

# FLOCULACION EN LECHOS POROSOS

JORGE ARTURO PEREZ P.,

Postgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos  
Universidad Nacional de Colombia, Medellín

OSCAR PEREZ M. y GABRIEL J. ESCOBAR B.

Ingeniería Civil, Facultad de Minas  
Universidad Nacional de Colombia, Medellín

## RESUMEN

Se examinan diversas ecuaciones utilizadas en el modelamiento de la floculación en lecho poroso. Con base en comparaciones experimentales se obtiene la ecuación que en el futuro permita diseños confiables. Para la experimentación fue utilizado un modelo en pequeña escala, con agua cruda de dos fuentes diferentes. Los resultados en cuanto a la eficiencia de remoción de turbiedad permiten corroborar la bondad del sistema teniendo en cuenta ciertos parámetros determinantes en cuanto al diseño. Mediante la experimentación fueron seleccionadas aquellas ecuaciones matemáticas cuya aplicación concuerda con los resultados obtenidos en el reactor, concretamente las utilizadas para calcular la pérdida de carga unitaria. Se presentan algunas recomendaciones sobre parámetros de diseño que conducen a obtener la mayor eficiencia del reactor.

## ABSTRACT

Several empirical equations used in the modeling of up flow pebble bed flocculation are examined. Experiments carried in a reduced scale model using two different types of water allowed to develop an equation for optimal designs in local conditions in Medellín, Colombia. Goodness of the system is confirmed by turbidity removal efficiency under certain design parameters. By experimentation adequate equations were chosen to fit results obtained in the reactor, particularly those used to calculate head losses. Recommendations on those parameters are made to obtain maximum reactor efficiency.

## 1. FLOCULACION EN LECHO POROSO

La floculación en lecho poroso hace parte de la llamada floculación de contacto de sólidos debido a que los flocs se forman por medio de la colisión de las partículas al pasar por los vacíos que deja la grava en su interior. El modelamiento teórico de la floculación en lecho poroso dicho proceso presenta diversas ecuaciones para la determinación de la pérdida de carga inicial, factor importante en el cálculo del gradiente de velocidad. Esta situación denota la confusión que existe en nuestro medio acerca de la utilización de dichas ecuaciones. Este es uno de los temas de estudio del presente trabajo. Con base en comparaciones se llega a obtener la ecuación que en el futuro permita diseños confiables. En la experimentación fue utilizado un modelo en pequeña escala. En los ensayos efectuados se utiliza como agua cruda dos fuentes diferentes: agua del acueducto de Medellín preparada con turbiedad artificial y agua del Laboratorio de Hidráulica de la Facultad de Minas. Los resultados en cuanto a la eficiencia de remoción de turbiedad permiten corroborar la bondad del sistema teniendo en cuenta ciertos parámetros determinantes en cuanto al diseño. Mediante la experimentación fueron seleccionadas aquellas ecuaciones matemáticas cuya aplicación concuerda con los resultados obtenidos en el reactor, concretamente las utilizadas para calcular la pérdida de carga unitaria. Así mismo se presentan algunas recomendaciones relacionadas con el

tiempo de retención, el gradiente de velocidad y el número de Camp que conduce a obtener la mayor eficiencia del reactor.

### 1.1 Formulación matemática

Harris, Karffman y Krone propusieron un modelo matemático con el fin de establecer la tasa de aglomeración considerando el floculador como un reactor que consta de un número  $m$  de cámaras diferentes:

$$\frac{N_0}{N_m} = \left( 1 + K \phi \frac{t_r}{m} \right)^m \quad (1)$$

donde:

- $N_0$ : Concentración de partículas primarias en el afluente de la primera cámara.
- $N_m$ : Concentración de partículas primarias en el efluente de la  $m$ -ésima cámara (las que quedan sin flocular)
- $K$ : Constante de reacción.
- $\phi$ : Concentración coloidal expresada como el volumen total de sólidos por unidad de volumen.
- $G$ : Gradiente de velocidad
- $T$ : Tiempo de retención
- $m$ : Número de cámaras en el floculador

Una eficiencia dada para la floculación  $N_0/N_m$  puede obtenerse en tiempos de retención  $T$  cada vez menores a medida que aumenta el número de cámaras  $m$ .

Despejando  $t_r$  de (1):

$$t_r = \frac{m}{K G \phi} \left[ \left( \frac{No}{Nm} \right)^{1/m} - 1 \right] \quad (2)$$

Para el caso del reactor de piedras, puede aplicarse, debido a su infinito número de cámaras:

$$t_r = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{K G \phi} \left[ \left( \frac{No}{Nm} \right)^{1/m} - 1 \right] \quad (3)$$

$$t_r = \frac{1}{K G \phi} \ln \left( \frac{No}{Nm} \right) \quad (4)$$

Introduciendo el factor  $\eta$  que representa la eficiencia de colisión entre las partículas ( $\eta \leq 1$ ) se obtiene:

$$t_r = \frac{1}{K G \phi \eta} \ln \left( \frac{No}{Nm} \right) \quad (5)$$

En un proyecto dado interesa saber cuál es el tiempo necesario de floculación para obtener una eficiencia dada por la ecuación  $(1 - Nm/No)$ . El anterior parámetro puede determinarse por medio del Ensayo de Jarras bajo idénticas condiciones. Y usando la siguiente notación:

- $t_p$ : tiempo mínimo teórico para obtener una floculación eficiente en el floculador de piedras con  $\eta=1,0$ .
- $t_j$ : tiempo mínimo de floculación obtenido en el ensayo de Jarras en el cual  $m=1$ .

De la ecuación (2) se obtiene

$$t_j = \frac{1}{K G \phi} \left[ \left( \frac{No}{Nm} \right) - 1 \right] \quad (6)$$

De la ecuación (5) se obtiene

$$t_p = \frac{1}{K G \phi} \ln \left( \frac{No}{Nm} \right) \quad (7)$$

Y con (7)/(6)

$$\frac{t_p}{t_j} = \ln \left[ \left( \frac{No}{Nm} \right) \left( \frac{No}{Nm} - 1 \right)^{-1} \right] \quad (8)$$

En la ecuación anterior se observa que el numerador será siempre menor que el denominador, lo cual indica que el tiempo necesario para la floculación en un reactor de piedras será siempre una fracción del obtenido en el Ensayo de Jarras:

$$t_p = t_j \ln \left( \frac{No}{Nm} \right) \left( \frac{No}{Nm} - 1 \right)^{-1} \quad (9)$$

De lo anterior se deduce que la utilización de reactores de piedras proporciona considerables reducciones en cuanto a los tiempos de detención respecto a los floculadores convencionales.

## 1.2 Parámetros que intervienen en el diseño

1.2.1 Tiempo de retención. Para un reactor de piedras el tiempo de retención  $t_r$  está dado por la ecuación:

$$t_r = L/V_R \quad (10)$$

$$V_R = V_A/\epsilon \quad (11)$$

donde:

- $t_r$ : Tiempo de retención [s]
- $L$ : Espesor total del lecho poroso [cm]
- $v_R$ : Velocidad real del flujo a través del lecho poroso [cm/s]
- $v_A$ : Velocidad del flujo a través de la sección transversal del reactor (sin tener en cuenta la grava) [cm/s]
- $\epsilon$ : Porosidad del lecho

1.2.2 Gradiente de velocidad. Para el flujo laminar es válida la ecuación de Smolouchowski y modificada por Camp:

$$N_{ij} = \frac{G}{6} n_i n_j (d_i + d_j)^3 \quad (12)$$

donde:

- $N_{ij}$ : Número de colisiones entre las partículas  $i$  y  $j$  por unidad de tiempo.
- $n_i$  y  $n_j$ : Densidad numérica de las partículas  $i$  y  $j$ .
- $d_i$  y  $d_j$ : Diámetro de las partículas  $i$  y  $j$ .
- $G$ : Gradiente de velocidad.

