UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

MODELACIÓN MATEMÁTICA DE UNA OPERACIÓN AÉREA

Diego Gerardo Roldán Jiménez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2011

Modelación matemática de una operación aérea

Diego Gerardo Roldán Jiménez

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias - Matemática Aplicada

Director:
Dr. Rer. Nat. Hernán Estrada Bustos
Director *Ad-Hoc*:
Ph.D. Jorge Mauricio Ruiz Vera

Línea de Investigación:
Matemática Aplicada

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2011

A la memoria de Hernán Estrada (q.e.p.d)

Agradecimientos

Este trabajo recibió ayuda parcial a través de las siguientes instituciones, gracias a las cuales se llevó a cabo:

Departamento de Matemáticas Universidad Nacional de Colombia
Fuerza Aérea Colombiana
Escuela de Suboficiales FAC.

Resumen

Las operaciones aéreas que involucran la ubicación y eliminación de un objetivo en tierra han sido utilizadas durante mucho tiempo por los ejércitos del aire. Este es el caso de la Fuerza Aérea Colombiana FAC donde gran parte de las operaciones que realiza son de este tipo. Consideramos operaciones aéreas donde se pretende la eliminación de un objetivo. Para ello se deben realizar diferentes estudios previos al ataque (inteligencia), que van desde la cantidad de personal asignado a la operación hasta el clima que predomina sobre el objetivo. Normalmente la FAC envía un número determinado de aviones en busca del objetivo, que dependiendo de la zona geográfica donde se encuentre y condiciones del terreno se hace más ó menos accesible. Vamos a determinar los recursos que nos permitan obtener éxito total de la misión, además hallaremos la cantidad óptima de aviones que deben ser enviados, y número posible de aeronaves derribadas utilizando modelos probabilísticos y simulación analítica.

Palabras clave: Modelación matemática, simulación numérica, modelos probabilísticos.

Abstract

Air operations that involve the location and elimination of a target on the ground have been used for long time by the air force. This is the case of the Colombian Air Force FAC where much of the operations carried out are of this type. We consider air operations which seeks the elimination of a target. Previously to attack we need different studies (intelligence), ranging from the number of personnel assigned to the operation to the climate that prevails on the target. FAC normally sends a certain number of aircraft in search of the objective, depending on the geographic area where you are and the terrain becomes more or less accessible. We will determine the resources that allow us to achieve total success of the mission, and find the optimal number of aircraft to be sent, and possible number of downed aircraft using probabilistic models and analytical simulation.

Keywords: Mathematical modeling, numerical simulation, probabilistic models.

Contenido

1 Introducción

La modelación de un conflicto aéreo surge del interés de estudiar detalladamente las operaciones aéreas que ha realizado la fuerza aérea colombiana FAC en el conflicto interno colombiano, esto debido a que el elemento aéreo ha jugado un papel importante en el desarrollo de éste. Encontramos diferentes tipos de operaciones que realiza la FAC, por ejemplo las operaciones de abastecimientos en emergencias, operaciones de defensa terrestre y marítima, las operaciones ALAS donde se presta el servicio médico a heridos en conflicto, entre otras.
En un alto porcentaje, estas operaciones son éxitosas debido a la experiencia y profesionalismo del personal involucrado; recordemos por ejemplo la operación de rescate de rehenes JAQUE donde el elemento aéreo fue fundamental para el éxito de esta misión, ó por ejemplo la operación SODOMA donde se logró información invaluable para debilitar al enemigo.
Nosotros concentraremos nuestros esfuerzos en operaciones aéreas donde hay un objetivo en tierra que debe ser aislado del conflicto; en la literatura encontramos que a este tipo de operaciones se les denomina bombardeos. Estos se han realizado en diferentes conflictos a nivel mundial y usualmente van dirigidos a posiciones estratégicas del rival, como fábricas, pistas aéreas, buques, entre otros. Estas operaciones se han hecho desde antes de la invención del aeroplano, en ese entonces se utilizaban globos aerostáticos. Naturalmente la precisión de estas operaciones (que se realizaban utilizando estos globos) no era la mejor, lo cúal originó de forma paralela al desarrollo de la aviación el perfeccionamiento de defensa y ataque de objetivos en tierra.
Este es el caso de muchas de las operaciones que ha realizado la FAC a través de sus 92 años de historia, y en particular en el actual conflicto que se presenta en nuestro país. Para nosotros es importante conocer los detalles de este tipo de operaciones, para así plantear modelos matemáticos que permitan describir estos escenarios con el fin de dar a conocer las posibles consecuencias de las operaciones de acuerdo a cómo han sido planificadas, y así evitar resultados no satisfactorios y brindar herramientas que ayuden a realizar la tarea de planificación aérea más confiable.
Para realizar estas operaciones aéreas se realizan diferentes estudios previos al ataque (inteligencia), que van desde la cantidad de personal asignado a la operación hasta el clima que predomina sobre el objetivo. El encargado de realizar este estudio es el centro de operaciones aéreas estratégicas, que analiza toda la información y se encarga de realizar una bitácora de operaciones. Ningún procedimiento se deja al azar. El factor de inteligencia aérea es vital para el desarrollo de la operación, pues sin esta información sería imposible enviar misiones.

La sección de inteligencia aérea se encarga de conocer y determinar las acciones del rival, incorporando información exacta sobre coordenadas, tipo de defensa que dispone, clima usual, horarios, etc, toda la información que sea importante para el desarrollo de la misión. Una vez hecho esto se procede a analizar la información, elegir las aeronaves adecuadas, el armamento más conveniente, el tiempo de duración, y la verificación del deber cumplido.
Una de las metas de este trabajo es determinar en qué circunstancias se logrará obtener éxito en una misión, dadas unas circunstancias de conflicto, también se mostrarán resultados que permitan al centro de operaciones aéreas estratégicas determinar que cantidad de aviones deben ser enviados a la misión, cuando no se debe realizar una operación, cuál es el número de bajas y que sensibilidad hay entre estos parámetros.
En los modelos matemáticos que describen estas operaciones se trabaja con diferentes parámetros que involucran probabilidades (como la probabilidad de destrucción de una bomba sobre un objetivo), entonces nos encontramos con varias dificultades que surgen a medida que se plantea el modelo. Estos parámetros numéricos son suministrados por la inteligencia aérea y otros valores son suministrados por casas fabricantes (refiriendonos a la probabilidad de éxito de una bomba sobre un objetivo). Desarrollaremos un marco teórico donde expondremos la matemática que usaremos para describir y solucionar los modelos que plantearemos. En una primera parte mencionaremos un modelo clásico donde utilizaremos herramientas de cálculo y probabilidad elemental y mostraremos sus resultados en ejemplos de misiones ideales. Para la segunda parte del trabajo utilizaremos herramientas computacionales para solucionar el modelo que se planteará utilizando simulación analítica y mostraremos varios escenarios que involucran avances tecnológicos, minimización de riesgos e impacto operacional.

2 Un problema de altura

Para describir el primer modelo de conflicto aéreo, necesitamos algunos resultados clásicos de probabilidad, pues este modelo está descrito con estos resultados.
En la sección 1 hablaremos de independencia de eventos, y los postulados de probabilidad, en la sección 2 describimos la trayectoria de una operación aérea y las posibles defensas de un objetivo en tierra. En la sección 3 determinamos la trayectoria óptima de vuelo y discutiremos las consecuencias de este resultado.

2.1. Elementos de Probabilidad

Consideremos un experimento cuyo espacio muestral es S. Para cada evento E del espacio muestral S, suponemos que $P(E)$ está definida y satisface las asiguientes condiciones:

Postulado 2.1.1. $0 \leq P(E) \leq 1$

Postulado 2.1.2. $P(S) = 1$

Postulado 2.1.3. *Para una sucesión de eventos $E_1, E_2, ...$ que son mutuamente excluyentes, esto es, eventos tal que $E_n \cap E_m = \varnothing$ cuando $n \neq m$, tenemos que*

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) \tag{2-1}$$

Nos referimos a $P(E)$ como la probabilidad del evento E. Un ejemplo clásico de probabilidad es cuando queremos determinar el resultado en el lanzamiento de una moneda, para ilustrar este hecho consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.1.1. *Si lanzamos dos veces una moneda legal; ¿Cuál es la probabilidad de sacar al menos una cara?*

Solución.

El espacio muestral es $S_M = \{CC, CS, SC, SS\}$ donde C denota cara y S denota sello. Puesto que suponemos que la moneda está balanceada, estos resultados son igualmente posibles y asignamos a cada elemento de la muestra una probabilidad de $\frac{1}{4}$. Sea A el evento que sacamos al menos una cara, obtenemos que $A = \{CC, CS, SC\}$ así:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(CC) + P(CS) + P(SC) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned} \tag{2-2}$$

Si en un experimento es tal que podemos suponer probabilidades iguales para todos los puntos de muestra, como el caso del ejemplo anterior, podemos hacer uso del siguiente teorema:

Teorema 2.1.1. *Si un experimento puede resultar en cualquiera de N resultados diferentes igualmente probables, y si n de estos resultados juntos constituyen el evento A, entonces la probabilidad del evento A es:*

$$P(A) = \tfrac{n}{N}$$

La demostración del teorema se puede consultar en [12]. El anterior teorema es congruente con los postulados de probabilidad, resulta de los postulados en el caso especial donde los resultados individuales son todos equiprobables.

