

UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA  

---

SEDE MANIZALES

# Bifurcación por impacto con esquina en el sistema leva seguidor

**Johnny Valencia Calvo**

Universidad Nacional de Colombia  
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación  
Manizales, Colombia  
2012



# Bifurcación por impacto con esquina en el sistema leva seguidor

**Johnny Valencia Calvo**

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Ingeniería - Automatización Industrial**

Director:  
Ph.D., Gustavo Adolfo Osorio Londoño

Línea de Investigación:  
Análisis de Sistemas Dinámicos - Métodos Numéricos  
Grupo de Investigación:  
Percepción y Control Inteligente - PCI

Universidad Nacional de Colombia  
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación  
Manizales, Colombia  
2012



# Corner impact bifurcation in cam follower systems

**Johnny Valencia Calvo**

A Thesis presented for the degree of:  
**Master of Engineering-Industrial Automation**

Thesis advisor:  
Gustavo Adolfo Osorio Londoño, Ph.D.

Research Areas:  
Dynamical analysis - Numerical methods  
Research group:  
Perception and Intelligent Control - PCI

Universidad Nacional de Colombia  
Faculty of Engineering and Architecture, Department of Electrical, Electronic and Computer  
Science  
Manizales, Colombia  
2012



A mis padres,  
Sonia Liliana Calvo y Rafael Valencia.



# Agradecimientos

A mi director de tesis Ph. D. Gustavo A. Osorio por su paciencia, apoyo y contribuciones a la hora de ejecutar este proyecto de investigación .

Al programa de Jóvenes Investigadores E Innovadores 2010, convenio de cooperación especial No. 146 de enero 24 del 2011 suscrito entre la Fiduciaria Bogota S.A. como vocera del patrimonio autónomo denominado fondo nacional de financiamiento para la ciencia, la tecnología y la innovación Francisco José de Caldas y la Universidad Nacional de Colombia, por su apoyo económico durante 12 meses de investigación.

A todas las personas que de una u otra manera me acompañaron durante este proceso y pese a las dificultades de la vida fueron de gran apoyo para continuar.



## Resumen

En este documento se presenta el modelo suave a trozos, simulación y análisis numérico no lineal del sistema leva seguidor con impactos, que se caracteriza por una leva con un perfil no suave - segunda derivada discontinua - y un seguidor modelado como un péndulo de varilla. El modelo incluye tres modos dinámicos principales, dinámica de cuerpo libre, dinámica deslizante y dinámica de impacto. Además, se muestra la descripción del algoritmo para simular el sistema leva seguidor con impactos. El algoritmo se desarrolla bajo un esquema basado en eventos e implementado en Matlab®.

En cuanto al análisis numérico hemos estudiado la acumulación de impactos -chattering-, coexistencia de soluciones, bifurcaciones suaves y no suaves y otros fenómenos no lineales que este tipo de sistemas pueden exhibir. El fenómeno más notable es la bifurcación por impacto con esquina. Esta ocurre cuando el impacto que forma parte de una órbita periódica ocurre justo en el punto de discontinuidad de la leva. Dicho fenómeno se estudia realizando un análisis de estabilidad alrededor del punto de discontinuidad de una órbita  $1T$ -periódica, demostrando así que existe una transición súbita del comportamiento periódico a uno caótico cuando el punto de impacto cruza la discontinuidad. Se incluye además un ejemplo numérico para ilustrar e interpretar los resultados teóricos. Proponiendo finalmente un esquema general y sistemático que facilita el análisis de estabilidad de órbitas periódicas que impactan en una esquina.

**Palabras clave:** Sistemas dinámicos suaves a trozos, sistema leva seguidor con impactos, análisis numérico no lineal, bifurcaciones, caos.



## Abstract

In this document we present the piecewise smooth model, simulation and numerical non-linear analysis of a cam-follower impacting system, characterized by a cam with non-smooth profile - a discontinuous second derivate - and a follower modeled as a rod pendulum. The model includes three main dynamical modes, free body mode, sliding mode and impacting mode. We will show the description of the algorithm to simulate cam-follower impacting systems. The algorithm was developed under an event driven scheme and implemented in Matlab®.

Regarding the numerical analysis we have studied the chattering - accumulation of impacts - coexistence of solutions, smooth and nonsmooth bifurcations and other nonlinear phenomena that this kind of systems can exhibit. The most notable phenomenon is the corner impact bifurcation. This one occur when the follower impact just at the discontinuity point of the cam. This phenomenon is studied by performing a stability analysis around the discontinuity point of a  $1T$ -periodic orbit , showing that there is a sudden transition to a chaotic behavior from periodic behavior when the impact point crosses the discontinuity. It also includes a numerical example to illustrate and interpret the theoretical results. Finally the proposal for a general framework to analyze the corner impact bifurcation in cam follower impacting systems.

**Keywords:** Piecewise smooth dynamical systems, cam-follower impacting system, non-linear numerical analysis, bifurcations, chaos.



# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>ix</b>
<b>Resumen</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>xvii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Análisis numérico no lineal del sistema leva seguidor con impactos</b>	<b>5</b>
2.1. Modelo matemático . . . . .	6
2.1.1. Modelo suave a trozos para el sistema leva seguidor . . . . .	7
2.1.2. Esquema numérico y simulación . . . . .	8
2.2. Análisis numérico . . . . .	11
2.2.1. Acumulación de impactos . . . . .	11
2.2.2. Órbitas periódicas . . . . .	12
2.2.3. Coexistencia de soluciones y dominios de atracción . . . . .	12
2.2.4. Bifurcaciones suaves y no suaves . . . . .	13
<b>3. Bifurcación por impacto con esquina: caso de estudio</b>	<b>17</b>
3.1. Estudio numérico de estabilidad de una órbita periódica con impactos en la vecindad de una e	
3.2. Estudio analítico de estabilidad de una órbita periódica con impactos en la vecindad de una e	
3.3. Diferencia porcentual . . . . .	23
3.3.1. Diferencia entre $P^1$ y $A^1$ . . . . .	23
3.3.2. Diferencia entre $P^2$ y $A^2$ . . . . .	23
3.4. Bifurcación por impacto con esquina . . . . .	24
<b>4. Bifurcaciones por impactos con esquinas: análisis general</b>	<b>25</b>
4.1. Estabilidad de órbitas periódicas en un sistema leva seguidor con impactos . . . . .	25
4.1.1. Aproximación para $D$ utilizando la expansión en series de Taylor . . . . .	29
4.1.2. Aproximación de $D$ utilizando diferenciación implícita . . . . .	31
4.2. Mapa estroboscópico, de discontinuidad y de esquina . . . . .	32
4.2.1. Órbitas de impacto en la vecindad de una esquina . . . . .	32
4.2.2. Construcción del mapa de discontinuidad $D$ . . . . .	33
4.2.3. Mapa de esquina $D_c$ . . . . .	33

---

4.3. Cálculo del mapa global de Poincaré y estabilidad . . . . .	37
<b>5. Conclusiones</b>	<b>39</b>
<b>A. Perfil de la leva</b>	<b>41</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>43</b>

# Lista de símbolos

## Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
$A$	Matriz que define el mapa	1	Ecuación 3-2
$B$	Matriz que define el mapa	1	Ecuación 3-8
$\theta_c$	Posición angular de la leva (Cam)	$rad$	$DF$
$\theta_q$	Posición angular del seguidor (Follower)	$rad$	$DF$
$E_N$	Estado dinámico del sistema	1	
$g$	Aceleración de la gravedad	$\frac{m}{s^2}$	$DF$
$G$	Fuerza externa		Ecuacion 2-1
$I$	Momento de inercia	$Kg\ m^2$	$\frac{ml^2}{3}$
$l$	Longitud del seguidor	m	$DF$
$m$	Masa del seguidor	kg	$DF$
$P$	Mapa a trozos después de $1T$	1	Ecuación 3-1
$T$	Período	s	$DF$
$t$	Tiempo	s	$DF$
$r$	Coficiente de restitución	1	$DF$
$x$	Vector de estados	1	

## Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
$\alpha$	Ángulo inicial de la leva	$rad$	Ecuación A-1
$\beta_n$	Restricciones para el perfil de la leva	1	Ecuacion A-2
$\lambda_n$	Autovalores	1	$DF$

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
$\theta$	Ángulo de inclinación de la leva	1	Figura <b>2-2</b>
$\kappa_n$	Parámetro de diseño de la leva	<i>rad</i>	Figura A.1(a)
$\rho_n$	Parámetro de diseño de la leva	1	Figura A.1(a)
$\tau$	Tiempo de impacto	<i>s</i>	<i>DF</i>
$\omega$	Velocidad angular	<i>rpm</i>	<i>DF</i>
$\epsilon, \delta, \xi$	Perturbaciones de estado	1	<i>DF</i>

## Subíndices

Subíndice	Término
c	Condiciones iniciales alrededor del punto de discontinuidad
m	Número de perturbaciones de frecuencia angular
n	Número de perturbaciones de posición y velocidad

## Superíndices

Superíndice	Término
m	Número de perturbaciones de frecuencia angular
T	Transpuesta
+	Evento después del impacto
-	Evento antes del impacto
1	Interacción de la leva con la superficie $\sum^1$
2	Interacción de la leva con la superficie $\sum^2$

## Abreviaturas

Abreviatura	Término
<i>DIB</i>	Discontinuous Induced Bifurcation
<i>DTE</i>	Diagrama de Transición de Estados

# 1. Introducción

Los sistemas dinámicos híbridos y suaves a trozos son cada vez más utilizados en ingeniería y en ciencias aplicadas para modelar una amplia variedad de sistemas físicos y dispositivos tecnológicos. Dentro de los ejemplos se incluyen sistemas mecánicos con impactos y fricción [15, 20], robots caminantes, redes genéticas, convertidores electrónicos de potencia, sistemas híbridos de control, sistemas con saturaciones, más en general todos los sistemas y dispositivos cuya dinámica se ve afectada por la ocurrencia de eventos discontinuos en una escala macroscópica de tiempo [4, 3]. Se ha señalado que los sistemas suaves a trozos, pueden exhibir una amplia gama de fenómenos no lineales incluyendo bifurcaciones y caos. Bajo la variación de parámetros, bifurcaciones clásicas pueden ocurrir, tales como doblez, bifurcación hopf, entre otras. Además de bifurcaciones inducidas por discontinuidad [8]. Este tipo de fenómeno se puede encontrar cuando uno de los conjuntos invariantes del sistema interactúa de manera no trivial con una vecindad discontinua en el espacio de estados. Cuando esto ocurre el sistema puede mostrar transiciones dramáticas de un atractor a otro, incluyendo con frecuencia transiciones súbitas, demostradas experimentalmente, de dinámicas periódicas a dinámicas caóticas [12, 11].

Muchos esfuerzos de investigación se han centrado en el análisis y clasificación de las bifurcaciones inducidas por discontinuidad. Inicialmente el trabajo se enfocaba en clasificar los posibles escenarios de bifurcación siguiendo colisión-borde de puntos fijos definidos en un mapa [6, 11]. Un esfuerzo semejante se ha realizado a la hora de estudiar bifurcaciones inducidas por discontinuidad de ciclos límite en tiempo continuo de sistemas suaves a trozos [9, 14]. Se encontró que la dinámica compleja en este tipo de sistemas es asociado a la bifurcación tangencial (grazing) de ciclos límite. Se dice que existe una bifurcación de estas, cuando un ciclo límite incluye un punto de la frontera de discontinuidad o una variedad del espacio de fase. El rol que juega el análisis de bifurcaciones como herramienta para la aplicación en sistemas de control es más trascendental de lo que convencionalmente se espera. El análisis de bifurcaciones puede ser utilizado para obtener modelos de los sistemas físicos reales con características específicas y mejores a las que pueden ofrecer otro tipo de diseños. Además de poder implementar novedosas estrategias de control que permitan definir trayectorias para determinados valores de parámetros en un sistema dinámico [1, 27].

Para el estudio de sistemas dinámicos suaves a trozos, existen diferentes herramientas analíticas, numéricas y experimentales [27]. Es por eso que la verificación y comparación de los resultados entre cada una de las estrategias se hace necesaria.

Es muy común utilizar modelos continuos para describir sistemas dinámicos discontinuos.

Sin embargo tales modelos continuos no pueden proporcionar predicciones adecuadas de las dinámicas discontinuas. Para entender mejor los sistemas discontinuos, se debe ser consciente de que modelos discontinuos proporcionarían una adecuada y real predicción de los sistemas que normalmente se encuentran en la ingeniería. Por lo tanto, considerar un sistema global discontinuo consiste en tener varios sub-sistemas continuos en diferentes dominios. Cada sub-sistema continuo posee propiedades dinámicas diferentes, es decir, reglas de evolución para cada sub-sistema continuo adyacente. Debido a esta capacidad de cambio, las leyes de transición entre las fronteras deben ser estudiadas con mayor detalle. Dichas variaciones pueden conducir a cambios dramáticos en el comportamiento dinámico del sistema. Se ha demostrado, por ejemplo, que la transición a caos, con frecuencia en sistemas mecánicos con impactos, es debido a las bifurcaciones inducidas por las discontinuidades (cambios abruptos) en las fronteras con las cuales se modela el sistema. Dentro de los sistemas mecánicos que más aplicación tienen en la industria de la automatización y automotriz son los conocidos como sistemas leva seguidor, que además de presentar dinámicas complejas pueden ser modelados como un sistema suave a trozos.

Los sistemas levas seguidor son un importante tipo de sistemas con impactos con un amplio rango de aplicaciones. Comúnmente, la rotación de la leva a una velocidad constante proporciona la fuerza necesaria para que el seguidor opere. El ejemplo más común es el tren de válvulas de un motor de combustión interna, donde la rotación de la leva imparte a través del seguidor el desplazamiento adecuado de las válvulas, mientras que el resorte la fuerza de restitución necesaria para mantener los elementos en contacto. La leva es diseñada para girar a una velocidad constante; en la práctica dicha velocidad puede variar debido a fluctuaciones indeseadas o ruido. Por encima de la velocidad crítica máxima, el seguidor se despega de la leva y los impactos aparecen y con ellos diferentes tipos de fenómenos complejos que van desde acumulación de impactos hasta caos [19, 24].

Los diagramas de bifurcaciones y el análisis dinámico de sistemas juegan un rol muy importante en el diseño de sistemas de control. Para el caso particular de los sistemas suaves a trozos, las bifurcaciones pueden ser utilizadas para obtener modelos y diseños mejorados de sistemas mecánicos o electrónicos, diseñar novedosas estrategias de control con el objetivo de establecer trayectorias o continuación de dinámicas, como órbitas periódicas, para parámetros específicos del sistema y asistir estrategias.