Esto da una primera aproximación a la importancia del gradiente en la eficiencia de la floculación; al aumentar éste se eleva la posibilidad en cuanto al número de colisiones y por ende la eficiencia.

En el caso del reactor de piedras, el gradiente de velocidad depende de las características geométricas de la grava, el caudal, la pérdida de carga a través del lecho, propiedades del fluido, área de la sección transversal del reactor.

La ecuación de Camp y Stein describe el gradiente de velocidad en condiciones de flujo laminar:

$$G = \left( \frac{P}{u_F V_{af}} \right)^{1/2} \quad (13)$$



- G: Gradiente de velocidad [ $s^{-1}$ ]  
 P: Energía disipada por unidad de tiempo [ $gf^2cm/s$ ]  
 $\mu_f$ : Viscosidad dinámica del agua [ $gf^2s/cm^2$ ]  
 $V_{ef}$ : Volumen efectivo del reactor [ $cm^3$ ]

$$P = \gamma Q h \quad (14)$$

$$V_{ef} = Q t_r \quad (15)$$

- $\tau$ : Peso específico del fluido [ $gf/cm^3$ ]  
 Q: Caudal [ $cm^3/s$ ]  
 h: Pérdida de carga a lo largo del lecho [ $cm$ ]  
 Con (14) y (15) en (13):

$$G = \left( \frac{\gamma h}{\mu_f t_r} \right)^{1/2} \quad (16)$$

La ecuación (16), puede ser utilizada para evaluar el gradiente una vez obtenidas la pérdida de carga total en el lecho.

$$V = S_R L \quad (17)$$

$$Q = v_R S_R \quad (18)$$

$$j_1 = \frac{h}{L} \quad (19)$$

- $S_R$ : Área transversal real de la sección del reactor (sin considerar el lecho poroso) [ $cm^2$ ]  
 $j_1$ : Pérdida de carga unitaria

Con las ecuaciones (11), (14), (17), (18) y (19) en (13)

$$G = \left( \frac{\gamma v_A j_1}{\mu_f \epsilon} \right)^{1/2} \quad (20)$$

1.2.3. Pérdida de carga. Para la evaluación de este parámetro se plantean diversas ecuaciones:

1.2.3.1 Kozeny. En flujo laminar, para un rango de valores bajos del número de Reynolds, la pérdida de carga puede ser calculada mediante la fórmula de Kozeny:

$$j_1 = \frac{5 \mu_f v_A (1 - \epsilon)}{\gamma \epsilon^3} \left( \frac{6}{D \phi_s} \right)^2 \quad (21)$$

- D: Puede ser el diámetro efectivo  $D_e$  ó el diámetro nominal  $D_N$  de las gravas [ $cm$ ].  
 $\phi_s$ : Factor de forma

En la Tabla 1 aparecen reseñados como guía los valores

característicos para el factor de forma acompañados de la porosidad.

El diámetro efectivo  $D_e$  es determinado mediante el análisis granulométrico, utilizando una serie de mallas patrón; éste es el valor D de las abscisas de la curva granulométrica que corresponde al 10% de las ordenadas de dicha curva ( $D_{10}$ ); lo que equivale a decir que el 10% (en peso) de las partículas son de tamaño menor que el de su diámetro efectivo. En el caso en el cual dicho análisis no sea posible, se utiliza el diámetro nominal  $D_N$ ; su cálculo se efectúa midiendo para una muestra representativa del material, la longitud promedio más larga y corta para cada grano y está dado por:

$$D_N = \frac{1,24}{\frac{1,19}{LM} + \frac{0,35}{Lm}} \quad (22)$$

donde:

LM: Dimensión mayor de la partícula [ $cm$ ].

Lm: Dimensión menor de la partícula [ $cm$ ].

Sustituyendo (21) en (20) se tiene:

$$G = 13,416 \left( \frac{1 - \epsilon}{\epsilon^2} \right) \left( \frac{v_A}{D \phi_s} \right) \quad (23)$$

emplazando (10) y (11) en (23) y multiplicando por  $t_r$ :

$$G t_r = 13,4 \left( \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} \right) \left( \frac{L}{D \phi_s} \right) \quad (24)$$

De las ecuaciones (21) y (23) se puede observar que cuando el flujo responde a la Ley de Darcy la pérdida de carga depende de la temperatura del fluido, mientras que el valor del gradiente de velocidad sólo depende de las características del lecho poroso y de la velocidad del fluido a través del lecho.

1.2.3.2 Forchheimer. Para fluidos en régimen laminar pero que no cumplan la Ley de Darcy, lo cual corresponde a valores bajos en cuanto al número de Reynolds, la pérdida de carga unitaria puede calcularse mediante la ecuación de Forchheimer:

$$j_1 = a v_A + b v_A^2 \quad (25)$$

Los coeficientes a y b pueden ser calculados en función de las características granulométricas de la grava.

En la recopilación efectuada, se encontraron diversas ecuaciones para representar dichos coeficientes, las cuales se resumen en la tabla 2. Las dimensiones de las variables están dadas como; a:[ $s/cm$ ], b:[ $s^2/cm^2$ ], D:[ $cm$ ], v: viscosidad cinemática [ $cm^2/s$ ].

1.2.3.3 Rose. Otra ecuación utilizada para el cálculo de la pérdida de carga en medio poroso, es la ecuación de Rose:

$$j_1 = 0,534 C_D \frac{v_A^2}{D_N \epsilon^6 g} \quad (28)$$

con:

$$C_D = 24/R + 3/R + 0,34 \quad (29)$$

$$R = \frac{\phi_s D_N v_A}{\nu \epsilon} \quad (30)$$

$C_D$ : Coeficiente de fricción de Newton

$R$ : Número de Reynolds

$g$ : Aceleración de la gravedad (981 cm<sup>2</sup>/s)

1.2.4 Número de Camp. Este número adimensional expresado como el producto gradiente, tiempo de retención ( $Gt_r$ ), tiene una notable influencia en cuanto a la eficiencia de la floculación. No se recomienda utilizar valores inferiores a 15.000. A mayor  $G$ , mejores resultados, pero no se ha investigado acerca de cuál es el máximo gradiente de velocidad soportable en condiciones de régimen laminar.

Richter (1984) afirma, con base en pruebas efectuadas en el reactor modelo de la planta de Iguaçu-Cuitiba en el Brasil, que el tiempo de detención no es tan importante en la eficiencia de la floculación, mientras que el número de Camp  $Gt_r$  es un factor determinante para dicha eficiencia. Los ensayos se efectuaron conservando una misma altura de lecho, barriendo un amplio rango de gradientes y por ende sacrificando los tiempos de detención calculados mediante la ecuación (9) pero conservando un  $Gt_r$  constante; los resultados obtenidos para este caso fueron muy similares.

