UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

El problema de Cauchy asociado a una generalizacíón bidimensional de la ecuación Benjamín- Ono.

Germán Preciado López

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento Matemáticas
Bogotá, Colombia
2012

El problema de Cauchy asociado a una generalizacíón bidimensional de la ecuación Benjamín- Ono.

Germán Preciado López

Tesis de grado presentada como requisito parcial para optar al título de:
Doctor En Ciencias Matemáticas

Director:
Ph.D. Félix Humberto Soriano Méndez

Línea de Investigación:
Ecuaciones Diferenciales Parciales de Evolución
Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2012

A mi hijo Santiago

Agradecimientos

Agradezco al Profesor Félix Humberto Soriano Méndez quien con su esmerado apoyo y acertada dirección pude llegar a la feliz realización del presente trabajo.

Resumen

En este trabajo probamos que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} (u_t + u^p u_x + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha \mathcal{H}\partial_y^2 u)_x - \gamma u_{yy} = 0 \quad p \in \mathbb{N} \\ u(0; x, y) = \phi(x, y) \end{cases} \tag{1}$$

es localmente bien planteado en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$, X^s y en espacios con peso $X_s(w^2)$, para $s > 2$. También se prueba existencia de ondas solitarias y la suavidad de las mismas.

Palabras clave: (Problema de Cauchy, transformada de Hilbert, ecuación de Benjamin-Ono, buena colocacíón local).

Abstract

In thi work we prove that the Cauchy problem

$$\begin{cases} (u_t + u^p u_x + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha \mathcal{H}\partial_y^2 u)_x - \gamma u_{yy} = 0 \quad p \in \mathbb{N} \\ u(0; x, y) = \phi(x, y) \end{cases} \tag{2}$$

is well-posedness in the Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R}^2)$, and in spaces with weight $X_s(w^2)$, for $s > 2$. Also its prove the existence, analyticity and smoothness of solitary waves.

Keywords: Cauchy problem,Hilbert transformation, Benjamin-Ono equation, local well-posedness.

Índice general

Introducción

El este trabajo nos proponemos examinar el buen plantamiento del problema

$$(u_t + u^p u_x + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha\mathcal{H}\partial_y^2 u)_x - \gamma u_{yy} = 0, \tag{3}$$

en el contexto de los espacios Sobolev. También mostramos la existencia de ondas solitarias asociadas a esta ecuación. Se puede probar que

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}\left((D_x^{\frac{1}{2}} u)^2 + \alpha(D_x^{-\frac{1}{2}}\partial_y u)^2 + \gamma(\partial_x^{-1}\partial_y u)^2\right) - \frac{u^{p+2}}{(p+1)(p+2)} dx \tag{4}$$

y

$$Q(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx, \tag{5}$$

son conservadas por el flujo de (3).

Este problema es una extensión bidimensional de la ecuación Benjamin-Ono

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u + u\partial_x u = 0 \tag{6}$$

la cual describe ciertos modelos físicos de ondas internas en un fluido con una delgada región de estratificación (vea [4] y [26]). Esta última ecuación comparte con la ecuación KdV

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{7}$$

muchas e interesantes propiedades. Por ejemplo: tienen infinitas leyes de conservación, tienen soluciones con forma de ondas solitarias, las cuales son estables y se comportan como solitones, lo que se comprueba con la existencia de soluciones de tipo multisolitón (vea [1] y [24]). También se ha estudiado su buen planteamiento en espacios de Sobolev, inclusive de baja regularidad (vea [11], [27], [18], [21] y [29]).

Debemos señalar que la ecuación (3) es el modelo del movimiento de ondas largas dispersivas débilmente no lineales en un sistema de dos fluidos, donde la interface es sujeta a capilaridad y el fluido de parte inferior es infinitamente profundo (vease [1], [2] y [19]). Para esta ecuación, con $\alpha = 0$, se ha mostrado su buen planteamiento en [6] en los espacios X^s (ver Sección 1.1), para $s > 3$, y se ha dado una demostración, a nuestro juicio incompleta, de existencia de ondas solitarias en [9]. En este trabajo, probaremos que (3), para α y γ no negativos arbitrarios con $\alpha + \gamma > 0$, es localmente bien planteado en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$, X^s, los espacios con peso $X_s(w^2)$, para $s > 2$, y la existencia y suavidad de ondas solitarias.

Para el buen planteamiento usaremos dos métodos que atenderán dos situaciones diferentes, debido a la naturaleza de los parámetros. Cuando $\gamma = 0$, veremos el buen planteamiento local de (3) en H^s, para $s > 2$, usando la teoría desarrollada por Kato en el contexto de las ecuaciones cuasilineales (vea [13], [14], [15] y [16]). Para el caso general de parámetros, señalados aquí, probamos el buen plantemiento en X^s usando el método de regularización parabólica. En este sentido, usamos ideas desarrolladas en el contexto de las ecuaciones de tipo KP (ver, por ejemplo [6] y [12]). Esto lo haremos en al Capítulo 2 del presente trabajo. En el Capítulo 3 presentamos el buen planteamiento en espacios con peso. Para ello usaremos un procedimiento estandar, en el que se hace uso del buen planteamiento probado en Capítulo 2. El Capítulo 4 lo dedicamos a probar, para $\gamma = 0$, la existencia global de (3) para dato pequeño y mostramos que estas soluciones se comportan como las soluciones del problema lineal para tiempos grandes en valor absoluto.

En el último capítulo probamos la existencia de ondas solitarias. Para ésto haremos uso de ideas relacionada con el lema del paso de montaña, desarrolladas en el libro de Willem [31]. Y probaremos la suavidad de dichas ondas.

Notación

En este trabajo hacemos uso sistemático de las siguientes notaciones.

1. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de Schwartz. Si $n = 2$, escribiremos simplemente $\mathcal{S}$.
2. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de las distribuciones temperadas. Si $n = 2$, escribiremos simplemente $\mathcal{S}'$.
3. Para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{f}$ es la transformada de Fourier de f y $\check{f}$ es la transformada inversa de Fourier de f. Recordamos que
$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\langle x,\xi\rangle} dx,$$
para toda $\xi \in \mathbb{R}^n$, cuando $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
4. $\mathcal{H}$ es la transformada de Hilbert. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
$$\mathcal{H}f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y-x} f(y)\, dy \right).$$
5. Para $s \in \mathbb{R}$, $H^s = H^s(\mathbb{R}^2)$ es el espacio de Sobolev de orden s.
6. El producto interno en H^s es $\langle f, g\rangle_s = \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \xi^2 + \eta^2)^s \widehat{f}\widehat{\overline{g}} d\xi d\eta$.

7. $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}} = \{f \in L^2 | D_x^{\frac{1}{2}} f \in L^2 \ , \partial_x^{-1}\partial_y f \in L^2 \text{y } D_x^{-\frac{1}{2}} f_y \in L^2\}$
8. $X^s = \{f \in H^s(\mathbb{R}^2) \mid f = \partial_x g, \text{ para alguna } g \in H^s(\mathbb{R}^2)\}$.
9. $X^s(\rho)$ es el espacio $X^s(\rho) = X^s \cap L^2(\rho(x,y)dxdy)$
10. $\Lambda^s = (1-\Delta)^{s/2}$.
11. $L_p^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \Lambda^s f \in L_p(\mathbb{R}^n)\}$.
12. Para $f \in L_p^s(\mathbb{R}^2)$, $|f|_{p,s} = \|\Lambda^s f\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}$.
13. $[A,B]$ notará el conmutador de A y B.

Capítulo 1

Preliminares

Presentamos a continuación algunos resultados que serán utilizados a lo largo de este trabajo.

1.1. Propriedades básicas de X^s

En esta sección exponemos algunos resultados acerca de los espacios X^s, muchos de ellos pueden ser encontrados en la literatura, especialmente aquella que se ha dedicado al estudio de los problemas de Cauchy de ecuaciones relacionadas con la ecuación KP (Kadomtsev-Petviashvili).

Definición 1.1. Sea $s \in \mathbb{R}$. Los espacios X^s son definidos por

$$X^s = \Big\{ f \in H^s | \sqrt{1 + \frac{1}{\xi^2}}(1 + \xi^2 + \eta^2)^{s/2}\widehat{f} \in L^2 \Big\}.$$

Observación 1.1. X^s es un espacio de Hilbert cuando es dotado del producto interno

$$\langle f, g\rangle_{X^s} = \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \frac{1}{\xi^2})(1 + \xi^2 + \eta^2)^s \widehat{f}\,\overline{\widehat{g}}\,d\xi d\eta \quad f,\ g \in X^s.$$

Proposición 1.2. *Para todo s número real y n entero positivo, $\partial_x^n \mathcal{S}$ es denso en X^s.*

Demostración. Sean s número real y n un entero positivo. Es evidente que $\partial_x^n \mathcal{S}$ está contenido en X^s.