2.1.1. Eventos independientes

Definición 2.1.1. *Si A y B son dos eventos cualquiera en un espacio muestral S y $P(A) \neq 0$ la probabilidad condicional de B dado A es*

$$P(B|A) = \tfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Si consideramos la definición anterior y multiplicamos a ambos lados de la ecuación dada, obtenemos la siguiente **Regla de multiplicación.**

Teorema 2.1.2. *Si A y B son dos eventos cualquiera en un espacio muestral S y $P(A) \neq 0$, entonces*

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$$

En palabras, la probabilidad de que A y B ocurran ambos es el producto de la probabilidad de A y la probabilidad condicional de B dado A.
Para considerar dos eventos A y B, de manera informal diremos que son independientes si la ocurrencia ó no ocurrencia de cualquiera de los dos no afecta la probabilidad de la ocurrencia del otro. Ahora si sustituimos $P(B)$ por $P(B|A)$ en la ecuación del teorema 2.1.2, obtenemos

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A).P(B|A) \\ &= P(A).P(B) \end{aligned} \tag{2-3}$$

y usaremos esto para mostrar la definición formal de independencia.

Definición 2.1.2. *Dos eventos A y B son independientes, si y sólo si,*

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Siguiendo los pasos en sentido inverso, podemos mostrar que la definición 2.1.1. implica la definición de independencia que dimos anteriormente.

Definición 2.1.3. *Sea S un espacio muestral. Una variable aleatoria es una función del espacio muestral S en los número reales.*

En este trabajo utilizaremos variables aleatorias discretas, es decir, variables aleatorias tal que sus imagenes son conjuntos finitos o infinitos numerables.

Definición 2.1.4. *Para una variable aleatoria discreta X, definimos la función másica $p(a)$ de X como*

$$p(a) = P\{X = a\} \tag{2-4}$$

La función másica es positiva para todos los valores de a. Esto es, si X toma los valores $x_1, x_2, ...$, entonces

$$p(x_i) > 0, \quad i\text{=1,2,...}$$
$$p(x) = 0, \quad \text{en otro caso}$$

Desde que X tome los valores x_i, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1 \tag{2-5}$$

Definición 2.1.5. *Si X es una variable aleatoria discreta, con función másica $p(x)$, entonces su valor esperado está dado por:*

$$E[X] = \sum_{x:p(x)>0} xp(x) \tag{2-6}$$

2.2. En busca del objetivo.

Cuando se planea un bombardeo, una de las preguntas iniciales es determinar la trayectoria (altura de vuelo) de las aeronaves que realizan estas operaciones, esto es debido al tipo de defensa aérea que tiene disponible el objetivo. En las operaciones aéreas donde suponemos al objetivo al nivel del mar, las respectivas alturas serán:

- **ALTA**: Entre 8 Km y 12 Km.

- **MEDIA**: Entre 3 Km y 8 Km.
- **BAJA**: Entre 0 Km y 3 Km

Para un estratega aéreo es claro que las aeronaves que envía a la misión recibirán algún tipo de ataque; la zona donde se presente esta posibilidad de daño se denomina zona de exposición al fuego enemigo, es por esto que durante este tipo de misiones se pretende que el daño a las aeronaves sea el mínimo posible, de allí que se cuestione el tipo de artillería que enfrentará de acuerdo a la altura a la que se vuela:

1) Si se vuela a gran altura las defensas de corto alcance serián obsoletas, y se enfrentará a misiles guiados por sensores.
2) Si se vuela a altura media estaría expuesto a toda la defensa aérea(es decir misiles y armas de corto alcance)
3) Si vuela a baja altura, los misiles guiados serian obsoletos y las aeronaves estarán expuestas a defensas de corto alcance.

Se observa que si se vuela a altura media se enfrentaría todo el arsenal del objetivo, lo cual es poco deseable. Otra consecuencia importante de viajar a diferentes alturas involucran el tiempo de exposición a fuego enemigo, por ejemplo en gran altura se estaría expuesto mayor tiempo a fuego enemigo, mientras que a baja altura la exposición sería menor, esto es debido a que a mayor altura toda aeronave debe volar un espacio mayor y a menor altura un espacio menor, tal como se ilustra en la figura (**2-1**).

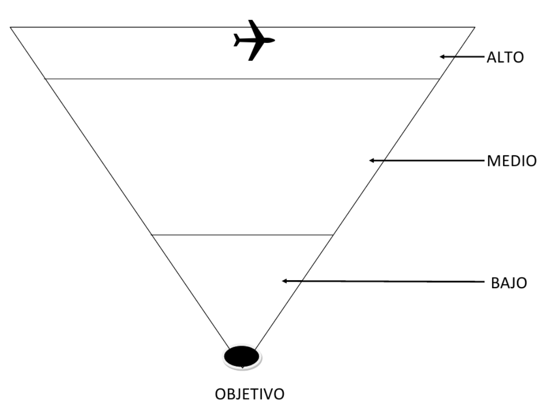

Figura 2-1: Una aeronave en la zona de exposición viajando a gran altura.

En cuanto a la defensa aérea por parte del objetivo, debemos mencionar que ésta siempre tendrá tres etapas durante un atáque aéreo:

- La primera etapa consiste en la detección de una aeronave enemiga. En esta etapa las defensas saben del ataque y se preparan a que las aeronaves lleguen a la zona de exposición.

- Para la segunda etapa las aeronaves estarán en la zona de exposición, y las defensas estarán ubicando en la mira a las aeronaves enemigas.
- En la tercera etapa las aeronaves están en la mira y la defensa sólo dispara. Las etapas tienen un orden estricto y ayudarán a determinar la probabilidad de éxito de impacto sobre una aeronave.

2.3. Modelo de la situación.

En la planeación aérea queremos maximizar el número de bombarderos que sobrevivan el ataque, porque la pérdida de estas aeronaves tienen un gran impacto sobre cualquier fuerza aérea en el mundo, debido al costo de adquisición y operación. Suponemos se envian n aeronaves. De acuerdo a lo planteado anteriormente, la probabilidad de impacto sobre una aeronave dependerá de si se vuela alto o bajo, de las etapas de las defensas aéreas, también al tiempo de permanencia en la zona de exposición y a la cantidad de munición lanzada. Con base en esta información determinaremos el número de aeronaves derribadas. Utilizaremos las siguientes variables:

$n :=$ Número de aeronaves enviadas a la misión.

$P_d :=$ Probabilidad de detección de la defensa aérea.

$P_a :=$ Probabilidad de adquirir en la mira una aeronave.

$P_i :=$ Probabilidad de impacto en la aeronave.

$t :=$ Tiempo de permanencia en la zona de exposición.

$c :=$ Cantidad de munición lanzada en un tiempo determinado.

$P_I :=$ Probabilidad de éxito de la defensa aérea.

$N :=$ Cantidad de aeronaves derribadas.

$p :=$ Probabilidad de que una aeronave destruya el objetivo.

$P :=$ Probabilidad de éxito de la misión.

Como mencionamos anteriormente, la probabilidad de éxito(es decir la probabilidad de que derribe una aeronave) de la defensa aérea depende de la probabilidad de cada una de las tres etapas anteriormente mencionadas. Estas etapas son independientes entre si porque ninguna depende de la otra; de esta forma definimos P_I de la siguiente forma:

$$P_I = P_d P_a P_i \tag{2-1}$$

Vamos a hallar una expresión que nos describa la cantidad de aeronaves derribadas. Una aeronave es derribada si es impactada por un misil y es dañada en más de un 50 %. Debemos tener en cuenta también la cantidad de misiles en el aire en un tiempo determinado, a esta variable la notaremos como V_{aux}:

$$V_{aux} = c.t \tag{2-2}$$

entonces si una defensa antiaérea es capaz de lanzar $c = 4$ misiles por minuto, y el tiempo de permanencia en la zona de exposición es de $t = 5$ minutos, tendremos un total de $V_{aux} = 20$ misiles en el aire. Ahora si consideramos la probabilidad de éxito de las defensas antiaéreas podemos considerar la variable N definida de la siguiente forma:

$$N = P_I V_{aux} \tag{2-3}$$

La definición de N en (2-3) es motivada por la probabilidad de éxito P_I; por ejemplo si los misiles de la batería antiaérea son infalibles, es decir $P_I = 1$, la cantidad de aeronaves derribadas va a ser igual al número de misiles que se encuentran en el aire. Otra consideración importante es que en efecto, N no tomará valores enteros; entonces el valor que consideraremos apropiado para aproximar a N será el entero inmediatamente superior si la parte decimal de N es superior a 0,5 ó será el entero inmediatamente inferior en otro caso. Debido a la naturaleza de las operaciones aéreas donde se prevee un número de bajas N, se debe considerar que el número de aeronaves a enviar a la misión debe ser mayor estrictamente a N, así $n > N$; luego el número de aeronaves m que sobreviven al ataque será:

$$m = n - N \tag{2-4}$$

Para determinar la probabilidad de éxito de la misión, consideraremos la probabilidad p de éxito de cada aeronave, luego la probabilidad de que el objetivo sobreviva al ataque de una aeronave esta dada por:

$$\dot{q} = 1 - p$$

y como m aeronaves sobreviven a la defensa aérea, la probabilidad de que el objetivo sobreviva al ataque será:

$$q = \dot{q}^m \tag{2-5}$$

La expresión dada en (2-5) asume independencia entre la probabilidad q de que el objetivo sobreviva al ataque de cada aeronave; esta suposición en realidad no es cierta ya que cada vez que cae una bomba sobre el objetivo, este se llena de polvo y humo disminuyendo la probabilidad de éxito de cada aeronave. En este trabajo asumiremos independencia sobre q para simplificar el modelo, sin embargo más adelante haremos variar este parámetro para observar como varía la cantidad de aeronaves que se van a requerir durante la misión. Con base en (2-5) definimos la probabilidad de éxito de la misión:

$$P = 1 - q \tag{2-6}$$

El uso óptimo de recursos también es de importancia durante una operación aérea. Es así como el modelo planteado, permite establecer la cantidad mínima de aeronaves que se necesitan si queremos una probabilidad P de éxito de la misión. Dado que cada aeronave tiene una probabilidad de éxito p, de las ecuaciónes (2-5) y (2-6) se obtiene:

$$m = \frac{\log(1-P)}{\log(1-p)} \tag{2-7}$$

En el siguiente ejemplo ilustramos una situación donde se debe determinar la cantidad de aeronaves que deben enviarse a volar una misión, si deben volar alto ó bajo y algunas situaciones que involucran la probabilidad de éxito p.

