óptima generada por el CPBM en un instante de muestreo, allí se evidencia la restricción terminal de desigualdad agregada al proceso de optimización, la cual garantiza que al final del horizonte de predicción, el proceso se encuentre dentro de la región terminal Ω . En esta figura la región χ corresponde al dominio de atracción del CPBM.

Figura 3-1: Funcionamiento CPBM por modo dual



La región terminal usada en este tipo de controlador, debe cumplir las siguientes condiciones:

- El conjunto terminal cumple $\Omega \subseteq X$, es cerrado y $0 \in \Omega$.
- La ley de control local cumple $K_{\Omega}(x) \in U, \forall x \in \Omega$.
- Ω es un invariante positivo.

Es precisamente allí donde radica la dificultad, para la aplicación de este tipo de CPBM, ya que aún no se dispone de un procedimiento que permita la determinación del conjunto terminal Ω , que es un conjunto invariante para el sistema no lineal. En general, por medio de los procedimientos existentes actualmente, sólo es posible obtener regiones muy conservadoras, refiriéndose al caso de las elipses, o de alto costo computacional, como los procedimientos realizados para obtener regiones terminales en forma de polítopos o poliedros, tal como se menciona posteriormente.

Otra de las principales desventajas por las que este esquema de CPBM se ha dejado de lado es la dificultad para determinar una estrategia de conmutación, de modo que se garantice la estabilidad del conjunto en lazo cerrado (de Oliveira, 1996).

...

Luego de definir la teoría de conjuntos invariantes y el CPBM por modo dual, es preciso mencionar que mediante el uso de la teoría de conjuntos invariantes, específicamente el cálculo del conjunto estabilizable, es posible hallar una región terminal definida previamente como un conjunto invariante y el dominio de atracción ó conjunto de estados factibles del CPBM, este procedimiento se presenta posteriormente.

3.2 Estado del arte de la región terminal y su cálculo

Como ya se dijo, uno de los principales aspectos para el diseño de CPBM estable es el conjunto terminal (invariante positivo ó de control) que garantiza la factibilidad en todo instante y en consecuencia la satisfacción de las restricciones.

La necesidad de que la región terminal sea un invariante está fundamentada en la teoría de conjuntos invariantes presentada previamente. A la luz de esta teoría puede concluirse que si la región terminal es un invariante positivo, entonces el conjunto de estados factibles (dominio de atracción) es el conjunto de estados estabilizables en H_p pasos, $X_{H_p} = S_{H_p}(X, \Omega)$, siendo H_p , el horizonte de predicción del CPBM. Es decir, al hallar el conjunto de estados estabilizables a Ω , se está obteniendo el conjunto de estados $S_{H_p}(X, \Omega)$, para los cuales existe una secuencia de actuaciones admisibles tal que conducen el sistema hasta el conjunto invariante Ω en H_p pasos. Gracias a que Ω es un conjunto invariante de control, este conjunto tiene la propiedad que $X_{H_p-1} \subseteq X_{H_p}$ y por lo tanto X_{H_p} es un conjunto invariante del sistema, lo que garantiza la factibilidad del controlador en todo instante. Vale la pena resaltar que si esta región terminal no fuese un conjunto invariante, entonces, al hallar el conjunto predecesor de forma recursiva, se llegaría a un conjunto controlable $K_{H_p}(X, \Omega)$ (no estarían anidados), lo que hace que puedan existir estados iniciales factibles para los cuales el controlador no estabiliza el sistema.

Con el fin de hallar una región terminal invariante, muchos autores han recurrido a la teoría de conjuntos invariantes, ligada a la teoría de Lyapunov (Limon, 2002, Magni, et al 2001, Wills, 2003), donde la región terminal hallada es una elipse proveniente de una curva de nivel de una función de Lyapunov, este tipo de región terminal es muy conservadora. Otros autores usan representaciones poliédricas o politópicas para representar la región terminal (Kouvaritakis et al., 2002, Rohal' Ilkiv, 2004), pero si bien es cierto que son más grandes que las elipsoidales, tal como lo demuestra Cannon et al (2003), tienen un alto costo computacional asociado.

Teniendo en cuenta que un aumento en el tamaño de la región terminal supone un aumento del dominio de atracción del controlador, varios autores han encaminado sus esfuerzos al aumento de la región terminal. Tal es el caso de Chen *et al* (2003) quienes desarrollan una metodología sistemática de maximización de la región factible del CPBM de un sistema no lineal en términos del costo terminal y la ley de control estabilizante. El dominio de atracción producido por este método es más grande que el producido por el método de Chen y Ållgöwer, (1997). Este trabajo muestra que la región terminal obtenida (de forma elipsoidal) puede ser agrandada usando una técnica de optimización semi-infinita (Chen and Ållgöwer, 1998).

De Doná, *et al*, (2002), Limón, *et al*, (2003), han trabajado en el aumento de la región terminal para en sistemas lineales. Mientras En Limón *et al* (2005) y Bravo *et al* (2005) se aumenta el tamaño de la región terminal reemplazando un conjunto terminal invariante por una secuencia contractiva de conjuntos, este procedimiento se realiza para sistemas no lineales pero es linealizado posteriormente.

A pesar de los esfuerzos realizados en el tema aun no se tiene una metodología establecida que logre obtener una región más grande que las elipsoidales pero que garantice baja complejidad computacional. Lo que motiva el estudio de conjuntos invariantes en este sentido.

Como se menciona en la sección de teoría de conjuntos invariantes, por medio del cálculo recursivo del conjunto predecesor ó a un paso es posible hallar conjuntos invariantes de control como el conjunto estabilizable. En consecuencia, para conocer el estado del arte del cálculo de la región terminal basta con conocer el estado del arte del cálculo del conjunto predecesor. A continuación se realiza un recuento acerca de la forma como se ha calculado el conjunto predecesor para sistemas lineales y no lineales, siendo estos últimos los sistemas de interés en esta investigación.

3.2.1 Cálculo del conjunto predecesor para sistemas Lineales

Existen diferentes algoritmos para calcular el conjunto predecesor de sistemas lineales (Glibert and Tang, 1991), de ellos el inicial Bertsekas (1971), donde se propone una técnica para calcular el conjunto alcanzable y el conjunto predecesor basados en una aproximación elipsoidal. Esta idea posteriormente ha sido retomada por varios autores, sin embargo, la aproximación elipsoidal produce resultados conservativos. En Blanchini (1999), se presenta el cálculo del conjunto predecesor en sistemas con restricciones politópicas descritos mediante inclusiones diferenciales lineales. Actualmente uno de los trabajos más referenciados, ya que permite obtener aproximaciones mucho más precisas del conjunto alcanzable y del conjunto predecesor, es el realizado por Kerrigan (2000), quien se ocupa de sistemas lineales a tramos, y además desarrolló un software basado en politopos y cuyo fundamento se describe en el anexo E.

3.2.2 Cálculo del conjunto predecesor para sistemas No lineales

El cálculo del conjunto predecesor para sistemas no lineales es aún un problema abierto, existen algunas propuestas en las cuales el modelo no lineal se linealiza para utilizar las técnicas mencionadas en la sección anterior (Rakovic *et al*, 2006, Kerrigan ,2000, Goncalves and Hamadeh, 2005); no obstante, aún no queda claro que ocurre en los puntos de transición de una linealización a otra.