Supongamos que $f \in X^s$, y sea $g_t = ((i\xi)^{-n} e^{-t(\xi^2+\eta^2+1/\xi^2)}\widehat{f})^{\vee}$. Es claro que $g_t \in H^{s+n}$ y $\partial_x^n g_t \to f$ en X^s, cuando $t \to 0+$. Ahora bien, para todo $\epsilon > 0$, existe $\psi_t \in \mathcal{S}$ tal que $\|\psi_t - g_t\|_{H^{s+n}} < \epsilon/2$. En particular, $\|\partial_x^n \psi_t - f\|_{X^s} < \epsilon$, para t positivo suficientemente pequeño. Esto era lo que queríamos probar. $\square$

Observación 1.2. (a) Sea s un número real y $f \in \mathcal{S}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $f \in X^s$, para algun s.

(ii) $f \in \partial_x \mathcal{S}$

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

(b) En este trabajo

$$\partial_x^{-1} f = (\frac{1}{i\xi}\widehat{f})^{\vee}.$$

Un cálculo directo nos permite mostrar que

$$\partial_x^{-1} f = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} - \int_{x}^{\infty} f(x',y)\, dx',$$

para toda $f \in \mathcal{S}$. Esta expresión está de acuerdo con la definicion dada en Ablowitz y Villaroel en [3]. (Vea asimismo [12]).

(c) El produto interno de X^s lo podemos escribir como

$$\langle f,g\rangle_{X^s} = \langle f,g\rangle_s + \langle \partial_x^{-1} f, \partial_x^{-1} g\rangle_s,$$

donde $\langle\ ,\ \rangle_s$ es el producto interno en H^s.

El siguiente resultado es un hecho bien curioso y bastante útil.

Proposición 1.3. *Sean r y s números reales tales que $s \geq r$. Supongamos que A es un operador antisimétrico en H^r y que u y $v \in C([0,T],X^s) \cap C^1((0,T],H^r)$. Sunpongamos, además, que $X^s \subseteq D(A)$, que el operador ∂_x conmuta con A, y que*

$$\frac{du}{dt} = Au + v.$$

Entonces, $\|\partial_x^{-1} u\|_r^2$ es diferenciable en $(0,T)$ y

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x^{-1} u\|_r^2 = \langle \partial_x^{-1} v, \partial_x^{-1} u\rangle_r.$$

Demostración. Para todo $\tau > 0$, $\partial_x^{-1}(1-\tau\partial_x^{-2})^{-\frac{1}{2}} u \in C([0,T],X^s) \cap C^1((0,T],H^r)$, $\partial_x^{-1}(1-\tau\partial_x^{-2})^{-\frac{1}{2}} u(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0,T)$ y

$$\frac{d}{dt}\left(\partial_x^{-1}(1-\tau\partial_x^{-2})^{-\frac{1}{2}} u\right) = A\partial_x^{-1}(1-\tau\partial_x^{-2})^{-\frac{1}{2}} u + \partial_x^{-1}(1-\tau\partial_x^{-2})^{-\frac{1}{2}} v.$$

Claramente,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\left(\partial_x^{-1}(1-\tau\partial_x^{-2})^{-\frac{1}{2}} u\right)\right\|_r^2 = \left\langle \partial_x^{-1}(1-\tau\partial_x^{-2})^{-\frac{1}{2}} v, \partial_x^{-1}(1-\tau\partial_x^{-2})^{-\frac{1}{2}} u\right\rangle_r.$$

Ya que $(1-\tau\partial_x^{-2})^{-\frac{1}{2}}$ converge fuertemente a I en H^r, del teorema fundamental del cáculo y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, se sigue la proposición.

□

1.2. Algunas propiedades del espacio $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$

Es fácil ver que $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$ es un espacio de Hilbert con el producto interno definido por

$$\langle f, g\rangle_{\frac{1}{2}} = \int_{\mathbb{R}^2} fg + D_x^{\frac{1}{2}} f D_x^{\frac{1}{2}} g + \alpha D_x^{-\frac{1}{2}} f_y D_x^{-\frac{1}{2}} g_y + \gamma \partial_x^{-1} f_y \partial_x^{-1} g_y dxdy.$$

Proposición 1.4. *Para todo n entero positivo, $\partial_x^n S$ es contenido densamente en $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$.*

Demostración. Similar a la de la Proposición 1.2. □

Lema 1.5. *Sea $s \in (0, n/2)$. Entonces, $H^s(\mathbb{R}^n)$ está continuamente encajado en $L^p(\mathbb{R}^2)$, para $p = 2n/(n-2s)$ (o, en otras palabras, $s = n(1/2 - 1/p)$. Además, para toda $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|f\|_{L^p} \leq C_s \|D_x^s f\|_{L^2} \leq C\|f\|_s,$$

donde

$$D^l = (-\Delta)^{\frac{l}{2}} f = ((2\pi|\xi|)^l \hat{f})^{\vee}.$$

Demostración. Vease [22] □

Lema 1.6. *Supongamos que $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ es tal que $D_x^{s_1} f \in L^2$ y $D_x^{s_2} f \in L^2$. Entonces, para $s \in [s_1, s_2]$, $D_x^s f \in L^2$ y*

$$\|D_x^s f\| \leq C_s \|D_x^{s_1} f\|^{\theta} \|D_x^{s_2} f\|^{1-\theta}, \tag{1.1}$$

donde $\theta = \frac{s_2 - s}{s_2 - s_1}$.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la desigualdad de Hölder □

Como consecuencia de los dos lemas anteriores tenemos el siguiente lema de encaje.

Lema 1.7. *(a) Para $\alpha > 0$ y $p \leq 2$, existe $C > 0$ tal que, para toda $f \in \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$,*

$$\|f\|^{p+2}_{L^{p+2}(\mathbb{R}^2)} \leq C\|f\|^{2-p} \|D_x^{-1/2}\partial_y f\|^{p/2} \|D_x^{1/2} f\|^{\frac{3p}{2}} \tag{1.2}$$

(b) Para $\alpha = 0$, $\gamma > 0$ y $p \leq \frac{4}{3}$, existe $C > 0$ tal que, para toda $f \in \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$,

$$\|f\|^{p+2}_{L^{p+2}(\mathbb{R}^2)} \leq C\|f\|^{\frac{4-3p}{3}} \|D_x^{1/2} f\|^{\frac{9p+4}{6}} \|\partial_x^{-1}\partial_y f\|^{\frac{p}{2}} \tag{1.3}$$

En particular, para toda $f \in \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$,

$$\|f\|_{L^{p+2}} \leq C\|f\|_{\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}},$$

donde

$$\begin{cases} 0 \leq p \leq 2 & si\ \alpha > 0, \\ 0 \leq p \leq \frac{4}{3} & si\ \alpha = 0\ y\ \gamma > 0. \end{cases}$$

Demostración. Gracias al lema anterior, es suficiente demostrar (1.2) para $f = \partial_x\phi$, $\phi \in S$. Primero, supongamos que $\alpha > 0$. De los Lemas 1.5, 1.6 y la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{p+2}^{p+2} = \int_{\mathbb{R}^2)} |f(x,y)|^{p+2} dxdy &\leq C \int_{\mathbb{R}^2} \|D_x^{p/2(p+2)} f(.,y)\|_0^{p+2} dy \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}} \|D_x^{1/2} f(.,y)\|^p \|f(.,y)\|^2 \, dy \\
&\leq C\|D_x^{1/2} f\|^p \left(\int_{\mathbb{R}} \|f(.,y)\|^{4/(2-p)} \, dy \right)^{(2-p)/2} \\
&\leq C\|D_x^{1/2} f\|^p \|f\|_0^{2-p} \sup_{y\in\mathbb{R}} \|f(.,y)\|^p
\end{aligned}$$

Por otro lado, para toda $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\|f(.,y)\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} f^2(x,y) dx \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{y} f(x,y_1) \partial_y f(.,y_1) dy_1 dx \\
&= 2 \int_{-\infty}^{y} \int_{\mathbb{R}} D_x^{1/2} f(x,y_1) D_x^{-1/2} \partial_{y_1} f(x,y_1) dx dy_1 \\
&\leq 2\|D_x^{1/2} f\| \|D_x^{-1/2} \partial_y f\|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se verifica (1.2).