Ejemplo 2.3.1. *Durante una operación aérea, 16 bombarderos son enviados a la misión. Ellos necesitan penetrar las defensas aéreas para llegar a su objetivo en tierra. Cada uno de ellos puede volar bajo y exponerse cada uno a defensas anti-aéreas, o volar en grandes altitudes y exponerse a ser atacados por misiles tierra-aire. De acuerdo a inteligencia las probabilidades de que un sistema anti-aéreo localice, rastree e impacte una aeronave están dadas por:*

Vuelo	P_d	P_a	P_i
Bajo	*0.90*	*0.80*	*0.05*
Alto	*0.75*	*0.95*	*0.70*

Las armas de corto alcance(lanza-cohetes) pueden disparar una ronda de 20 cohetes por minuto, y la instalación de misiles pueden disparar 3 misiles por minuto.
En el plan de vuelo sugiere que las aeronaves se expongan por 1 minuto si ellos vuelan en formación de baja altitud y 5 minutos si ellos vuelan a gran altura.

Necesitamos determinar la trayectoria óptima (baja ó alta altitud). El objetivo es maximizar el número de bombarderos que sobrevivan al ataque.

De acuerdo a (2-1) la probabilidad de impacto si se vuela bajo ó alto será 0.03 y 0.49 respectivamente. Reemplazando en (2-3) y teniendo en cuenta que si se vuela alto $t = 5$ y $c = 3$, y si se vuela bajo $t = 1$ y $c = 20$ tendremos que

Vuelo	N
Bajo	0.72
Alto	7.48

Entonces se debe volar bajo ya que solo se perderá una aeronave, contrario a las pérdidas de las 7 aeronaves en un vuelo alto. Es decir si se enviaron $n = 16$ aeronaves, tenemos que $m = 15$.

Ejemplo 2.3.2. *Si cada bombardero, tiene un $p = 70\,\%$ de probabilidad de destruir el objetivo. Determinar la probabilidad de que todos los bombarderos destruyan el objetivo, de manera conjunta.*

Utilizando las ecuaciones (2-5) y (2-6) tenemos que

$$P = 0{,}99$$

luego en este caso la operación es todo un éxito.

Ejemplo 2.3.3. *Entre las ideas de una planificación aérea exitosa, está la utilización de la menor cantidad de recursos. Determinar la cantidad mínima de bombarderos para garantizar un éxito de la misión del $95\,\%$.*

De la ecuación (2-6) observamos que $P \geq 0{,}95$ si y solo si $m \geq 3$.Luego de (2-4) se deben enviar un total de

$$n = m + N = 3 + 1 = 4$$

aeronaves a cumplir la misión.

Ejemplo 2.3.4. *Diseñar un analísis de sensibilidad con respecto a la probabilidad $p = 0{,}7$ de que una aeronave destruya un objetivo y considerar éxito de la misión del $P = 95\,\%$.*

Utilizamos la ecuación (2-7) con los parámetros dados y como se espera perder una aeronave en la misión, debemos enviar $n = m + 1$ aeronaves. En la figura (**2-2**) observamos que para

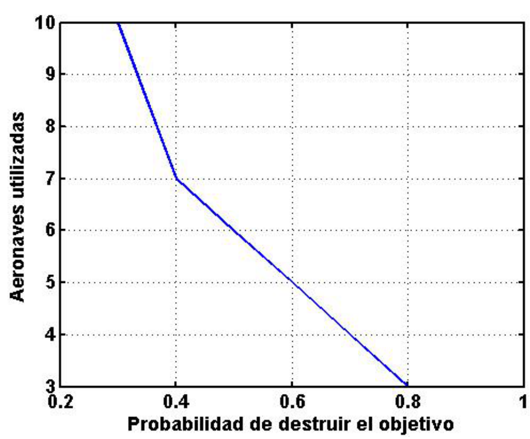

Figura 2-2: La cantidad de aeronaves no cambia drásticamente, cuando p varía alrededor de 0,7

valores alrededor de $p = 0{,}7$ la cantidad de aeronaves varía de 5 a 3. Es decir que solo varía una aeronave extra. Por lo tanto en el ejemplo el valor de p no altera de manera significante el uso de recursos; tambíen se puede observar que para $p = 0{,}4$ la cantidad de aeronaves cambia en más de una unidad, lo cuál muestra que el modelo es sensible alrededor de ese valor para el ejemplo ilustrado.

Ejemplo 2.3.5. *Diversos factores como el polvo en el aire, y el mal tiempo reduce la probabilidad P_d de que el bombardero sea detectado y la probabilidad p de éxito de cada aeronave. Si ambas probabilidades se reducen a la misma proporción. ¿Es conveniente lanzar el ataque?*

Si el mal tiempo reduce a la mitad cada una de las probabilidades en baja altitud, entonces $P_d = 45\,\%$ y $p = 35\,\%$. Para esta situación en un vuelo bajo de acuerdo a la ecuación (2-3) las aeronaves que se envien sobrevivirán; pero para lograr un éxito del $95\,\%$ de acuerdo a la ecuación (2-7) se necesitaran 7 aeronaves. Esto involucra mayor uso de recursos; entonces con condiciones que reduzcan estas probabilidades no es conveniente lanzar un ataque si se observa desde la perspectiva del gasto de recursos.

3 Una operación aérea planificada

Durante un conflicto aéreo, las defensas aéreas en su intento de defender el objetivo atacarán constantemente a las aeronaves involucradas en la misión con el fin de derribarlas, a las defensas aéreas se les acostumbra a llamar SAM (por sus siglas en inglés *Surface Air Missile*); la probabilidad de acertar de estas armas depende de la pericia del que las manipula y de la tecnología con la que cuente.
Para el escenario donde se esté lanzado determinado número de munición desde tierra, es conveniente utilizar una distribución de probabilidad que indique el fracaso ó el éxito a la hora de atacar aeronaves enemigas.
En la primera parte de este capítulo introduciremos la distribución de probabilidad binomial con algunas de sus propiedades y mencionaremos la noción de simulación análitica para modelar una situación que involucre más variables. Para la segunda parte del capítulo consideramos simulaciones de Monte Carlo y solucionaremos algunos problemas con esta técnica.

3.1. Distribución de Probabilidad

Supongamos un experimento que tiene dos posibles resultados *exito* ó *fracaso*. Si fijamos a X como una variable aleatoria, tal que es igual a 1 si el experimento es exitoso y es igual a 0 si el resultado es fracaso, entonces la función másica de X está dada por:

$$\begin{aligned} p(0) &= P\{X = 0\} = 1 - p \\ p(1) &= P\{X = 1\} = p \end{aligned} \tag{3-1}$$

donde p, $0 \leq p \leq 1$ es la probabilidad de que el experimento sea exitoso.
Una variable aleatoria X se dice *variable aleatoria de Bernoulli* si su función másica está dada como en la ecuación (3-1) para algún $p \in (0, 1)$.

3.1.1. La distribución Binomial

Supongamos n ensayos independientes en un experimento, cada uno con probabilidad p de éxito y una probabilidad $1 - p$ en caso de fracaso. Si X representa el número de exitos que ocurren en n ensayos, entonces a X se le llama una *variable aleatoria Binomial* con

parámetros (n, p).
La función másica de una variable aleatoria binomial de parámetros (n, p) está dada por:

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \qquad i = 0, 1, ..., n \tag{3-2}$$

Se puede observar que por el teorema del binomio, la suma de las probabilidades es uno, esto es,

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = \sum_{i=0}^{\infty} = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = (p + (1-p))^n = 1$$

Ejemplo 3.1.1. *Hallar la probabilidad de sacar 5 caras y 7 sellos en 12 lanzamientos de una moneda balanceada.*

Solución.
Al sustituir $i = 5, n = 12$ y $p = 0{,}5$ en la ecuación (3-2) encontramos que dicha probabilidad es 0.19.

3.2. Simulación Analítica

El centro de operaciones aéreas estratégicas planea un ataque a un objetivo que se encuentra muy bien defendido, el centro dispone de bombarderos de gran altitud para realizar la misión. Por problemas de seguridad nacional se debe asegurar el éxito de la operación durante el primer día de ataque.