Una metodología de investigación que permita evaluar resultados y verificar lo planteado en la teoría clásica de los sistemas suaves a trozos y los sistemas dinámicos se basa en:

**Modelado:** Con el fin de obtener la descripción del flujo dinámico de un sistema físico real y validar su comportamiento experimental, es necesario escoger un adecuado modelo matemático. La formulación de un modelo apropiado puede ser una tarea difícil para muchas aplicaciones. En algunos casos se pueden probar varios modelos caracterizados por diferentes grados de libertad.

**Simulación:** El grado de complejidad de los sistemas suaves a trozos incide directamente en el costo computacional a la hora de observar la evolución en el tiempo de una aplicación

que represente un sistema mecánico real. Mediante métodos numéricos, la implementación de esquemas de simulación y solución de ecuaciones diferenciales se representa en mayor o menor grado las dinámicas que pueden exhibir los sistemas dinámicos. Es así como construyen diagramas de evolución temporal y diagramas de bifurcaciones que permiten aplicar la teoría de análisis no lineal de sistemas dinámicos suaves a trozos.

**Análisis:** Con la posibilidad de utilizar la teoría de bifurcaciones para proponer nuevas estrategias de control[17]. El análisis de los diagramas de bifurcación y métodos de continuación [4], se puede sintetizar y mejorar las metodologías convencionales de control, como por ejemplo PID, control por métodos deslizantes, entre otros.

**Experimentación:** Diseño e implementación de prototipos experimentales que permitan verificar o refutar cada una de las teorías desarrolladas en las demás etapas. La investigación experimental de bifurcaciones en sistemas dinámicos puede ser utilizada para sintetizar y mejorar el comportamiento de los sistemas físicos reales [2, 25, 28].

El documento está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 2 se presenta de manera sintética el análisis numérico no lineal del sistema leva seguidor con impactos. Mediante un esquema de integración numérica de soluciones se pueden evidenciar las diferentes dinámicas que este tipo de sistemas exhibe. Además se construye un diagrama de bifurcaciones variando la velocidad de rotación de la leva en el cual se aprecian fenómenos suaves y no suaves debido a la naturaleza no suave de los sistemas leva seguidor. Como ejemplo adicional se incluye de manera particular un dominio de atracción como herramienta fundamental para el análisis numérico.

En el capítulo 3, se efectúa un estudio numérico y analítico de la bifurcación por impacto con esquina. Poniendo como ejemplo el sistema leva seguidor expuesto en el capítulo 2 se definen mapas globales y locales dependiendo del caso, para determinar la estabilidad de una órbita periódica el rededor de un punto de discontinuidad. Al final del capítulo se comparan los resultados de los mapas de las dos estrategias utilizadas.

En el capítulo 4, se incluye un análisis global y local de órbitas con impactos cerca a puntos de discontinuidad en la frontera de impacto. Aquí, el análisis pretende mostrar de manera generalizada los términos en los que se debe abordar el estudio de la bifurcación por impacto con esquina sin importar si el sistema es suave o no.

Finalmente, en el capítulo 5 se incluyen las conclusiones de este proyecto de investigación, comentarios finales sobre el documento y trabajo futuro.



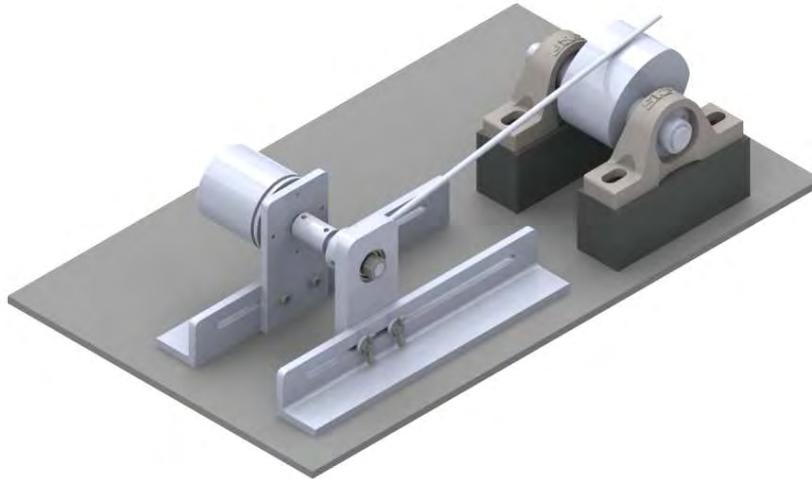
## 2. Análisis numérico no lineal del sistema leva seguidor con impactos

En los últimos años se ha incrementado el interés en el estudio de sistemas dinámicos suaves a trozos, como se reporta en la literatura [2, 3, 4, 23]. Muchas aplicaciones físicas reales se pueden modelar bajo este esquema. Ejemplos típicos son sistemas dinámicos no suaves, circuitos electrónicos con interruptores y controladores híbridos, entre otros. El comportamiento no suave, comúnmente, es consecuencia de acciones de control, conmutaciones o impactos (saltos en el estado). Estos sistemas exhiben algunos comportamientos no lineales similares a los que presentan los sistemas suaves, pero, además presentan comportamientos que son estrictamente debidos a su naturaleza no suave. Este tipo de fenómenos ha sido estudiado en detalle por varios autores [8, 19, 21], de donde se ha derivado una teoría consistente de su clasificación. Para estudiar este tipo de fenómenos, existen herramientas analíticas, numéricas y experimentales desarrolladas bajo diferentes esquemas, como se muestra en [2, 22]. La simulación de sistemas no suaves es mas compleja que la de los sistemas suaves debido a que pueden haber cambios dramáticos en su comportamiento tales como saltos, impactos o bifurcaciones inducidas por discontinuidades [8].

Los sistemas leva seguidor son una importante clase de sistemas con impactos usados en un amplio rango de aplicaciones. El ejemplo más común es el tren de válvulas de un motor de combustión interna, en donde la velocidad de rotación de las levas proporciona la fuerza necesaria para que el seguidor opere. La leva esta diseñada para girar a una velocidad constante. En la práctica, la velocidad varía por perturbaciones indeseadas o ruido, por lo tanto, por encima de una velocidad crítica el seguidor se despega de la leva y luego se producen los impactos. El perfil que describe la leva y su velocidad de rotación son parámetros de mucha importancia y de cuidado a la hora de estudiar este tipo de sistemas. Se ha observado que variando la velocidad de rotación de la leva, el sistema puede exhibir comportamientos complejos como son acumulación de impactos, soluciones periódicas, bifurcaciones suaves y no suaves, coexistencia de soluciones hasta soluciones caóticas.

En este capítulo se presenta el análisis numérico no lineal de sistema leva seguidor con impactos. Se muestra el esquema bajo el cual se realiza la simulación del mismo y las diferentes dinámicas que este exhibe. Se construye un diagrama de bifurcaciones variando la velocidad de rotación de la leva en el cual se evidencian fenómenos suaves y no suaves, además de incluir un dominio de atracción como ejemplo representativo de los resultados que se obtienen de las rutinas numéricas.

## 2.1. Modelo matemático



**Figura 2-1.:** Sistema leva seguidor, modelo experimental.

Para un modelo adecuado del sistema es necesario representar la mayoría de aspectos de su comportamiento dinámico, entre mayor sea el grado de complejidad del modelo, mayor será la cantidad de dinámicas que se tienen en cuenta. Sin embargo, hay un acuerdo general en la comunidad científica, de que un grado de libertad es adecuado para representar los aspectos más importantes del comportamiento del sistema leva seguidor [1, 10, 19, 22]. En la Figura 2-1 se presenta el modelo experimental para un sistema leva seguidor para el caso de estudio de esta tesis. A partir de éste se deriva el esquema geométrico que se muestra en la Figura 2-2 y de donde finalmente se obtiene la ecuación (2-1).

$$I\ddot{\theta}_f = -mgl \sin(\theta_f) \quad (2-1)$$

donde  $l$  es la longitud,  $m$  es la masa e  $I$  es el momento de inercia del seguidor,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $\theta_f$  es la posición angular del seguidor.

$$l = 0,6 \text{ m}$$

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

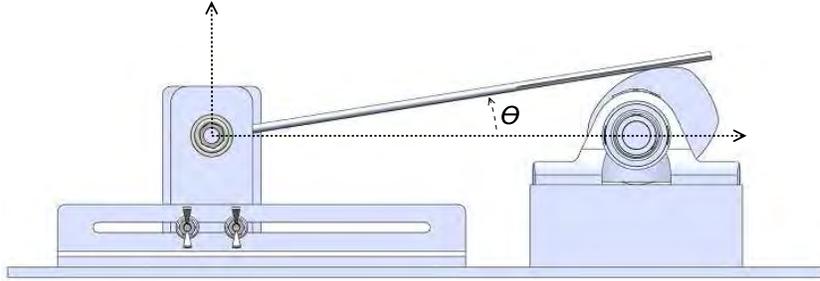
Si ahora se tiene en cuenta que el seguidor es una varilla rígida cuando el pivote es en un extremo el momento de inercia viene dado por,

$$I = \frac{ml^2}{3} \quad (2-2)$$

la ecuación resultante es,

$$\ddot{\theta}_f + \frac{3g}{l} \sin(\theta_f) = 0 \quad (2-3)$$

### 2.1.1. Modelo suave a trozos para el sistema leva seguidor



**Figura 2-2.:** Esquema geométrico del sistema leva seguidor.

Es posible describir el sistema leva seguidor como un modelo suave a trozos, si se tiene que  $\theta_f$  es la posición angular del seguidor y  $\theta_c$  es el alza en el punto de contacto. Se definen entonces tres modos dinámicos principales, *Modo de Cuerpo Libre*, *Modo Deslizante* y *Modo de Impacto*. Una representación en el espacio de estados vendría dada por,

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_f - \theta_c \\ x_2 &= \dot{\theta}_f - \dot{\theta}_c \\ \dot{x}_2 &= \ddot{\theta}_f - \ddot{\theta}_c \\ x_3 &= t \end{aligned} \quad (2-4)$$

donde  $x$  es el vector de estados, que define la posición, velocidad y aceleración relativas respectivamente.

Ahora se tiene que para cada modo dinámico, de acuerdo a la transformación propuesta anteriormente, el sistema queda descrito como sigue:

#### Modo de cuerpo libre

Cuando la evolución del sistema es en modo de cuerpo libre su comportamiento puede ser descrito únicamente por la dinámica del seguidor (péndulo), de acuerdo con (2-3) y (2-4) se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{3g}{l} \sin(x_1 + \theta_c) - \ddot{\theta}_c \end{aligned} \quad (2-5)$$

si  $x_1 > 0$ ,  $\dot{x}_2 > 0$ .

### Modo deslizante

Si el sistema evoluciona en modo deslizante, la leva y el seguidor están en contacto permanente. Cuando los dos cuerpos se encuentran en contacto la dinámica del seguidor depende del alza de la leva. Para este caso se tiene que la representación en el espacio de estados está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 \\ \dot{x}_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2-6}$$

si  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  y  $\dot{x}_2 < 0$ .

### Modo de impacto

Para definir la dinámica de impacto es necesario adicionar una regla de colisión. Esta regla está definida por la *ley de restitución de Newton*, como sigue:

$$\begin{aligned} x_{1+} &= x_{1-} \\ x_{2+} &= -rx_{2-} \\ 0 &< r < 1 \end{aligned} \tag{2-7}$$

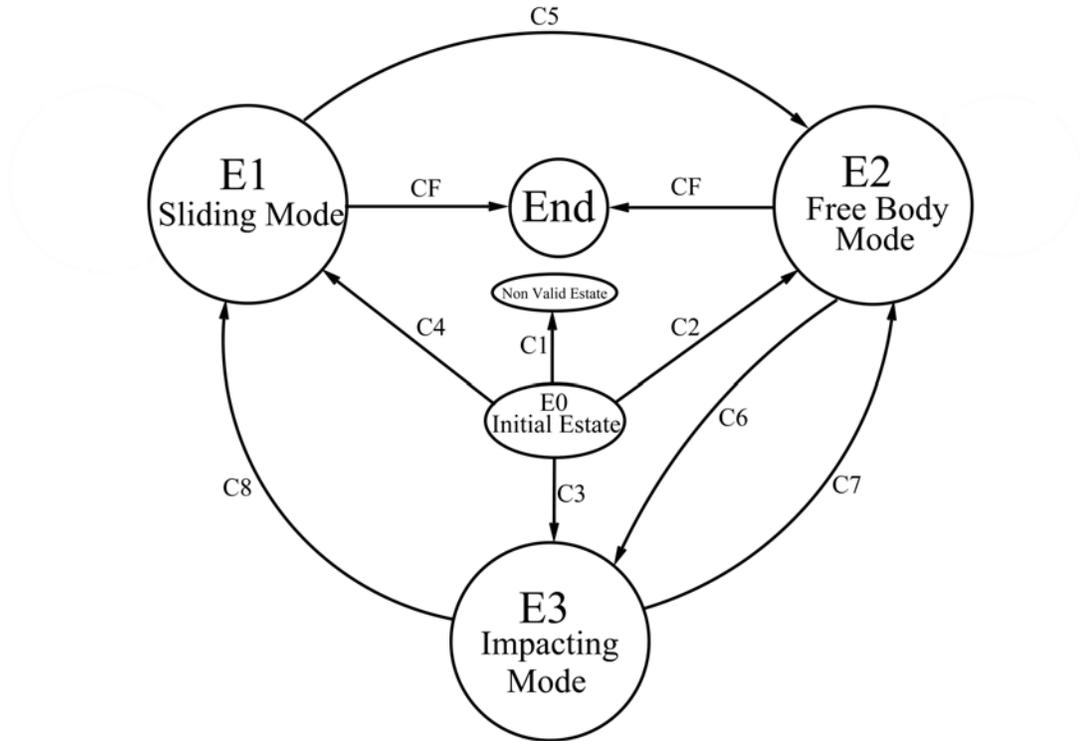
si  $x_1 = 0$ ;  $x_2 < 0$ .

donde  $r \in (0, 1)$  es un parámetro constante. En las soluciones que se presentan a continuación se utiliza  $r = 0,7$ .