Ahora, supongamos que $\alpha = 0$. Procediendo como antes, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |f|^{p+2} \, d\,x d\,y &\leq c \int_{\mathbb{R}} ||D_x^{p/[2(p+2)]} f(\cdot,y)||^{p+2} \, d\,y \\
&\leq c \int_{\mathbb{R}} ||D_x^{1/2} f(\cdot,y)||^{(3p+2)/3} ||D_x^{-1/4} f(\cdot,y)||^{4/3} \, d\,y \\
&\leq c||D_x^{1/2} f||_0^{(3p+2)/3} \left(\int_{\mathbb{R}} ||D_x^{-1/4} f(\cdot,y)||^{8/(4-3p)} \, d\,y \right)^{(4-3p)/6} \\
&\leq c||D_x^{1/2} f||_0^{(3p+2)/3} ||f||_0^{(4-3p)/3} \left(\sup_{y\in\mathbb{R}} ||D_x^{-1/4} f(\cdot,y)||_{L^2(\mathbb{R})}^p \right)
\end{aligned} \tag{1.4}$$

En este caso, para toda $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
||D_x^{-1/4} f(\cdot,y)||_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left(D_x^{-1/4} f \right)^2 (x,y) \, d\,x \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{y} D_x^{-1/4} f(x,y_1) D_x^{-1/4} f_y(x,y_1) \, d\,y_1 \, d\,x \\
&= -2 \int_{-\infty}^{y} \int_{\mathbb{R}} D_x^{1/2} f_x(x,y_1) D_x^{-1} f_y(x,y_1) \, d\,x \, d\,y_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2\int_{\mathbb{R}} ||D_x^{-1/2} f_x(\cdot,y)||_{L^2(\mathbb{R})} ||\partial_x^{-1} f_y(\cdot,y)||_{L^2(\mathbb{R})}\, dy \\ &\leq 2||D_x^{1/2} f||_0 ||\partial_x^{-1} f_y||_0. \end{aligned}$$

Así obtenemos (1.3). □

Definición 1.8. Sea $\mathcal{X}^0 = \{f \in L^2 |\, \partial_x f,\ \partial_x^{-1} f_{yy}$ y $\partial_x^{-2} f_{yy} \in L^2\}$. $\mathcal{X}^0$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle f, g\rangle_0 = \int_{\mathbb{R}^2} fg + \partial_x f \partial_x g + \alpha \partial_x^{-1} f_{yy} \partial_x^{-1} g_{yy} + \gamma \partial_x^{-2} f_{yy} \partial_x^{-2} g_{yy} dx dy.$$

Aquí también vale una afirmación totalmente análoga a las hechas en las Proposiciones 1.2 y 1.4, a saber:

Proposición 1.9. *Para todo n entero positivo, $\partial_x^n S$ es contenido densamente en $\mathcal{X}^0$.*

Es evidente que $(\mathcal{X}^0, L^2)$ es un par compatible de interpolación (vea [5] y [30]). Veamos que $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$ es un espacio de interpolación entre $\mathcal{X}^0$ y L^2. Más precisamente, tenemos el siguente teorema.

Teorema 1.10. $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}} = (\mathcal{X}^0, L^2)_{[\frac{1}{2}]}$.

Demostración. Sea $\phi \in X^{\frac{1}{2}}$ y

$$f(z) = e^{-\delta(z-\frac{1}{2})^2} \left(\left[1 + |\xi| \left(1 + \alpha \left| \frac{\eta^2}{\xi^2} \right| + \gamma \left| \frac{\eta^2}{\xi^3} \right| \right) \right]^{z-\frac{1}{2}} \hat{\phi} \right)^{\vee}.$$

Es obvio que

$$\begin{cases} f(z) \in L^2, & \text{para todo } 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1 \\ f \text{ es analítica sobre } 0 < \mathrm{Im}(z) < 1 & \\ f(it) \in \mathcal{X}^0, & \text{para todo } t \in \mathbb{R} \\ f(1+it) \in L^2, & \text{para todo } t \in \mathbb{R} \\ f(z) \to 0, & \text{cuando } |\mathrm{Im}(z)| \to \infty, \text{ para} \\ & \mathrm{Re}(z) = 0 \text{ o } 1 \\ f(\frac{1}{2}) = \phi. & \end{cases} \tag{1.5}$$

Entonces $\phi \in (\mathcal{X}^0, L^2)_{[\frac{1}{2}]}$ y $\|\phi\|_{[\frac{1}{2}]} \leq c\|\phi\|_{\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}}$.

Ahora sean $\phi \in (\mathcal{X}^0, L^2)_{[\frac{1}{2}]}$, $\hat{\phi}_n = \chi_{|(\xi,\eta)|\leq n} \hat{\phi}$, donde $\chi_{|(\xi,\eta)|\leq n}$ es la función característica de $|(\xi,\eta)| \leq n$, $\Phi_n(z) = \left((1 + |\xi| + \alpha|\xi|^{-1}|\eta|^2 + \gamma|\xi|^{-2}|\eta|^2)^{\frac{3}{2}-z} \hat{\phi}_n \right)^{\vee}$ y f una función sobre $0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1$ en L_2 que satisface cada una de las condiciones en (1.5). Es claro que Φ_n es analítica sobre $\mathbb{C}$ con valores en L^2. Por lo tanto $(f(z), \Phi_n(z))_{L^2}$ es una función continua sobre $0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1$ y analítica sobre $0 < \mathrm{Im}(z) < 1$. Además, $|(f(it), \Phi_n(it))_{L^2}| \leq \|f(it)\|_{\mathcal{X}^0} \|\phi_n\|_{\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}}$ y

$|(f(1+it),\Phi_n(1+it))_{L^2}| \leq \|f(1+it)\|_{L^2}\|\phi_n\|_{\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}}$. Del lema de las tres líneas, se sigue que

$$|(f(z),\Phi_n(z))_{L^2}| \leq \text{máx}(\sup \|f(it)\|_{\mathcal{X}^0}, \sup \|f(1+it)\|_{L^2})\|\phi_n\|_{\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}}.$$

Tomando $z=\frac{1}{2}$, tenemos que $\|\phi_n\|_{\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}} \leq \text{máx}(\sup \|f(it)\|_{\mathcal{X}^0}, \sup \|f(1+it)\|_{L^2})$, para todo n. Así pues, el teorema de la convergencia monótona de Lebesgue nos permite concluir que $\phi \in \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$. □

Definición 1.11. Sea Ω un conjunto abierto y conexo en $\mathbb{R}^2$ y X o bien $\mathcal{X}^0$ o bien $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$. Denotaremos por $X(\Omega)$ el conjunto $\{f \in L^2(\Omega) \mid f = g \text{ para alguna } \quad g \in X\}$. X dotado con la norma

$$\|f\|_{X(\Omega)} = \inf_{\substack{g|_\Omega = f\\ g\in X}} \|g\|_X,$$

$X(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Lema 1.12. *Supongamos que $\Omega = (a,b)\times(c,d)$ y ϕ es una función no negativa C^∞ sobre $\mathbb{R}$ tal que $\operatorname{supp}\phi \subseteq [a,b]$ y $\int \phi = 1$. Entonces, existe una constante C, dependiendo únicamente de Ω y ϕ, tal que para toda $f \in L^2_{loc}$ con $(\partial_x^2 f, \partial_y^2 f) \in L^2_{loc}$,*

$$\left\| f - \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\int_a^b f_x\phi\,dx \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\partial_x^2 f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.6}$$

$$\left\| f_x - \int_a^b f_x\phi\,dx \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\partial_x^2 f\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.7}$$

y

$$\left\| f_{yy} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f_{yy}\,dx - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\int_a^b f_{yyx}\phi\,dx \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\partial_y^2 f\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.8}$$

Demostración. Veamos, primero, la siguiente generalización de la desigualdad de Poincaré

Lema 1.13. *Sean $a<b$ y ϕ una función continua no negativa sobre $[a,b]$ tal que $\int\phi = 1$. Entonces, para toda $f \in L^p[a,b]$ con $f' \in L^p[a,b]$,*

$$\left\| f - \int_a^b f\phi\,dx \right\|_{L^p[a,b]} \leq C\|f'\|_{L^p[a,b]},$$

donde C depende únicamente de $[a,b]$ y p.

Demostración. Para $x \in [a, b]$,

$$\left| f(x) - \int_a^b f(\xi)\phi(\xi)\, d\xi \right| = \left| \int_a^b \int_\xi^x f'(s)\, ds \phi(\xi)\, d\xi \right| \leq \|f'\|_{L^1[a,b]}.$$

De esta desigualdad se sigue el lema. □

Por la desigualdad de Poincaré y el lema anterior,

$$\int_a^b \left| f(x,y) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f \; - \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \int_a^b f_x \phi\, dx, dx \right|^2 dx \leq$$

$$\leq C^2 \int_a^b \left| f_x(x,y) - \int_a^b f_x \phi\, dx \right|^2 dx \leq$$

$$\leq C^2 \int_a^b |\partial_x^2 f(x,y)|^2\, dx.$$

Esta desigualdad demuestra (1.6).