Pregunta 3.2.1. *¿Cuántos bombarderos deben enviarse a este objetivo, con el fin de garantizar su total destrucción?*

Esta es la pregunta típica que se realiza en el centro de operaciones estratégicas. Para plantear su solución, necesitamos saber las condiciones bajo las cuales enviaremos aeronaves a la misión, y por ello necesitamos informes de inteligencia que nos permita identificar mejor al objetivo. Normalmente estos informes de inteligencia traen las coordenadas donde se planea el ataque, el terreno y la dimensión de objetivo (Área).
Esta información nos ayudará a determinar el tipo de bombas que se usarán durante el ataque. En este tipo de operaciones el daño colateral debe ser mínimo y en consecuencia está información es importante.
Con la información suministrada anteriormente, inteligencia puede realizar estimaciones sobre la efectividad de los bombarderos y determinar la probabilidad de éxito individual. Aquí es muy importante contar con aeronaves de alta tecnología pues entre más tecnología se disponga mejor será esta probabilidad. Además, teniendo en cuenta las características de

las aeronaves, también se pueden hallar cifras que nos indique la probabilidad de atravesar las defensas aéreas y lograr destruir el objetivo. Para fines prácticos se considera que la misión es exitosa si se logra una efectividad mayor o igual a 99 %.
Otro dato importante que nos debe suministrar inteligencia es qué tipo de defensa es la que dispone el objetivo, esta información debe ser precisa y detallada pues nos permitirá ajustar las cifras para determinar la probabilidad de que alguna de estas baterías antiaéreas impacte a alguna aeronave.
Para empezar a describir el modelo, necesitamos hallar una expresión que determine la probabilidad de que la misión sea un éxito. Empezamos considerando que el número de aeronaves derribadas será una variable aleatoria X cuya distribución mencionaremos más adelante. También definimos X_i como la expresión que representa la probabilidad P_i de éxito de la misión dado que $X = i$ aeronaves han sido derribadas antes de que puedan atacar el objetivo, y necesitamos determinar la probabilidad de que $X = i$ aeronaves sean derribadas.
En nuestra expresión vamos a asignar a X_i la distribución de X con el fin de determinar el valor esperado de éxito de i aeronaves dado que $X = i$ aeronaves han sido derribadas. De esta forma, definimos a S como la probabilidad de éxito de la misión:

$$S = \sum_i X_i P(X = i) \quad i = 1, 2, ..., m \tag{3-3}$$

donde m es la cantidad de misiles lanzados desde tierra. Para determinar los valores que X_i toma, observemos que si N aeronaves son enviadas a la misión y $X = i$ aeronaves son destruidas antes de completar la misión, entonces $N - i$ aeronaves atacan el objetivo. Si p es la probabilidad de que una aeronave destruya el objetivo, $1 - p$ es la probabilidad de que fracase. La probabilidad P de que $N - i$ aeronaves fallen será,

$$P = (1 - p)^{N-i} \tag{3-4}$$

luego, la probabilidad de que $N - i$ aeronaves cumplan la misión será

$$P_i = 1 - P \tag{3-5}$$

así:

$$X_i = 1 - (1 - p)^{N-i} \tag{3-6}$$

Ahora vamos a suponer que la variable aleatoria que denota el número total de aeronaves destruidas es una variable aleatoria con distribución binomial es decir

$$P(X = i) = \binom{m}{i} q^i (1 - q)^{m-i} \quad i = 1, 2, ..., m \tag{3-7}$$

donde m es el número de misiles lanzados y q es la probabilidad de que un misil derribe una aeronave. Así la ecuación (3-3) queda de la siguiente forma:

$$S = \sum_i X_i P(X = i) = \sum_i^m (1 - (1 - p)^{N-i}) \binom{m}{i} q^i (1 - q)^{m-i} \quad i = 1, 2, ..., m \tag{3-8}$$

En la expresión (3-8) los valores desconocidos son m y N. Para conocer el valor de m debemos determinar el tiempo que las aeronaves se encuentran expuestas al fuego enemigo, ya que las baterías antiaéreas usualmente lanzan una determinada cantidad de misiles en un tiempo dado. Aqui es importante considerar la velocidad a la que vuelan las aeronaves y el rango de alcance efectivo de cada SAM, luego el tiempo que las aeronaves permanecerán expuestas mientras realizan el ataque está dado por:

$$t = \frac{A}{v_0} \tag{3-9}$$

donde A es el alcance del radar de las defensas antiaéreas y v_0 es la velocidad a la cual están volando las aeronaves. Resumimos el modelo así:

Variables:

$N :=$ Número de bombarderos enviados

$m :=$ Número de mísiles lanzados

$p :=$ Probabilidad de que un bombardero pueda destruir el objetivo

$q :=$ Probabilidad de que un misíl derribe un bombardero

$X :=$ Número de bombarderos derribados antes de completar el ataque

$P_i :=$ Probabilidad de éxito de la misión dado que $X = i$

$S :=$ Probabilidad de éxito de la misión

Suposiciones:

$$\begin{aligned} X_i &= 1 - (1-p)^{N-i} \\ P(X=i) &= \binom{m}{i} q^i (1-q)^{m-i} \\ S &= \sum_{i=0}^{m} X_i P(X=i) \end{aligned}$$

Objetivo:
Hallar el valor mínimo de N tal que $S > 0{,}99$

En el algoritmo (1) se muestra la estructura del modelo, junto a las variables de entrada N, m, p, q y el resultado S.

Algoritmo 1 Problema del bombardeo

Entrada: N, m, p, q

Salida: S

```
para i = 0 hasta m hacer
    P ← 1 − (1 − p)^(N−i)
    B ← Binomial(m, i, q)
    S ← S + P.B
fin para
```

3.3. Algunas Operaciones de la FAC

La Fuerza Aérea Colombiana (FAC) es una de las tres instituciones de las Fuerzas Militares de Colombia, encargada de acuerdo a la Constitución de 1991 de la labor de ejercer y mantener el dominio del espacio aéreo colombiano para defender la soberanía, integridad territorial y el orden constitucional. Es una de las fuerzas aéreas latinoamericanas más grandes y de mayor actividad debido a su importante rol en la lucha contra el narcoterrorismo [8]. Está organizada en Comandos, los cuales son responsables de las operaciones en determinada área geográfica del país. En cada comando existen grupos aéreos que se encargan de la administración de escuadrones con funciones específicas: Combate, Transporte, Formación, Inteligencia, Evacuación médica, etc. En esta sección, presentaremos dos casos de estudio basados en datos obtenidos en [9] y [10] de las operaciones aéreas Fénix y Sodoma, dos operaciones que se destacan por los resultados en el conflicto interno colombiano. Estas operaciones tienen en común el hecho de que las aeronaves involucradas no reciben ataque desde tierra. El modelo descrito se puede aplicar en estos ejemplo y los resultados los compararemos con datos historicos.

3.3.1. La operación Fénix

3.3.2. La operación Sodoma

3.4. Un ejemplo ideal

Hay que destacar que algunas probabilidades en estas operaciones, como por ejemplo la probabilidad de detección y destrucción del objetivo depende del armamento que se está utilizando, así como se mostró en los ejemplos anteriores esas probabilidades fueron calculadas de acuerdo al tipo de armamento aéreo. Estos cálculos de efectividad de destrucción de las bombas son calculados por la casa fabricante y normalmente dependen del ángulo de incidencia entre el objetivo y la aeronave atacante [11]. La FAC dispone de un catalogo ilustrado de las probabilidades de éxito de sus bombas en [11].
A pesar de que no fue posible encontrar datos sobre baterías antiaéreas en la FAC (porque carece de sistemas antiaéreos), es posible encontrar características de estos sistemas en diferentes sitios web de casas fabricantes (ver por ejemplo [2], [15],[21] y [26]). En el siguiente ejemplo encontramos una situación especifica, donde el trabajo de inteligencia nos suministra información detallada de las capacidades del objetivo y capacidades propias de las aeronaves a utilizar en la misión. El siguiente ejemplo es tomado de [16].

Ejemplo 3.4.1. *El jefe del centro de operaciones aeronáuticas, sabe que las aeronaves que enviará a la misión, tienen una probabilidad individual de destruir el objetivo del* $50\,\%$ *asumiendo que atraviesan las defensas aéreas y encuentran al objetivo. La probabilidad de que cada aeronave adquiera el objetivo es del* $90\,\%$*.*
Los datos de inteligencia suministrados, informan que el objetivo está defendido con dos baterías antiaéreas y suficientes armas de corto alcance; cada batería antiaérea tiene su propio sistema de guia y rastreo, el cual es capaz de rastrear dos aeronaves con alcance de $80Km$*, también es capaz de guiar dos misiles a la vez con un rango efectivo de radar de* $24Km$*. Cada misil viaja a una velocidad de* $1600Km$ *por hora. Se estima que la probabilidad de que un misil impacte una aeronave es del* $60\,\%$ *y se sabe que puede disparar 1 misil cada 30 segundos; además cada SAM dispara una sola vez a cada aeronave.*
Por otra parte, los bombarderos viajan a una velocidad de 804 kilometros por hora a una altitud de $8Km$*, y el ataque requiere una permanencia en el área de 1 minuto.*

Necesitamos determinar el tiempo total al que se expondrá cada aeronave, para ello determinamos el alcance efectivo del radar y la velocidad de la aeronave en la ecuación (3-9):

$$t_0 = \frac{24Km}{804Km/h}\frac{60min}{1h} = 1{,}8min \tag{3-12}$$

a este valor se le debe sumar el minuto de permanencia mínimo que informa el plan de vuelo, así el tiempo total de exposición será:

$$t = t_0 + 1 = 2{,}8min \tag{3-13}$$

Como las dos baterías antiaéreas pueden lanzar 2 misiles cada 30 segundos, entonces concluimos que el número total de mísiles en el aire durante la operación será de $m = 10$ misiles.

Para solucionar el modelo usaremos simulaciones por computadora del algoritmo **1.** con las siguientes entradas:

$$\begin{aligned} m &= 10 \\ p &= (0{,}9)(0{,}5) \\ q &= 0{,}6 \end{aligned} \tag{3-14}$$

y para diferentes valores de N. Ilustramos los resultados en la figura (**3-3**). Un mínimo de

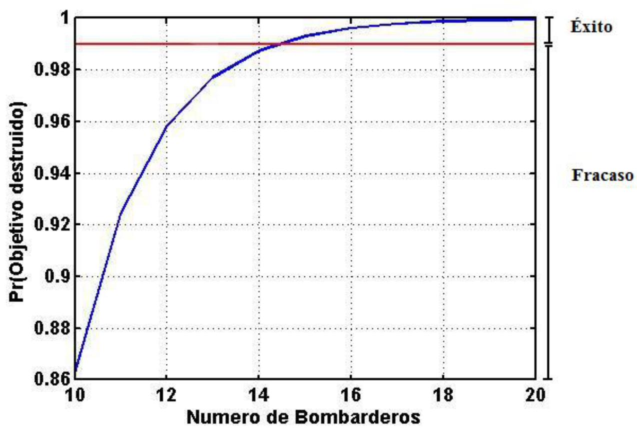

Figura 3-3: Gráfica que muestra la probabilidad S de éxito y los bombarderos N enviados.