Es poca la bibliografía encontrada en cuanto al cálculo conjunto predecesor de sistemas no lineales, a continuación se presenta la metodología usada por Bravo (2005), seguida de la usada por Gutiérrez (2007).

- *Cálculo del conjunto predecesor para sistemas no lineales propuesto por Bravo (2005)*. Como se mencionó anteriormente la región terminal es un invariante de control que se puede calcular usando el cálculo del conjunto a un paso ó predecesor de forma recursiva. En Bravo *et al* (2005) se propone una técnica

basada en aritmética intervalar, que permite calcular una aproximación del conjunto alcanzable y predecesor directamente sobre el modelo no lineal. El algoritmo intervalar propuesto por Bravo es de ramificación y poda y consiste en dividir el espacio de estados en zonotopos (conjunto de politopos) realizar el mapeo y verificar cuales zonotopos pertenecen al conjunto de llegada Φ , obteniéndose como respuesta tres posibles casos.

- a. Al realizar el mapeo, el zonotopo obtenido no pertenece a la región Φ , por lo tanto este zonotopo se descarta.
- b. Al realizar el mapeo, el zonotopo obtenido pertenece a la región Φ , por lo tanto este zonotopo se almacena, para la respuesta final, $Q(\Phi)$.
- c. Al realizar el mapeo, una parte del zonotopo pertenece a Φ , y otra no. En este caso no es posible identificar que parte esta fuera para eliminarla, por lo tanto se procede a dividir el zonotopo, tantas veces como sea necesario hasta obtener como respuesta la opción a) ó b). De allí en nombre de algoritmo de ramificación y poda.

Con el procedimiento anteriormente descrito se obtiene una aproximación del conjunto predecesor con un alto costo computacional, de hecho, la complejidad aumenta exponencialmente con la dimensión del sistema. Así pues, en la actualidad el cálculo del conjunto predecesor para sistemas no lineales es aún un tema abierto de investigación.

- *Cálculo de la región terminal para sistemas No lineales propuesto por Gutiérrez (2007).* Este autor usa una técnica basada en heurística para hallar la región terminal, donde se considera que la región terminal Ω , de un CPBM no lineal por modo dual implementado a un CSTR, es la región controlable de un PI. Allí, dicha región se halla por medio de los valores límite de las perturbaciones para los cuales se inestabiliza el proceso en lazo cerrado. La metodología llevada a cabo por Gutiérrez (2007) requiere una gran cantidad de cálculos debido a que para encontrar dicha región se debe:
 - Trazar una malla alrededor del estado estacionario, esta malla debe trazarse lo más fina posible con el fin de abarcar la mayor cantidad de condiciones iniciales posibles, en Gutiérrez (2007) se tienen aproximadamente 232.600 condiciones iniciales de acuerdo con el ancho de malla elegido.
 - Encontrar los valores límite de perturbación para los cuales se inestabiliza el sistema en lazo cerrado: En el simulador del proceso en lazo cerrado, se aplica un cambio de escalón en cada una de las perturbaciones (una a la vez) hasta que el sistema se inestabilice, tomando como límite el valor de la perturbación antes del cual el controlador no consigue retornar el sistema al punto de ajuste. Los escalones se deben hacer tanto por encima como por debajo del valor nominal, obteniendo dos valores límite para cada perturbación ($d_{j\text{máx}}$ y $d_{j\text{mín}}$).
- a. Con las diferentes condiciones iniciales de la malla, se simula el proceso en lazo cerrado, para cada condición inicial se realizan dos experimentos, comenzando la (ó las según el caso) acción de control en el valor máximo y comenzando la acción de control en el valor mínimo ($t=0$) ($u_i, t=0 = u_{i\text{máx}}$ ó $u_{i\text{mín}}$ con $i=1, 2, \dots, \text{número de controladores PI}$) y cada una de las perturbaciones en los valores límite de estabilidad ($d_j = d_{j\text{máx}}$ ó $d_{j\text{mín}}$ para la perturbación j) mientras las demás perturbaciones se conservan en su valor nominal ($d_k = d_{\text{nominal}}$ con $k=1, \dots, k_j$). En cada condición inicial simulada bajo ($d_j, u_i, t=0$), se verifica si el proceso en lazo cerrado regresa al estado estacionario (EE). Si no retorna el proceso al EE, la condición inicial se almacena como un punto de inestabilidad.

En resumen para el CSTR tratado se tiene: dos estados (dos PI), dos acciones de control, tres perturbaciones (d_1 , d_2 , d_3), luego para cada condición inicial se deben realizar 24 experimentos, según se muestra en la Figura 3-2.

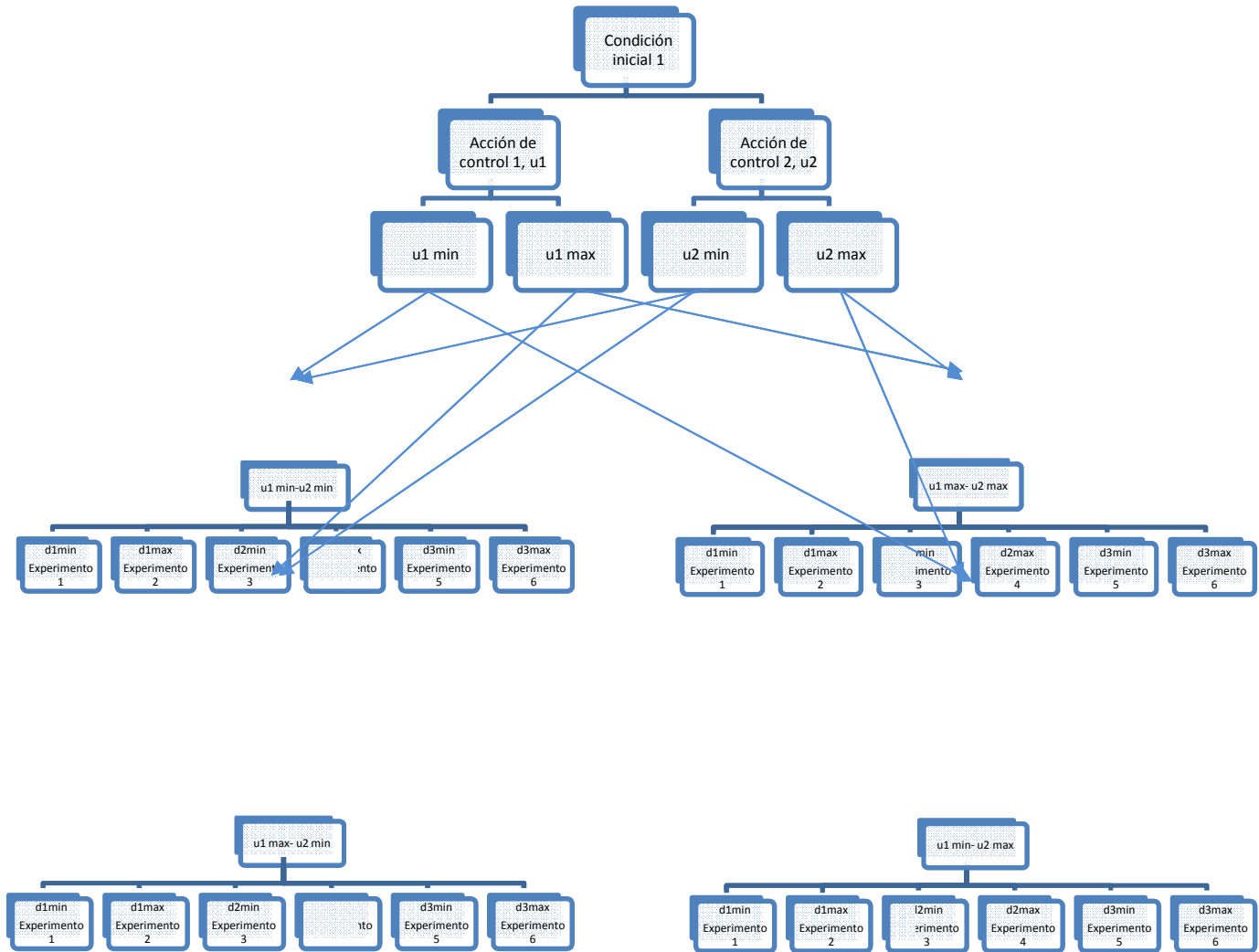
Esto indica que se deben realizar aproximadamente 6 millones de cálculos, esto sin contar los que se deben realizar para hallar los valores máximos y mínimo de perturbación.