La Figura 1 muestra la influencia del número  $Gt_r$  en la eficiencia de la floculación. El muestreo fue efectuado en diversas plantas del Brasil con material de lecho de características semejantes, además se contaba con tiempos de retención del mismo orden, siendo la única diferencia los gradientes utilizados. Los números que aparecen en la Figura 1 se refieren a los siguientes sistemas:

1. E.T.A. Araucaria:  $Gt_r = 16.000$ ,  $v_A = 0,056$  cm/s,  $t_r = 5$  min,  $G = 56$  s<sup>-1</sup>.
2. E.T.A. IGUAÇU: Floculador Piloto:  $Gt_r = 14.500$ ,  $t_r = 2,5$  min,  $G = 85$  s<sup>-1</sup>.
3. E.T.A Nova Prata: do Iguaçu:  $Gt_r = 9.000$ ,  $v_A = 0,028$  cm/s
4. E.T.A. Tres Barras:  $Gt_r = 9.000$ ,  $v_A = 0,028$  cm/s
5. E.T.A. Imbituva:  $Gt_r = 9.000$ ,  $v_A = 0,028$  cm/s,  $t_r = 5$  min,  $G = 30$  s<sup>-1</sup>.

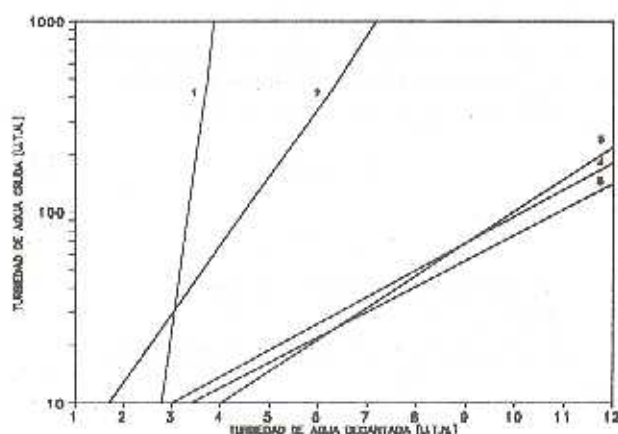


Figura 1. Gráfica elaborada en varias plantas en el Brasil, donde se muestran los resultados obtenidos para varios  $Gt_r$  (9.000, 14.500 y 16.000). Tomada de RICHTER (1984).

## 2. DESCRIPCION DEL SISTEMA UTILIZADO

EL sistema consta de las siguientes unidades:

- Tanque de almacenamiento del agua cruda. Utilizado para el almacenamiento del afluente del sistema. Allí es preparada la turbiedad artificial mediante el llenado del tanque con agua proveniente del acueducto y posterior adición de tierra. El flujo de agua al modelo se realiza por bombeo desde dicho tanque.
- Tanque de almacenamiento del coagulante. Un recipiente de 20 lt de capacidad. Se conecta al tanque de mezcla rápida por una manguera plástica de diámetro pequeño.
- Dosificador de alumbre. Se utiliza una T<sub>e</sub> construida en vidrio capilar la cual posee un flotador en su parte superior que garantiza una cabeza constante para una dosificación uniforme.
- Tanque de mezcla rápida. Recipiente construido en acrílico al cual ingresan la conducción de la dosificación de alumbre y el afluente del sistema. Este último llega en caída libre vertical sobre el fondo del tanque favoreciendo la mezcla rápida, ya que es en este punto preciso donde se realiza la adición del coagulante.
- Reactor de floculación. Posee una sección transversal circular de 15 cm de diámetro y una altura que varía entre 115 y 168 cm. Está construida en acrílico transparente, lo cual permite la observación directa de los flocs. El flujo a través de él es ascendente.

La disposición del sistema se presenta en la figura 2.



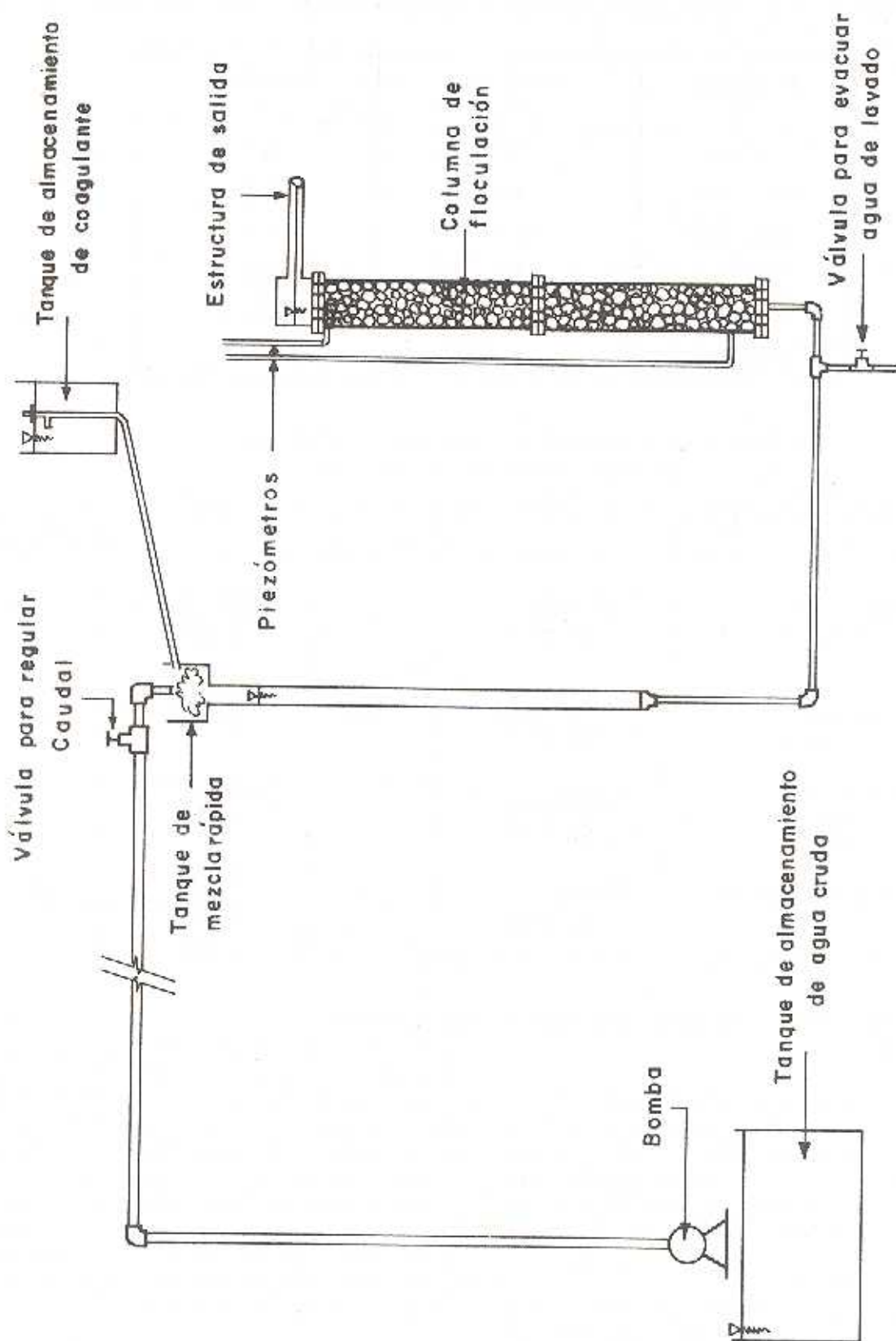


FIGURA 2. Esquema del modelo utilizado.