(1.7) es inmediato del Lema 1.13. Ahora demostremos (1.8). De la desigualdad Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f_{yy}\, dx \right|^2 \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |f_{yy}|^2\, dx.$$

Por lo tanto,

$$\left\| \frac{1}{b-a} \int_a^b f_{yy}\, dx \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\partial_y^2 f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.9}$$

Además, observemos que

$$\left| \int_a^b f_{xyy}(x,y)\phi(x)\, dx \right| = \left| \int_a^b f_{yy}(x,y)\phi_x(x)\, dx \right| \leq \|f_{yy}(\cdot,y)\|_{L^2[a,b]} \|\phi_x\|_{L^2[a,b]}. \tag{1.10}$$

Luego, (1.9), (1.10) y la desigualdad triangular implica (1.8). □

Lema 1.14. *Sea $\Omega = (a,b) \times (c,d)$. Existe un operador de extensión, $E : \mathcal{X}^0(\Omega) \to \mathcal{X}^0$, en otras palabras, existe un operador lineal acotado E de $\mathcal{X}^0(\Omega)$ en $\mathcal{X}^0$ tal que, para toda $u \in \mathcal{X}^0(\Omega)$, $Eu = u$ en Ω, $\|Eu\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}$ y $\|Eu\|_{\mathcal{X}^0} \leq C\|u\|_{\mathcal{X}^0(\Omega)}$, donde C depende únicamente de Ω.*

Demostración. Sea $u \in X_0(\Omega)$. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $u = \partial_x^2 f$ en Ω, para alguna $f \in S(\mathbb{R}^2)$ con $\|\partial_x^2 f\|_{\mathcal{X}^0} \leq 2\|u\|_{\mathcal{X}^0(\Omega)}$. Tomemos $f_0 = f - \frac{1}{b-a}\int_a^b f\, dx - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\int_a^b f_x \phi\, dx$. Es evidente que $u = \partial_x^2 f_0$ en Ω. Ahora consideremos f_1 definida sobre $[2a-b, 2b-a] \times [c,d]$ por

$$f_1(x,y) = \begin{cases} f_0(x,y) & \text{if } x \in [a,b] \\ \sum_{i=1}^4 a_i f_0(\frac{i+1}{i} b - \frac{1}{i} x, y) & \text{if } x \in [b, 2b-a] \\ \sum_{i=1}^4 a_i f_0(\frac{i+1}{i} a - \frac{1}{i} x, y) & \text{if } x \in [2a-b, a], \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 1 \\ a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_4}{4} &= -1 \\ a_1 + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{9} + \frac{a_4}{16} &= 1 \\ a_1 + \frac{a_2}{8} + \frac{a_3}{27} + \frac{a_4}{64} &= -1 \end{aligned}$$

Claramente f_1 es una función C^3 sobre $[2a-b, 2b-a] \times [c,d]$ y satisface

$$\|\partial^m f_1\|_{L^2([2a-b,2b-a]\times[c,d])} \leq C\|\partial^m f_0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.11}$$

para toda $m \in \mathbb{N}^2$ con $|m| \leq 3$. De la misma manera, a partir de f_1, podemos definir una función $f_2 \in C^3$ sobre $\tilde{\Omega} = [2a-b, 2b-a] \times [2c-d, 2d-c]$ tal que

$$\|\partial^m f_2\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq 9\|\partial^m f_0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.12}$$

para todo $m \in \mathbb{N}^2$ con $|m| \leq 3$. Ahora, sea η una función C^∞ en $\mathbb{R}^2$ tal que $\eta \equiv 1$ en Ω y 0 fuera de $\tilde{\Omega}$. Para u, sea $Eu = \partial_x^2(\eta f_2)$ en $\tilde{\Omega}$ y 0 en $\mathbb{R}^2 - \tilde{\Omega}$. De (1.12) y el Lema 1.12 se sigue que $Eu = u$ en Ω, $\|Eu\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}$ y $\|Eu\|_{\mathcal{X}^0} \leq C\|u\|_{\mathcal{X}^0(\Omega)}$, donde C depende únicamente de Ω y ϕ. □

Corolario 1.15. *Si $\Omega = (a,b) \times (c,d)$ entonces $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}(\Omega) = [L^2(\Omega), \mathcal{X}^0(\Omega)]_{[\frac{1}{2}]}$.*

Demostración. Es suficiente observar que el operador E definido en el Lema 1.14 es un coretracto del operador de restricción de $(\mathcal{X}^0, L^2)$ en $(\mathcal{X}^0(\Omega), L^2(\Omega))$. El corolario se sigue del Teorema 1.2.4 en [30]. □

Teorema 1.16. *Supongamos que $\{\Omega_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento de $\mathbb{R}^2$, donde cada Ω_i es un cubo abierto cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados, tienen longitud R y son tales que cada punto en $\mathbb{R}^2$ está contenido en a lo sumo tres de estos cubos. Entonces,*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|u\|^2_{\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}(\Omega_i)} \leq C\|u\|^2_{\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}}, \tag{1.13}$$

para toda $u \in \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$.

Demostración. Procediendo como en la demostración del Lema 1.14, podemos demostrar que

$$\|E_i u\|^2_{\mathcal{X}^0} \leq C \int_{\Omega_i} u^2 + \partial_x u^2 + \alpha\partial_x^{-1}\partial_y^2 u^2 + \gamma\partial_x^{-2}\partial_y^2 u^2 \, dxdy,$$

donde cada E_i es el operador de extensión de $\mathcal{X}^0(\Omega_i)$ en $\mathcal{X}^0$. Es fácil ver que C depende únicamente de la longitud de lado de Ω_i. Entonces, C es independiente de i. Puesto que

$$\|u\|_{\mathcal{X}^0(\Omega_i)} \leq \|E_i u\|_{\mathcal{X}^0},$$

para todo i, obtenemos

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|u\|^2_{\mathcal{X}^0(\Omega_i)} \leq C \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\Omega_i} u^2 + \partial_x u^2 + \alpha \partial_x^{-1} \partial_y^2 u^2 + \gamma \partial_x^{-2} \partial_y^2 u^2 \, dxdy \leq 3C \|u\|^2_{\mathcal{X}^0}.$$

Asimismo, evidentemente tenemos que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|u\|^2_{L^2(\Omega_i)} \leq 3 \|u\|^2_{L^2}.$$

Entonces el operador $u \mapsto (u_{\Omega_i})_{i \in \mathbb{N}}$ (u_{Ω_i} es la restricción de u en Ω_i) es continuo de L^2 en $\ell^2(L^2(\Omega_i))$ y de $\mathcal{X}^0$ en $\ell^2(\mathcal{X}^0(\Omega_i))$. Por el Teorema 1.18.1 en [30], tenemos que el operador $u \mapsto (u_{\Omega_i})_{i \in \mathbb{N}}$ es continuo de $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$ en $\ell^2(\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}(\Omega_i))$. Por lo tanto, obtenemos (1.13). □

Lema 1.17. *El encaje $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ es compacto, para*

$$\begin{cases} 0 \leq p < 4 & si\ \alpha > 0 \\ 0 \leq p < \frac{4}{3} & si\ \alpha = 0. \end{cases}$$

En otras palabras, si (u_n) es una sucesión acotada en $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$ y $R > 0$, entonces existe una subsucesión de (u_n) que converge fuertemente en $L^p(B_R)$.

Demostración. Probaremos el lema para $\alpha > 0$. La demostración para el caso $\alpha = 0$ difiere tan solo por pequeñas modificaciones. Supongamos que $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada en $X^{\frac{1}{2}}$. Sea Ω_R el cubo con centro en el órigen cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenados y tienen longitud R, y sea E_R el operador extensión de $L^2(\Omega_R)$ en L^2 como en la demostración de el Lema 1.14. Por interpolación, E_R es un operador continuo de $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ en $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$. Asimismo, es fácil ver que $E_R(u)$ es 0 fuera de Ω_{3R}, para toda $u \in \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$, donde Ω_{3R} es el cubo con centro en el órigen y cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados y tienen longitud $3R$. Ya que $u = E_R(u)$ en Ω, sin perdida de generalidad, podemos suponer que $u_n = E_R(u_n)$, para todo n. Ahora, puesto que (u_n) es acotada en $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$, también podemos suponer que $u_n \rightharpoonup u$ en $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$ y sustituyendo, si es necesario, u_n por $u_n - u$, podemos suponer, además, que $u = 0$.