Esta metodología además de ser costosa computacionalmente presenta otras falencias como no cubrir todo el espacio de las condiciones iniciales de la malla, es posible que en uno de los espacios de la malla, que no se tuvo en cuenta, se presente inestabilidad, además se desconoce el error con que fue obtenido el conjunto.

...

Los procedimientos mostrados previamente motivan el interés de hallar un procedimiento que permita obtener una región terminal más grande que las elipses y que implique menor complejidad computacional que las propuestas actuales. Además que esta sea diseñada para un controlador como el PI, debido que generalmente este es el tipo de controladores que se tienen implementados en la industria. A continuación se presenta la propuesta de cálculo de la región terminal, seguido de la propuesta de conmutación planteada en esta tesis.

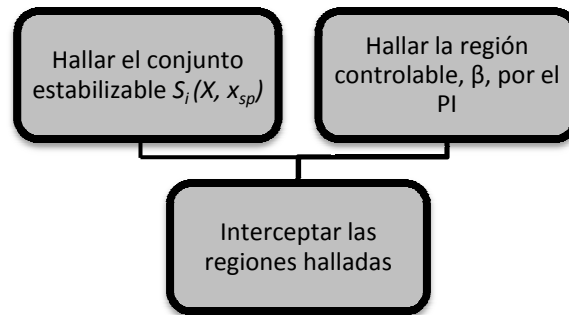
Figura 3-2: Experimentos realizados en Gutiérrez (2007) para cada condición inicial.



3.3 Propuesta de cálculo de la región terminal.

El cálculo de la región terminal, implica hallar una región en la cual el controlador local estabilice el sistema, es decir, en términos de la teoría de conjuntos invariantes, es necesario hallar el conjunto estabilizable para el controlador local usado en esta tesis: PI. Para ello se propone el procedimiento que se indica en la Figura 3-3, el cual se explica a continuación.

Figura 3-3: Metodología propuesta para cálculo de región terminal



3.3.1 Hallar el conjunto estabilizable $S_i(X, Y_{sp})$

En el conjunto estabilizable $S_i(X, Y_{sp})$, Y_{sp} es el punto de ajuste de los estados. Es decir, si estuviese linealizado, se estaría hallando el conjunto estabilizable al origen. Tal como se mencionó en la sección 1.4.9. Este punto es un invariante positivo, por lo tanto, al hallar el conjunto predecesor recursivamente, debe obtenerse conjuntos anidados, es decir conjuntos invariantes $S_i(X, Y_{sp})$.

Para realizar el cálculo del conjunto estabilizable, se debe realizar el siguiente procedimiento:

$$S_{i+1}(X, Y_{sp}) = Q(S_i(X, Y_{sp})) \cap X \tag{3-1}$$

Con $S_0(X, Y_{sp}) = Y_{sp}$

Donde basta con conocer como se calcula el conjunto predecesor de un conjunto dado para proceder a realizar la secuencia. Por tal razón, en adelante los esfuerzos estarán encaminados a proponer la forma de calcular el conjunto predecesor a la luz de la teoría de conjuntos invariantes y algoritmos aleatorizados.

- Cálculo del conjunto predecesor

Los algoritmos desarrollados hasta ahora para realizar el cálculo del conjunto predecesor, son bastante complejos computacionalmente (Bravo, 2005, Gutiérrez, 2007). Esta situación ha provocado que las exponencialmente con el orden del sistema, como es el caso del algoritmo basado en aritmética intervalar propuesto para el cálculo del conjunto predecesor para sistemas no lineales por Bravo (2005). Quizás el problema más abordado en la teoría de control por medio de los algoritmos aleatorizados aplicaciones de la teoría de conjuntos invariantes donde se requiera el cálculo del conjunto predecesor sólo se haga para sistemas lineales (Kerrigan, 2000). Es por esto que es necesario desarrollar técnicas viables computacionalmente para el cálculo del conjunto predecesor para sistemas no lineales.

En varios problemas de control donde los problemas son intratables o muy complejos computacionalmente las técnicas de algoritmos aleatorizados (Anexo F) han mostrado ser una buena alternativa (Vidyasagar, 1998), especialmente en aquellos problemas donde la complejidad aumenta es la síntesis de controladores robustos, donde se destacan los trabajos realizados por Calfiore, *et al.* (2000, 2000a y 2003) y los trabajos de Vidyasagar (1998, y 2001). Otros problemas tratados por medio de los algoritmos aleatorizados son el de análisis de Controlabilidad/Alcanzabilidad de sistemas híbridos (Azuma and Imura 2004 y 2004a) y el cálculo de alcanzabilidad en tiempo continuo (Niarchos and Lygeros, 2006).

Recientemente en su tesis de doctorado Gómez (2009), propone tratar el problema de hallar el conjunto alcanzable y predecesor de sistemas no lineales a través de un algoritmo aleatorizado, y se formaliza su uso con un error y riesgo de fallo determinados *a priori*. Siguiendo esta línea en la presente tesis se propone hallar el conjunto estabilizable usando algoritmos aleatorizados.

El objetivo de esta sección es ilustrar el cálculo del conjunto estabilizable $S_i(X, \Omega)$, expuesto en la sección 1.4.9. Debido a su complejidad, primero se desarrolla el algoritmo para el cálculo del conjunto alcanzable de sistemas no lineales y luego se extiende el procedimiento descrito para el caso del conjunto predecesor, finalmente por medio de un proceso iterativo se halla el conjunto estabilizable.