$N = 15$ aeronaves son necesarias para asegurar el éxito de la misión. Un número bastante considerable sobre todo si se cuenta con un poder aéreo lo suficientemente limitado.
Necesitamos hacer un análisis de sensibilidad para tener una visión más amplia de cual será el número indicado de bombarderos para realizar esta misión.
Primero vamos a considerar la probabilidad de éxito $S = 0{,}99$. Este es un valor conveniente a variar. En la figura (**3-4**) mostramos los efectos de hacer esta variación. Observamos que $N = 15$ es una buena decisíón, aunque un número de aeronaves entre 10 y 20 sería aceptable. Más de 20 aeronaves es innecesario ya que no hay una variación considerable de la probabilidad de éxito.

3.4.1. El mal clima

Cuando se planea una operación aérea, entre los elementos más importantes a considerar es el clima. Si hay buen clima, la probabilidad de que un bombardero pueda destruir el objetivo será mayor debido a que son más fáciles las condiciones de vuelo (operación *Fénix*). Normalmente antes de lanzar un ataque aéreo se espera el reporte de meteorología aeronáutica, con

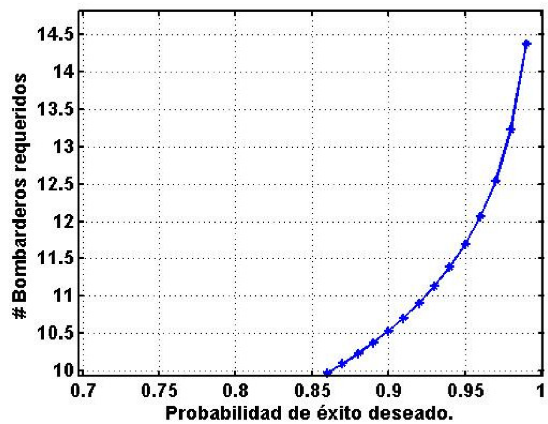

Figura 3-4: Variación de N para diferentes valores de S.

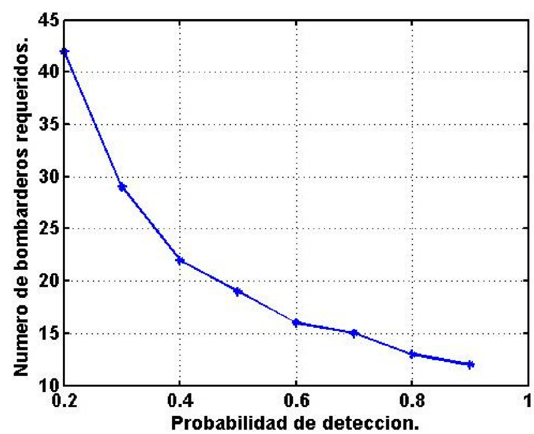

Figura 3-5: Gráfica de número de bombarderos contra la probabilidad de detección de las aeronaves.

el fin de determinar si es viable o no el ataque. En nuestro modelo, el mal clima se verá reflejado en la probabilidad p de que un bombardero destruya el objetivo. Para nuestro caso particular por (3-14) tenemos que $p = (0{,}9)(0{,}5)$, y si la probabilidad de detección se reduce a la mitad, es decir $p = (0{,}5)(0{,}5) = 0{,}25$ y si $S > 0{,}99$, entonces necesitaremos $N = 23$ aeronaves. De manera semejante, si la probabilidad de detección ahora es 0,3, entonces $N = 35$ aeronaves son requeridas. La relación que hay entre la probabilidad de detección y el número de aeronaves requeridas para la misión se ilustran en la figura (**3-5**). Es obvio que no queremos volar la misión del ejemplo (3.4.1) con mal clima. En la tabla (**3-1**) mostramos que el ejemplo (3.4.1) con los parámetros dados es bastante sensible cuando la probabilidad de detección está entre 0.2 y 0.3, caso opuesto a lo que sucede para valores entre 0.8 y 0.9. Esto es porque la cantidad de aeronaves se incrementa en un factor de 13 aeronaves por cada 10 % de probabilidad de detección.

Valores de p	Valores de N	Sensibilidad
0.2-0.3	42-29	1.3
0.3-0.4	29-22	0.7
0.4-0.5	22-19	0.3
0.5-0.6	19-16	0.3
0.6-0.7	16-15	0.1
0.7-0.8	15-13	0.2
0.8-0.9	13-12	0.1

Tabla 3-1: Sensibilidad entre los valores de p y N.

3.4.2. Tecnología Disponible

Una consecuencia del modelo es analizar el impacto operacional que traen los avances tecnológicos. Por ejemplo si se disponen de bombarderos que viajen al doble de la velocidad reducirián el tiempo de exposición a 15 segundos. Por lo tanto, en nuestro ejemplo de estudio las aeronaves se verán expuestas al fuego antiaéreo por sólo 1 minuto, donde las baterías SAM lanzarán un total de $m = 4$ misiles. Con estas condiciones sólo se necesitarán $N = 11$ aeronaves para garantizar un éxito de la misión S mayor al 99 %. La figura (**3-6**) muestra la relación que hay entre el número de bombarderos enviados y la probabilidad de éxito de la misión en el caso de que se lanzen $m = 10$ misiles (trayectoria verde) y en el caso del concepto avanzado de aeronave $m = 4$ (trayectoria azul). Para una comparación de referencia incluimos el escenario donde no se lanzan misiles $m = 0$ (trayectoria amarilla). En la figura (**3-7**) se observa que a mayor cantidad de aeronaves en el aire, y mayor probabilidad de impacto de los misiles, mayor será el número de aeronaves derribadas.

3.4.3. Aeronaves derribadas

Consideramos de nuevo el ejemplo (3.4.1), lo vamos a modificar de tal forma que conozcamos el número total de bajas para esta misión. Cuando las aeronaves cumplen su misión y se preparan para regresar a la base ellas aún están expuestas a las baterías antiaéreas, entonces la pregunta es:

Pregunta 3.4.1. *¿Cuántas aeronaves se perderán en toda la misión?*

Para conocer esta cifra definimos la siguiente expresión:

$$L = \sum_i iP(X = i) \quad i = 1, 2, ..., m \tag{3-15}$$

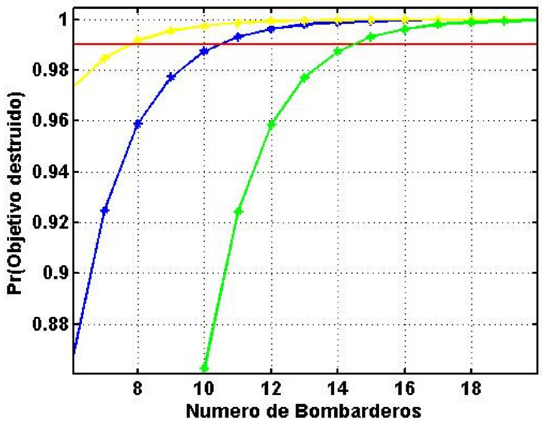

Figura 3-6: Gráfica entre el éxito de la misión S y el número de bombarderos enviados N. Comparación de los tres casos $m = 0, 4, 10$.

donde i representa el número de aeronaves impactadas por los misiles y $P(X = i)$ se define como está en (3-7). Modificamos el algoritmo **1.** cambiando S por L y obtenemos el número de aeronaves derribadas durante toda la misión. Así de acuerdo a (3-9) y el minuto adicional de permanencia tenemos que las aeronaves deben permancer por lo menos 4.6 minutos en la zona de exposición. En este tiempo cada batería antiaérea lanza 9 misiles; así habrá $m = 18$ misíles en el aire. Luego considerando el algoritmo **1.** con las entradas

$$\begin{aligned} m &= 18 \\ p &= (0{,}9)(0{,}5) \\ q &= 0{,}6 \\ N &= 15 \end{aligned} \tag{3-16}$$

Obtenemos que en total se derriban 11 aeronaves. Un resultado trágico para la operación, esto es porque el valor unitario de un bombardero económico (por ejemplo el *Supertucano*) es de 15 millones de dolares. En este momento debemos considerar la posibilidad de permanecer menos tiempo en la zona de exposición, para ello debemos considerar los tiempos de entrada, permanencia y salida. El tiempo de permanencia en la mayoría de los casos es inalterable [4], entonces debemos considerar los tiempos de permanencia y salida, aqui es importante disponer de aeronaves más veloces. Si ahora en el ejemplo (3.4.1) consideramos aeronaves que vuelan a una velocidad de 1930 kilometros por hora (bombarderos supersónicos) y solo permanecen en el aréa de ataque por 15 segundos(0.25 minutos) por la ecuación (3-9) tendremos que gastarán 0.75 minutos entrando en la zona de exposición y 0.75 minutos saliendo por lo cual gastarán un total de 1.75 minutos. Este tiempo suficiente para que las baterías antiaéreas lancen un total de $m = 6$ misíles. Consideramos el algoritmo **1.** con las entradas:

$$
\begin{aligned}
m &= 6 \\
p &= (0{,}9)(0{,}5) \\
q &= 0{,}6 \\
N &= 15
\end{aligned}
\tag{3-17}
$$

y tenemos que se tendrán 4 aeronaves derribadas. Por lo tanto la ventaja tecnológica es de gran ayuda en estas operaciones.

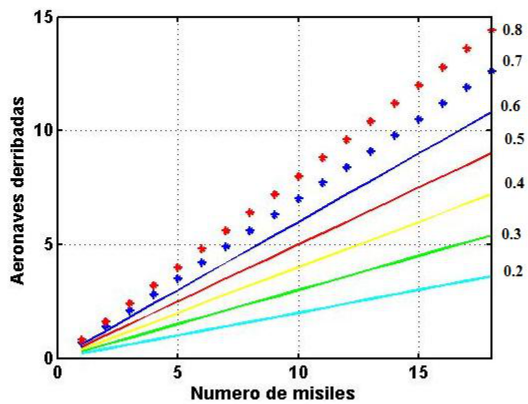

Figura 3-7: Gráfica entre cantidad de misiles en el aire y aeronaves derribadas para diferentes valores de q.