Tabla 1. Factor de forma y porosidad para materiales granulares típicos (RICHTER, 1984)

Descripción	Factor de forma ( $\phi_s$ )	Porosidades ( $e$ )
esféricos	1,00	0,39
redondeados	0,98	0,39
desgastados	0,94	0,39
agudos	0,81	0,40
angulares	0,78	0,43
triturados	0,70	0,48

Tabla 2. Valores empíricos de los coeficientes a y b encontrados por diversos autores para la ecuación (25).

Autor	a	Ecuación	b	Ecuación
RICHTER (1984)	$\frac{0,00162 (1 - e)^2}{\phi_s^2 D^2 e^2}$	(26a)	$\frac{0,0081 (1 - e)}{\phi_s D e^3}$	(27a)
PEREZ (1990)	$\frac{0,162 (1 - e)^2}{\phi_s^2 D^2 e^3}$	(26b)	$\frac{0,018 (1 - e)}{\phi_s^2 D e^3}$	(27b)
ORTIZ A., GONZALEZ Q. Y ORTIZ R. (1984)	$\frac{0,162 (1 - e)^3 v}{\phi_s^2 D^2 e^3}$	(26c)	$\frac{0,0018 (1 - e)}{\phi_s D e^3}$	(27c)
RICHTER Y MOREIRA (1980)	$\frac{0,162 (1 - e)^2 v}{\phi_s^2 D^2 e^3}$	(26d)	$\frac{0,0018 (1 - e)}{\phi_s D e^3}$	(27d)

### 3. EVALUACION DE LA PERDIDA DE CARGA UNITARIA

Debido a la diversidad en cuanto a las fórmulas planteadas para la determinación de la pérdida de carga inicial (h), se hace necesaria la realización de diferentes ensayos en el reactor modelo para determinar su magnitud real y entrar a comparar con las ecuaciones propuestas. Se utiliza para ello tres gravas de diferente granulometría.

#### 3.1 Ecuaciones utilizadas

Serán utilizadas las ecuaciones (27) de Kozeny y (28) de Rose y adicionalmente la ecuación (25) de Forchheimer donde se evaluarán cada una de las ecuaciones para el cálculo de los coeficientes a (26) y b (27).

#### 3.2 Metodología

La medición directa de la pérdida de carga real inicial para varios caudales a través del lecho poroso se realiza midiendo para cada uno la diferencia de nivel entre los dos piezómetros colocados al comienzo y final del lecho. Con los valores obtenidos es calculada la pérdida unitaria ( $j$ ), efectuando con ello un análisis comparativo entre las diferentes ecuaciones planteadas y los valores observados experimentalmente. Para las ecuaciones que producen los mejores resultados, se entra a definir con base también en comparaciones, cuál valor del diámetro es el indicado para los cálculos: el nominal  $D_N$  ó el efectivo  $D_E$ .

#### 3.3 Descripción de la grava utilizada

En el proceso de experimentación son utilizadas tres

granulometrías diferentes a saber:

- Pasa tamiz 3/4" (1.91 cm) -retiene 1/2" (1.27 cm)
- Pasa tamiz 3/8" (0.95 cm) -retiene 3/16" (0.48 cm)
- Pasa tamiz 3/16"(0.48 cm) -retiene malla No 10(0.2 cm)

3.3.1 Diámetro Nominal ( $D_N$ ). El  $D_N$  se calcula para cada granulometría utilizada, ecuación (22). La Tabla 3 presenta los resultados obtenidos.

3.3.2 Diámetro Efectivo ( $D_E$ ). Los resultados obtenidos, aparecen en la Tabla 3. No es posible efectuar el análisis granulométrico al material (3/4"-1/2") debido a que sólo se dispone de los tamices 3/4" y 1/2" los cuales "retienen" el 0% y 100% del material respectivamente, motivo que no permite la obtención de la curva granulométrica respectiva.

3.3.3 Factor de Forma ( $\phi_s$ ). Se asume el presentado en la Tabla 1 para materiales angulares:  $\phi_s=0.78$

3.3.4 Porosidad ( $\epsilon$ ). Su determinación se realiza por medio de ensayos efectuados para cada granulometría. Sus resultados aparecen en la Tabla 3.

Tabla 3. Características geométricas de las gravas utilizadas

Grava utilizada	$D_N$ (cm)	$D_E$ (cm)	$\phi_s$	$\epsilon$
3/4"-1/2"	1.8		0.78	0.43
3/8"-3/16"	0.62	0.43	0.78	0.43
3/16"-malla 10	0.29	0.21	0.78	0.49

### 3.4 Parámetros de los ensayos

3.4.1 Afluente del sistema. Agua proveniente del acueducto a una temperatura  $T=21^\circ\text{C}$  con una viscosidad cinemática de  $0.00986\text{ cm}^2/\text{s}$ , una viscosidad dinámica de  $0.000010\text{ gf}\cdot\text{s}/\text{cm}^2$  y un peso específico de  $0.99802\text{ gf}/\text{cm}^3$ .

3.4.2 Altura de la columna de floculación (H). Esta información se presenta en la tabla 4.

Tabla 4. Alturas utilizadas de la columna de floculación

Grava utilizada	Altura (cm)
3/4" - 1/2"	168
3/8" - 3/16"	168
3/16" - malla 10	115

### 3.5 Resultados

Para el análisis de esta información, se realizaron una serie de figuras que permiten observar la comparación entre los registros obtenidos experimentalmente (Tablas 5, 6 y 7) y los valores obtenidos según las ecuaciones planteadas. En ellas se usa la siguiente nomenclatura para identificar cada una de las ecuaciones:

- A: Registro experimental.
- B: Ecuación de Kozeny.
- C: Ecuación Forchheimer, con a y b según (26a) y (27a)
- D: Ecuación Forchheimer, con a y b según (26b) y (27b)
- E: Ecuación Forchheimer, con a y b según (26c) y (27c)
- F: Ecuación Forchheimer, con a y b según (26d) y (27d)
- G: Ecuación de Rose.

Para el cálculo de los factores a y b, la ecuación de Forchheimer utiliza el Diámetro Efectivo ( $D_E$ ), mientras que la ecuación de Rose emplea el Diámetro Nominal ( $D_N$ ) en la determinación de la pérdida de carga unitaria. Las variaciones a lo anterior se presentan en los siguientes casos:

- Material 1 (3/4"-1/2"): Para todas las ecuaciones es utilizado  $D_N$ . (Figuras 3, 4 Y 5).
- Figura 6: Para comparar el comportamiento empleando ambos diámetros, la ecuación F es presentada con  $D_E$  (F') y  $D_N$  (F' con  $D_N$ ).

La Tabla 8 presenta un resumen de las comparaciones analizadas, y a continuación, se presentan los resultados más significativos mediante las figuras 3, 4, 5 y 6.