$r$  es el coeficiente de restitución,  $x_{2-}$  y  $x_{2+}$  son la velocidad relativa antes y después del impacto. Este modo es el transitorio entre *Modo de cuerpo libre* a *Modo de cuerpo libre* o de *Modo de cuerpo libre* a *Modo deslizante*, dependiendo de la regla de acumulación de impactos que se defina.

### 2.1.2. Esquema numérico y simulación

Las principales estrategias para integración numérica de soluciones de sistemas suaves a trozos, como se expone en [22, 21, 1, 19], son los esquemas *basado en eventos* y de *paso de tiempo fijo*. El primero se basa en una formulación híbrida, mientras que el segundo se inspira en la solución de problemas con variables complementarias. Para el esquema basado en eventos, bajo el cual se realiza la integración numérica para el sistema leva seguidor con impactos que se trata en esta tesis como ejemplo, se tienen tres estados dinámicos principales, mencionados anteriormente. A continuación se muestra la descripción del algoritmo y las condiciones necesarias que se tienen en cuenta para simular el sistema. En la Figura **2-3** se muestra el diagrama de transición de estados (DTE).



**Figura 2-3.:** Diagrama de transición de estados.

El primer paso es calcular la aceleración relativa y las condiciones iniciales para seleccionar el estado siguiente a  $E0$ .

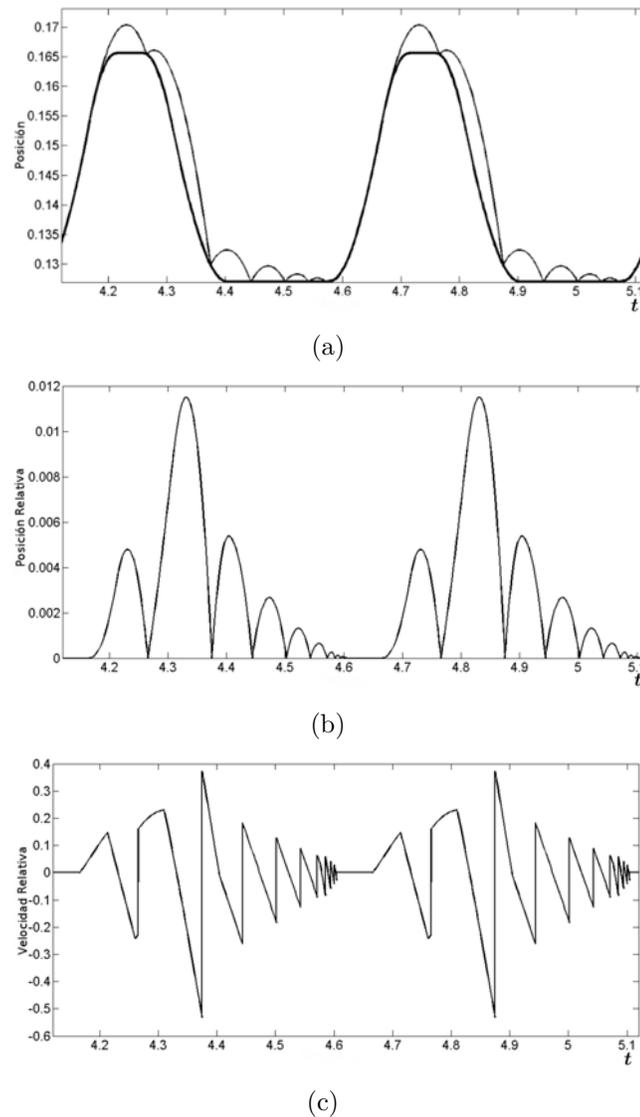
- Cuando el sistema está en  $E0$  las condiciones para cambiar a otro estado son:
  1. Si  $x_1 < 0$  cambio de estado a *Non Valid Initial State*,  $C1 = True$ .
  2. Si  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  y  $\dot{x}_2 < 0$  change state to  $E1$ ,  $C4 = True$ .
  3. Si  $x_1 = 0$ ,  $x_2 > 0$  cambio de estado a  $E2$ ,  $C2 = True$ .
  4. Si  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  y  $\dot{x}_2 > 0$  cambio de estado a  $E2$ ,  $C2 = True$ .
  5. Si  $x_1 > 0$  cambio de estado a  $E2$ ,  $C2 = True$ .
  6. Si  $x_1 = 0$ ,  $x_2 < 0$  cambio de estado a  $E3$ ,  $C3 = True$ .
  
- Cuando el sistema está en  $E1$  las condiciones para cambiar a otro estado son:
  1. Mientras  $\dot{x}_2 < 0$  continuar en  $E1$ .
  2. Si  $\dot{x}_2 > 0$  cambio de estado a  $E2$ ,  $C5 = True$ .
  3. Si  $t \geq T_{final}$  cambio de estado a  $End$ ,  $CF = True$ .  $T_{final}$  es el límite de tiempo para la simulación.

- Cuando el sistema está en  $E2$  las condiciones para cambiar a otro estado son:
  1. Mientras  $x_1 > 0$  continuar en  $E2$ .
  2. Si  $x_1 \leq 0$  cambio de estado a  $E3$ ,  $C6 = True$ .
  3. Si  $t \geq T_{final}$  cambio de estado a  $End$ ,  $CF = True$ .  $T_{final}$  es el límite de tiempo para la simulación.
  
- Cuando el sistema está en  $E3$  las condiciones para cambiar a otro estado son: De acuerdo con (2-7).
  1. Si  $x_{2+} \leq \epsilon$  cambio de estado a  $E1$ ,  $C8 = True$ .
  2. Si  $x_{2+} > \epsilon$  cambio de estado a  $E2$ ,  $C7 = True$ .

## 2.2. Análisis numérico

Utilizando el modelo descrito anteriormente, a continuación se aprecian diferentes comportamientos que puede exhibir el sistema leva seguidor con impactos.

### 2.2.1. Acumulación de impactos



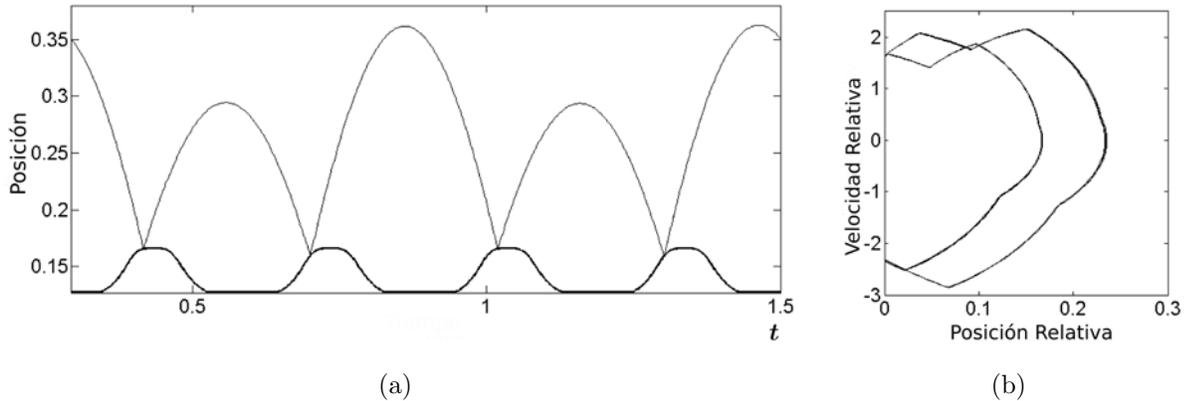
**Figura 2-4.:** Simulación del sistema leva seguidor para  $\omega = 120 \text{ rpm}$ . (a) Posición del seguidor (línea delgada) y alza de la leva (línea gruesa). (b) Posición relativa  $x_1$ . (c) Velocidad relativa  $x_2$ .

Una de las soluciones que este tipo de sistemas comúnmente exhibe es la acumulación de impactos (Chattering), también conocida como fenómeno del zeno, cuando la velocidad de

rotación de la leva se incrementa por encima de una velocidad crítica ocurre el despegue entre los dos cuerpos y los impactos aparecen. La acumulación de impactos determina el momento de regresar a modo deslizante. Figura 2.4(a). En la Figura 2.4(c) se muestra la velocidad relativa del sistema en donde es evidente el punto de acumulación debido a infinitos impactos en un tiempo finito.

### 2.2.2. Órbitas periódicas

Para determinados valores de la velocidad de rotación de la leva, el seguidor sigue una trayectoria  $2T$ -periódica. Como se muestra en la Figura 2.5(a) para  $\omega = 199 \text{ rpm}$  existe una órbita periódica caracterizada por un impacto en un punto diferente cada  $2T$  periodos.

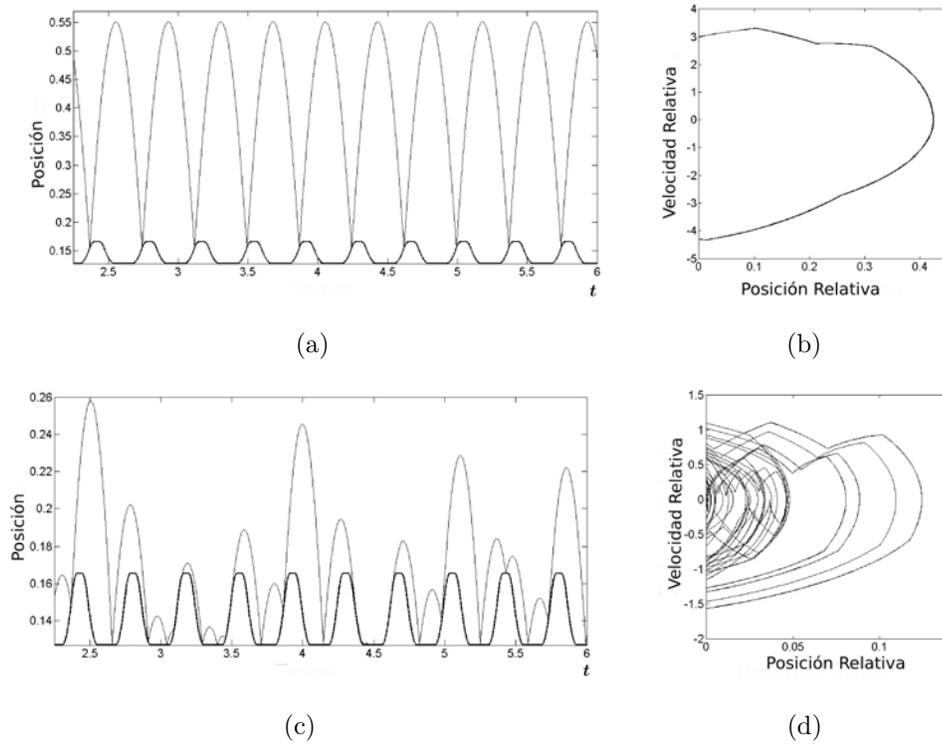


**Figura 2-5.:** Simulación del sistema leva seguidor para  $\omega = 199 \text{ rpm}$ . (a) Posición del seguidor (línea delgada) y alza de la leva (línea gruesa). (b) Retrato de fase, posición y velocidad relativas.

### 2.2.3. Coexistencia de soluciones y dominios de atracción

Una característica fundamental de los sistemas leva seguidor con impactos es la existencia de diferentes atractores para un mismo rango de parámetros. Particularmente en el caso de estudio, existen dos atractores para una serie de valores de velocidad de rotación de la leva  $\omega \in [158 \ 182] \text{ rpm}$ . Como se muestra en las siguientes Figuras, para  $\omega = 160 \text{ rpm}$  hay dos soluciones. Dependiendo de las condiciones iniciales, la evolución del sistema se dirige al atractor de la solución periódica Figura 2.6(a), al atractor caótico Figura 2-7.

La existencia simultánea de diferentes atractores hace que el comportamiento del sistema dependa estrictamente de las condiciones iniciales. Los dominios de atracción son una herramienta muy útil que permite caracterizar la coexistencia de soluciones para valores iguales de los parámetros en el sistema. En la Figura 2-8 se muestra el dominio de atracción de una órbita  $1T$ -periódica, áreas en blanco, y un atractor caótico, áreas en gris, para una velocidad



**Figura 2-6.:** Simulación del sistema leva seguidor para  $\omega = 160 \text{ rpm}$ , coexistencia de soluciones. (a) Solución  $1T$ –periódica. (b) Retrato de fase para solución periódica. (c) Solución caótica. (d) Retrato de fase para la solución caótica.

de rotación de la leva  $\omega = 178 \text{ rpm}$ . Adicionalmente, en la misma figura se dibujó el atractor periódico, como un círculo, en las coordenadas  $x_p = [0,25486 \ -1,02148]$  y el atractor caótico como un grupo de puntos negros en las coordenadas  $[0 \ 0]$ .

#### 2.2.4. Bifurcaciones suaves y no suaves

Se construyó un el diagrama de bifurcación variando la velocidad de rotación de la leva para valores de  $\omega = [105 \ 210] \text{ rpm}$ , para ello se dibuja la fase a la cual ocurre el impacto con el seguidor cada período. El fenómeno más relevante es la bifurcación por impacto con esquina y ésta se evidencia como una transición súbita de una órbita  $1T$ –periódica, al rededor de  $\omega = 157 \text{ rpm}$ , a una solución caótica debido a un impacto del seguidor en el punto de discontinuidad del perfil de la leva, Figura 2-9. Fenómenos como acumulación de impactos y doblamientos de período, también se hacen evidentes en el diagrama.

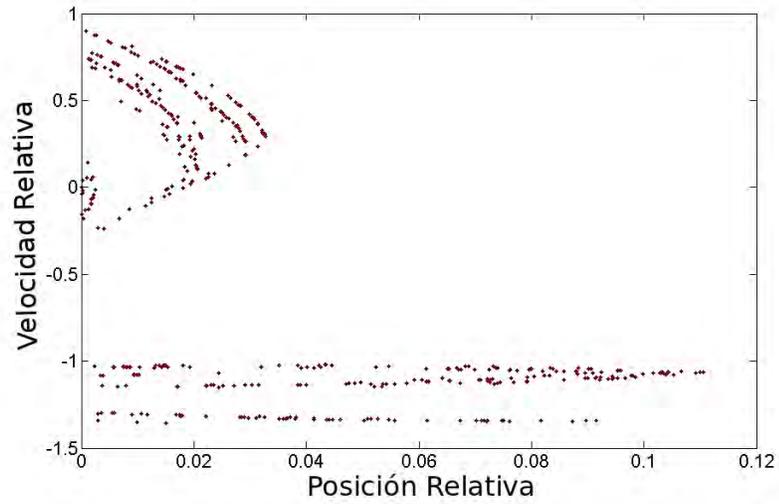


Figura 2-7.: Atractor caótico para  $\omega = 178$  rpm.