Sean

$$Q_1 = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 / |\xi| \leq \rho, |\eta| \leq \rho\}$$
$$Q_2 = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 / |\xi| > \rho\}$$
$$Q_3 = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 / |\xi| < \rho, |\eta| > \rho\}$$

Entonces $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i=1}^{3} Q_i$ y $Q_i \bigcap Q_j = \emptyset$, $i \neq j$. Para $\rho > 0$, tenemos que

$$\int_{\Omega_{3R}} |u_n(x,y)|^2 dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{u}_n(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{3} \int_{Q_i} |\widehat{u}_n(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta$$

Es claro que

$$\int_{Q_2} |\widehat{u}_n(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta = \int_{Q_2} \frac{1}{|\xi|} |\widehat{D_x^{1/2} u_n}(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta \leq \frac{C}{\rho} \|D_x^{1/2} u_n\|_0^2,$$

y

$$\int_{Q_3} |\widehat{u}_n(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta = \int_{Q_3} \frac{|\xi|}{|\eta|^2} |\widehat{D_x^{\frac{1}{2}} \partial_y u_n}(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta.$$

Por lo tanto, para cualquier ϵ, existe $\rho > 0$ suficientemente grande tal que

$$\int_{Q_2} |\widehat{u}_n(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta + \int_{Q_3} |\widehat{u}_n(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta \leq \epsilon/2.$$

Puesto que $u_n \rightharpoonup 0$ en $L^2(\mathbb{R}^2)$ (en particular

$$\lim_{n\to 0} \widehat{u}_n(\xi,\eta) = \lim_{n\to 0} \int_{\Omega_{3R}} u_n(x,y) e^{-i(x\xi+y\eta)} dxdy = 0)$$

y $|\widehat{u}(\xi,\eta)| \leq \|u_n\|_1$, el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue garantiza que

$$\int_{Q_1} |\widehat{u}_n(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta = 0,$$

cuando $n \to \infty$. Por consiguiente $u_n \to 0$ en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Por el Lema 1.7, $u_n \to 0$ en $L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ si $2 \leq p < 4$.

$\square$

Lema 1.18. *Si* (u_n) *es acotada en* $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$ *y*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \int_{B(x,y;R)} |u_n|^2 dxdy = 0, \tag{1.14}$$

cuando $n \to \infty$*, entonces* $u_n \to 0$ *en* $L^p(\mathbb{R}^2)$ *para*

$$\begin{cases} 2 < p < 4 & si\ \alpha > 0 \\ 2 < p < 4/3 & si\ \alpha = 0. \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que $\alpha > 0$ ($\alpha = 0$ se obtiene de la misma forma). Sea $2 < s < 4$ y sea Ω_R el cubo con centro en el órigen y cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados y tienen longitud R. Entonces, de la desigualdad de Hölder y el Lema 1.7, tenemos que

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L^s((x,y)+\Omega_R)} &\leq \|u_n\|^{1-\vartheta}_{L^2_{((x,y)+\Omega_R)}} \|u\|^{\vartheta}_{L^4_{((x,y)+\Omega_R)}} \\ &\leq \|u_n\|^{1-\vartheta}_{L^2_{((x,y)+\Omega_R)}} \|u_n\|^{\vartheta}_{\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}_{((x,y)+\Omega_R)}}, \end{aligned}$$

donde $\vartheta = \frac{2(s-2)}{s}$. Escogiendo s tal que $\frac{\vartheta s}{2} = 1$, es decir, $s = 3$, obtenemos que

$$\int_{(x,y)+\Omega_R} |u_n|^3 dxdy \leq C \|u_n\|_{L^2((x,y)+\Omega_R)} \|u_n\|^2_{\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}_{((x,y)+\Omega_R)}},$$

Ahora, cubriendo $\mathbb{R}^2$ por cubos con lados paralelos a los ejes coordenados y de longitud R, de tal forma que cada punto de $\mathbb{R}^2$ este contenido en a lo sumo tres de estos cubos, del teorema 1.16, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^3 dxdy \leq C \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \|u_n\|_{L^2((x,y)+\Omega_R)} \|u_n\|^2_{\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}}.$$

Puesto que u_n es acotada en $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$ y satisface (1.14), $u_n \to 0$ en $L^3(\mathbb{R}^2)$. Como $2 < 3 < 4$, la desigualdad de Hölder implica que $u_n \to 0$ en $L^p(\mathbb{R}^2)$, para todo $2 < p < 4$. □

1.3. Teoría de Kato

Haremos una breve presentación de la Teoría de Kato descrita en [13]. Con ésta se demuestra el buen planteamiento de problemas de Cauchy de ecuaciones lineales y cuasilineales de evolución.

1.3.1. Caso lineal

Supongamos que X e Y son espacios de Banach reflexivos con $Y \subseteq X$ de forma densa y continua, y sea $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ una familia de operadores tales que

1. $A(t) \in G(X, 1, \beta)$. En otras palabras, $-A(t)$ genera un C_0 semigrupo tal que
$$\|e^{-sA(t)}\| \leq e^{\beta s},$$
para todo $s \in [0, \infty)$.

2. Existe un isomorfismo $S : Y \to X$ tal que $SA(t)S^{-1} = A(t) + B(t)$, donde $B(t) \in B(X)$, para $0 \leq t \leq T$, $t \to B(t)x$ es fuertemente medible, para cada $x \in X$, y $t \to \|B(t)\|_X$ es integrable en $[0, T]$.

3. $Y \subseteq D(A(t))$, para $0 \leq t \leq T$, y $t \to A(t)$ es fuertemente continuo de $[0, T]$ a $B(Y, X)$

Teorema 1.19. *Bajo las anteriores condiciones, existe una familia de operadores $\{U(t, s)\}_{0\leq s\leq t\leq T}$ tales que:*

1. *U es fuertemente continuo de $\Delta \to B(X)$, donde $\Delta = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$.*

2. *$U(t, s)U(s, r) = U(t, r)$ para (t, s) y $(s, r) \in \Delta$, y $U(s, s) = I$.*

3. *$U(t, s)Y \subset Y$ y U es fuertemente continuo de $\Delta \to B(Y)$.*

4. *$\dfrac{dU(t,s)}{dt} = -A(t)U(t, s)$, $\dfrac{dU(t,s)}{ds} = U(t, s)A(s)$, en el sentido fuerte dentro del espacio $B(X, Y)$ y son fuertemente continuas de $\Delta \to B(X, Y)$.*

La familia de operadores $\{U(t,s)\}_{0\leq s\leq t\leq T}$ en el teorema anterior es denominada *familia de operadores de evolución* asociada a $A(t)$. Una consecuencia inmediata de este último teorema es que, para $y \in Y$, $u(t) = U(t,s)y$ es solución del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} + A(t)u = 0 \qquad \text{para } s \leq t \leq T, \text{ con} \\ &u(s) = y. \end{aligned}$$

Más aún, si $f \in C([0,T];X) \cap L^1([0,T];Y)$, entonces

$$u(t) = U(t,0)\phi + \int_0^t U(t,s)f(s)ds$$

si y sólo si $u \in C([0,T];Y) \cap C^1((0,T);X)$ y

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + A(t)u = f(t) \quad &\textit{para} \quad 0 \leq t \leq T, \quad \textit{con} \\ u(0) = \phi. & \end{aligned}$$

1.3.2. Caso Cuasilineal

Sean X e Y espacios de Banach reflexivos, $Y \subseteq X$, siendo la inclusión densa y continua. Consideremos el siguiente problema

$$\begin{aligned} &\partial_t u + A(t,u)u = f(t,u) \in X, \ 0 < t, \\ &u(0) = u_0 \in Y, \end{aligned} \tag{1.15}$$

donde, para cada t, $A(t,u)$ es un operador lineal de Y en X y $f(t,u)$ es una función de $\mathbb{R} \times Y$ en X. Consideremos también las siguientes condiciones:

(X) Existe un isomorfismo isométrico S de Y en X.

Existen $T_0 > 0$ y W bola abierta de centro w_0 tales que:

(A_1) Para cada $(t,y) \in [0,T_0] \times W$, el operador lineal $A(t,y)$ pertenece a $G(X,1,\beta)$, donde β es un número real positivo. En otras palabras, $-A(t,y)$ genera un C_0 semigrupo tal que

$$\|e^{-sA(t,y)}\|_{\mathcal{B}(X)} \leq e^{\beta s}, \text{ para } s \in [0,\infty).$$

Nótese que si X es un espacio de Hilbert, $A \in G(X,1,\beta)$ si, y sólo si,

a) $\langle Ay, y\rangle_X \geq -\beta \|y\|_X^2$ para todo $y \in D(A)$,

b) $(A+\lambda)$ es sobre para todo $\lambda > \beta$.