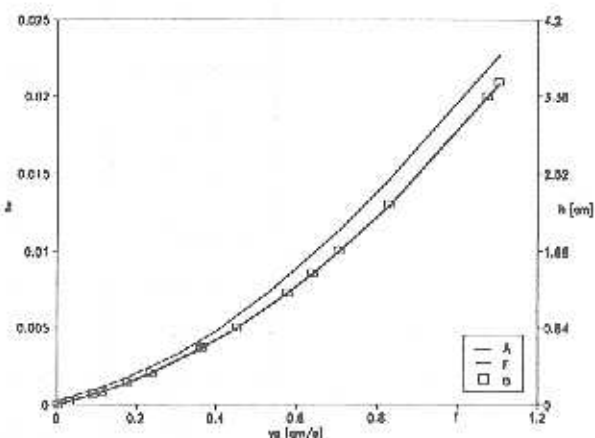


Figura 3.  $V_a$  vs.  $(j_i-h)$ . Expresiones: A, D y E. Material 1 (3/4"-1/2").



Tabla 5. Registros obtenidos para Q,  $v_A$ , h y  $j_l$   
Material 1 (3/4" - 1/2")

Q [l/s]	$v_A$ [cm/s]	h [cm]	$j_l$
0,006	0,032	1,50	0,0008
0,016	0,092	2,00	0,0011
0,020	0,113	2,00	0,0011
0,031	0,178	4,00	0,0023
0,042	0,239	5,50	0,0032
0,064	0,361	6,70	0,0039
0,065	0,368	6,00	0,0035
0,065	0,368	8,00	0,0047
0,080	0,453	10,00	0,0059
0,102	0,579	14,40	0,0085
0,113	0,641	18,00	0,0107
0,125	0,707	19,50	0,0116
0,147	0,830	29,00	0,0172
0,190	1,075	33,00	0,0196
0,195	1,103	38,00	0,0226

Tabla 6 Registros obtenidos para Q,  $v_A$ , h y  $j_l$   
Material 1 (3/4" - 1/2")

Q [l/s]	$v_A$ [cm/s]	h [cm]	$j_l$
0,007	0,040	0,5	0,0002
0,009	0,050	0,5	0,0002
0,023	0,134	2,1	0,0012
0,136	0,33	4,0	0,0023
0,044	0,252	4,2	0,0025
0,045	0,52	7,9	0,0047
0,088	0,74	11,5	0,0068
0,228	1,04	20,7	0,0123
0,143	1,04	22,0	0,0130
0,184	1,58	34,0	0,0202



Tabla 7. Registros obtenidos para  $Q$ ,  $v_A$ ,  $h$  y  $j_i$   
Material 3 (3/16" - malla No 10)

$Q$ [l/s]	$v_A$ [cm/s]	$h$ [cm]	$j_i$
0,007	0,041	0,3	0,0002
0,007	0,041	0,5	0,0004
0,017	0,097	1,2	0,0010
0,019	0,108	1,25	0,0010
0,034	0,194	2,5	0,0021
0,053	0,297	4,3	0,0037
0,062	0,351	4,7	0,0040
0,077	0,434	6,6	0,0057
0,088	0,495	7,8	0,0067
0,122	0,690	11,7	0,0101
0,136	0,771	13,6	0,0118
0,248	1,401	30,5	0,0265
0,382	2,162	58,5	0,0508

Tabla 8. Resumen de comparaciones realizadas

Material	Comparaciones
Tipo 1	A-D; A-B-C-E-F-G; A-F; A-C-E; A-D-F
Tipo 2	A-D; A-B-C-E-F-G; A-F; A-C-F; A-D-F; A-G-G[D <sub>c</sub> ]; A-F-F[D <sub>k</sub> ]
Tipo 3	A-D; A-B-C-E-F-G; A-C-F A-D-F; A-G-G[D <sub>e</sub> ]

### 3.6 Análisis de resultados

De las comparaciones presentadas por las figuras anteriores, se puede afirmar para las ecuaciones planteadas lo siguiente:

3.6.1 Ecuación de Kozeny (21). Presenta un comportamiento siempre por debajo de la experimental. Responde aceptablemente para valores bajos de velocidad, reafirmando ésto lo dicho en el numeral 2.2.3.1 en el sentido de que dicha ecuación es aplicable para valores bajos en cuanto al número de Reynolds ( $R$ ):

- Para el material 1:  $v_A < 0,1$  cm/s
- Para el material 2:  $v_A < 0,3$  cm/s
- Para el material 3:  $v_A < 0,7$  cm/s

Para obtener un acercamiento a dicho rango, la Tabla 8 presenta el número de Reynolds (30), teniendo en cuenta para su cálculo:

- Las características geométricas de las gravas utilizadas (Tabla 3)
- Como  $v_A$ , la velocidad límite hasta la cual se observa un buen comportamiento para dicha ecuación.

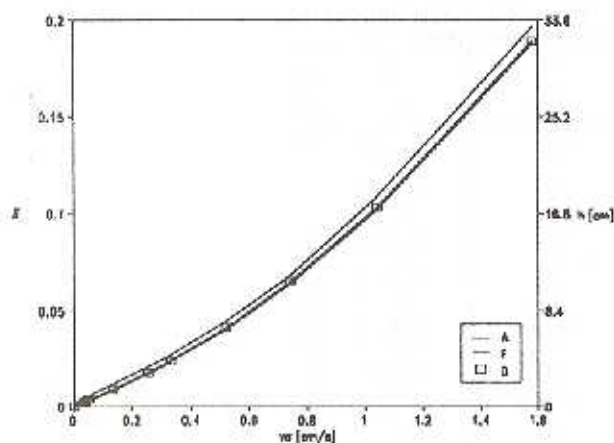


Figura 4.  $v_A$  vs.  $(j_i-h)$ . Expresiones: A, D y F. Material 2 (3/8"-3/16").

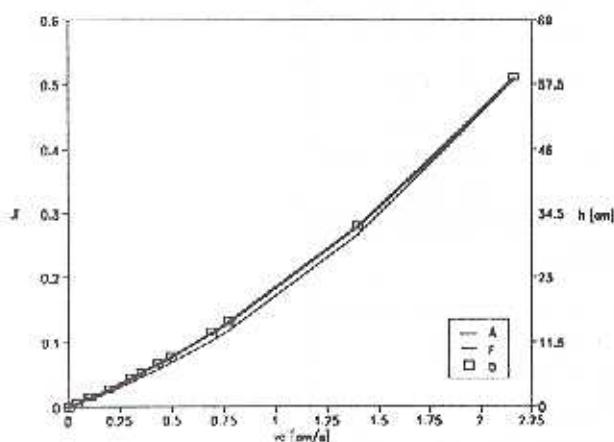


Figura 5.  $v_A$  vs.  $(j_i-h)$ . Expresiones: A, D y F. Material 3 (3/16" malla 10).

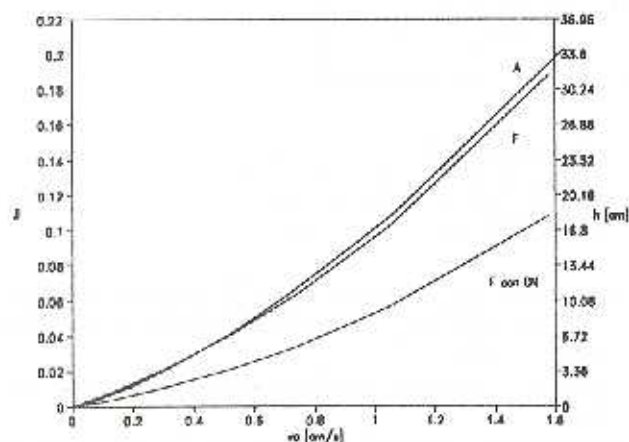


Figura 6.  $v_A$  vs.  $(j_i-h)$ . Expresiones: A, F y F con  $D_N$ . Material 2 (3/8"-3/16").