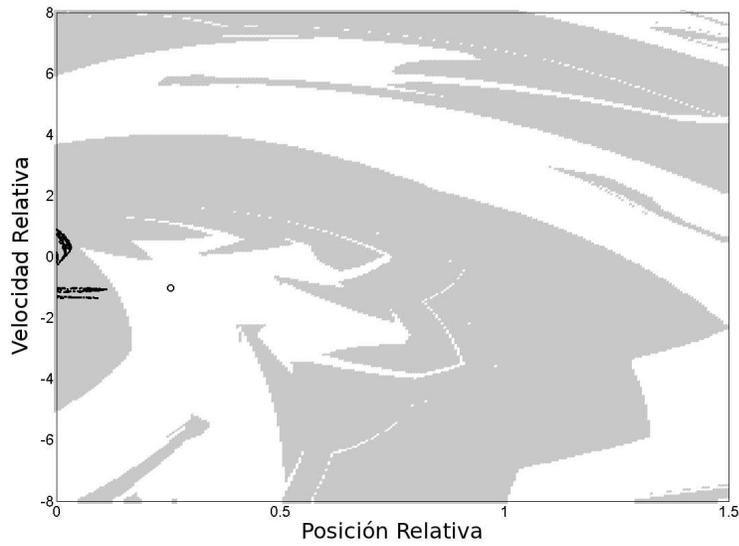
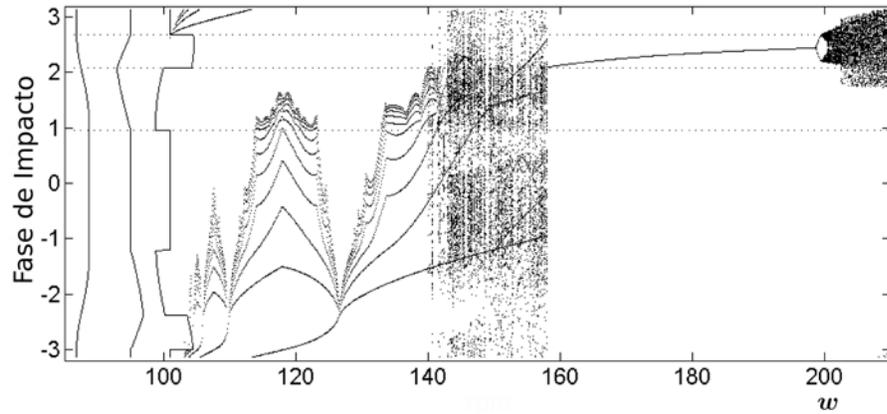
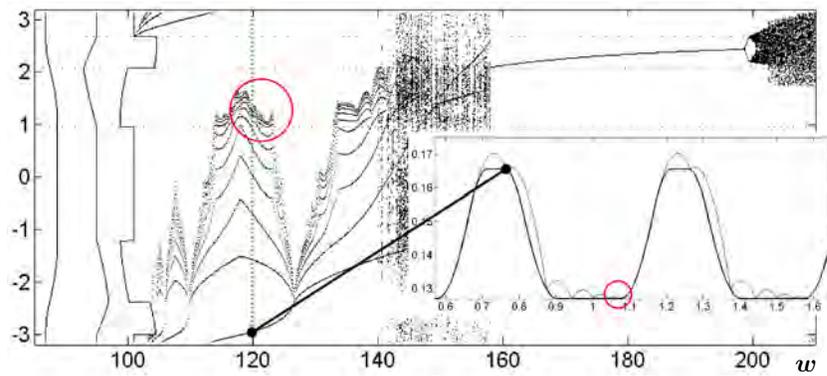


Figura 2-8.: Dominio de atracción para  $\omega = 178$  rpm.



**Figura 2-9.:** Diagrama de bifurcación.



**Figura 2-10.:** Variando la velocidad de rotación de la leva se grafican los puntos de impacto, construyendo así el diagrama de bifurcación e identificando así las bifurcaciones por acumulación de impactos e inducidas por discontinuidades.



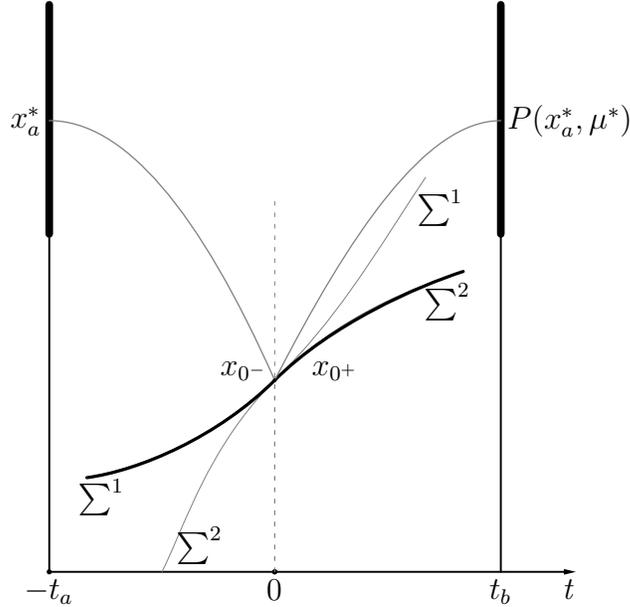
### 3. Bifurcación por impacto con esquina: caso de estudio

Comportamientos periódicos, caóticos, acumulación de impactos y bifurcaciones son fenómenos fundamentales de la naturaleza no suave de sistemas con impactos. Las condiciones para determinar la existencia y estabilidad de una solución dinámica u otra deben ser estudiadas en detalle. Este análisis normalmente se enmarca dentro del contexto de la teoría clásica de estabilidad para sistemas no lineales y la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos suaves a trozos [3, 4, 7]. Para la aplicación de estas teorías, existen diferentes herramientas analíticas, numéricas y experimentales. El estudio de estas teorías se puede desarrollar bajo esquemas diferentes. El modelado, los métodos numéricos y análisis dinámico entre otros, son ejemplos de cómo tradicionalmente se estudian los sistemas físicos reales [1, 6, 21, 27].

En este capítulo se presenta el estudio numérico y analítico del fenómeno llamado *bifurcación por impacto con esquina*. Este fenómeno se hace evidente cuando al estudiar una órbita periódica con impactos alrededor de un punto de discontinuidad en la frontera de impacto hay una transición súbita a comportamiento caótico [23]. Muchos esfuerzos en entender este tipo de dinámica se han hecho recientemente. Referencia de ello es el estudio de *bifurcaciones inducidas por discontinuidad* [8], además del estudio particular del sistema leva seguidor con impactos que realizó el Prof. Gustavo Osorio en su tesis doctoral [21].

Dichas investigaciones arrojan como resultado evidencias claras de la dinámica compleja que exhiben este tipo de sistemas. Se definen, incluso, estrategias que permiten verificar de manera analítica y numérica el comportamiento del sistema dinámico. Ejemplo de ello es el cálculo de mapas locales o globales de Poincaré, el esquema de modelado y simulación bajo el cual se representa la dinámica del sistema mecánico y de manera general el planteamiento de métodos que permiten verificar la dinámica compleja que presenta un sistema no lineal suave a trozos.

### 3.1. Estudio numérico de estabilidad de una órbita periódica con impactos en la vecindad de una esquina



**Figura 3-1.:** Órbita  $1T$ -periódica, cerca al punto de discontinuidad.

Condiciones iniciales de la órbita periódica que impacta en el punto de discontinuidad.

$$x_a^* = [0,3835045270073223 \quad -1,935488273089749]$$

$$\omega^* = 157,2175 \text{ rpm}$$

$$Fase(\theta) = 0,16566665$$

donde  $x_a^*$  define las condiciones iniciales de una órbita  $1T$ -periódica que impacta en la vecindad del punto de discontinuidad.

Ahora bien, es necesario definir un mapa  $P$  tal que:

$$P(x_a^*, \mu^*) = x_b^* = P^* \tag{3-1}$$

se asocie a una órbita periódica con las características que se mencionan.

El comportamiento del sistema está definido por:

$$\dot{x} = F(x) \tag{3-2}$$

$$\dot{x} = Ax$$

para el cual la matriz  $A \in M(2, 2)$  se define como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{3-3}$$

Si ahora se tiene que  $P_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  siendo  $x_1$  y  $x_2$  la posición y velocidad relativas respectivamente, se define entonces la evolución del sistema de manera matricial, donde  $\hat{x}_1$  y  $\hat{x}_2$  son igualmente posición y velocidad relativas después de un período de integración.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

Definiendo valores alrededor de  $x_a^*$ , es decir, perturbando las condiciones iniciales, se puede encontrar la imagen después de un período a través del mapa lineal  $A$ , inicialmente perturbando la posición ( $\delta_{x_1}$ ) y la velocidad ( $\delta_{x_2}$ ).

$$P_{1,2,3\dots n} = P^* + \begin{bmatrix} \delta_{x_1} \\ \delta_{x_2} \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

Se debe tener en cuenta que  $n$  es la cantidad de veces que se perturban las condiciones iniciales, entre mayor cantidad de muestras se tomen alrededor de  $P^*$  con mayor precisión se obtendrá el jacobiano teniendo en cuenta que las perturbaciones  $\delta$  son muy pequeñas. Conociendo los valores de las condiciones iniciales perturbadas y su imagen a través del mapa luego de un período de integración, se puede calcular la matriz  $A$ :

$$\begin{aligned} \bar{X}_n &= [P_1, P_2 \dots P_n] \\ \bar{X}_{n+1} &= P(\bar{X}_n) \\ (\bar{X}_{n+1})^T &= (\bar{X}_n)^T A^T \\ A^T &= \left( \bar{X}_n (\bar{X}_n)^T \right)^{-1} \bar{X}_n (\bar{X}_{n+1})^T \end{aligned} \quad (3-6)$$

cuya matriz permite realizar un análisis de estabilidad asintótica y estructural del sistema dinámico. Si además de perturbar la posición  $x_1^*$  y velocidad inicial  $x_2^*$  se perturba la frecuencia angular con la que gira la leva  $\mu^*$ :

$$\bar{X}_n^m = [P_1^1, P_2^1 \dots P_m^1 \dots P_1^2, P_2^2 \dots P_m^2 \dots P_1^n, P_2^n \dots P_m^n] \quad (3-7)$$

donde  $n$  son las perturbaciones de  $x^*$  y  $m$  las de  $\mu^*$ .

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{1m}^n \\ \hat{x}_{2m}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \left| & b_1 \right. \\ a_{21} & a_{22} & \left| & b_2 \right. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \\ \mu_n \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

De las rutinas numéricas desarrolladas se obtuvo los siguientes resultados:

$$A^1|B^1 = \begin{bmatrix} 1,121832862706425 & 0,017725620389180 & -0,000217841430329 \\ 2,176819971220908 & 0,471239692274750 & -0,011701357168851 \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

$$A^2|B^2 = \begin{bmatrix} 0,196699050126043 & -0,118675557778953 & 0,000399221477899 \\ 3,121649028538826 & 0,607742967778272 & -0,012332479773069 \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

donde los superíndices 1, 2 hacen referencia a si el seguidor impacta con la superficie  $\Sigma^1$  o  $\Sigma^2$ . Ver Figura **3-1**.

Adicionalmente, para la matriz  $A^1$  se calcula:

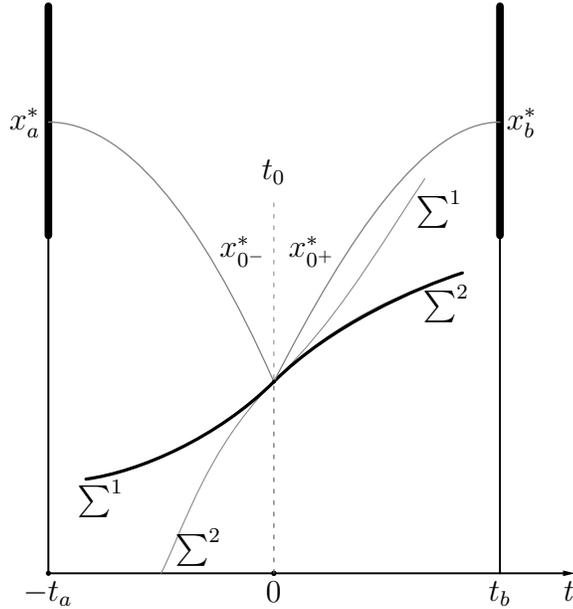
- Valores propios:  $\lambda_1 = 1,176540689068313$   $\lambda_2 = 0,416531865912862$
- Determinante: 0,490066688540029
- Traza: 1,593072554981175

En primera instancia se puede determinar que el jacobiano a través de  $A^1$  está asociado a una órbita periódica inestable ya que uno de los valores propios es mayor que 1, y para la matriz  $A^2$  se pueden encontrar:

- Valores propios:  $\lambda_1 = 0,402221008952157+0,572908512846728i$   $\lambda_2 = 0,402221008952157-0,572908512846728i$
- Determinante: 0,490005904134741
- Traza: 0,804442017904314

indicando que el jacobiano a través de  $A^2$  está asociado a una órbita periódica estable según sus valores propios.

## 3.2. Estudio analítico de estabilidad de una órbita periódica con impactos en la vecindad de una esquina



**Figura 3-2.:** Órbita  $1T$ -periódica, cerca al punto de discontinuidad.

Utilizando algunas herramientas analíticas, como se mostrará más detalladamente en el siguiente capítulo, es posible obtener la aproximación local del mapa como:

$$P_x(x_a^*, \mu^*) := \begin{cases} \varphi_x(x_{0+}^*, t_b) \cdot D_x(x_{0-}^*) \cdot \varphi_x(x_a^*, t_a) & \text{si } \tau(x, \mu) \leq t_0 \\ \varphi_x(x_{0+}^*, t_b) \cdot D_{c,x}(x_{0+}^*) \cdot D_x(x_{0-}^*) \cdot \varphi_x(x_a^*, t_a) & \text{si } \tau(x, \mu) > t_0 \end{cases} \quad (3-11)$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales presentadas en la sección anterior, los valores de los parámetros expuestos en el capítulo 2 y los siguientes tiempos, es posible realizar una validación analítica como se propone en este capítulo.

$$t_a = 0,1164$$

$$t_b = 0,3816$$

donde para el sistema leva seguidor:

$\varphi_x$  se define como el jacobiano después de un intervalo de tiempo  $t$  con condiciones iniciales  $x^*$ . Por la dinámica del sistema leva seguidor no es posible contar con una expresión analítica para dicho flujo y debido a su naturaleza no lineal es necesario hacer uso de rutinas numéricas.