(Ver [17] o [28])

(A_2) Para cada $(t,y) \in [0,T_0] \times W$ el operador $B(t,y) = [S, A(t,y)]S^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ y es uniformemente acotado, es decir, existe $\lambda_1 > 0$ tal que

$$\|B(t,y)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \lambda_1 \text{ para todo } (t,y) \in [0,T_0] \times W,$$

Además, para algún $\mu_1 > 0$, se tiene que, para todo y y $z \in W$,

$$\|B(t,y) - B(t,z)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \mu_1 \|y - z\|_Y.$$

(A_3) $Y \subseteq D(A(t,y))$, para cada $(t,y) \in [0,T_0] \times W$, (la restricción de $A(t,y)$ a Y pertenece a $\mathcal{B}(Y,X)$) y, para cada $y \in W$ fijo, $t \to A(t,y)$ es fuertemente continua. Además, para cada $t \in [0,T_0]$ fijo, se satisface la siguiente condición de Lipschitz,

$$\|A(t,y) - A(t,z)\|_{\mathcal{B}(Y,X)} \leq \mu_2 \|y - z\|_X,$$

donde $\mu_2 \geq 0$ es una constante.

(A_4) $A(t,y)w_0 \in Y$ para todo $(t,y) \in [0,T] \times W$. Además, existe una constante λ_2 tal que

$$\|A(t,y)w_0\|_Y \leq \lambda_2, \text{ para toda } (t,y) \in [0,T_0] \times W$$

(f_1) f es una función acotada en $[0,T_0] \times W$ a Y, es decir, existe λ_3 tal que

$$\|f(t,y)\|_Y \leq \lambda_3, \text{ para todo } (t,y) \in [0,T_0] \times W,$$

Además, la función $t \in [0,T_0] \mapsto f(t,y) \in Y$ es continua con respecto a la topología de X y para todo y y $z \in Y$ se tiene que

$$\|f(t,y) - f(t,z)\|_X \leq \mu_3 \|y - z\|_X,$$

donde $\mu_3 \geq 0$ es una constante.

Teorema 1.20 (Kato)**.** *Suponga que las condiciones (X), $(A_1) - (A_4)$ y (f_1) son satisfechas. Dado $u_0 \in Y$, existe $0 < T < T_0$ y una única $u \in C([0,T];Y) \cap C^1((0,T);X)$ solución de* (1.15)*. Además, la aplicación $u_0 \to u$ es continua en el siguiente sentido: considere la sucesión de problemas de Cauchy,*

$$\begin{aligned} &\partial_t u_n + A_n(t,u_n)u_n = f_n(t,u_n) \quad t > 0 \\ &u_n(0) = u_{n_0} \;\; n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Supongamos que las condiciones (X), (A_1)–(A_4) y (f_1) son satisfechas para todo $n \geq 0$ en (1.16)*, con los mismos X, Y y S, y las correspondientes β, λ_1–λ_3, μ_2–μ_3 pueden ser escogidas independientes de n. También supongamos que*

$$\begin{aligned} s\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n(t,w) &= A(t,w) \;\; en \;\; B(X,Y) \\ s\text{-}\lim_{n\to\infty} B_n(t,w) &= B(t,w) \;\; en \;\; B(X) \\ \lim_{n\to\infty} f_n(t,w) &= f(t,w) \;\; en \;\; Y \\ \lim_{n\to\infty} u_{n_0} &= u_0 \;\; en \;\; Y, \end{aligned}$$

*donde s-*lím *denota el límite fuerte. Entonces, T puede ser elegido de tal manera que $u_n \in C([0,T],Y) \cap C^1((0,T),X)$ y*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_Y = 0.$$

Para una demostración de este teorema puede ver [13] y [20].

1.4. Otros resultados importantes

Los siguientes resultados sobre conmutadores de operadores hacen parte del importante acervo de herramientas de las que se hacen uso en el análisis.

El primero de ellos es dado por la siguiente proposición debida a Kato (para su demostración vea [13]).

Proposición 1.21 (Desigualdad de Kato). *Sea $f \in H^s$, $s > 2$, $\Lambda = (1-\Delta^2)^{1/2}$ y M_f el operador de multiplición por f. Entonces, para $|\tilde{t}|$, $|\tilde{s}| \leq s-1$, $\Lambda^{-\tilde{s}}[\Lambda^{\tilde{s}+\tilde{t}+1}, M_f]\Lambda^{-\tilde{t}} \in B(L^2(\mathbb{R}^2))$ y*

$$\left\|\Lambda^{-\tilde{s}}[\Lambda^{\tilde{s}+\tilde{t}+1}, M_f]\Lambda^{-\tilde{t}}\right\|_{B(L^2(\mathbb{R}^2))} \leq c\|\nabla f\|_{H^{s-1}}. \tag{1.17}$$

Proposición 1.22 (Desigualdad de Kato-Ponce). *Sean $s > 0$, $1 < p < \infty$, $\Lambda = (1-\Delta^2)^{1/2}$ y M_f el operador de multiplición por f. Entonces,*

$$|[\Lambda^s, M_f]g|_p \leq c\left(|\nabla f|_\infty |\Lambda^{s-1}g|_p + |\Lambda^s f|_p |g|_\infty\right), \tag{1.18}$$

para toda f y $g \in \mathcal{S}$

Corolario 1.23. *Para f y $g \in \mathcal{S}$,*

$$|f, g|_{s,p} \leq c\left(|f|_\infty |\Lambda^s g|_p + |\Lambda^s f|_p |g|_\infty\right).$$

El siguiente teorema es debido a A. P. Calderón (vea [8])

Teorema 1.24 (Teorema del conmutador de Calderón). *Sea $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Lipschitz. Entonces, para cualquier $f \in S(\mathbb{R})$,*

$$\|[\mathcal{H}, A]f'\|_0 \leq C|A'|_\infty \|f\|_0.$$

Lema 1.25. *Sea $g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $s \geq 0$. Entonces existe una constante $C = C(s)$ tal que*

$$\|gh\|_{[s]} \leq C\left[\|g\|_A \|h\|_{[s]} + \|g\|_{[s]} \|h\|_A\right]$$

donde $\|\phi\|_{[s]} = \left\|(-\Delta^2)^{\frac{s}{2}}\right\|_o$ y $\|\phi\|_A = \left\|\widehat{\phi}\right\|_{L^1}$

Corolario 1.26. *Sean g y h como en el Lema 1.25 y $\frac{n}{2} < s_0$. Entonces existe una constante $C = C(s)$ tal que*

$$\|g\partial_x h\|_s \leq C\left(\|g\|_s \|h\|_s + \|g\|_{s_0} \|h\|_{s+1}\right)$$

Proposición 1.27. *Sean $r \geq 1$ y $s > \frac{n}{2}$ fijos y $f, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces existe una constante $C = C(r, s)$ tal que*

$$|(v, f\partial_x v)_r| \leq C\left(\|\partial_x f\|_{s-1} \|v\|_r^2 + \|\partial_x f\|_{r-1} \|v\|_s \|v\|_r\right)$$

En particular, $|(v, f\partial_x v)| \leq C_s \|\partial_x f\|_{s-1} \|v\|_s^2$ para toda $f, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

La siguiente proposición es un hecho bastante conocido y muy útil en la prueba del buen planteamiento global de muchos problemas de Cauchy asociados a ecuaciones diferenciales que aparecen en el contexto de la física.

Proposición 1.28. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua acotada tal que $\partial_x f$ existe, es continua y es acotada. Entonces, si $A = f\partial_x$,*

$$\langle A(u), u\rangle_0 \geq -\frac{1}{2}|\partial_x f|_\infty \|u\|_0^2, \tag{1.19}$$

para cada $u \in D(A)$, y $A + \lambda$ es sobre, para todo $\lambda > \frac{1}{2}|f|_\infty$.

En particular, $A \in G(L^2(\mathbb{R}^2), 1, \frac{1}{2}|f|_\infty)$ (vea la sección anterior).