Tabla 9. Número de Reynolds hasta el cual es aplicable la ecuación de Kozeny (21) para el cálculo de  $j_i$ .

Material	$v_A$ [cm/s]	$R(D_N)$	$R(D_E)$
1	0,1	33,1	
2	0,3	34,1	23,7
3	0,7	32,8	23,7

El material 3, para  $v_A < 1,5$  cm/s arroja resultados mejores que los propuestos por las ecuaciones de Rose (28) y Forchheimer si los coeficientes a y b se calculan por medio de (26c) y (27c). (Ortiz A. et al., 1984).

### 3.6.2 Ecuación de Forchheimer (25).

3.6.2.1 Richter, 1984. Las ecuaciones (26a) y (27a) proporcionan valores muy altos en comparación con los experimentales. Sustituyendo en la ecuación (27a) el coeficiente 0,81 por 0,18 el resultado obtenido es mejor, sin embargo, sigue siendo inferior al que se produce mediante (26d) y (27d).

3.6.2.2 Pérez, 1990. De todas las ecuaciones comparadas, ésta es la que más se aleja de los valores experimentales. Si para las ecuaciones (26b) y (27b), las unidades correspondientes al diámetro fueran expresadas en mm, sus valores se acercan a los reales siendo muy similares a los obtenidos utilizando (26d) y (27d). (Figuras 3, 4 y 5).

3.6.2.3 Ortiz et al., 1984. Sus resultados siempre fueron inferiores en comparación con los experimentales y los proporcionados por Richter y Moreira, 1980.

3.6.2.4 Richter y Moreira, 1980. Para todos los materiales, fue la ecuación más cercana a la experimental. Al utilizar  $D_N$  (Figura 6), las pérdidas unitarias disminuyen su valor,

3.6.3 Ecuación de Rose (28). Para el material 1, la pérdida unitaria resultaba mayor que la experimental pero para los materiales 2 y 3, sus valores son menores que la experimental. Al utilizar  $D_E$ , se obtienen resultados que están por encima de lo experimentado lo cual no favorece la ecuación.

## 3.7 Conclusiones

- Según la Tabla 8, el rango en el cual es confiable la ecuación de Kozeny (21) para la determinación de  $j_i$  es de:  $R < 33$ , cuando se utiliza  $D_N$  y  $R < 24$ , cuando se utiliza  $D_E$ . Para valores superiores a éste, no debe utilizarse esta ecuación.
- En las ecuaciones (26b) y (27b), el diámetro (D), debe ser ingresado en mm. Para utilizarlo en cm, los factores



a y b serían:

$$a = \frac{0,00162 (1 - \epsilon)^2}{\phi_s^2 D^2 \epsilon^3}$$

$$b = \frac{0,0018 (1 - \epsilon)}{\phi_s D \epsilon^3}$$

Dichos términos pueden ser utilizados para el cálculo de la pérdida de carga unitaria de manera confiable.

#### 4. EXPERIMENTACION PARA EVALUACION DEL COMPORTAMIENTO DE LA FLOCULACION

Este modelo responde a la necesidad de acercarse a un número de Camp alto, considerando las limitaciones propias del equipo utilizado en lo referente a la capacidad del mismo.

##### 4.1. Parámetros de diseño.

Para determinar la pérdida unitaria de carga inicial ( $j_i$ ) a través del lecho, factor determinante para la evaluación del gradiente de velocidad (Ecuación 20), se utiliza tal como se concluyó en el numeral 3.7, la ecuación de Forchheimer (Ecuación 25), empleando para el cálculo de los factores (a) y (b), los términos descritos en (26d) y (27d) (Tabla 10). Las Tablas 11, 12 y 13 presentan los diferentes parámetros de diseño.

##### 4.2 Metodología de experimentación.

4.2.1 Afluente del sistema. Se utilizan dos diferentes tipos de afluentes:

- Para los ensayos con  $T_0=100$  y 50 U.T.N.: Agua del acueducto preparada previamente con turbiedad artificial.
- Para  $T_0=20$  U.T.N.: Agua utilizada para las prácticas en el Laboratorio de Hidráulica de la Facultad de Minas.

4.2.2 Operación del sistema. El sistema se opera de acuerdo con los pasos que se describen a continuación en detalle:

- Preparación de la solución del coagulante: la concentración de la solución varió para todos los ensayos entre 0.1%-1%, dependiendo esto del caudal requerido para suministrar al sistema por parte del dosificador del coagulante.
- Ensayo de Jarras: hecho con el fin de determinar la dosis óptima del coagulante necesaria para el ensayo a ejecutar. Las muestras del agua a tratar son tomadas directamente del tanque de almacenamiento de agua cruda. Adicionalmente se realiza durante la operación del floculador para verificar que la dosificación del

coagulante sea la correcta y que se esté realizando una buena mezcla rápida en el sistema. Para éste, no se efectúa la agitación rápida en el Jar Test debido a que ésta se realiza previamente en el tanque dispuesto para ello. La muestra de agua para efectuar este ensayo es tomada antes de su ingreso al reactor.

- Aforo de caudales: se realiza para verificar que el sistema esté cumpliendo las especificaciones de operación, en cuanto a la dosificación del coagulante y la circulación de agua por el sistema.
- Toma de muestras: el muestreo se hace con intervalos de 15 minutos para la entrada al sistema ( $T_0$ ), la salida del modelo ( $Tf_p$ ), a los 15 minutos de sedimentación ( $Tf_{s(15)}$ ) y a los 30 minutos de sedimentación ( $Tf_{s(30)}$ ). Las muestras recogidas a la salida del floculador, reposan en frascos durante 30 minutos, llevándose a cabo así el proceso de sedimentación de las mismas.
- Determinación de la pérdida de carga total a través del lecho: inicialmente se efectúa una primera lectura para la pérdida inicial y posteriormente se consideran otras para tener una idea de la colmatación que va teniendo el lecho.
- Lavado del reactor: este es efectuado una vez finalizado cada ensayo para garantizar que al comenzar uno nuevo, el lecho no presente colmatación. Se realiza mediante vaciados sucesivos (flujo descendente, contrario al de operación), inicialmente desalojando el agua remanente del ensayo y posteriormente inyectando agua limpia; de este modo la limpieza se realiza por el arrastre de las partículas que son retenidas por la grava. El lavado finaliza una vez el agua procedente del reactor sale completamente clara.

##### 4.3 Resultados obtenidos.

A continuación se presentan los resultados promedio obtenidos para 21 ensayos realizados, tal como aparecen en las tablas 12, 13, 14, 15, 16 y 17. En tales tablas se usa la siguiente notación para las variables:

- $R_{t(15)}$ : Remoción de turbiedad transcurridos 15 minutos de sedimentación (%).
- $R_{t(30)}$ : Remoción de turbiedad transcurridos 30 minutos de sedimentación (%).
- $Se_{t(15)}$ : Sedimentación efectiva para el efluente con 15 minutos de sedimentación en comparación con el efluente salido del lecho poroso (%).
- $Se_{t(30)}$ : Sedimentación efectiva para el efluente con 30 minutos de sedimentación en comparación con el efluente salido del lecho poroso (%).
- $Se_{t(15-30)}$ : Sedimentación efectiva para el efluente con 30 minutos de sedimentación en comparación con el efluente con 15 minutos de sedimentación (%).