$D_x$  y  $D_{c,x}$  son mapas que modelan la interacción con  $\Sigma^1$  y  $\Sigma^2$  respectivamente y están dados por:

$$D_x(x_{0-}^*) = R_x + (R_x F_{0-}^1 - F_{0+}^1) \tau_x \quad (3-12)$$

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$0 < r < 1$$

definiendo  $C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  de modo que al realizar el producto escalar por el vector de estados se obtenga la posición relativa a la superficie de impacto, de manera que:

$$\begin{aligned} x_1 &= C^T x \\ \tau &= -\frac{C^T \delta}{C^T F_{0-}^*}; \quad \tau = \tau_x \delta + \mathcal{O}(2) \\ \tau_x &= -\frac{C^T}{C^T F_{0-}^*} \end{aligned} \tag{3-13}$$

donde los siguientes datos están asociados a la geometría del sistema:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_{f-} &= \ddot{\theta}_{f+} = -7,4654 \frac{rad}{s^2} \\ \dot{\theta}_c^1 &= 5,465 \frac{rad}{s^2} \\ \dot{\theta}_c^2 &= -17,4987 \frac{rad}{s^2} \end{aligned}$$

Nótese que con los superíndices 1 y 2 se modela la interacción con  $\Sigma^1$  y  $\Sigma^2$ , mientras que los superíndices + y - indican el momento antes o después del impacto.

$$D_{c,x} = I - (R_x F_{0-}^* - F_{0+}^*) \tau_x^1 + (R_x F_{0-}^* - F_{0+}^*) \tau_x^2 \tag{3-14}$$

con

$$\tau_x^1 = \frac{C^T}{C^T F_{0+}^1} \quad y \quad \tau_x^2 = \frac{C^T}{C^T F_{0+}^2}$$

Teniendo en cuenta los mapas y datos definidos anteriormente se obtienen los siguientes resultados:

$$P^1 = \begin{bmatrix} 1,125309634735305 & 0,017399096174115 \\ 2,238023643240933 & 0,470039153919714 \end{bmatrix} \tag{3-15}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0,208956976807514 & -0,117407790093719 \\ 3,108913977647348 & 0,598157966307481 \end{bmatrix} \tag{3-16}$$

Adicionalmente, para la matriz  $P^1$  se puede encontrar:

- Valores propios:  $\lambda_1 = 1,180145882631889$   $\lambda_2 = 0,415202906023130$
- Determinante: 0,4899999999999999
- Traza: 1,595410727712607

En primera instancia se puede determinar que el jacobiano a través de  $P^1$  está asociado a una órbita periódica inestable debido a que uno de sus valores propios es mayor que 1, y para la matriz  $P^2$  se pueden encontrar:

- Valores propios:  $\lambda_1 = 0,403557471557497+0,571962732308768i$   $\lambda_2 = 0,403557471557497-0,571962732308768i$
- Determinante: 0,4899999999999998
- Traza: 0,806893629135952

que indica que el mapa lineal a través de  $P^2$  está asociado a una órbita periódica estable según sus valores propios.

### 3.3. Diferencia porcentual

Finalmente se puede comparar los datos de los mapas obtenidos numéricamente y analíticamente, de donde se concluye que los resultados son aproximados, con la diferencia que para el cálculo numérico se requiere de mayor tiempo de procesamiento.

#### 3.3.1. Diferencia entre $P^1$ y $A^1$

Si se toma los valores de (3-9) para  $P^1$  y (3-15) para  $A^1$ :

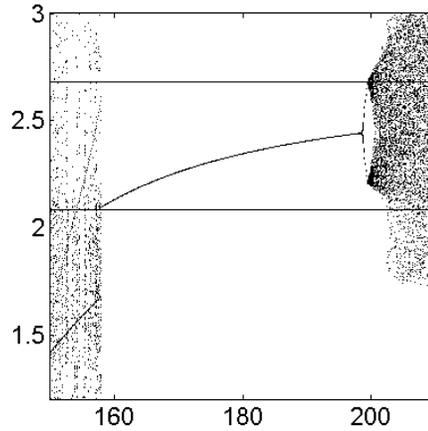
- Determinante 0,013609906128391 %
- Traza 0,146556162047645 %
- Valores propios 0,305487111096455 % y 0,320074804500043 %

#### 3.3.2. Diferencia entre $P^2$ y $A^2$

Si se toma los valores de (3-10) para  $P^2$  y (3-16) para  $A^2$ :

- Determinante 0,001204925457754 %
- Traza 0,303833261673316 %
- Valores propios (en función de la norma) 0,000602447 %

### 3.4. Bifurcación por impacto con esquina



**Figura 3-3.:** Bifurcaciones suaves y no suaves en una órbita periódica.

En la Figura **3-3**, se hacen evidentes cambios abruptos en el comportamiento cualitativo del sistema cuando ocurren impactos en la vecindad de puntos en que la excitación es no suave, bajo la variación de parámetros. El comportamiento observado se explica en términos de mapas locales asociados a las soluciones periódicas. En particular, empleando la técnica de mapas de discontinuidad propuestos en [5, 13], se sugiere que una bifurcación por impacto con esquina, corresponde a una bifurcación por colisión de borde en el punto fijo en el mapa de Poincaré asociado a la solución periódica del sistema.

*Existe una diferencia importante entre bifurcaciones por impacto con esquina y otros tipos de bifurcaciones inducidas por discontinuidad como lo son las bifurcaciones por tangencias de ciclos límite en sistemas con impactos. Mientras la forma normal del mapa asociado a bifurcaciones asociadas por tangencias es típicamente caracterizado por una singularidad (raíz cuadrada), la forma normal asociada a una bifurcación por impacto con esquina se demostró que era lineal a trozos con una banda de discontinuidad. Por lo tanto es necesario contar con un método apropiado de clasificación para estudiar este nuevo tipo de bifurcación.*[4, 16, 18, 21, 26].

## 4. Bifurcaciones por impactos con esquinas: análisis general

En este capítulo, se presenta el análisis local y global de órbitas con impactos cerca a puntos de discontinuidad en la frontera de impacto, empleando el concepto de mapas discretos y la teoría de bifurcaciones por colisiones de borde. El mapa global se puede obtener para un sistema con impactos a través de la composición de mapas de tiempo fijo o mapas de tiempo cero. Los mapas de tiempo fijo describen la evolución del sistema entre impactos, mientras los mapas de discontinuidad se encargarán de modelar la dinámica de impacto. Esta herramienta analítica ha sido empleada para el análisis de sistemas con impactos en fronteras de discontinuidad continuamente diferenciables y con impactos suaves (tangenciales). Aquí, el análisis pretende llenar un vacío en la teoría, realizando el estudio de estabilidad asintótica y estructural de órbitas periódicas con impactos en el caso de sistemas suaves a trozos periódicamente forzados.

### 4.1. Estabilidad de órbitas periódicas en un sistema leva seguidor con impactos

Es necesario entonces definir antes un sistema con impactos

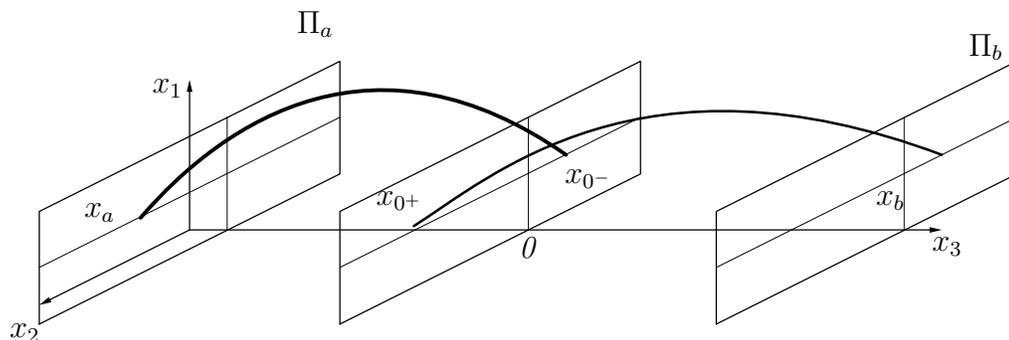


Figura 4-1.: Sistema con impactos, representación geométrica de una órbita  $\mathcal{O}(1,1)$ .

$$S = \begin{cases} \dot{x} = F(x), & \text{si } x_1 > 0, \text{ o } x_1 = 0, \quad x_2 > 0 \\ x_+ = R(x_-), & \text{si } x_1 = 0, \quad x_2 < 0 \\ \dot{x} = F_s(x), & \text{si } x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dot{x}_2 < 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4-1)$$

$x(t)$  es el vector de estados del sistema tal que  $x(t) \in \mathbf{R}^n$  y  $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  es un campo vectorial suave. Se nota como  $\varphi(x_0, t)$  al flujo generado por  $F$  como sigue:

$$\frac{d\varphi(x_0, t)}{dt} = F(\varphi(x_0, t)), \quad \varphi(x_0, 0) = x_0. \quad (4-2)$$

Se usarán los subíndices  $(-)$  y  $(+)$  para definir si el estado es el límite por izquierda o por derecha de la trayectoria en la vecindad de un impacto.

Para un sistema leva seguidor genérico en el que la dinámica de cuerpo libre y la restricción impuesta por la leva definen implícitamente un sistema dinámico con impactos, se puede definir el estado  $x(t) \in \mathbf{R}^3$  como  $x_1$  posición relativa,  $x_2$  velocidad relativa y  $x_3$  fase del sistema periódicamente forzado.

Partiendo de la definición de un sistema con impactos presentado en (4-1) se asume una trayectoria con impactos  $x(t)$  caracterizada por un impacto por periodo en el instante  $t_0 = 0$ , véase la Figura 4-1. Una trayectoria con impactos puede ser descrita por la composición del flujo del sistema y el mapa de impactos.

Por ejemplo si se asume que una trayectoria con condición inicial  $x_a = x(-t_a)$ , con  $t_a > 0$ , impacta  $x_1 = 0$  y  $x_2 < 0$  en el instante  $t_0$ , como se muestra en la Figura 4-1, la dinámica del sistema para un periodo  $T$  estará compuesta por dos flujos durante los intervalos  $t_a, t_b$  y la ley de impacto en  $t_0$  como sigue:

$$\begin{aligned} t_a &> 0 \\ t_b &> 0 \\ x_a &= x(-t_a) \\ x_{0-} &= \varphi(x_a, t_a) \end{aligned} \quad (4-3)$$

en donde el flujo generado por  $F$  antes de que el impacto ocurra durante el intervalo de tiempo  $t_a$  determina el estado  $x_{0-}$ ; el siguiente paso es calcular el estado después del impacto utilizando el mapa  $R$  mediante la ley de restitución que determina las condiciones iniciales para el flujo durante el segundo intervalo de tiempo, para este caso se tiene en cuenta única y exclusivamente el coeficiente de restitución de Newton teniendo entonces como nuevas condiciones:

$$x_{0+} = R(x_{0-}) \quad (4-4)$$

donde el flujo durante el segundo intervalo de tiempo,  $t_b$ , con condiciones iniciales  $x_{0+}$  viene dado por:

$$x_b = \varphi(x_{0+}, t_b) \quad (4-5)$$

el flujo total del sistema queda descrito como sigue, lo cual indica que la solución está asociada a una órbita periódica de modo que:

$$\begin{aligned} x_b &= \varphi(R(\varphi(x_a, t_a)), t_b) \\ x_b &= P(x_a) = x_a \end{aligned} \quad (4-6)$$

donde  $P(x_a)$  es la imagen de  $x_a$  después de un período de integración.

Para el caso de estudio de esta tesis, se utiliza una órbita periódica con condiciones iniciales  $x_a^*$  dadas por  $x_a^* \in \Pi_a$  que satisfacen  $x_b^* = P(x_a^*)$ , véase ecuación (4-6), de modo que el impacto ocurre en  $t_0 = 0$  con  $\Pi_a$  en  $t = -t_a$  y  $\Pi_b$  en  $t = t_b$  con  $t_a, t_b \in R^+$  como dos secciones estroboscópicas de Poincaré en un periodo  $T$  de manera que  $t_a + t_b = T$ . Se puede entonces, replantear la notación para el flujo antes del impacto y para el mapa de impacto sin que se presente alteración alguna de modo que:

$$\begin{aligned} x_{0-}^* &= \varphi(x_a^*, t_a) \\ x_{0+}^* &= R(x_{0-}^*) \\ x_b^* &= \varphi(x_{0+}^*, t_b) \end{aligned} \quad (4-7)$$

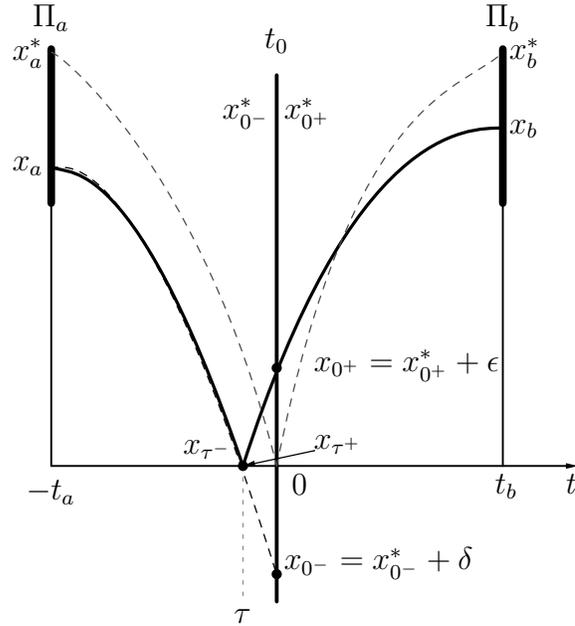
con el propósito de utilizar los flujos antes y después del impacto asociados a la solución periódica como puntos de referencia.

Se desea construir un mapa  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  desde  $\mathcal{A} \subset \Pi_a$  hasta  $\mathcal{B} \subset \Pi_b$ , donde  $\mathcal{A} \subset \Pi_a$  es una vecindad suficientemente pequeña de  $x_a^*$ , tal que todas las trayectorias que parten de  $\mathcal{A}$  tengan un único impacto cada período en el instante  $\tau$  en la vecindad de cero y  $\mathcal{B}$  que contiene a  $x_b^*$  es el conjunto de las imágenes en  $\Pi_b$ .