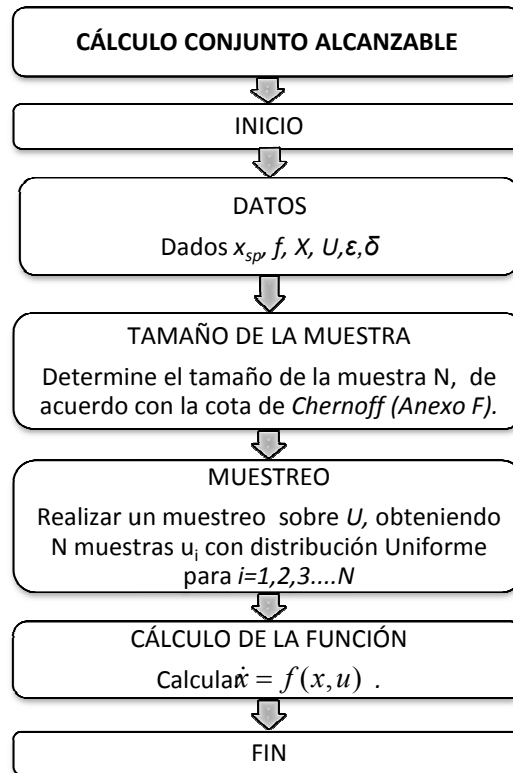
Algoritmo aleatorizado para el cálculo del conjunto alcanzable y conjunto predecesor

En la Figura 3-4 se muestra el procedimiento seguido para hallar el conjunto alcanzable de un sistema no lineal, usando algoritmos aleatorizados.

El algoritmo mostrado inicia determinando el tamaño de muestra de datos a tomar, luego realiza un muestreo basado en un algoritmo aleatorizado de Monte Carlo, posteriormente calcula la función.

Luego de tener claro el procedimiento seguido para el cálculo del conjunto alcanzable vale la pena recordar la relación que existe entre éste y el predecesor. Tal como lo indica la Figura 1-4, el cálculo del conjunto alcanzable se entiende como: dado un conjunto de partida, se debe hallar el conjunto de llegada o alcanzable, mediante unas acciones de control admisibles. Mientras en el conjunto predecesor, se tiene que dado un conjunto de llegada, se debe encontrar desde que conjunto de estados puede partir un sistema para que al aplicar unas actuaciones de control admisibles, logre ser llevado al conjunto de llegada dado. En pocas palabras, el conjunto de partida que en el alcanzable se tiene como dato inicial, en el conjunto predecesor se quiere obtener.

Figura 3-4: Algoritmo de cálculo conjunto alcanzable



Teniendo en cuenta esta reciprocidad, para extender el algoritmo aleatorizado propuesto se hace uso de la siguiente propiedad que relaciona el conjunto alcanzable y el conjunto predecesor (Sontag, 1998) mencionada anteriormente.

Propiedad. $R^{-T}(x) = Q^T(x)$

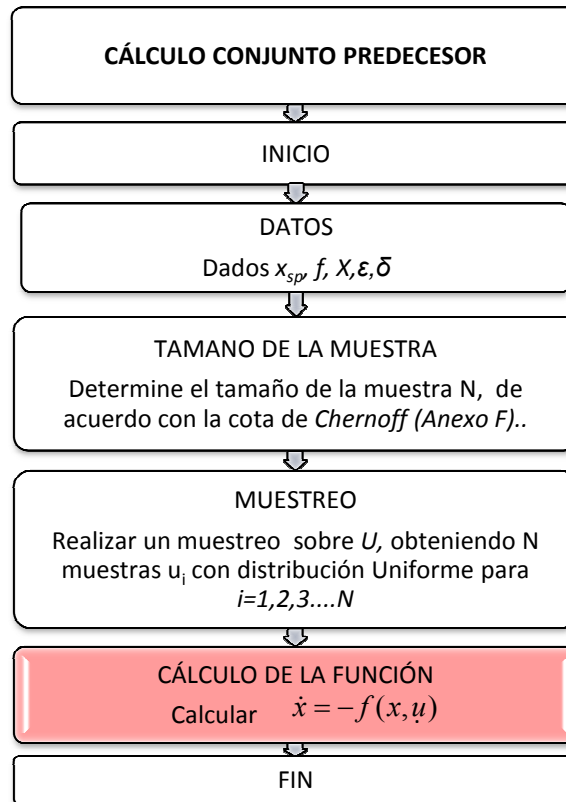
Observación.

- > La expresión $R^{-T}(x)$ indica que el conjunto alcanzable se calcula solucionando el sistema en tiempo inverso.
- > Esta propiedad para el caso de sistemas no lineales discretos tiene la desventaja de requerir la función inversa f^{-1} que en algunos casos puede no existir; mientras que para el caso continuo basta reemplazar f por $-f$. Generalmente los modelos que describen procesos físicos son obtenidos basados en las leyes físicas que rigen el fenómeno y que normalmente se expresan por medio de ecuaciones diferenciales, por lo tanto es posible utilizar el sistema en tiempo inverso del sistema continuo y luego tomar las muestras que serían de interés para el caso discreto. Más aun, los modelos continuos para ser implementables en un equipo de cómputo deben discretizarse usando un método de integración (como por ejemplo el Runge Kutta), obteniéndose de hecho un modelo discreto. No obstante, si el tiempo de discretización es lo suficientemente pequeño, entonces la respuesta del modelo discreto coincide con la del modelo continuo.

Con base en este hecho es viable utilizar el procedimiento para calcular el conjunto alcanzable a un paso de un sistema no lineal en tiempo discreto para obtener el conjunto predecesor a un paso de un sistema no lineal en tiempo discreto (Gómez, 2009).

- A modo de conclusión para calcular el conjunto predecesor basta con seguir el algoritmo expuesto para calcular el conjunto alcanzable, pero esta vez solucionar la ecuación tiempo inverso, tal como se indica en la Figura 3-5, donde el recuadro rosa resalta el único cambio realizado en el algoritmo.

Figura 3-5: Algoritmo de cálculo conjunto predecesor



Finalmente es posible obtener el conjunto estabilizable $S_i(X, Y_{sp})$ siguiendo la secuencia mostrada en la sección 1.4.9.

$$S_{i+1}(X, x_{sp}) = Q(S_i(X, x_{sp})) \cap X \tag{3-2}$$

Generalmente este conjunto estabilizable no está finitamente determinado es decir no existe un i^* , tal que $S_{i+1}(X, Y_{sp}) = S_i(X, Y_{sp})$. Por esta razón es necesario complementar el algoritmo con el siguiente paso donde se halla la región controlable del PI.

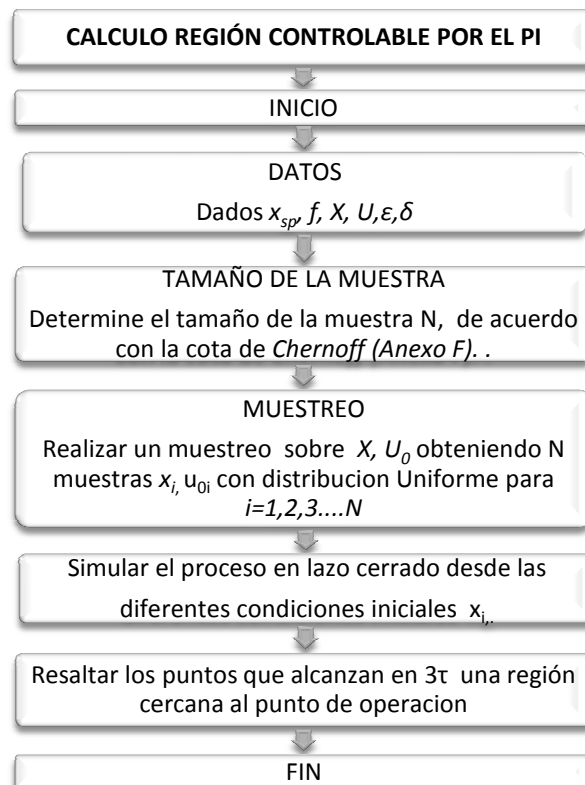
3.3.2 Hallar la región controlable β del PID.