3.5. Simulación de Monte Carlo

La simulación Monte Carlo es una técnica que puede ser aplicada a cualquier modelo probabilístico. Recordemos que un modelo de probabilidad incluye un número de variables aleatorias y también debe especificar la distribución para estas variables.

Como los resultados de las simulaciones dependen de factores aleatorios, las repeticiones consecuentes podrían resultar diferentes. Usualmente las simulaciones Monte Carlo, deben repetirse un determinado número de veces para determinar un valor esperado promedio .

La simulación Monte Carlo, es tipícamente utilizada para estimar la distribución de una ó más variables aleatorias. Repetidas simulaciones pueden considerarse como intentos independientes aleatorios. Para nuestra situación consideremos la variable aleatoria Y. Repetidas simulaciones producirán los resultados $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ los cuales deben ser considerados como

variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, cuya distribución es desconocida.
Por la ley fuerte de los grandes números sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y_1 + ... + Y_n}{n} \to EY$$

cuando $n \to \infty$. Por lo tanto nosotros podemos usar el promedio de $Y_1, ..., Y_n$ para estimar el valor esperado real de Y. Tambíen sabemos que si

$$S_n = Y_1 + ... + Y_n$$

el teorema del límite central implica que

$$(S_n - n\mu)/\sigma\sqrt{n}$$

tiene aproximadamente la distribución normal estándar para valores de n lo suficientemente grandes, donde $\mu = E(Y)$ y $\sigma^2 = Var(Y)$.
Para muchos casos la aproximación a la distribución normal, es relativamente buena cuando $n \geq 10$. Aunque no conozcamos μ ó σ el teorema del límite central aún es una importante herramienta. Puesto que:

$$\tfrac{S_n}{n} - \mu = \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\tfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

entonces podemos esperar que esta diferencia tienda a cero cuando $n \longrightarrow \infty$. En otras palabras entre mayor sea el valor de n entonces mayor será la eficacia del método.

3.5.1. Situación Inicial

Consideramos el problema descrito en el ejemplo (3.4.1). Utilizaremos Monte Carlo para solucionar este problema. Primero consideramos la probabilidad q de que un misil derribe una aeronave, de esta forma determinamos la cantidad de aeronaves derribadas, para ello fijamos un intervalo $A = [0, q]$ con $A \subset [0, 1]$. Luego considerando las aeronaves restantes y la probabilidad p de éxito de cada una de ellas y fijamos un intervalo $B = [0, p]$ con $B \subset [0, 1]$. Este procedimiento se ilustra en el algoritmo **2**.

El algoritmo **2.** considera N aviones en la misión, los cúales se someten a m misiles lanzados por la defensa aérea, primero simulamos, cuantas aeronaves son derribadas con la variable M, de esta forma $N - M$ aeronaves estan en misión con probabilidad de éxito p. Posteriormente calculamos la media de las simulaciones y escribimos el resultado que es la probabilidad S

Algoritmo 2 Problema del bombardeo utilizando Monte Carlo

Entrada: N, m, p, q, n
Salida: Éxito de la misión.

para $i = 1$ hasta n **hacer**
  $M \leftarrow 0$
  para $i = 1$ hasta m **hacer**
    si el número aleatorio está en el intervalo A **entonces**
      Derribar una aeronave
    fin si
  fin para
  para las aeronaves que sobreviven el ataque de las defensas **hacer**
    si el número aleatorio está en el intervalo B **entonces**
      El ataque tuvo éxito
    fin si
  fin para
fin para

de éxito de la misión.
Cuando consideramos los siguientes datos de entrada:

$$
\begin{aligned}
N &= 15 \\
p &= (0{,}9)(0{,}5) \\
q &= (0{,}6) \\
m &= 10 \\
n &= 10000
\end{aligned}
$$

la probabilidad de éxito es del 99 %.

3.5.2. Análisis de Sensibilidad

Teniendo en cuenta la simulación hecha por Monte Carlo realizamos análisis de sensibilidad sobre N. Para ello vamos a considerar diferentes valores de N y observaremos los resultados en la figura (**3-9**).

Observamos que valores de N entre 11 y 15, garantizarán por lo menos un éxito S del 90 %, para $N > 15$ la misión tendrá un éxito del 99 %, pero con 15 aeronaves la misión se cumplirá satisfactoriamente.

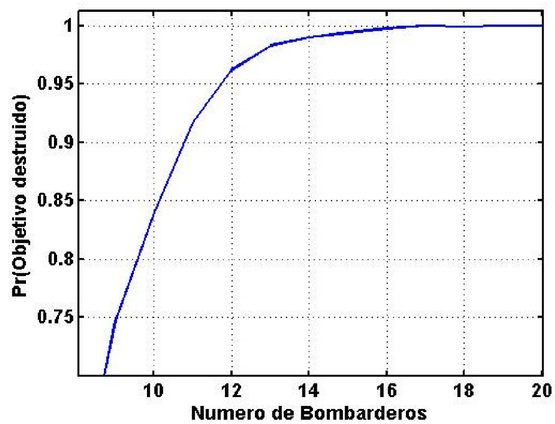

Figura 3-8: Gráfica que muestra el número de aeronaves con la probabilidad de éxito.

3.6. Una opción analítica

Consideremos de nuevo el ejemplo (3.4.1). Mostraremos cómo el uso de la fórmula binomial

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

puede ser usado para simplificar la simulación analítica presentada anteriormente. Como se menciono, el éxito de la misión se expresa como:

$$S = \sum_i P_i P(X = i)$$

donde P_i es la probabilidad de éxito de la misión dado que i aeronaves han sido derribadas y $P(X = i)$ es la probabilidad de que $X = i$ aeronaves sean derribadas. Recordemos que a la misión se envía un total de N aeronaves. Vamos a mostrar que a partir de la fórmula binomial podemos deducir una expresión alternativa para S. A partir de 3-2 y 3-6 tenemos que:

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{i=0}^{m} P_i P(X=i) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \left[1-(1-p)^{N-i}\right] \binom{m}{i} q^i (1-q)^{m-i} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} q^i (1-q)^{m-i} - \sum_{i=0}^{m} (1-p)^{N-i} \binom{m}{i} q^i (1-q)^{m-i} \\
&= 1-(1-p)^{N-m} \sum_{i=0}^{m} (1-p)^{m-i} \binom{m}{i} q^i (1-q)^{m-i} \\
&= 1-(1-p)^{N-m} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} q^i \left[(1-q)(1-p)\right]^{m-i} \\
&= 1-(1-p)^{N-m} (q+(1-q)(1-p))^m \qquad (3\text{-}18)
\end{aligned}
$$

de esta forma la fórmula binomial nos ayuda a deducir el éxito de la misión de forma analítica. A partir de la expresión 3-18 vamos a hallar una expresión que nos permita calcular el número de aeronaves requeridas para la misón.

3.6.1. Número de Aeronaves

Consideremos la expresión (3-11)

$$S = 1-(1-p)^{N-m}(q+(1-q)(1-p))^m$$

vamos a despejar N de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
S &= 1-(1-p)^{N-m}(q+(1-q)(1-p))^m \\
(1-p)^{N-m}(q+(1-q)(1-p))^m &= 1-S \\
(1-p)^{N-m} &= \frac{1-S}{(q+(1-q)(1-p))^m} \\
(1-p)^{N} &= \frac{(1-p)^m(1-S)}{(q+(1-q)(1-p))^m} \\
N\log(1-p) &= \log\left[\frac{(1-p)^m(1-S)}{(q+(1-q)(1-p))^m}\right] \\
N &= \log\left[\frac{(1-p)^m(1-S)}{(q+(1-q)(1-p))^m}\right] / \log(1-p) \qquad (3\text{-}19)
\end{aligned}
$$

y de esta forma N está en términos de $S, p, m,$ y q. La anterior deducción nos permite establecer una relación directa entre N y S para valores fijos de p, m y q. De acuerdo al ejemplo 3.4.1 estos valores son:

$$p = (0{,}9)(0{,}5)$$
$$m = 8$$
$$q = 0{,}6$$

los resultados de graficar S contra N con los valores anteriores se pueden observar en la figura 3-9. Como se puede observar estos resultados son semejantes a los ilustrados en la figura 3-4.

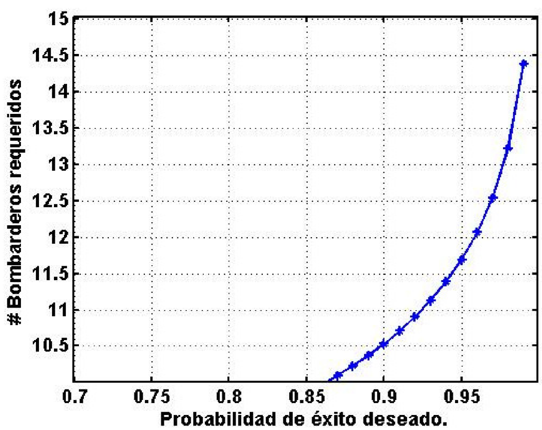

Figura 3-9: Gráfica que muestra el número de bombarderos N y la probabilidad de éxito S.