Ahora para facilitar el análisis geométrico se realiza una proyección de la Figura 4-1 en dos dimensiones, graficando los estados definidos por  $x_1$  y  $x_3$ , obteniendo Figura 4-2.

Es necesario definir un  $\alpha \in R^2$  y  $|\alpha| \approx 0$  de modo que pequeñas perturbaciones alrededor de la condición inicial de la solución periódica se puedan ver un periodo  $T$  después con una variación igualmente pequeña. Analizando el flujo de manera sistemática como se ha hecho hasta ahora, se tiene que:

$$\begin{aligned} x_a &\in \mathcal{A}; x_b \in \mathcal{B} \\ x_a &= x_a^* + \alpha \\ x_b &= x_b^* + \beta \end{aligned} \quad (4-8)$$



**Figura 4-2.:** Construcción del mapa de impacto

donde pequeñas perturbaciones alrededor de la condición inicial  $x_a^*$  se ven reflejadas como pequeñas perturbaciones en  $\mathcal{B}$ . Además, dichas perturbaciones también influyen en el tiempo de impacto  $t_0$  de manera que la perturbación para el tiempo de impacto se ha definido como  $\tau$ .

$$\begin{aligned} x_{\tau-} &= \varphi(x_a, t_a + \tau) \\ x_{\tau+} &= R(x_{\tau-}) \\ x_b &= \varphi(x_{\tau+}, t_b - \tau) \end{aligned} \tag{4-9}$$

La imagen de  $x_a$  en el mapa  $\mathcal{B}$  viene dada por:

$$x_b = \varphi(R(\varphi(x_a, t_a + \tau)), t_b - \tau) \tag{4-10}$$

Ahora bien se hace necesario definir un mapa equivalente que permita analizar el comportamiento de la órbita perturbada alrededor de  $x^*$  en los tiempos  $a$ ,  $0$  y  $b$ .

$$\begin{aligned} x_{0-} &= \varphi(x_a, t_a) \\ x_{0+} &= D(x_{0-}) \\ x_b &= \varphi(x_{0+}, t_b) \end{aligned} \tag{4-11}$$

donde  $x_{0-}$  modela el flujo generado por las condiciones iniciales  $x_a$  durante el intervalo de tiempo  $t_a$  como si la superficie de impacto no existiera y el mapa  $D$  modela la interacción en el punto de impacto  $t_0$ , siendo este mapa la corrección necesaria para la evolución del

sistema durante el intervalo  $t_b$ ; de manera que se tiene:

$$\begin{aligned}
 x_{0-} &= x_{0-}^* + \delta \\
 x_{\tau-} &= \varphi(x_{0-}, \tau) \\
 x_{\tau+} &= R(x_{\tau-}) \\
 x_{0+} &= \varphi(x_{\tau+}, -\tau) \\
 x_{0+} &= x_{0+}^* + \epsilon
 \end{aligned} \tag{4-12}$$

con  $\epsilon$  y  $\delta$  como las perturbaciones alrededor del punto de impacto debido a la perturbación de las condiciones iniciales. Es así como  $x_{0+}$  puede ser calculada por:

$$x_{0+} = \varphi(R(\varphi(x_{0-}, \tau)), -\tau) \tag{4-13}$$

de manera que se tiene la corrección después del impacto.

Partiendo de las definiciones anteriormente planteadas, se puede encontrar una expansión en series en la vecindad de la órbita de interés en  $\mathcal{B}$ , para ello es necesario calcular el jacobiano, que refleja las imágenes y las perturbaciones que se tengan en  $\mathcal{A}$  como la composición de los flujos durante los diferentes intervalos de tiempo y la corrección propuesta.

$$\begin{aligned}
 \beta &= \varphi_x(x_{0+}^*, t_b) D_x(x_{0-}^*) \varphi_x(x_a^*, t_a) \alpha + \mathcal{O}_\alpha(2) \\
 \epsilon &= D_x(x_{0-}^*) \delta + \mathcal{O}_\delta(2)
 \end{aligned} \tag{4-14}$$

A continuación se proponen dos estrategias para el cálculo del mapa D.

### 4.1.1. Aproximación para D utilizando la expansión en series de Taylor

1. Partiendo de  $x_{\tau-} \approx x_{0-}^*$ ;  $x_{0-} \approx x_{0-}^*$ ;  $x_{0-} = x_{0-}^* + \delta$

$$\begin{aligned}
 x_{\tau-} &= \varphi(x_{0-}, \tau) \\
 x_{\tau-} &= x_{0-} + F(x_{0-}^*, t_0) \tau + \mathcal{O}(2)
 \end{aligned} \tag{4-15}$$

2. la ley de impacto esta dada por

$$x_{\tau+} = R(x_{\tau-}) \tag{4-16}$$

de la Figura 4-2 se puede deducir que:

$$x_{\tau-} = x_{0-}^* + \Delta x_{0-}^*; \quad x_{\tau+} = x_{0+}^* + \Delta x_{0+}^* \tag{4-17}$$

para así obtener:

$$\begin{aligned}
x_{\tau+} &= x_{0+}^* + R_x \Delta x_{0-}^* \\
x_{\tau+} &= x_{0+}^* + R_x (x_{\tau-} - x_{0-}^*) \\
x_{\tau+} &= x_{0+}^* - x_{0+}^* + R_x (x_{\tau-}) \\
x_{\tau+} &= R_x (x_{\tau-})
\end{aligned} \tag{4-18}$$

3. teniendo en cuenta que  $x_{\tau+} \approx x_{0+}^*$

$$\begin{aligned}
x_{0+} &= \varphi(x_{\tau+}, -\tau) \\
x_{0+} &= x_{\tau+} - F(x_{0+}^*, t_0) \tau + \mathcal{O}(2)
\end{aligned} \tag{4-19}$$

Después de realizar la composición elaborada anteriormente con (4-15), (4-18) y (4-19) se puede escribir:

$$\begin{aligned}
x_{0+} &= R_x (x_{0-}^* + \delta + F_{0-}^* \tau) - F_{0+}^* \tau + \mathcal{O}(2) \\
x_{0+} &= x_{0+}^* + R_x \delta + (R_x F_{0-}^* - F_{0+}^*) \tau + \mathcal{O}(2)
\end{aligned} \tag{4-20}$$

Como se ha definido inicialmente  $x_{0-} = x_{0-}^* + \epsilon$  entonces:

$$\epsilon = R_x \delta + (R_x F_{0-}^* - F_{0+}^*) \tau + \mathcal{O}(2) \tag{4-21}$$

notese que  $\tau$  es función de  $\delta$  en forma tal que para  $\delta = 0$  se tiene una perturbación  $\tau = 0$  con:

$$\tau = \tau_x \delta + \mathcal{O}(2) \tag{4-22}$$

se puede escribir  $\epsilon$  como:

$$\begin{aligned}
\epsilon &= R_x \delta + (R_x F_{0-}^* - F_{0+}^*) \tau_x \delta + \mathcal{O}(2) \\
\epsilon &= (R_x + (R_x F_{0-}^* - F_{0+}^*) \tau_x) \delta + \mathcal{O}(2)
\end{aligned} \tag{4-23}$$

donde se tiene que para condiciones iniciales  $x_{0-}$ , se puede calcular el estado después del impacto  $x_{0+}$  solo en función de las perturbaciones.

Con un mapa  $D_x(x_{0-}^*)$  descrito por:

$$D_x = R_x + (R_x F_{0-}^* - F_{0+}^*) \tau_x \tag{4-24}$$

y una matriz  $R_x$  definida por,

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$0 < r < 1$$

La aproximación de  $\tau$  se puede obtener como  $x(\tau) = \varphi(x, \tau)$ , teniendo en cuenta que  $x = x_{0-}^*$  y  $\tau = 0$ ,

$$x(\tau) = x_{0+}^* + \varphi_x \delta + \varphi_\tau \tau \quad (4-25)$$

se requiere definir  $C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  de modo que al realizar el producto escalar por el vector de estados se obtenga la posición relativa a la superficie de impacto, de manera que:

$$\begin{aligned} x_1 &= C^T x \\ C^T x(\tau) &= C^T x_{0-}^* + C^T \delta + C^T F_{0-}^* \tau \\ C^T x(\tau) &= 0; \quad C^T x_{0-}^* = 0 \\ \tau &= -\frac{C^T \delta}{C^T F_{0-}^*}; \quad \tau = \tau_x \delta + \mathcal{O}(2) \\ \tau_x &= -\frac{C^T}{C^T F_{0-}^*} \end{aligned} \quad (4-26)$$

#### 4.1.2. Aproximación de D utilizando diferenciación implícita

De manera semejante se parte de la ecuación (4-13) se puede calcular el jacobiano  $D_x(x_{0-})$  partiendo de que  $x_{0-} \approx x_{0-}^*$  y  $x_{0+} \approx x_{0+}^*$  como sigue:

$$\begin{aligned} D_x(x_{0-}) &= \frac{\partial D}{\partial x} \\ \frac{\partial D}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \left( \frac{\partial (R(\varphi(x_{0-}, \tau)))}{\partial x} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \left( \frac{\partial (-\tau)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4-27)$$

$$\begin{aligned} D_x &= \varphi_x(x_{0+}^*, 0) \cdot R_x(\varphi_x(x_{0-}^*, 0) + \varphi_t(x_{0-}^*, 0) \tau_x) - \varphi_t(x_{0+}^*, 0) \tau_x \\ D_x &= I \cdot R_x(I + F_{0-}^* \tau_x) - F_{0+}^* \tau_x \end{aligned} \quad (4-28)$$

con  $I$  igual a la matriz identidad, entonces se puede encontrar una aproximación para el mapa  $D_x$ ,

$$D_x = R_x + (R_x F_{0-}^* - F_{0+}^*) \tau_x \quad (4-29)$$

donde (4-29) resulta siendo la misma expresión que en el caso de la expansión en series de Taylor mostrada en la ecuación (4-24).

#### Estabilidad

La estabilidad de una órbita periódica puede ser analizada con base a (4-14) de manera que:

$$P_x(x_a^*) = \varphi_x(x_{0+}^*, t_b) D_x(x_{0-}^*) \varphi_x(x_a^*, t_a) \quad (4-30)$$

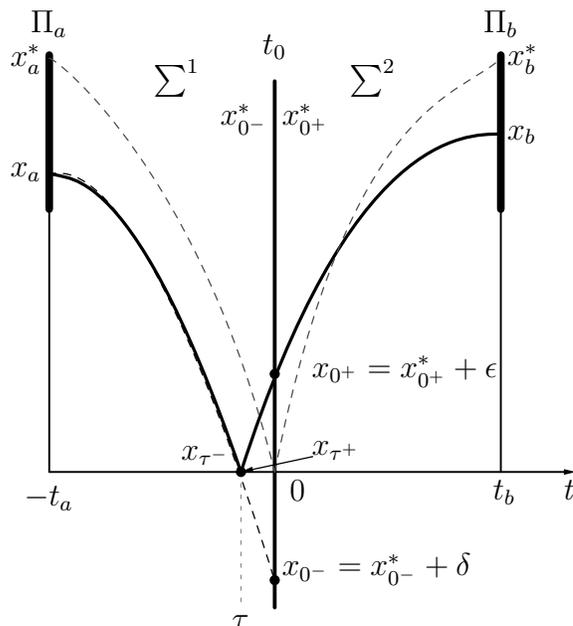


Figura 4-3.: Construcción del mapa de impacto  $D$

## 4.2. Mapa estroboscópico, de discontinuidad y de esquina

Una de las herramientas analíticas estándar para el análisis de sistemas dinámicos es el mapa estroboscópico ya que en muchos casos permite determinar las características de estabilidad reduciendo significativamente la complejidad del sistema original de ecuaciones. Esta herramienta también puede ser usada, como se ha visto, para realizar el análisis de estabilidad en sistemas con impactos; ahora bien, esta estrategia también se puede utilizar para analizar un sistema con impactos cuando se presentan esquinas teniendo cuidado de aplicar un mapa de discontinuidad para cada impacto, debido a que en el caso de sistemas con esquinas es necesario realizar una corrección adicional que tenga en cuenta el efecto de las mismas.

### 4.2.1. Órbitas de impacto en la vecindad de una esquina

En la sección anterior se analizó de manera general la estabilidad de una órbita periódica en donde un sistema dinámico  $S$  se modela suave a trozos con  $F$ . Para el caso de estudio de la bifurcación por impacto con esquina se tienen una función suave independiente a cada lado del punto de impacto, donde  $\Sigma^1$  y  $\Sigma^2$  están asociados a dos restricciones diferentes en el sistema antes y después del impacto respectivamente. De manera semejante y sistemática se aplican mapas de tiempo fijo y de impacto que permiten analizar la estabilidad de la órbita cuando ésta impacta en el punto de discontinuidad. Véase la Figura 4-3.

Se puede notar que para valores de  $\tau < t_0$  el punto de impacto se encuentra en  $\Sigma^1$ .

### 4.2.2. Construcción del mapa de discontinuidad $D$

Sean  $F^1 \in \Sigma^1$  el flujo del sistema durante el intervalo  $[-t_a, 0]$  con  $t_a > 0$ ,  $F^2 \in \Sigma^2$  durante el intervalo  $[0, t_b]$  con  $t_b > 0$  y  $t_0$  el tiempo de impacto en el cual la órbita periódica impacta la discontinuidad.  $F^1$  y  $F^2$  son funciones suaves cada una independiente.

$$\text{si } \tau < t_0$$

$$x_a^* \in \mathcal{A}; \quad x_b^* \in \mathcal{B}$$

$$x_b^* = P(x_a^*)$$

$$P_x(x_a^*) = \varphi_x(x_{0+}^*, t_b) D_x(x_{0-}^*) \varphi_x(x_a^*, t_a)$$

De igual manera que se obtiene (4-24) y (4-29) se llega a (4-31):

$$D_x(x_{0-}^*) = R_x + (R_x F_{0-}^1 - F_{0+}^1) \tau_x \quad (4-31)$$

### 4.2.3. Mapa de esquina $D_c$

Si ahora se varia uno de los parámetros del sistema de modo que  $\tau > t_0$ , el mapa debe cambiar ya que el punto de impacto se mueve a  $\Sigma^2$ . Este fenómeno puede causar una transición no suave que puede ser modelada con la introducción de un mapa de discontinuidad extra  $D_c$  y que permite escribir el mapa global de la siguiente manera:

$$P(x_a^*) = \varphi(x_{0+}^*, t_b) D_c(x_{0+}^*) D(x_{0-}^*) \varphi(x_a^*, t_a) \quad (4-32)$$

donde  $D_c$  representa la corrección adicional al mapa de discontinuidad debido a que el impacto ocurre ahora en  $\Sigma^2$ .