Para hallar la región controlable del PI, se realiza un procedimiento similar al que se presenta en Gutiérrez (2007), solo que esta vez se usa el muestreo de Montecarlo para evitar realizar cálculos que duplican los resultados, es decir, mientras en Gutiérrez (2007) es necesario realizar 6 millones de cálculos, en este algoritmo se realizan aproximadamente 30 mil, según se explica en el capítulo de aplicación (4). El procedimiento realizado se indica en la Figura 3-6.

En este algoritmo se realiza un muestreo uniforme sobre el espacio de estados X . Luego, el valor de las acciones de control en el instante inicial se determina también con base en un muestreo uniforme de U_0 , donde se considera $U_0 = U$, es decir el algoritmo considera todas los posibles valores que podrían tomar las acciones de control al inicio del proceso de acuerdo con las restricciones (U), no solo los valores extremos como se realiza en Gutiérrez (2007). Teniendo en cuenta la teoría de Monte Carlo planteada en el Anexo F, bastaría con probar una condición inicial del espacio de estados con una condición inicial de acción de control, sin necesidad de probar todas las posibles combinaciones ya que, al realizar una mapeo uniforme ya esto queda garantizado.

Finalmente por medio de este procedimiento es posible obtener una región que el PI puede conducir en un tiempo de 3τ , a una región cercana al punto de operación, ya que desde el punto de vista matemático la probabilidad de que el sistema llegue al punto de operación exacto es cero. Vale la pena resaltar que el τ usado en esta propuesta, a pesar de tratarse de un sistema no lineal, se halla linealizando el modelo y hallando tantos τ (tiempos de respuesta) como estados tenga el sistema. Luego el valor del τ usado corresponde al mayor de los τ obtenidos, ya que este corresponde a la dinámica más lenta del sistema.

Figura 3-6: Algoritmo de cálculo región controlable PI.



3.3.3 Intersección del conjunto $S_i(X, Y_{sp})$ con la región β

Con la intersección se busca realizar una mejora a la región hallada en Gutiérrez (2007) donde se halla una región de estados controlables, es decir se tiene certeza de que estos estados retornan al punto de operación, pero se desconoce la trayectoria que seguirán para alcanzar este objetivo, por lo tanto, no se tiene garantía de que esta región sea un conjunto invariante del sistema. Mientras al interceptar, la región β con las obtenidas al hallar el conjunto estabilizable, puede concluirse que los estados que pertenecen a la región terminal alcanzan el punto de operación y además una vez ingresan a ella no la abandonan, es decir es un conjunto invariante de control, garantizando así la factibilidad del controlador CPBM por modo dual

3.4 Cálculo dominio de atracción

En esta propuesta para el diseño del CPBM dual, se propone además de una región terminal invariante positiva para el sistema a lazo cerrado, una región de estados factibles del problema de optimización ó dominio de atracción, es decir, no sólo basta con garantizar que el sistema una vez ingrese a la región terminal nunca la abandona, sino que además se debe garantizar que el sistema es capaz de llegar a dicha región terminal satisfaciendo las restricciones impuestas. En otras palabras se debe hallar el dominio de atracción para el cual el CPBM es estable.

A continuación se muestra el procedimiento seguido para el cálculo del dominio de atracción, vale la pena resaltar que dicho procedimiento se realiza también a la luz de la teoría de conjuntos invariantes.

Teniendo en cuenta que para el CPBM diseñado en esta investigación, el horizonte de predicción es mayor que el control ($H_p > H_c$), y además la región terminal Ω es un conjunto invariantes del sistema, entonces (Mayne et. al, 2000):

El conjunto de estados factibles, es el conjunto de estados estabilizables en H_p pasos, al conjunto terminal Ω :

$$S_{i+1}(X, \Omega) = Q(S_i(X, \Omega)) \cap X \tag{3-3}$$

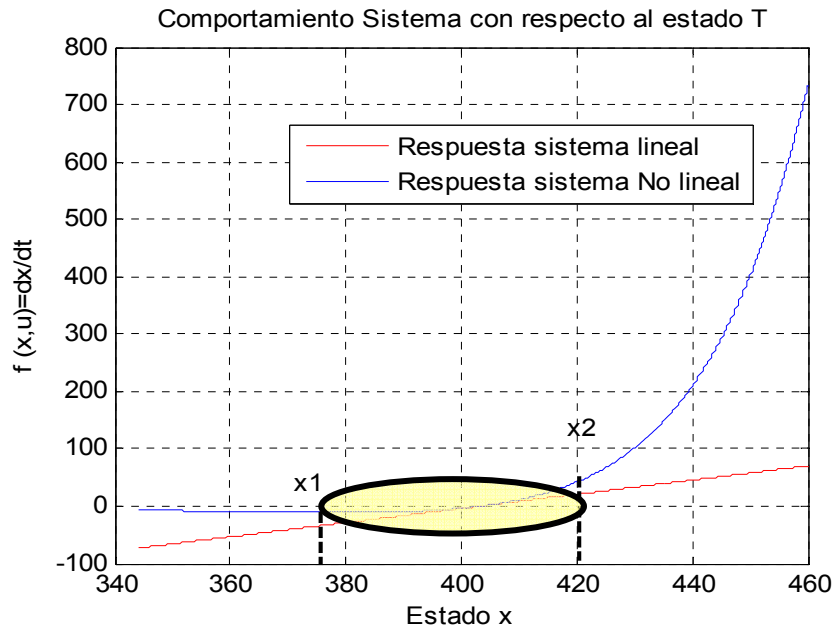
Dada la ausencia de discrepancias entre el modelo de predicción y el sistema, el estado al que evoluciona el sistema al cabo de H_p , estará dentro de la región terminal.

3.5 Propuesta de conmutación

Con el fin de evitar cambios traumáticos al conmutar del CPBM al PI, en esta investigación se propone restringir el elemento final de control, para darle únicamente autonomía al PI en una región en la cual el sistema a pesar de ser no lineal, se comporta como un sistema lineal, que es precisamente lo que se asume en la región terminal Ω , esta restricción está de acuerdo con el principio de funcionamiento del PI, el cual consiste en linealizar el modelo alrededor del punto de operación.

Para ello es necesario realizar una simulación en la cual se compare el modelo lineal con el modelo no lineal. Para fines ilustrativos, la Figura 3-7, muestra el comportamiento de x Vs. \dot{x} , para el modelo no lineal y x Vs. \dot{x} , para el modelo lineal donde x , indica las salidas o estados del sistema y \dot{x} la respuesta del sistema según sea el caso (lineal o no lineal).

Figura 3-7: Comparación entre modelo lineal y no lineal



Luego, la sombra amarilla resalta el intervalo de los estados para los cuales el sistema tiene un comportamiento lineal, limitado por los estados x_1 y x_2 . Este intervalo se toma teniendo en cuenta una similitud porcentual entre el modelo lineal y no lineal, determinada por el diseñador.