Demostración. La desigualdad (1.19) se obtiene inmediatamente después de hacer integración por partes. Veamos que $A + \lambda$ es sobre, si $\lambda > \frac{1}{2}|f|_\infty$. Supongamos que ψ es tal que $\langle (A + \lambda)(u), \psi\rangle_0 = 0$, para toda $u \in D(A)$. Por lo tanto, $\psi \in D(A^*) \subseteq D(A)$. De (1.19), se sigue que

$$0 \geq \langle (A + \lambda)(\psi), \psi\rangle_0 \geq (\lambda - \frac{1}{2}|f|_\infty)\|\psi\|_0^2.$$

Luego, $\psi = 0$ y, por lo tanto, $A + \lambda$ es sobre. □

El siguiente lema da un principio de minimáx y será un insumo importante en la demostración de la existencia de ondas solitarias que haremos más adelante en este trabajo. Este es una consecuencia inmediata del Teorema 2.8 en [31, pg. 41]

Lema 1.29 (Lema del paso de la montaña)**.** *Supongamos que X es un espacio Banach y que $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ es una función que satisface las siguientes propiedades:*

1. *$\Phi(0) = 0$, y existe $\rho > 0$ tal que $\Phi|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha > 0$.*
2. *Existe $\beta \in X \setminus \overline{B}_\rho(0)$ tal que $\Phi(\beta) \leq 0$.*

Sea Γ el conjunto de todos los caminos que unen 0 con β, es decir,

$$\Gamma = \{g \in C([0, 1], X) \mid g(0) = 0, g(1) = \beta\},$$

y sea

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \Phi(g(t)). \tag{1.20}$$

Entonces, $c \geq \alpha$ y Φ tiene una sucesión de Palais-Smale en el nivel c, es decir, existe una sucesión (u_n) tal que $\Phi(u_n) \to c$ y $\Phi'(u_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Para demostrar la suavidad de las soluciones tipo onda solitaria usaremos la siguiente generalización del teorema de multiplicadores de Hörmander–Mikhlin debida a Lizorkin [23]

Teorema 1.30 (Lizorkin)**.** *Sea* $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función* C^n *para* $|\xi_j| > 0$, $j = 1, ..., n$. *Supongamos que existe* $M > 0$ *tal que*

$$|\xi_1^{k_1} \cdots \xi_n^{k_n} \frac{\partial^k \Phi}{\partial \xi_1^{k_1} \cdots \partial \xi_n^{k_n}}(\xi)| \leq M$$

con $k_i = 0$ *o* 1, $k = k_1 + \cdots + k_n = 0, 1, \cdots, n$. *Entonces,* $\Phi \in M_q(\mathbb{R}^n)$ *para* $1 \leq q \leq \infty$. *En otras palabras,* Φ *es un multiplicador de Fourier en* $L^q(\mathbb{R}^n)$.

Para terminar incluimos el siguiente resultado elemental.

Teorema 1.31. *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida. Para* $p \geq 0$, *la función* $u \to u^{p+1}$ *es localmente continua Lipschitz de* $L^{p+2}(\Omega, \mu)$ *en* $L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega, \mu)$. *En particular,* $u \to \int_\Omega u^{p+2}\, d\mu$ *es un funcional* C^1 *sobre* $L^{p+2}(\Omega, \mu)$.

Demostración. Es claro que

$$(u + h)^{p+1} = u^{p+1} + (p + 1)h \int_0^1 (u + th)^p \, dt$$

para todo u y h. De las desigualdades de Hölder y Minkowski, obtenemos

$$\begin{aligned} \left\| h \int_0^1 (u + th)^p \, dt \right\|_{\frac{p+2}{p+1}} &\leq \|h\|_{p+2} \left\| \int_0^1 (u + th)^p \, dt \right\|_{\frac{p+2}{p}} \\ &\leq C \|h\|_{p+2} (\|u\|_{p+2} + \|h\|_{p+2})^p. \end{aligned}$$

Esto termina la demostración. □

Capítulo 2

Teoría local

En este capítulo examinamos el buen platemiento del problema de Cauchy asociado a la generalización bidimensional de la ecuación Benjamin-Ono dada por (3). El capítulo está dividido en dos secciones, en la primera examinamos el buen planteamiento de (3) en H^s cuando $\gamma = 0$. En la otra sección examinamos el buen planteaminto de (3) en X^s sin ninguna restricción en los parámetros α y γ.

2.1. Buen planteamiento en H^s $(\gamma = 0)$

Teorema 2.1. *Sea $s > 2$ y $p \in \mathbb{N}$. Para $\phi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, existe $T > 0$, que depende solamente de $\|\phi\|_s$, y una única $u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,T], H^{s-2}(\mathbb{R}^2))$ solución del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha\mathcal{H}\partial_y^2 u + u^p u = 0 \\ u(0) = \phi. \end{cases} \tag{2.1}$$

Además, la tranformación $\phi \mapsto u$ de H^s en $C([0,T], H^s)$ es continua.

Demostración. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $\alpha = 1$. En este caso, u es solución de (2.1) si y sólo si $v(t) = e^{t\mathcal{H}\Delta}u(t)$ es solución de

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + A(t,v)v = 0 \\ v(0) = \phi, \end{cases} \tag{2.2}$$

donde

$$A(t,v) = e^{t\mathcal{H}\Delta}(e^{-t\mathcal{H}\Delta}v)^p \partial_x e^{-t\mathcal{H}\Delta}.$$

Veamos que para este problema se satisfacen cada una de las condiciones del teorema de Kato (Teorema 1.20). Por lo pronto, sean $X = L^2(\mathbb{R}^2)$ y $Y = H^s(\mathbb{R}^2)$, para $s > 2$. Es claro que $S = (1 - \Delta)^{\frac{s}{2}}$ es un isomorfismo entre X e Y. En los siguientes lemas verificaremos que el problema (2.2) satisface las condiciones (A_1)–(A_4) que aparecen en la Sección 1.3.2.

Lema 2.2. *$A(t,v) \in G(X,1,\beta(v))$, donde $\beta(v) = \frac{1}{2}\sup_t \|\partial_x(e^{t\mathcal{H}\Delta}v)^p\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ (vea la condición (A_1) en la Sección 1.3.2).*

Demostración. Ya que $\{e^{-t\mathcal{H}\Delta}\}$ es un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios, y gracias a la observación que hicimos luego de establecer la condición (A_1) en la Sección 1.3.2, de la Proposición 1.28 se sigue este lema. □

Lema 2.3. *Si $S = (1-\Delta)^{s/2}$, entonces*

$$SA(t,v)S^{-1} = A(t,v) + B(t,v),$$

donde $B(t,v)$ es un operador acotado L^2, para todo $t \in \mathbb{R}$ y $v \in H^s$, y satisface las desigualdades

$$\|B(t,v)\|_{B(X)} \leq \lambda(v) \tag{2.3}$$

$$\|B(t,v) - B(t,v')\|_{B(X)} \leq \mu(v,v')\|v'-v\|_s, \tag{2.4}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, y todos v y $v' \in H^s$, donde $\lambda(v) = \sup_t C_s\|\nabla(e^{-t\mathcal{H}\Delta}v)^p\|_{s-1}$ y $\mu(v,v') = C_{p,s}(\|v\|_s^{p-1} + \|v'\|_s^{p-1})$.

Demostración. De la Proposición 1.21 se sigue que $[S,(e^{-t\mathcal{H}\Delta}v)^p]\partial_x S^{-1} \in B(X)$ y

$$\|[S,(e^{-t\mathcal{H}\Delta}v)^p]\partial_x S^{-1}\|_{B(X)} \leq C_s\|\nabla(e^{-t\mathcal{H}\Delta}v)^p\|_{s-1}.$$

Por lo tanto, $B(t,v) \in B(X)$ y satisface (2.3).

Al proceder como antes y teniendo en cuenta que

$$\|v^p - w^p\|_s \leq C_{p,s}(\|u\|_s^{p-1} + \|v\|_s^{p-1})\|u-v\|_s^p,$$

para todo u y $v \in H^s$, se muestra (2.4). □

Lema 2.4. *$H^s(\mathbb{R}^2) \subset D(A(t,v))$ y $A(t,v)$ es un operador acotado de $Y = H^s(\mathbb{R}^2)$ en $X = L^2(\mathbb{R}^2)$ con*

$$\|A(t,v)\|_{B(X,Y)} \leq \lambda(v),$$

para todo $v \in Y$, y donde λ es como en el Lema 2.3. Además, la función $t \mapsto A(t,v)$ es fuertemente continua de $\mathbb{R}$ en $B(Y,X)$, para cada $v \in H^s$. Por otro lado, la función $v \mapsto A(t,v)$ satisface la siguiente condición de Lipschitz

$$\|A(t,v) - A(t,v')\|_{B(Y,X)} \leq \mu(v,v')\|v-v'\|_X,$$

donde μ es como en el lema anterior.

Demostración. Puesto que $e^{-t\mathcal{H}\Delta} = (e^{t\mathcal{H}\Delta})^{-1}$ es unitario en $X = L^2(\mathbb{R}^2)$, de la definición de $A(t,v)$, se sigue $H^s(\mathbb{R}^2) \subset D(A(t,v))$. De hecho,

$$\|A(t,v)f\|_0 = \|e^{-t\mathcal{H}\Delta}v)^p\partial_x e^{t\mathcal{H}\Delta}f\|_0 \leq C_s\|(e^{-t\mathcal{H}\Delta}v)^p\|_s\|\partial_x f\|_0 \leq \lambda(v)\|f\|_s,$$

para toda $f \in Y$.