Para la construcción del mapa  $D_c$ , se asume una perturbación en la condición inicial  $x_{0+}^1 = x_{0+}^* + \epsilon$  con  $\epsilon \approx 0$  después del impacto en  $\Sigma^1$ . Se desea obtener la corrección (en tiempo cero)  $\xi$  al estado después del impacto en  $\Sigma^2$  definido como  $x_{0+}^2 = x_{0+}^* + \xi$  con  $\xi \approx 0$  tal que para  $\epsilon = 0$  se tiene  $\xi = 0$ . En la Figura 4-4, se muestra el diagrama esquemático para la construcción del mapa, en donde  $D_c$  se puede obtener de la siguiente manera:

$$x_{0-} = x_{0-}^* + \delta$$

$$x_{0+}^2 = x_{0+}^* + \xi$$

$$x_{0+}^1 = x_{0+}^* + \epsilon$$

Es de notar que los superíndices 1 y 2 se usarán para denotar si el estado está asociado al flujo perteneciente a  $\Sigma^1$  o  $\Sigma^2$  respectivamente, así como los subíndices para denotar tiempos y el \* a la solución asociada a la órbita periódica que impacta en el punto de discontinuidad  $t_0$  sin perturbaciones.

1. Tomando como condición inicial  $x_{0+}^1$  se fluye un tiempo  $t = \tau^1$  donde  $\tau^1$  es tal que  $x_1(\tau^1) = 0$  con  $x_1 \in \Sigma^1$ , es decir, cuando la posición relativa teniendo en cuenta el flujo generado por  $\Sigma^1$  sea cero.

$$x_{\tau^1+} = \varphi(x_{0+}^1, \tau^1) \quad (4-33)$$

2. Una vez calculado el estado después del impacto  $x_{\tau^1+}$  se obtiene el estado antes del impacto  $x_{\tau^1-} \in \Sigma^1$  usando la función inversa de la regla de impacto  $R^{-1}$  como:

$$x_{\tau^1-} = R^{-1}(x_{\tau^1+}) \quad (4-34)$$

3. Con  $x_{\tau^1-} \in \Sigma^1$  se fluye un tiempo  $t = \tau^2 - \tau^1$  hasta alcanzar  $x_{\tau^2-} \in \Sigma^2$  donde  $\tau^2$  es tal que  $x_1(\tau^2) = 0$  con  $x_1 \in \Sigma^2$ , es decir, cuando la posición relativa teniendo en cuenta el flujo generado por  $\Sigma^2$  sea cero, se tiene:

$$x_{\tau^2-} = \varphi(x_{\tau^1-}, \tau^2 - \tau^1) \quad (4-35)$$

4. Como ya se tiene  $x_{\tau^2-}$  y utilizando la regla de impacto  $R$  se calcula entonces el estado después del impacto  $x_{\tau^2+} \in \Sigma^2$  como sigue:

$$x_{\tau^2+} = R(x_{\tau^2-}) \quad (4-36)$$

5. Usando  $x_{\tau^2+}$  se fluye un tiempo  $-\tau^2$  de manera que se puede calcular la corrección necesaria en el punto  $x_{0+}^2$  tal que:

$$x_{0+}^2 = \varphi(x_{\tau^2+}, -\tau^2) \quad (4-37)$$

Para así finalmente de la composición de (4-33), (4-34), (4-35), (4-36) y (4-37) obtener:

$$\begin{aligned} x_{0+}^2 &= D_c(x_{0+}^1) \\ D_c(x_{0+}^1) &= \varphi(R(\varphi(R^{-1}(\varphi(x_{0+}^1, \tau^1)), \tau^2 - \tau^1)), -\tau^2) \end{aligned} \quad (4-38)$$

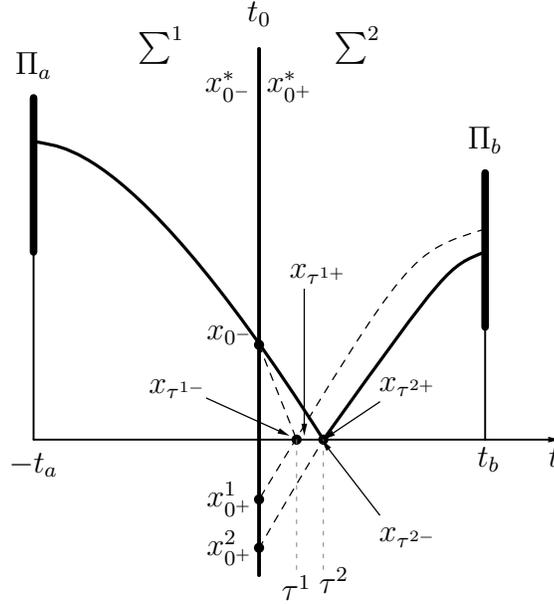


Figura 4-4.: Construcción del mapa de impacto  $D_c$

### Aproximación para $D_c$ utilizando expansión en series de Taylor

Para obtener una aproximación de primer orden de  $D_c(x_{0+}^1)$  en (4-38) se puede proceder de la siguiente manera:

1. Partiendo de (4-33) con  $x_{0+}^1 \approx x_{0+}^*$  y  $\tau^1 \approx 0$

$$\begin{aligned} x_{\tau^1+} &= x_{0+}^1 + F(x_{0+}^*, t_0) \tau^1 + \mathcal{O}(2) \\ x_{\tau^1+} &= x_{0+}^1 + F_{0+}^* \tau^1 + \mathcal{O}(2) \end{aligned} \quad (4-39)$$

2. Con base en (4-34) y de manera semejante que (4-18)

$$\begin{aligned} x_{\tau^1-} &= R^{-1}(x_{\tau^1+}) \\ x_{\tau^1-} &= x_{0-}^* + \Delta x_{0-}^*; \quad x_{\tau^1+} = x_{0+}^* + \Delta x_{0+}^* \\ x_{\tau^1-} &= x_{0-}^* + R_x^{-1} \Delta x_{0+}^* \\ x_{\tau^1-} &= x_{0-}^* + R_x^{-1}(x_{\tau^1+} - x_{0+}^*) \\ x_{\tau^1-} &= R_x^{-1}(x_{\tau^1+}) \end{aligned} \quad (4-40)$$

3. Ahora de (4-35) con  $x_{\tau^1-} \approx x_{0-}^*$ ,  $\tau^1 \approx 0$  y  $\tau^2 \approx 0$  se tiene:

$$x_{\tau^2-} = x_{\tau^1-} + F_{0-}^* (\tau^2 - \tau^1) + \mathcal{O}(2) \quad (4-41)$$

4. Siguiendo el procedimiento mostrado en (4-40), partiendo de (4-36) y con  $x_{\tau^2-} \approx x_{0-}^*$ ;  $\tau^2 \approx 0$

$$x_{\tau^2+} = R_x(x_{\tau^2-}) \quad (4-42)$$

5. Donde finalmente partiendo de (4-37) y con  $x_{\tau^2+} \approx x_{0+}^*$ ;  $\tau^2 \approx 0$  se tiene que:

$$x_{0+}^2 = x_{\tau^2+} - F_{0+}^* \tau^2 + \mathcal{O}(2) \quad (4-43)$$

Para así de la composición de (4-39), (4-40), (4-41), (4-42) y (4-43)

$$x_{0+}^2 = D_c(x_{0+}^1) = x_{0+}^* + \epsilon - (R_x F_{0-}^* - F_{0+}^*) \tau^1 + (R_x F_{0-}^* - F_{0+}^*) \tau^2 + \mathcal{O}(2) \quad (4-44)$$

Es de notar que  $\tau^1$  y  $\tau^2$  son funciones de  $\epsilon$  en forma tal que para  $\epsilon = 0$  se tiene que  $\tau^1 = 0$  y  $\tau^2 = 0$

$$\tau^1 = \tau_x^1 \epsilon + (2)$$

$$\tau^2 = \tau_x^2 \epsilon + (2)$$

Es así como se puede obtener:

$$x_{0+}^2 = D_c(x_{0+}^1) = x_{0+}^* + \epsilon - (R_x F_{0-}^* - F_{0+}^*) \tau_x^1 \epsilon + (R_x F_{0-}^* - F_{0+}^*) \tau_x^2 \epsilon + \mathcal{O}(2) \quad (4-45)$$

donde la corrección necesaria debida a  $x_{0+}^2 = x_{0+}^* + \xi$  está dada por:

$$\xi = (I - (R_x F_{0-}^* - F_{0+}^*) \tau_x^1 + (R_x F_{0-}^* - F_{0+}^*) \tau_x^2) \epsilon + \mathcal{O}(2) \quad (4-46)$$

De manera semejante que en (4-26) se llega a:

$$\tau_x^1 = \frac{C^T}{C^T F_{0+}^1} \quad y \quad \tau_x^2 = \frac{C^T}{C^T F_{0+}^2}$$

### Aproximación para $D_c$ utilizando diferenciación implícita

Con base en (4-38) se puede calcular el jacobiano  $D_{c,x}$  como:

$$D_{c,x} = \frac{\partial D_c}{\partial x} \quad (4-47)$$

$$\frac{\partial D_c}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \left( \frac{\partial (R(\varphi(R^{-1}(\varphi(x_{0+}^1, \tau^1)), \tau^2 - \tau^1)))}{\partial x} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \tau^2}{\partial x}$$

si se tiene que  $\tau^1 = 0$ ,  $\tau^2 = 0$  y  $x_{0+}^2 \approx x_{0+}^*$  después de algunos cálculos algebraicos se llega a:

$$D_{c,x} = \varphi_x(x_{0+}^*, 0) + \varphi_t(x_{0+}^*, 0) \tau_x^1 + R_x \varphi_t(x_{0-}^*, 0) \tau_x^2 - R_x \varphi_t(x_{0-}^*, 0) \tau_x^1 - \varphi_t(x_{0+}^*, 0) \tau_x^2$$

$$D_{c,x} = \varphi_x(x_{0+}^*, 0) + (\varphi_t(x_{0+}^*, 0) - R_x \varphi_t(x_{0-}^*, 0)) \tau_x^1 + (R_x \varphi_t(x_{0-}^*, 0) - \varphi_t(x_{0+}^*, 0)) \tau_x^2$$

de manera que  $\varphi_x(x_{0+}, 0) = I$ ,  $\varphi_t(x_{0-}, 0) = F_{0-}^*$  y  $\varphi_t(x_{0+}, 0) = F_{0+}^*$  se tiene que:

$$D_{c,x} = I - (R_x F_{0-}^* - F_{0+}^*) \tau_x^1 + (R_x F_{0-}^* - F_{0+}^*) \tau_x^2 \quad (4-48)$$

que conduce al resultado en la forma compacta mostrada en (4-46).

### 4.3. Cálculo del mapa global de Poincaré y estabilidad

Es entonces posible emplear la aproximación de  $D$  y  $D_c$  para obtener el mapa global de Poincaré. Sea  $\mathcal{A}_\mu \subset \Pi_a \times R^1$  una vecindad suficientemente pequeña del punto  $(x_a^*, \mu^*)$ , tal que todas las trayectorias originadas en  $\mathcal{A}_\mu$  tienen un solo impacto que ocurre en el instante  $\tau \in \mathcal{I} = [-t_a, t_b]$ . Entonces, para  $\tau(x, \mu) \leq t_0$  el punto  $x \in \mathcal{A}_\mu$  es aplicado al punto  $P(x, \mu) \in \mathcal{B} \subset \Pi_b$  dado por:

$$P(x, \mu) = \begin{cases} (\Phi_b \circ D \circ \Phi_a)(x, \mu), & \text{si } \tau(x, \mu) \leq t_0 \\ (\Phi_b \circ D_c \circ D \circ \Phi_a)(x, \mu), & \text{si } \tau(x, \mu) > t_0 \end{cases} \quad (4-49)$$

donde se ha incluido de manera general el vector de parámetros  $\mu$ .

Como se mencionó anteriormente, la trayectoria asociada al impacto con esquina tiene la condición inicial  $x_a^* \in \Pi_a$  con  $\mu = \mu^*$ , tal que  $x_{0-}^* = \varphi(x_a^*, t_a)$  cuando  $\mu = \mu^*$ .

Sea  $\Delta x$  y  $\Delta \mu$  variaciones suficientemente pequeñas del estado y de los parámetros cerca a  $x_a^*$  y  $\mu^*$ , tal que los puntos  $(x_a^* + \Delta x, \mu^* + \Delta \mu) \in \mathcal{A}_\mu$ . Entonces, se puede escribir la aproximación lineal de (4-49) cerca a un punto de esquina como:

$$\Delta P(x, \mu) \Big|_{\substack{x \approx x_a^* \\ \mu \approx \mu^*}} = P_x(x_a^*, \mu^*) \Delta x + P_\mu(x_a^*, \mu^*) \Delta \mu + \mathcal{O}(\|\Delta x\|^2, \|\Delta \mu\|^2)$$

donde:

$$P_x(x_a^*, \mu^*) := \begin{cases} \varphi_x(x_{0+}^*, t_b) \cdot D_x(x_{0-}^*) \cdot \varphi_x(x_a^*, t_a) & \text{si } \tau(x, \mu) \leq t_0 \\ \varphi_x(x_{0+}^*, t_b) \cdot D_{c,x}(x_{0+}^*) \cdot D_x(x_{0-}^*) \cdot \varphi_x(x_a^*, t_a) & \text{si } \tau(x, \mu) > t_0 \end{cases} \quad (4-50)$$

y

$$P_\mu(x_a^*, \mu^*) := \begin{cases} \varphi_\mu(x_{0+}^*, t_b) \cdot D_\mu(x_{0-}^*) \cdot \varphi_\mu(x_a^*, t_a) & \text{si } \tau(x, \mu) \leq t_0 \\ \varphi_\mu(x_{0+}^*, t_b) \cdot D_{c,\mu}(x_{0+}^*) \cdot D_\mu(x_{0-}^*) \cdot \varphi_\mu(x_a^*, t_a) & \text{si } \tau(x, \mu) > t_0 \end{cases} \quad (4-51)$$

Probablemente la aplicación más inmediata de la metodología de análisis presentada sea el análisis de estabilidad de órbitas periódicas con impactos en la vecindad de una esquina o punto de discontinuidad [21, 22]. Es posible estudiar la estabilidad asintótica y estructural de una órbita de este tipo con un mapa de Poincaré asociado como el que se muestra en (4-49). Si  $x_a^*$  es un punto fijo del mapa asociado a la órbita periódica de interés, la estabilidad asintótica se puede estudiar empleando (4-50) mientras la estabilidad estructural se puede estudiar empleando (4-51).