Luego, estos valores de x_1 y x_2 de ben ser traslapados con los resultados obtenidos en la sección 3.3.1, donde se halla el conjunto $S_i(X, Y_{sp})$. Es decir, se debe detectar a que paso i corresponden los límites de estado determinados en la Figura 3-7.

Posteriormente se procede a encontrar las acciones de control (u_1 y u_2) que corresponden a los valores de los estados que bordean la región estabilizable $S_i(X, Y_{sp})$, identificadas de acuerdo con los límites. Finalmente, hallando los valores máximos y mínimos de las acciones de control halladas, es posible encontrar el intervalo restrictivo para el ó las acciones de control del sistema.

Para un mayor entendimiento acerca de cómo realizar el procedimiento, ver sección 4.4.2 donde se aplica este procedimiento a un reactor continuamente agitado (CSTR).

Vale la pena resaltar que otro punto importante en la estrategia de conmutación es el funcionamiento incondicional del PID, es decir, a pesar de que el sistema se encuentre fuera de la región terminal y sean las acciones de control generadas por el CPBM las

que ingresen al sistema, el PI debe estar continuamente almacenando los estados, y calculando las acciones de control necesario, esto con el fin de que en el momento que el sistema ingrese a la región terminal, el PI se encuentre al tanto de lo que ha sucedido, y haciendo uso del error acumulado pueda tomar una mejor decisión acerca del cálculo de las acciones de control posteriores.

4. Ejemplo ilustrativo

Para ilustrar la estrategia de CPBM por modo dual propuesta en esta tesis; esto es, realizando el procedimiento de cálculo de la región terminal con base en la teoría de conjuntos invariantes y los algoritmos aleatorizados, junto con la propuesta de conmutación, en este capítulo se aplica este controlador sobre el modelo de un sistema altamente no lineal: un reactor continuamente agitado de mezcla perfecta (CSTR), el cual es considerado un problema de referencia en la literatura de control de procesos y cuyo modelo se describe al inicio de este capítulo.

Posteriormente, en este capítulo se presenta la formulación de un controlador PID y un CPBM tradicional con el fin de comparar los resultados obtenidos por estos controladores con los arrojados por el CPBM por modo dual propuesto. En la formulación de este último, se presenta la estrategia de cálculo de la región terminal propuesta en el capítulo anterior. Vale la pena que todos los resultados que se muestran a continuación fueron obtenidos por medio de simulación, usando Matlab 2009a.

4.1 Modelo de reactor continuamente agitado (CSTR)

A continuación se presenta el modelo de un sistema altamente no lineal: un reactor continuamente agitado (CSTR), sobre este modelo será evaluado el desempeño del controlador predictivo por modo dual propuesto en esta tesis, comparado con el desempeño obtenido aplicando a este sistema un CPBM convencional y un controlador PI.

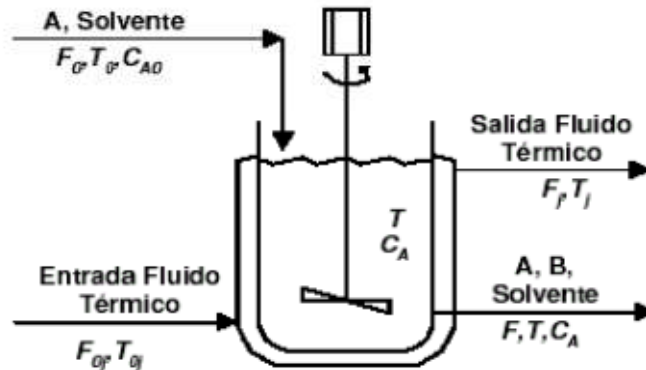
En este CSTR toma lugar una reacción exotérmica, irreversible de descomposición.



4-1

El carácter exotérmico de la reacción provoca una continua generación de calor, el cual es evacuado por medio de una camisa de refrigeración por la que circula refrigerante, tal como se muestra en la Figura 4-11.

Figura 4-1: Reactor continuamente agitado (CSTR)



El modelado de este sistema se puede encontrar en (Henson and Seborg, 1990) y se hace bajo las siguientes hipótesis o simplificaciones:

- I. Se supone mezcla perfecta, por lo que la concentración de reactivo en el caudal de salida C_A es igual a la concentración en el seno del tanque.
- II. La reacción responde a una cinética de primer orden, por lo que la velocidad de reacción es $r_A = k \cdot C_A$ siendo k la constante cinética, que responde a la ley de Arrhenius.

$$k = k_0 \cdot \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \quad 4-2$$

Siendo E la energía de activación de la reacción, R la constante de los gases y k_0 la constante de frecuencia.

- III. La temperatura en el reactor es uniforme, se desprecian los efectos térmicos como la transferencia de calor con el medio o el aporte de energía interna del agitador.
- IV. Se supone que el nivel del líquido se encuentra controlado, de forma que el caudal de entrada al tanque de reactivo F_0 es igual al caudal de salida de producto. En consecuencia el volumen de líquido contenido en el tanque es constante.

Considerando estas simplificaciones se establecen las ecuaciones de balance de masa y energía en el reactor, que dan lugar a las ecuaciones diferenciales que modelan este proceso (Henson and Seborg, 1990):

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F_0(C_{A0} - C_A)}{V} - k_0 C_A \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \quad 4-3$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{F_0(T_0 - T)}{V} - \frac{\Delta H_r k_0 C_A \exp\left(-\frac{E}{RT}\right)}{C_p \rho} + \frac{C_{pj} \rho_j F_j}{C_p \rho V} (T_{0j} - T) \left[1 - \exp\left(-\frac{UA}{C_{pj} \rho_j F_j}\right)\right] \quad 4-4$$

Donde C_A es la concentración del reactivo A en el tanque, T es la temperatura en el mismo y T_{0j} es la temperatura del refrigerante, C_{A0} , T_0 y F_0 son la concentración de A, la temperatura y el caudal del flujo de entrada, V el volumen de líquido contenido en el tanque.

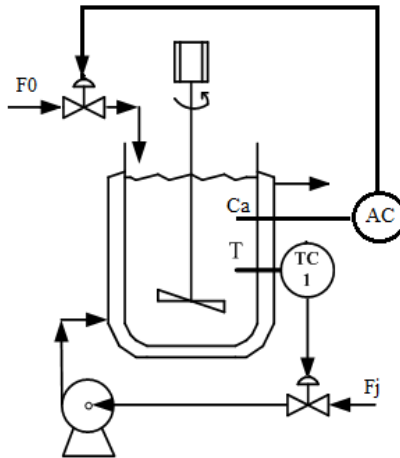
En la Tabla 4-1 se muestran las condiciones de operación y los parámetros usados en la simulación del CSTR.