3.7. Robustez

Un modelo matemático es robusto si las conclusiones del modelo conducen a resultados válidos aunque el modelo no sea completamente exacto. Para el modelo que consideramos nosotros realizamos varias simplificaciones importantes: Primero asumimos que cada aeronave adquiere el objetivo independientemente con la misma probabilidad. En realidad esto no sucede, porque la primera bomba que cae sobre el objetivo causa polvo y humo, oscureciendo el área del objetivo. Esto puede reducir considerablemente la probabilidad de que los bombarderos adquieran el objetivo. Nosostros diseñamos un análisis de sensibilidad en el ejemplo 3.4.1 sobre el parámetro $p = 0{,}9$ y observamos que el valor de N no cambia a pequeños cambios de esta probabilidad. Para valores de $p < 0{,}4$ observamos que la cantidad de aeronaves se incrementa a pequeñas variaciones de p (ver figura (3-5)).
Nuestro modelo también asume que las baterias antiaéreas no disparan dos veces sobre la misma aeronave. Esto en cierta forma es una óptima estrategia de defensa cuando el número potencial de aeronaves N es mayor que el número máximo m de misiles. La información

suministrada por inteligencia, debe ser precisa en cuanto a las capacidades de las SAM del objetivo. De hecho la simulación analítica prevee que $N > m$ por la expresión 3-5 y la definición de S dada en 3-3. Entonces en nuestra situación no es posible que el número de misiles exceda el número de aeronaves enviadas. De esta forma en operaciones aéreas se establece la imposibilidad de lanzar un ataque si se presenta esta situación. Aunque es posible una situación donde $m > N$, es decir, donde la cantidad de aeronaves es menor que la cantidad de misiles en el aire. En el próximo capítulo describiremos más detalladamente esta situación.

4 Operación con tecnología de sigilo

Vamos a considerar la posibilidad de contar con aeronaves de tecnología furtiva. Retomando el ejemplo 3.4.1, supongamos ahora que las N aeronaves enviadas a la misión son de tecnología furtiva (y por lo tanto invisibles al radar). Aviones furtivos como el F-117 son generalmente usados contra objetivos terrestres altamente fortificados y defendidos como centros de mando y control o baterías de misiles antiaéreos. Los radares cubren todo el espacio aéreo que rodea estas zonas, incluso solapándose, haciendo imposible la entrada de un avión no furtivo en esa área. Los aviones furtivos pueden ser detectados, pero sólo si pasan muy cerca de los radares, de modo que hasta para estos aviones existen riesgos. Necesitamos determinar la probabilidad de que estas aeronaves detectadas por el radar sobrevivan al ataque, en particular que sobrevivan a un ataque de m_0 misiles donde $m_0 > Y$. Para fines prácticos podemos suponer que cada SAM lanza dos misiles por aeronave. Definimos Y como la variable aleatoria que determina el número de aquellas aeronaves detectadas por el radar que sobreviven a este ataque y utilizaremos técnicas de Monte Carlo y cadenas de Markov para determinar la distribución de esta variable aleatoria.

4.1. Tecnología Furtiva

Consideramos un proceso estocástico $\{X_n, n = 0, 1, 2, ...\}$ que toma valores en un conjunto finito ó contable. Si $X_n = i$, decimos que el proceso está en el estado i en un tiempo n. Suponemos que cuando el proceso está en el estado i, existe una probabilidad p_{ij} que determinará el estado j. Esto es,

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0) \tag{4-1}$$

para todos los estados $i_0, i_1, ..., i_{n-1}, i, j$ y para todo $n \geq 0$. Este proceso estocástico se conoce como *Cadena de Markov*. La ecuación (4-1) puede ser interpretada de la siguiente forma; para una cadena de Markov la distribución de algún estado futuro X_{n+1} dados los estados pasados $X_0, X_1, ..., X_{n-1}$ y el estado presente X_n, es independiente de los estados pasados y depende solamente del estado presente.
El valor de p_{ij} representa la probabilidad de que el proceso estando en el estado i haga una transición al estado j. Dado que las probabilidades son no negativas y el proceso hace

transiciones entre estados tenemos que:

$$p_{ij} \geq 0 \quad i,j \geq 0; \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1, \quad i = 0,1,... \tag{4-2}$$

Denotamos a A como la matriz de transición de Y como:

$$A = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Para conocer el valor de $P(X_{n+1} = j)$ en un tiempo n tenemos que:

$$P(X_{n+1} = j) = \sum_i p_{ij} P(X_n = i) \tag{4-3}$$

La distribución de la variable aleatoria en el estado j en el tiempo $n+1$, depende de la distribución en el estado i en el tiempo n. Definimos:

$$\pi_n(i) = P(X_n = i)$$

así la ecuación (4-3) la podemos escribir de la siguiente forma:

$$\pi_{n+1}(j) = \sum_i p_{ij} \pi_n(i) \tag{4-4}$$

Si notamos π_n como el vector con entradas $\pi_n(1), \pi_n(2), ...$, y notamos A a la matriz de transición entonces las ecuaciones que relacionan π_{n+1} con π_n se pueden escribir de una forma más compacta. Así:

$$\pi_{n+1} = \pi_n A \tag{4-5}$$

ó en terminos del estado inicial.

$$\pi_{n+1} = \pi_0 A^{n+1} \tag{4-6}$$

De esta forma debemos determinar la matriz de transición A para nuestro problema, y la condición inicial π_0 para conocer la distribución de Y en algún estado n.

Ejemplo 4.1.1. *Retomando la operación del ejemplo 3.4.1 si se envián aeronaves de tecnología furtiva como el Lockheed F-117 con las mismas probabilidades dadas (de adquisición y destrucción) y si las baterias antiaéreas junto a su sistema de radares han detectado 4 aeronaves entonces ¿Cuál es la probabilidad de que las aeronaves detectadas sobrevivan?*

Fijamos nuestra matriz de transición teniendo en cuenta que

$$Y_n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

para $0 \leq i < 4$ y considerando la probabilidad q de que un misil derribe una aeronave, tenemos:

$$\begin{aligned} P\left[Y_{n+1} = i+1 | Y_n = i\right] &= q \\ P\left[Y_{n+1} = i | Y_n = i\right] &= 1 - q \end{aligned} \tag{4-7}$$

luego nuestra matriz de transición la representamos de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1-q & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-q & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-q & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-q & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $X_0 = 0$ entonces X_n es el número de aeronaves perdidas cuando n misiles han sido lanzados, donde $n \in \{0, 1, 2, ..., 7\}$. El diagrama de transición de nuestro problema está representado en la figura (**4-1**). La condición inicial $\pi_0(i)$ representa las probabilidades de que sobrevivan i aeronaves cuando hay $n = 0$ misiles en el aire. Como es de esperarse, si no hay misiles en el aire tenemos que:

$\pi_0 = (\pi_0(0), \pi_0(1), \pi_0(2), \pi_0(3), \pi_0(4)) = (0, 0, 0, 0, 1)$

luego la distribución de probabilidad cuando hay 8 misiles en el aire esta dada por el siguiente vector:

$$\pi_8 = (0{,}82 \;\; 0{,}12 \;\; 0{,}04 \;\; 0{,}007 \;\; 0{,}0007) \tag{4-8}$$

Concluimos que la probabilidad de que no sobreviva ninguna aeronave es $\pi_8(0) = 0{,}82$ en comparación a la probabilidad de que sobrevivan las 4 aeronaves detectadas que es casi 0 ($\pi_8(4) = 0{,}0007$). Como es de esperarse si las defensas en tierra detectan las 4 aeronaves, es muy probable que las derriben todas. Estos datos se ilustran en la figura (**4-2**)

4.2. Monte Carlo

Para hallar la distribución de probabilidad de la variable aleatoria Y, implementamos el algoritmo **3.** La distribución de probabilidad de Y para las cuatro aeronaves expuestas se ilustran en la figura 4-3. Como podemos observar la probabilidad de que las cuatro aeronaves sobrevivan después de ser detectadas por el radar, con el lanzamiento de los misíles es casi nula. Este resultado coincide con la simulación utilizando Cadenas de Markov en la figura (**4-2**).

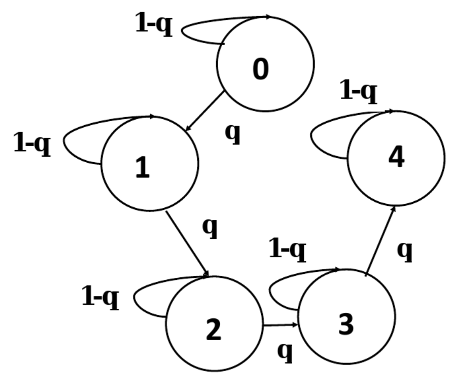

Figura 4-1: Diagrama de transición para el problema del bombardeo.

Algoritmo 3 Ditribución de sobrevivencia de las aeronaves utilizando Monte Carlo

Entrada: n, m, q, Y

Salida: Probabilidad de supervivencia de las aeronaves

para $k = 1$ hasta n **hacer**
  para $j = 1$ hasta m **hacer**
    si el número aleatorio está en el intervalo A **entonces**
      Derribar una aeronave
    fin si
  fin para
  Contar las aeronaves que derribaron y después tomar el promedio.
fin para

Ejemplo 4.2.1. *Para el ejemplo anterior: ¿ Cuántas aeronaves se necesitan para asegurar la destrucción del objetivo?*

Para las cifras de nuestro ejemplo, sabemos que sólo se detectan 4 de las 15 aeronaves enviadas durante entrada, permanencia y salida de la zona de exposición. Así se disponen de 11 aeronaves en comparación a la situación inicial donde el ataque se realiza sin la disposición de esta tecnología. Otra observación importante es que en la operación sólo perdemos las 4 aeronaves detectadas y no 11 como en la situación original. En los algoritmos **1** y **2** se debe considerar que máximo se perderán $Y = 4$ aeronaves por lo tanto la ecuación (3-3) queda de la siguiente forma

$$P_i = 1 - P_0 \tag{4-1}$$

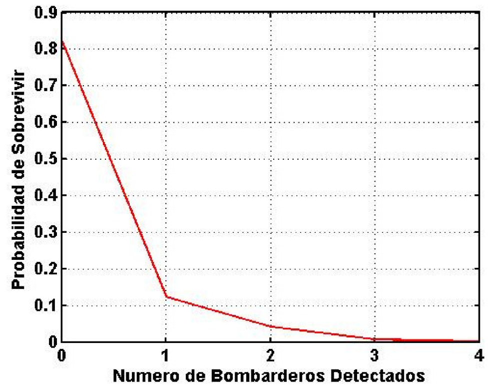

Figura 4-2: Gráfica que muestra la probabilidad de sobrevivencia de las aeronaves detectadas.