## 5. Conclusiones

La contribución de este proyecto de investigación está directamente relacionada con los diferentes problemas y aspectos que presentan los sistemas dinámicos no suaves. El modelado, simulación y análisis de este tipo de sistemas, que suelen ser no lineales, deben ser tratados con especial cuidado ya que en algunas ocasiones pueden evidenciarse fenómenos dinámicos que implican además de los que se presentan en una dinámica suave, los de la naturaleza no suave. Es de notar que en la literatura se encuentran pocos reportes de estos fenómenos.

En la primera etapa, el trabajo se enfocó en el desarrollo de rutinas numéricas para simular sistemas dinámicos no suaves, siendo el principal objeto de estudio el sistema leva seguidor con impactos. Evaluando los efectos que implica tener como restricción una leva discontinua y con ello las diferentes dinámicas que se presentan frente a un determinado conjunto de condiciones iniciales. Soluciones periódicas, acumulación de impactos, bifurcaciones suaves y no suaves, hasta caos, son por mencionar algunos, los fenómenos que se hacen evidentes. En la segunda parte del trabajo, se realizó un análisis sistemático de la estabilidad de órbitas periódicas suaves a trozos, en el contexto de la teoría cualitativa de sistemas dinámicos. Uno de los fenómenos más evidentes es la bifurcación por impacto con esquina, clasificada como una bifurcación inducida por discontinuidad, la cual corresponde a una bifurcación por colisión de borde en el punto fijo del mapa de Poincaré asociado a una solución periódica. Finalmente se ha demostrado, que mediante el uso de un conjunto de herramientas numéricas y analíticas, utilizadas en este trabajo, se puede estudiar los sistemas leva seguidor con impactos, combinando dichas estrategias, incluso clasificar y modelar fenómenos no suaves, ya que, solo pretender realizar un estudio analítico, implica mayor complejidad en la búsqueda de soluciones e incluso no poder encontrar respuesta a los fenómenos de los que se hace mención.

Específicamente, se ha estudiado el modelado, análisis no lineal y simulación del sistema leva seguidor con impactos. Se concluye que el análisis no lineal es una herramienta útil a la hora de caracterizar los diferentes fenómenos que este tipo de sistemas puede exhibir. El esquema bajo el cual se realiza la integración numérica de soluciones es el adecuado. Con la implementación del algoritmo propuesto, se ha confirmado, que un sólo grado de libertad es suficiente para representar la mayoría de dinámicas suaves y no suaves, teniendo en cuenta que entre más grados de libertad sean tenidos en cuenta, mayor será la dificultad a la hora de realizar el análisis numérico o analítico, sin que con ello se evidencien fenómenos diferentes. La velocidad de rotación de la leva es un parámetro importante de bifurcación, como se

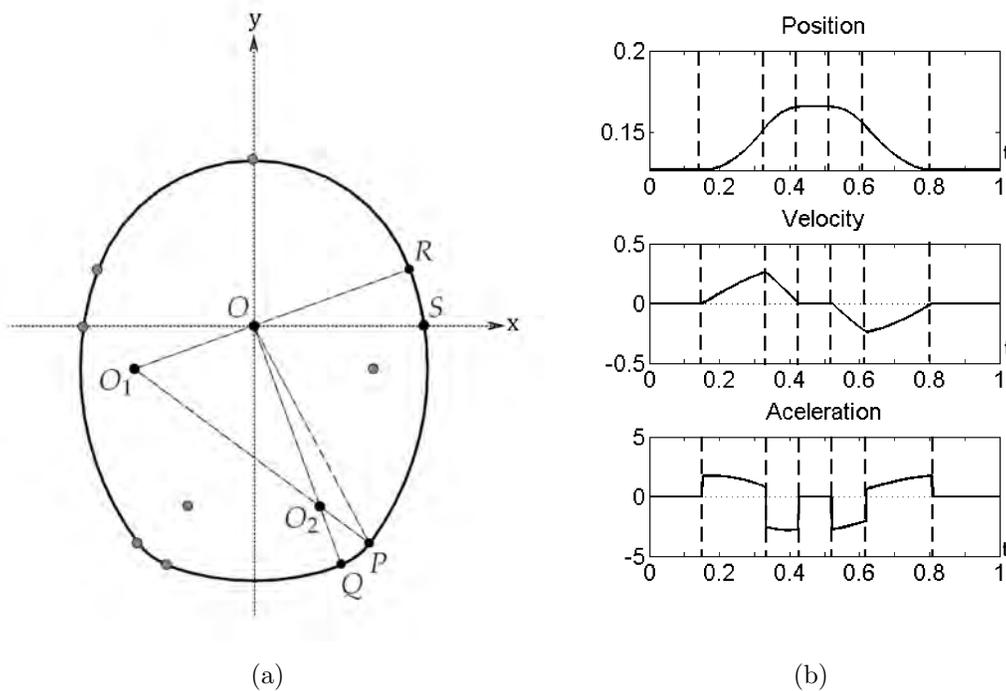
hace evidente en los diagramas elaborados. Adicionalmente, levas con discontinuidades en sus derivadas, restricciones, pueden inducir bifurcaciones de naturaleza no suave.

Un trabajo futuro y de gran importancia, es la verificación experimental de las diferentes dinámicas que se presentaron en este trabajo. Con estos resultados y las herramientas analíticas propuestas, se puede contar con una mejor comprensión de la dinámica compleja del sistema leva seguidor. Como se ha mencionado antes, en la literatura se encuentra modelado, análisis y simulación de algunos sistemas con impactos pero poca información acerca de montajes experimentales que permitan verificar su dinámica. Un ejemplo claro es la bifurcación por impacto con esquina de la cual no se cuenta con evidencia experimental y son las levas discontinuas las de mayor uso en la industria automotriz. Siguiendo la metodología de *Modelado, Análisis, Simulación y Experimentación*, se puede verificar dicho fenómeno contando así con mayor información de su dinámica en pro de generar nuevas estrategias de control para mejorar el comportamiento de los sistemas físicos reales utilizados en la industria.

# A. Perfil de la leva

Se modela el perfil de la leva, superficie de impacto, como una función suave a trozos que depende de la posición angular de la leva  $\theta_c$ .

Las ecuaciones se muestran a continuación:



**Figura A-1.:** (a) Perfil de la leva. (b) Restricciones de impacto. posición  $\theta_c$ , velocidad  $\dot{\theta}_c$ , aceleración  $\ddot{\theta}_c$ .

Como se muestra en la Figura **2-2** y la Figura. A.1(a), el perfil de la leva es el resultado de un diseño geométrico con base en círculos centrados en los puntos que se muestran.

$$\theta_c = \begin{cases} \theta_{c0} & \text{If } 0 < \theta_c \leq \frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_1 \\ \theta_{c1} & \text{If } \frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_1 < \theta_c \leq \frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_2 \\ \theta_{c2} & \text{If } \frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_2 < \theta_c \leq \frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_3 \\ \theta_{c3} & \text{If } \frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_3 < \theta_c \leq \pi + \alpha \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= Y_c - k_1 \sin(\pi + \theta_1 + \theta_c) \\ \beta_2 &= X_c - k_1 \cos(\pi + \theta_1 + \theta_c) \\ \beta_3 &= Y_c - k_2 \sin(2\pi - \theta_3 + \theta_c) \\ \beta_4 &= X_c + k_2 \cos(2\pi + \theta_2 + \theta_c) \\ \theta_{c0} &= \arctan\left(\frac{Y_c}{X_c}\right) + \arcsin\left(\frac{\rho_0}{\sqrt{X_c^2 + Y_c^2}}\right) \\ \theta_{c1} &= \arctan\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) + \arcsin\left(\frac{\rho_1}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}}\right) \\ \theta_{c2} &= \arctan\left(\frac{\beta_3}{\beta_4}\right) + \arcsin\left(\frac{\rho_2}{\sqrt{\beta_3^2 + \beta_4^2}}\right) \\ \theta_{c3} &= \arctan\left(\frac{Y_c}{X_c}\right) + \arcsin\left(\frac{\rho_3}{\sqrt{X_c^2 + Y_c^2}}\right) \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

donde los parámetros están dados por el diseño geométrico mostrado en la Figura. A.1(a):

$$\theta_1 = \angle SOR$$

$$\theta_2 = \angle SOP$$

$$\theta_3 = \angle SOQ$$

$$k_1 = \|\overline{OO_1}\|, \rho_0 = \|\overline{OR}\|, \rho_2 = \|\overline{O_2P}\|$$

$$k_2 = \|\overline{OO_2}\|, \rho_1 = \|\overline{O_1R}\|, \rho_3 = \|\overline{OQ}\|$$

# Bibliografía

- [1] ALZATE, R. ; BERNARDO, M. ; GIORDANO, G. ; REA, G. ; SANTINI, S.: Experimental and Numerical Investigation of Coexistence Novel Bifurcations and Chaos in a Cam-Follower Systems. En: *SIAM J. Applied Dynamical Systems* (2009)
- [2] ALZATE, R. ; BERNARDO, M. ; MONTANARO, U. ; SANTINI, S.: Experimental and numerical verification of bifurcations and chaos in cam-follower impacting systems. En: *Nonlinear Dynamics* (2007)
- [3] ANGULO, F. ; OLIVAR, G. ; OSORIO, G. ; ESCOBAR, C. ; FERREIRA, J. ; REDONDO, J.: Bifurcation in non-smooth systems. En: *Nonlinear Science and Numerical Simulation* (2011)
- [4] BERNARDO, M. ; BUDD, C. ; CHAMPNEYS, A.R. ; KOWALCZYK, P.: *Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*. Springer, 2008
- [5] BERNARDO, M. ; BUDD, Ch. ; CHAMPNEYS, A.R.: Corner collision implies border-collision bifurcation. En: *Physica D* (2001)
- [6] BERNARDO, M. ; BUDD, Ch. ; CHAMPNEYS, A.R.: Normal form maps for grazing bifurcations in n-dimensional piecewise smooth systems. En: *Physica D* (2001)
- [7] BERNARDO, M. ; BUDD, Ch. ; CHAMPNEYS, A.R. ; KOWALCZYK, P. ; NORDMARK, A.B. ; OLIVAR, G. ; PIIRONEN, P.T.: Bifurcation in non smooth dynamical systems. En: *SIAM Rev* (2008)
- [8] BERNARDO, M. ; NORDMARK, A. ; OLIVAR, G.: Discontinuity-induced bifurcations of equilibria in piecewise-smooth and impacting dynamical systems. En: *Physica D* (2008)
- [9] BUDD, Ch ; DUX, F.: Chattering and related behavior in impact oscillators. En: *Phil. Trans. Royal Society London A*. (1994)
- [10] BUDD, Ch ; DUX, F. ; CLIFFE, A: The effect of frequency and clearance variations on single degree of freedom impact oscillators. En: *J. of Sound and Vibration* (1996)
- [11] BUDD, F. ; PIIRONEN, P.: Corner bifurcations in non-smoothly forced impact oscillators. En: *Physica D:Nonlinear Phenomena* (2006)

- 
- [12] COLOMBO, A. ; BERNARDO, M. ; HOGAN, S.J. ; JEFFREY, M.R.: Bifurcations of piecewise smooth flows: Perspectives, methodologies and open problems. En: *Physica D* (2011)
- [13] DANKOWICZ, H. ; NORDMARK, A.: On the origin and bifurcations of stick-slip oscillations. En: *Physica D* (2000)
- [14] DRESNER, T.L. ; BARKAN, P.: New methods for the dynamic analysis of flexible single-input and multi-input cam-follower systems. En: *J. of Mechanical Desing* (1995)
- [15] KOSTER, M.: Vibrations of cam mechanisms. En: *Phillips Technical Library Series* (1974)
- [16] LEINE, R. ; NIJMEIJER, H.: Dynamics and Bifurcations in Non-Smooth Mechanical Systems. En: *Springer-Verlag* (2004)
- [17] LEINE, R. I. ; CAMPEN, D. H. ; VAN DE VRANDE, B. L.: Bifurcations in nonlinear discontinuous systems. En: *Nonlinear Dynamics* (2000)
- [18] NORDMARK, A.: Non periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator. En: *J. of Sound and Vibration* (1991)
- [19] NORDMARK, A. B. ; PIROINEN, P. T.: Simulation and stability analysis of impacting systems with complete chattering. En: *Nonlinear Dynamic* (2009)
- [20] NORTON, R.: Cam desing and manufacturing handbook. En: *Industrial Press Inc.* (2002)
- [21] OSORIO, G.: *Complex Behavior in Impacting Systems*, University of Naples Federico II, Tesis de Grado, 2007
- [22] OSORIO, G.: *Análisis Dinámico de sistemas con Impactos*. Universidad Nacional de Colombia, 2009
- [23] OSORIO, G. ; BERNARDO, M. ; SANTINI, S.: Corner-Impact Bifurcations: a novel class of discontinuity-induced bifurcations in Cam-Follower Systems. En: *arXiv* (2007)
- [24] PETERKA, F.: Impact oscillators. En: *In Bram de Kraker Marian Wiercigroch, Applied nonlinear dynamics and chaos of mechanical systems with discontinuities* (2000)
- [25] PIROINEN, P. ; VIRGIN, L. ; CHAMPNEYS, A.: Chaos and period-adding; experimental and numerical verification of the grazing bifurcation. En: *J. of Nonlinear Science* (2004)
- [26] TODD, M. ; VIRGIN, L.: An experimental impact oscillator.. En: *Chaos, solitions and fractals* (1997)

- 
- [27] VALENCIA, J. ; OSORIO, G.: Nonlinear numerical analysis of camfollower impacting systems. En: *LASCAS2011 - Latin American Symposium on Circuits and Systems*
- [28] YAN, H. S. ; TSAI, M. ; HSU, M. H.: An experimental study of the effect of the cam speed on cam follower systems. En: *Journal of Mech. Mach. Teory* (1996)