Tabla 4-1: Parámetros usados en el modelo del CSTR

Símbolo	Descripción	Valor
F_0	Flujo de alimento	100 l/min
C_{A0}	Concentración de reactivo en el alimento	1 mol/l
T_0	Temperatura en el alimento	310 K
V	Volumen del tanque	1000 l
ρ	Densidad de la solución en el reactor	1000 g/l
C_p	Capacidad calorífica de la solución en el reactor	1 cal/g.K
(ΔH_r)	Calor de reacción	$-2x 10^5$ cal/mol
E/R	Factor exponencial	$9.98x 10^3$ K
k_0	Factor de frecuencia	$7.2 x 10^{10}$ min ⁻¹
UA	Coefficiente global de la transferencia de calor x Área	$7x 10^5$ min/K
T_{0j}	Temperatura del líquido refrigerante	310K
C_A	Concentración de reactivo A	0.0753 gmol/l
T	Temperatura en el reactor	402.51 K
ρ_j	Densidad del líquido refrigerante	1000 g/l
C_{pj}	Capacidad calorífica del líquido refrigerante	1 cal/g.K
F_j	Flujo de líquido refrigerante	100 l/min

4.2 Formulación controladores PID.

En esta sección se presenta la formulación de dos controladores PI, para controlar cada uno de los estados del CSTR, Concentración (Ca) y temperatura (T). En esta formulación, Ca es controlada por medio del movimiento de válvula del flujo de entrada de alimento (F_0), mientras la temperatura es controlada mediante el movimiento de la válvula del flujo de entrada de refrigerante a la chaqueta (F_j), Es decir, estos dos lazos ejecutan sus acciones de control de forma independiente, pero estas dinámicas están acopladas según se muestra en la ecuación 34 y 35.



Vale la pena resaltar que a pesar de que la apertura de válvulas disponible en el proceso es de 0 a 200 l/min, los elementos finales de control del PI solo disponen de un intervalo de 60 a 140 l/min, esta consideración se realiza teniendo en cuenta las consideraciones presentadas en la sección 3.4 para la propuesta de conmutación, donde se indica que para este intervalo de válvula el sistema CSTR que es no lineal, se comporta como un sistema lineal que es lo que se espera en las regiones aledañas al punto de operación. Tal como se muestra en la sección 3.4.

A continuación se presenta la formulación de los controladores PI usados en esta aplicación los cuales conservan la formulación de un PI, en su representación continua.

$$F_0 = F_{0EE} + \frac{100}{BP_{Ca}} (Ca_{SP} - Ca(t)) + \frac{K_{pCa}}{tI_{Ca}} \int_0^t (Ca_{SP} - Ca(t)) dt \quad 4-5$$

$$F_j = F_{jEE} + \frac{100}{BP_T} (T_{SP} - T(t)) + \frac{K_{pT}}{tI_T} \int_0^t (T_{SP} - T(t)) dt \quad 4-6$$

Donde los F_{0EE} y F_{jEE} , son los valores del flujo de alimento y de refrigerante en estado estacionario. Los parámetros de sintonía $K_{pCa}, tI_{Ca}, K_{pT}, tI_T$, fueron obtenidos por el método de quimiotactismo bacteriano descrito en la sección 1.2.2, partiendo un valor semilla :

$$[K_{pCa} \ tI_{Ca} \ K_{pT} \ tI_T] = [100 \ 0.01 \ 15 \ 1]$$

Y usando el funcional de costo que se describe en la ecuación 57.

$$FC = \alpha \sum_{i=0}^t (Ca(t) - Ca_{Sp}) + \varphi \sum_{i=0}^t (T(t) - T_{Sp}) \quad 4-7$$

Donde $\alpha = 1000$ y $\varphi = 0.01$, estos se determinaron teniendo en cuenta que la dinámica de la temperatura es más rápida que la de la concentración. Finalmente los parámetros de sintonía obtenidos son:

$$[BP_{Ca} \ tI_{Ca} \ BP_T \ tI_T] = [0.100 \ 30 \ 0.5421 \ 28.17]$$

A cada uno de los elementos finales de control (F_0, F_j) se les implementa el de una válvula de control con dinámica de primer orden donde $K_v = 1$ y $\tau = 0.5$.

Finalmente, la programación de los controladores se realiza en Simulink, como se muestra en las figuras **Figura 4-2**,

Figura 4-3 y **Figura 4-4**. Los resultados arrojados por estos controladores se muestran posteriormente.

Figura 4-2: Programación modelo CSTR con controladores PI

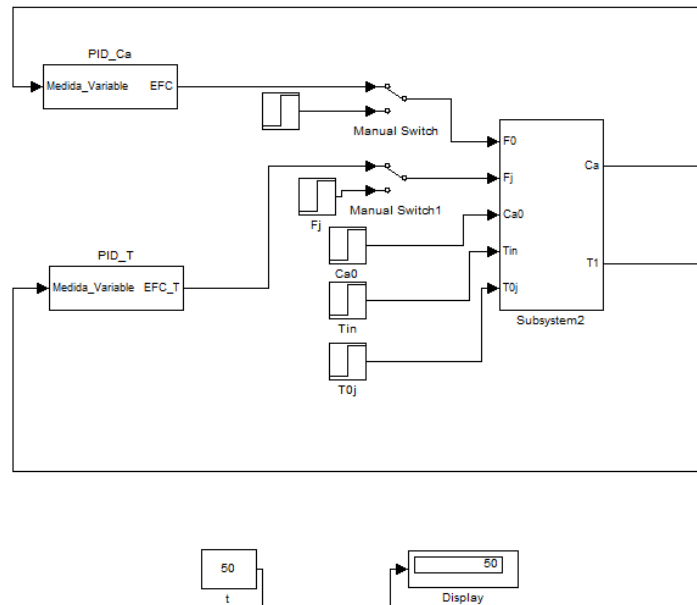


Figura 4-3: Programación PI concentración implementado en Simulink.

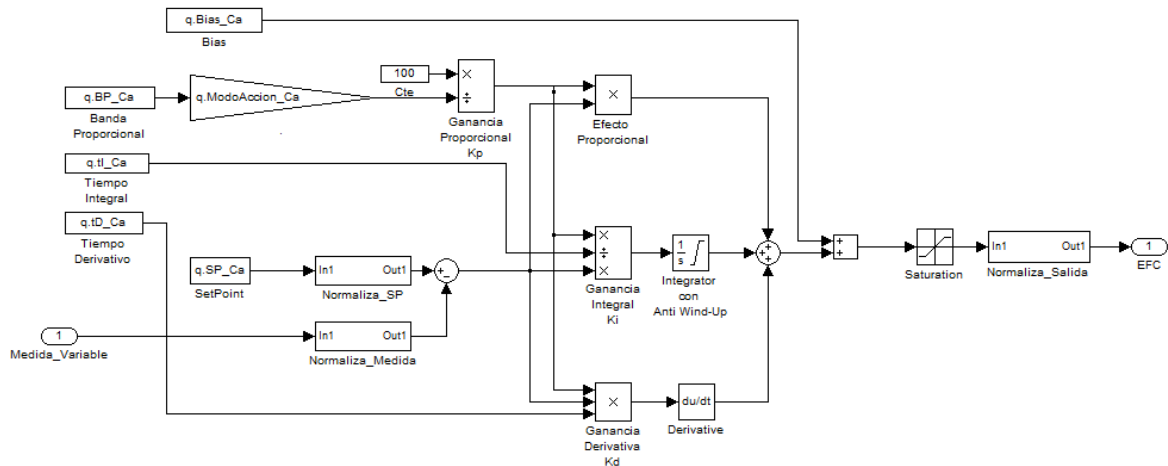
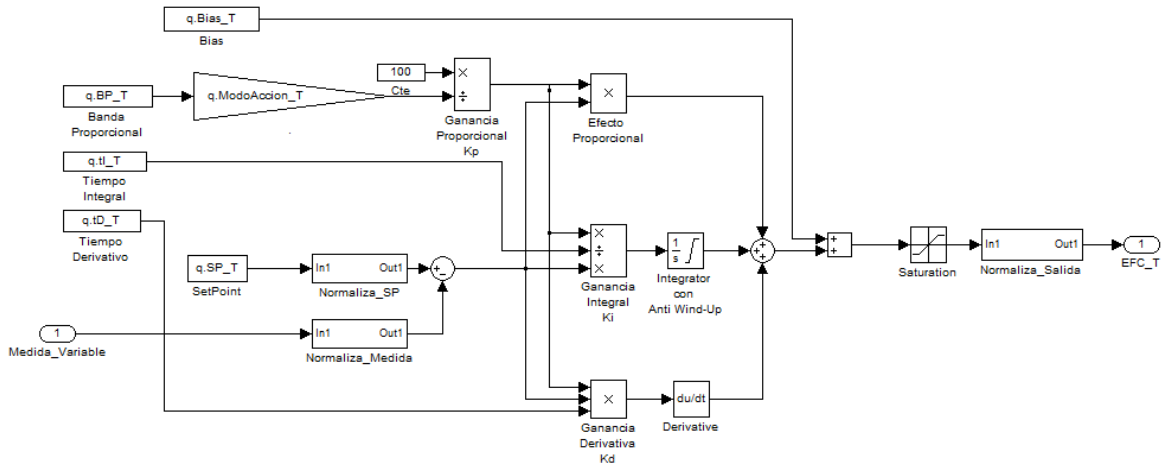