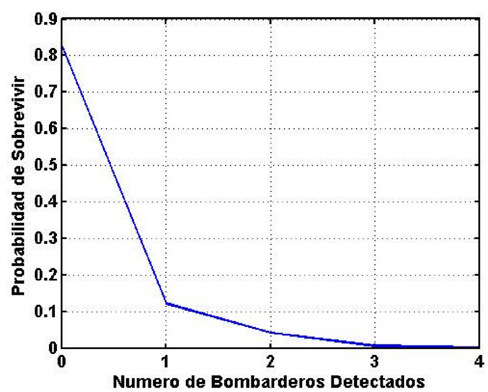

Figura 4-3: Gráfica que muestra la probabilidad de sobrevivencia de las aeronaves detectadas.

donde $P_0 = (1-p)^{min\{Y,i\}}$. Esta expresión se define teniendo en cuenta que a lo más las SAM derribarán 4 aeronaves por lo tanto elegimos el mínimo entre i y Y (es decir el mínimo entre los misiles lanzados y las aeronaves detectadas). Haciendo este cambio en la linea 2 del algoritmo **1.** los resultados muestran que se necesitarán menos aeronaves para lograr el éxito de la misión. Estos resultados se muestran en la figura (**4-4**):

Una modificación semejante se realiza en la linea 8 del algoritmo **2**. Los resultados son los

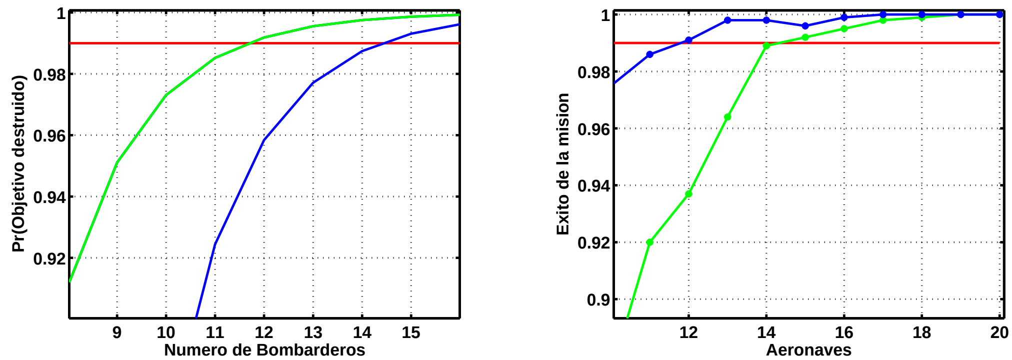

Figura 4-4: Grafica que compara cantidad de aeronaves necesarias, entre tecnología furtiva y aeronaves sin esta tecnología para simulación analítica y Monte Carlo.

mismos que los mostrados con la versión modificada del algoritmo **1**. Estos resultados se aprecian en la parte derecha de la figura (**4-4**).

5 Conclusiones

Se ha presentado un modelo matemático que describe una operación aérea, donde hay un objetivo en tierra que debe ser destruido utilizando la menor cantidad de recursos. Hemos mostrado situaciones que describen detalles de las operaciones aéreas entre las que destacamos la altura a la cual deben volar las aeronaves y la posibilidad de contar con aeronaves de tecnología furtiva, de lo cual podemos concluir lo siguiente:

- Los modelos se simplifican al permitir independencia de eventos como es el caso de asumir la misma probabilidad de destrucción por cada una de las aeronaves involucradas en la misión. En realidad esta independencia no sucede por que la probabilidad de detección de cada una de las aeronaves disminuye cuando cae una bomba sobre el objetivo ya que genera polvo y humo, esto afecta la efectividad de estas armas. Aunque al realizar análisis de sensibilidad sobre este parámetro se observa que el número de aeronaves no cambia de manera significativa.
- El modelo permite incorporar una distribución de probabilidad a la variable que describe la cantidad de aeronaves derribadas. Debido la naturaleza de la situación una distribución adecuada para este modelo es la distribución de Binomial que describe la probabilidad de k éxitos en m intentos. De esta forma se facilita describir el modelo utilizando simulación analítica y posteriormente un desarrollo analítico con la ayuda del binomio de Newton.
- La simulación analítica en donde se usa la distribución de Binomial, no permite la situación donde se presentan mas misiles en el aire que aeronaves, esto es por que la variable que describe el éxito de la operación toma valores positivos. Aunque las simulaciones hechas por Monte Carlo si permiten esta situación (porque las probabilidades de éxito de la misión siempre son positivas).
- Al suponer como éxito de la misión un valor mayor ó igual al 99 % concluimos que el número de aeronaves no es sensible a este valor. Concluimos que el número de aeronaves que alcanza este valor es el mínimo requerido y que cualquier otro valor mayor a este es el uso de la fuerza bruta en este tipo de operaciones.
- El modelo sugiere que la disposición de aeronaves de tecnología furtiva disminuye considerablemente la cantidad de aeronaves necesarias para la operación, de manera semejante si no se cuenta con esta tecnología, pero se disponen de aeronaves de mayor precisión y mayor velocidad a las convencionales los resultados son semejantes en

cuanto al uso de recursos operativos (aeronaves).

- Una situación adecuada para describir el suceso donde hay más misiles que objetivos en el aire es cuando se consideró tecnología furtiva. Las cadenas de Markov fueron muy útiles para describir la distribución de probabilidad de sobrevivencia de estas aeronaves. Simulaciones por Monte Carlo permitieron comparar y ratificar los resultados con las simulaciones hechas utilizando cadenas de Markov.
- El mal clima, disminuye la probabilidad de detección del objetivo por parte de las aeronaves. Mostramos que si se disminuye la probabilidad de detección a la mitad a causa del mal clima, el número de aeronaves que se requiere para garantizar el éxito de la misión aumenta cosiderablemente. Por lo tanto ante una situación como está se debe evitar al máximo cualquier tipo de operación.

Bibliografía

[1] Barnier W. *Expected Loss in Keno*, UMAP módulo 574.

[2] BGT diehl defence. *Iris-T*, [en línea]. Octubre 2011. Disponible en la web: http://www.diehl-bgt-defence.de

[3] Billingsley P. *Probability and measure*, Wiley, New York.(1979)

[4] Dym C. *Principles of mathematical modelling*, Claremont, California.(1998).

[5] Caldwell J. *Mathematical Modelling: Case studies and projects*, Kluwer academic publisher (2004).

[6] Carlson. *Conditional Probability and Ambigous information* UMAP módulo 391.

[7] El Espectador. *Esta es mi bienvenida a las Farc: Santos* Colombia, Septiembre 2010.

[8] *Fuerza Aérea Colombiana: Revista aeronáutica* Edición 257, Volumen 1 2009.

[9] *FAC. Resultados operacionales 2008* Confidencial.

[10] *FAC. Resultados operacionales 2010* Confidencial.

[11] *FAC. Armamento Aéreo* Confidencial.

[12] Feller W. *An introduction to probability theory and its applications*, Vol. 2 2nd ed. Wiley New York(1971)

[13] Feller W. *mathematical modeling techniques*,Rutherford Aris (1994)

[14] Heinz S. *Mathematical modelling*, Springer, New York , (2011).

[15] Lavochkin OKB. *S-75 Dvina*, [en línea]. Octubre 2011. Disponible en la web: http://www.laspace.ru/rus/index.php

[16] Meerschaert M. *Matematical Modelling*, Academic Press Inc. San Diego (1993).

[17] Moore P, McGabe G. *Introduction to the practice of Statistics*, W.H. Freeman, New York , (1989).

[18] Murray S. *Mathematical modelling: classroom notes in applied mathematics*, Society for Industrial and Applied Mathematics (2009).

[19] Pfeiffer P. *Concepts of probability theory*, Dover publications , (1989).

[20] *Revista Taktika: Fuerza Aérea Colombiana, arte y ciencia del poder aéreo* Fuerza Aérea Colombiana (2010).

[21] Raytheon Company. *Standard Missile*, [en línea]. 2010-2011. Disponible en la web: http://www.raytheon.com

[22] Revista Semana. *Raúl Reyes, canciller y miembro del Secretariado de las Farc, fue muerto en combate en Ecuador* Colombia, Marzo 2008.

[23] Roldán D. *Un problema de altura.*, Ciencia y poder aéreo FAC. Bogotá (2011).

[24] Ross S. *Introduction to probability models*,3rd ed. Academic Press, New York, (1985).

[25] Stewart W.*Probability, Markov chains, queues, and simulation: the mathematical basis of performance modelling*, Princeton University Press, (2009).

[26] Thales Air Defence. *Starstreak missile*, [en línea]. Octubre 2011. Disponible en la web: http://www.thalesgroup.com

[27] Wackerly D., Mendenhall M. *Mathematical statistics with applications.*,Working Paper (2008).

Declaración

Me permito afirmar que he realizado la presente tesis de manera autónoma y con la única ayuda de los medios permitidos y no diferentes a los mencionados en la propia tesis. Todos los pasajes que se han tomado de manera textual o figurativa de textos publicados y no publicados, los he reconocido en el presente trabajo. Ninguna parte del presente trabajo se ha empleado en ningún otro tipo de tesis.

Bogotá, D.C., 12.12.2011

Diego Gerardo Roldán Jiménez