Tabla 10. Factores *a* y *b* para los diferentes materiales granulares empleados.  
Ecuaciones (26d) y (27d)

Grava utilizada	<i>a</i> [s/cm]	<i>b</i> [s <sup>2</sup> /cm <sup>2</sup> ]
3/4" - 1/2"	0,006	0,012
3/8" - 3/16"	0,058	0,038
3/16" - malla No. 10	0,132	0,048

Tabla 11. Parámetros de ensayo en la operación del modelo.  
Material 1 (3/4" - 1/2")

Ensayo No	<i>t<sub>r</sub></i> [s]	<i>G</i> [s <sup>-1</sup> ]	<i>G<sub>tr</sub></i>	<i>v<sub>A</sub></i>	<i>j<sub>i</sub></i>	<i>h</i> [cm]
1	101	41	4145	0,71	0,010	1,71
2	86	51	4365	0,84	0,013	2,24
3	61	81	4910	1,19	0,032	5,36
4	51	102	5225	1,41	0,032	5,36
5	38	153	5850	1,89	0,054	9,00
6	204	17	3460	0,35	0,004	0,59
7	204	17	3460	0,35	0,004	0,59
8	87	50	4345	0,83	0,013	2,19
9	52	100	5195	1,39	0,031	5,22

Tabla 12. Parámetros de ensayo en la operación del modelo.  
Material 2 (3/8" - 3/16")

Ensayo No	<i>t<sub>r</sub></i> [s]	<i>G</i> [s <sup>-1</sup> ]	<i>G<sub>tr</sub></i>	<i>v<sub>A</sub></i> [cm/s]	<i>j<sub>i</sub></i>	<i>h</i> [cm]
10	139	70	9710	0,52	0,041	6,84
11	97	105	10225	0,74	0,064	10,80
12	69	157	10885	1,05	0,102	17,19
13	216	43	9255	0,34	0,024	4,00
14	69	157	10885	1,04	0,102	17,19
15	46	260	11960	1,57	0,184	31,27



Tabla 13. Parámetros de ensayo en la operación del modelo.  
Material 3 (3/16" - malla No 10)

Ensayo No	tr [s]	G [s <sup>2</sup> ]	Gtr	v <sub>A</sub> [cm/s]	j <sub>i</sub>	h [cm]
16	273	35	9550	0.21	0.029	3.36
17	145	68	9840	0.39	0.059	6.73
18	52	210	10875	1.09	0.200	22.97
19	240	40	9595	0.23	0.033	3.86
20	101	100	10100	0.56	0.088	10.16
21	70	150	10470	0.81	0.140	15.80

Tabla 14. Resultados obtenidos de la experimentación en modelo.  
Material 1 (3/4" - 1/2").

Ensayo No	T <sub>0</sub> U.T.N.	T <sub>f</sub> U.T.N.	T <sub>S(15)</sub> U.T.N.	T <sub>S(30)</sub> U.T.N.	R <sub>t</sub> [%]	R <sub>t(15)</sub> [%]	R <sub>t(30)</sub> [%]	Se <sub>(15)</sub> [%]	Se <sub>(30)</sub> [%]
1	140	95	40	25	32	71	82	58	74
2	120	73	34	27	39	72	78	53	63
3	123	81	44	36	34	64	71	46	56
4	142	94	41	32	34	71	77	56	66
5	143	139	49	38	3	66	73	65	73
6	50	40	32	28	20	36	44	20	30
7	22	8.3	7.9	---	62	64	---	5	---
8	20	8.0	7.6	---	60	62	---	5	---
9	20	12.6	10.6	---	37	47	---	16	---

Nota: Los valores que aparecen registrados con --- no presentaron sedimentación.

Tabla 15. Resultados obtenidos de la experimentación en modelo.  
Material 2 (3/8" - 3/16")

Ensayo No	T <sub>0</sub> U.T.N.	T <sub>f</sub> U.T.N.	T <sub>S(15)</sub> U.T.N.	T <sub>S(30)</sub> U.T.N.	R <sub>t</sub> [%]	R <sub>t(15)</sub> [%]	R <sub>t(30)</sub> [%]	Se <sub>(15)</sub> [%]	Se <sub>(30)</sub> [%]
10	118	50	23.5	21.3	58	80	82	53	57
11	124	68	16.5	13.6	45	87	89	76	80
12	142	71	23.4	20.6	50	84	85	67	71
13	21.6	2.36	---	---	89	---	---	---	---
14	16.9	3.9	2.9	---	77	83	---	26	---
15	12	3.7	2.5	---	69	79	---	32	---

Tabla 16. Resultados obtenidos de la experimentación en modelo.  
Material 3 (3/16" - malla No 10)

Ensayo No	To U.T.N.	T <sub>f</sub> U.T.N.	T <sub>fS(15)</sub> U.T.N.	T <sub>fS(30)</sub> U.T.N.	Rt [%]	R <sub>t(15)</sub> [%]	R <sub>t(30)</sub> [%]	Se <sub>(15)</sub> [%]	Se <sub>(30)</sub> [%]
16	115	17.4	7.9	6.7	85	93	94	55	61
17	104	28	8.3	7.2	73	92	93	70	74
18	109	59	23.2	19.6	46	79	82	61	67
19	24	1.1	---	---	95	---	---	---	---
20	28	2.1	2.1	---	93	93	---	---	---
21	20.5	3.4	3.1	---	83	85	---	9	---

Tabla 17. Remoción de turbiedad y sedimentación efectiva para 15 minutos de sedimentación (R<sub>t(15)</sub> y Se<sub>(15)</sub>) con parámetros de diseño.  
Material 1 (3/4" - 1/2")

Ensayo No	t <sub>p</sub> [s]	t <sub>r</sub> [s]	G [s <sub>1</sub> ]	G <sub>tr</sub> [%]	R <sub>t(15)</sub> [%]	Se <sub>(15)</sub> [%]
1	97	101	41	4145	71	58
2	97	86	51	4365	72	53
3	97	61	81	4910	64	46
4	97	51	102	5225	71	56
5	97	38	153	5850	66	65
6	205	204	17	3460	36	20
7	177	204	17	3460	64	5
8	177	87	50	4345	62	5
9	177	52	100	5195	47	16

En las tablas anteriores se tiene la siguiente notación:  
t<sub>p</sub>: Tiempo de retención obtenido del ensayo de Jarras (9)  
t<sub>r</sub>: Tiempo de retención para el ensayo

Tabla 18. Remoción de turbiedad y sedimentación efectiva para 15 minutos de sedimentación (R<sub>t(15)</sub> y Se<sub>(15)</sub>) con parámetros de diseño.  
Material 2 (3/8" - 3/16")

Ensayo No	t <sub>p</sub> [s]	t <sub>r</sub> [s]	G [s <sub>1</sub> ]	G <sub>tr</sub> [%]	R <sub>t(15)</sub> [%]	Se <sub>(15)</sub> [%]
10	97	139	70	9710	80	53
11	97	97	105	10225	87	76
12	97	69	157	10885	84	67
13	177	216	43	9255	89	---
14	177	69	157	10885	83	26
15	177	46	260	11960	79	32



Tabla 19. Remoción de turbiedad y sedimentación efectiva para 15 minutos de sedimentación ( $Rt_{(15)}$  y  $Se_{(15)}$ ) con parámetros de diseño: Material 3 (3/16" - malla No 10).