Figura 4-4: Programación PI temperatura implementado en Simulink.



4.3 Formulación controlador CPBM

A continuación se presenta la formulación del CPBM implementado, el cual en adelante se denominara CPBM convencional, con el fin de evitar confusiones con el CPBM por modo dual.

Como ya se explicó, la estrategia de horizonte que se utiliza en el CPBM, hace que en cada periodo de muestreo se resuelva un problema de optimización que tiene la forma:

$$\min_u J_N(x_k, u_k) \tag{4-8}$$

$$s. a \tag{4-9}$$

$$x(k + j|k) \in X \quad j = 0, \dots, H_p - 1$$

$$u(k + j|k) \in U \quad j = 0, \dots, H_p - 1 \tag{4-10}$$

Siendo el funcional de costo a optimizar:

$$J_N(x_k, u_F(k)) = \alpha \sum_{i=1}^{H_p} [\hat{x}_{N1}(k + i|k) - x_{N1ref}(k + i)]^2 + \lambda \sum_{i=1}^{H_c} [\Delta u_{N1}(k + i - 1)]^2 + \gamma \sum_{i=1}^{H_p} [\hat{x}_{N2}(k + i|k) - x_{N2ref}(k + i)]^2 + \delta \sum_{i=1}^{H_c} [\Delta u_{N2}(k + i - 1)]^2 \tag{4-11}$$

Donde H_p es el horizonte de predicción, que este caso tiene un valor de 10, H_c es el horizonte de control que se toma igual a 1. \hat{x}_{N1} y \hat{x}_{N2} son los estados predichos por el

modelo, normalizados C_a y T , al igual que u_{N1} y u_{N2} , que se refieren a las acciones de control (F_0, F_j) normalizadas, de la siguiente forma:

$$\hat{x}_{N1} = \frac{\hat{x}_1 - x_{1min}}{x_{1max} - x_{1min}} \quad \hat{x}_{N2} = \frac{\hat{x}_2 - x_{2min}}{x_{2max} - x_{2min}} \quad 4-12$$

$$u_{N1} = \frac{u_1 - u_{1min}}{u_{1max} - u_{1min}} \quad \hat{x}_{N2} = \frac{u_2 - u_{2min}}{u_{2max} - u_{2min}} \quad 4-13$$

El mismo procedimiento se realiza con x_{N1ref}, x_{N2ref} , considerando:

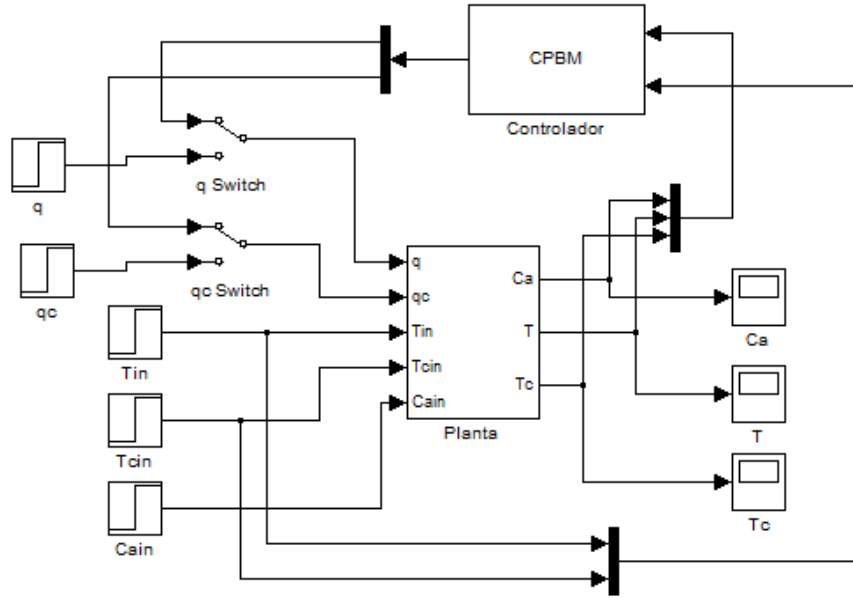
$$x_{1min} = 0 \text{ mol/l}, x_{1max} = 1 \text{ mol/l}, x_{2min} = 302 \text{ K}, x_{2max} = 460 \text{ K}.$$

Luego de tener el funcional de costo normalizado, los parámetros de sintonía considerados fueron $[\alpha \ \lambda \ \gamma \ \delta] = [12 \ 6 \ 12 \ 6]$.

Nuevamente la programación de dicho controlador se realiza en Simulink según se muestra en la

Figura 4-5.

Figura 4-5: Programación modelo CSTR con CPBM multivariable.



4.4 Formulación controlador CPBM por modo dual

En la formulación del CPBM por modo dual se usa el mismo funcional de costo que en el CPBM convencional, sólo que esta vez, el CPBM únicamente actúa fuera de la región terminal Ω , mientras dentro de esta región el control es conmutado al controlador lineal PI, formulado en la sección 4.1. A saber,

$$u = \begin{cases} u_{CPBM} & \text{si } (x_1, x_2) \notin \Omega \\ u_{PI} & \text{si } (x_1, x_2) \in \Omega \end{cases} \tag{4-14}$$

Además se agrega una nueva restricción al problema de optimización:

$$x(k + H_p | k) \in \Omega \quad j = 0, \dots, H_p - 1 \tag{4-15}$$

La cual garantiza que al final del horizonte de predicción $H_p = 10$, ó antes, el sistema se encuentre dentro de la región terminal Ω , y finalmente la estabilidad sea garantizada por el controlador local PI.

4.4.1 Calculo región terminal Ω

Para el cálculo de la región terminal Ω se sigue el procedimiento mostrado en la sección 3.3