Ensayo No	$t_p$ [s]	$t_r$ [s]	G [ $s^{-1}$ ]	$G_{tr}$ [%]	$Rt_{(15)}$ [%]	$Se_{(15)}$ [%]
16	97	273	35	9550	93	55
17	97	145	68	9840	92	70
18	97	52	210	10875	79	61
19	177	240	40	9595	95	---
20	177	101	100	10100	93	---
21	177	70	150	10470	85	---

#### 4.4 Análisis de resultados

- De los resultados obtenidos en las experimentaciones efectuadas (Tablas 17, 18 Y 19), se aprecia que para una misma altura de lecho se obtienen mayores eficiencias cuando el tamaño de la grava es menor. La retención de partículas a través del lecho es también mayor mientras menor es el tamaño de la grava lo cual lleva a que se presente una rápida colmatación a lo largo de éste; esto último se deduce de los bajos registros de turbiedad a la salida del modelo ( $Tf_p$ ) (Tablas 14, 15 y 16).
- Comparando los tiempos de retención obtenido del ensayo de jarras (Ecuación 9) con los utilizados en cada ensayo, se deduce a pesar de los pocos registros, que los mejores resultados en cuanto a la eficiencia de remoción de turbiedad son obtenidos cuando el tiempo de retención para el ensayo se asemeja al teórico requerido.
- Se observa además en los ensayos en los cuales el  $t_r$  utilizado es menor al teórico, una disminución no muy sustancial de la eficiencia. Por otra parte, un aumento del tiempo de retención del ensayo respecto al tiempo teórico requerido no beneficia en nada el proceso.
- A medida que el valor del gradiente de velocidad decrece,  $Tf_p$  también lo hace; esto implica que el reactor se comporta como un clarificador. Al bajar la velocidad a través del lecho se produce una disminución del arrastre de los flocs formados, y por ende un aumento en la retención de éstos. No se puede establecer un rango definido en cuanto al valor del gradiente óptimo. En el ensayo No. 15 de la Tabla 18 puede observarse como un  $G=260 s^{-1}$  produce una relativa buena eficiencia en remoción de turbiedad. Para este caso no puede afirmarse que la disminución de la eficiencia sea por el alto valor del gradiente, ya que allí el tiempo de retención empleado es casi del 25% del requerido teóricamente.

#### 5. CONCLUSIONES GENERALES

- Para determinar la pérdida de carga unitaria, debe utilizarse la ecuación de Forchheimer (25) empleando para el cálculo de los coeficientes  $a$  y  $b$  los presentados por Richter y Moreira (1980), (26d) y (27d) con  $D_g$ .
- Para una misma altura de lecho se obtiene una mayor eficiencia en cuanto a la remoción de turbiedad, pero paralelamente una rápida colmatación del lecho a medida que disminuye el tamaño de la grava.
- El reactor de piedras se comporta siempre como un clarificador, en mejor proporción a medida que disminuye el tamaño de la grava como se expuso anteriormente. Para valores bajos de turbiedad no es necesario realizar sedimentación debido a que las partículas resultantes a la salida de éste son tan pequeñas que podrían ser llevadas directamente a un proceso de filtración.
- Para efectos de diseño, es recomendable la utilización de tiempos de retención cercanos al calculado mediante la ecuación (9).
- El gradiente de velocidad no debe ser definido como parámetro independiente para tenerlo en cuenta en el diseño del reactor. El hecho de que sea alto o bajo su valor, no determina en última instancia la eficiencia. De los resultados experimentales no se puede establecer un límite superior de éste soportable aún bajo condiciones de régimen laminar.
- El valor del número de Camp ( $G_t$ ), es el parámetro más importante en cuanto a la eficiencia del reactor. No son recomendables valores inferiores a 9000. Dicho valor debe determinarse partiendo de un valor del tiempo de

retención, calculado mediante la ecuación (9) y ajustando el valor del gradiente de tal manera que cumpla la condición anteriormente citada. Cuando las circunstancias lo requieran (durante la operación del reactor), éste puede ser sobrecargado, es decir trabajar con caudales mayores a los de diseño, lo cual corresponde a la utilización de tiempos de retención menores y gradientes mayores. Esta situación es sustentada en el hecho de que el número de Camp es el factor más determinante en el proceso.

## 6. RECOMENDACIONES

- Para obtener valores altos del número de Camp, deben utilizarse tamaños de grava pequeños (inferiores a 3/8"), debido a que la utilización de valores altos implica espesores de lecho muy elevados (aproximadamente cuatro metros) difícilmente concebibles para fines constructivos. Debe sin embargo tenerse en cuenta que ello implica la rápida colmatación del lecho y por ende carreras de corta duración, por lo tanto, para optarse por esta solución, debe disponerse de facilidad en cuanto al lavado frecuente.
- Si no se dispone de facilidades de lavado de la unidad, puede optarse por la utilización de grava de tamaños mayores (superiores a 1/2"), pero en este caso debido a los considerables espesores necesarios, pueden emplearse varias unidades en serie de tal manera que permitan obtener los espesores necesarios.
- El lavado del reactor debe efectuarse mediante descargas de fondo bruscas, teniendo la estructura completamente llena de agua antes de comenzar para de esta manera aprovechar el gradiente hidráulico con el fin de producir la cizalladura requerida para el eficiente desprendimiento del material. Para esto se recomienda una válvula de apertura rápida. En caso de requerirse, debe repetirse el proceso con el fin de recuperar la pérdida de carga inicial.

## REFERENCIAS

- Bhole, A.G. y D. N. Potdukhe, Performance study of up flow Pebble bed flocculator. *Indian Journal Environ. health.*, Vol 25, No 1, 1983. pp 41-59.
- Hammer, M., *Water and Waste-Water technology*. John Wiley & sons Inc. New York, 1975.
- Ortiz, M., V. J. González y W. Ortiz, *Floculación en Lecho Poroso*. Tesis Ingeniería Civil. Bogotá, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ingeniería, 1984. 130 p.
- Pérez, J. A. *Manual de Potabilización del agua*, Medellín, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Minas, 1990. 502 p.
- Richter, C. A. Sistemas de floculación acelerada. *Revista Acodal*, Bogotá, No 119: pp 79-92. Jul-Agt, 1984.
- Richter, C.A. y R.B. Moreira. *Floculadores de Piedras: Experiências em Filtro Piloto*. SANEPAR, Curitiba, Brasil, 1980.
- Richter, C.A. Fundamentos Teóricos de Floculação em Meio Granular. *Revista Engenharia*, São Paulo, 1981.
- Richter, C.A. *Estancia de tratamiento de agua para pequeñas comunidades*. Aveliação de Araucária. SANEPAR, Brasil, 1980.
- Tamayo, G. A. y R. Valencia. Diseño y construcción de una planta piloto para tratamiento de agua potable. Tesis Ingeniería Civil. Medellín, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Minas, 1982. 72 p.
- Velásquez, M.A. y H. Vélez. Diseño y construcción de una planta piloto para tratamiento de agua potable-Parte 2-. Tesis Ingeniería Civil. Medellín, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Minas, 1982. 137p.