Ahora, para todos $t, t' \in \mathbb{R}$ y todas $f, v \in Y$, tenemos

$$\begin{aligned}\|A(t,v)f - A(t',v)f\|_0 \leq & \left\| \left(e^{t\mathcal{H}\Delta} - e^{t'\mathcal{H}\Delta}\right)(e^{-t\mathcal{H}\Delta}v)^p \partial_x(e^{t\mathcal{H}\Delta}f) \right\|_0 + \\ & + \left\| \left((e^{-t\mathcal{H}\Delta}v)^p - (e^{-t'\mathcal{H}\Delta}v)^p\right) \partial_x(e^{t\mathcal{H}\Delta}f) \right\|_0 \\ & + \|(e^{-t'\mathcal{H}\Delta}v)^p \partial_x(e^{t\mathcal{H}\Delta} - e^{t'\mathcal{H}\Delta})f\|_0\end{aligned}$$

Como el grupo $\{e^{-t\mathcal{H}\Delta}\}_{t\in\mathbb{R}}$ es fuertemente continuo y la función $v \to v^p$ de Y en si mismo es continua, $t \mapsto A(t,v)$ es fuertemente continua de $\mathbb{R}$ en $B(Y,X)$.

Finalmente, para cualquier $t \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|A(t,v')f - A(t,v)f\|_0 &\leq \|(e^{t\mathcal{H}\Delta}v')^p - (e^{t\mathcal{H}\Delta}v)^p\|_0 \|\partial_x e^{t\mathcal{H}\Delta}f\|_\infty \\ &\leq C_p(\|(e^{t\mathcal{H}\Delta}v)^{p-1}\|_\infty + \|(e^{t\mathcal{H}\Delta}v')^{p-1}\|_\infty)\|f\|_s\|v' - v\|_0 \\ &\leq \mu(v,v')\|v' - v\|_0\|f\|_s.\end{aligned}$$

Esto termina la demostración del lema. □

Los lemas inmediatamente anteriores muestran que el problema (2.2) satisface las condiciones del Teorema 1.20 y, por lo tanto, para cada $\phi \in H^s$, $s > 2$, existen $T > 0$, que depende de $\|\phi\|_s$, y una única $v \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^2) \bigcap C^1([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R}^2))$ solución del problema (2.2). Además, la aplicación $\phi \mapsto v$ es continua de $H^s(\mathbb{R}^2)$ en $C([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)$. Ahora bien, de las propiedades del grupo $Q(t) = e^{-t\mathcal{H}\Delta}$ se puede verificar que $u(t) = Q(t)v(t)$ es solución de (2.1) y satisface las propiedades enunciadas en el Teorema 2.1. □

Teorema 2.5. *El tiempo de existencia para* (2.1) *puede ser elegido independiente de s en el siguiente sentido: si $u \in C([0,T], H^s)$ es la solución de* (2.1) *con $u(0) = \phi \in H^r$, para algún $r > s$, entonces, $u \in C([0,T], H^r)$. En particular, si $\phi \in H^\infty$, $u \in C([0,T], H^\infty)$.*

Demostración. La demostración de este resultado es esencialmente la misma de la parte (c) del Teorema 1 en [14]. Esbozaremos brevemente esta. Sean $r > s$, $u \in C([0,T], H^s)$ solución de (2.1) y $v = e^{t\mathcal{H}\Delta}u$. Supongamos que $r \leq s + 1$. Si aplicamos ∂_x^2 en ambos lados de la ecuación diferencial en (2.2), llegamos a la siguiente ecuación de evolución lineal para $w(t) = \partial_x^2 v(t)$,

$$\frac{dw}{dt} + A(t)w + B(t)w = f(t) \tag{2.5}$$

donde

$$A(t) = \partial_x e^{t\mathcal{H}\Delta}(u(t))^p e^{-t\mathcal{H}\Delta} \tag{2.6}$$

$$B(t) = 2e^{t\mathcal{H}\Delta}[p(u(t))^{p-1}]u_x(t)e^{-t\mathcal{H}\Delta} \tag{2.7}$$

$$f(t) = -e^{t\mathcal{H}\Delta}[p(p-1)u^{p-2}(t)][u_x(t)]^3. \tag{2.8}$$

Puesto que $v \in C([0,T), H^s)$ se tiene que $w \in C([0,T); H^{s-2})$. Además, $w(0) = \phi_{xx} \in H^{r-2}$, ya que $\phi \in H^r$. Probemos que $w \in C([0,T], H^{r-2})$. Para ésto probaremos que el problema de Cauchy para la ecuación lineal (2.5) es bien planteado en $1-s \leq k \leq s-1$. En esta dirección tenemos el siguiente lema cuya demostracion es completamente similar a la del Lemas 3.1 en [14].

Lema 2.6. *La familia $\{A(t)\}_{0\leq t\leq T}$ tiene una única familia de operadores de evolución $U(t,\tau)_{0\leq t\leq \tau\leq T}$ para los espacios $X = H^h, \quad Y = H^k$ (vea Teorema 1.19), donde*

$$-s \leq h \leq s-2 \quad 1-s \leq k \leq s-1 \quad k+1 \leq h \tag{2.9}$$

En particular, $U(t,\tau): H^r \to H^r$ para $-s \leq r \leq s-1$.

Luego, de la discusión que sigue al Teorema 1.19, w satisface la ecuación

$$w(t) = U(t,0)\phi_{xx} + \int_0^t U(t,\tau)[-B(\tau)w(\tau) + f(\tau)]d\tau. \tag{2.10}$$

Ahora bien, como $w(0) = \phi_{xx} \in H^{r-2}$, f, dada (2.8), está en $C([0,T], H^{s-1}) \subset C([0,T], H^{r-2})$ (si $r \leq s+1$) y $B(t)$, dada en (2.7), es una familia de operadores en $\mathcal{B}(H^{r-2})$ que es fuertemente continuo para t en el intervalo $[0,T]$ (si $r \leq s+1$), del Lema 2.6, la solución de 2.10 está en $C([0,T], H^{r-2})$ ((2.10) es una ecuación integral de tipo Volterra en H^{r-2}, la cual puede ser resuelta por aproximaciones sucesivas), en otras palabras, $\partial_x^2 u \in C([0,T], H^{r-2})$.

Si $w_1(t) = \partial_x\partial_y v(t)$, tenemos que

$$\frac{dw_1}{dt} + A(t)w_1 + B_1(t)w_1 = f_1(t) \tag{2.11}$$

donde

$$B_1(t) = e^{t\mathcal{H}\Delta}[p(u(t))^{p-1}]u_x(t)e^{-t\mathcal{H}\Delta} = \frac{1}{2}B(t) \tag{2.12}$$

$$f_1(t) = -e^{t\mathcal{H}\Delta}((p(p-1)u^{p-2}(t)[u_x(t)]^2 + p(u(t))^{p-1}u_{xx}(t))u_y(t)). \tag{2.13}$$

Como antes, tenemos que

$$w_1(t) = U(t,0)\phi_{xy} + \int_0^t U(t,\tau)[-B_1(\tau)w_1(\tau) + f_1(\tau)]d\tau. \tag{2.14}$$

Ya que $u_{xx} \in C([0,T], H^{r-2})$, $f_1 \in C([0,T], H^{r-2})$. Dado que, además, $B_1(t) \in \mathcal{B}(H^{r-2})$ es fuertemente continuo en el intervalo $[0,T]$, argumentando como antes, tenemos que $w_1 \in C([0,T], H^{r-2})$ o, equivalentemente, $u_{xy} \in C([0,T], H^{r-2})$

Analogamente, si $w_2(t) = \partial_y^2 v(t)$, tenemos que

$$\frac{dw_2}{dt} + A(t)w_2 = f_2(t) \tag{2.15}$$

donde

$$f_2(t) = -e^{t\mathcal{H}\Delta}((p(p-1)u^{p-2}(t)u_x(t)u_y(t) + 2p(u(t))^{p-1}u_{xy}(t))u_y(t)). \tag{2.16}$$

Luego,

$$w_2(t) = U(t,0)\phi_{yy} + \int_0^t U(t,\tau) f_2(\tau) d\tau. \tag{2.17}$$

Ya que $u_{xy} \in C([0,T], H^{r-2})$, $f_2 \in C([0,T], H^{r-2})$. Repitiendo el argumento anterior, podemos concluir que $w_1 \in C([0,T], H^{r-2})$ o, equivalentemente, $\partial_y^2 u \in C([0,T], H^{r-2})$

Luego, hemos probado que si $s < r \leq s+1$ y $\phi \in H^r$, $u \in C([0,T], H^r)$. Para ver el caso $r > s+1$, como $\phi \in H^{s'}$, para $s' < r$, usando una y otra vez lo que hemos probado hasta ahora, se llega a que $u \in C([0,T], H^r)$. □

2.2. Buen planteamiento en X^s

En esta sección examinamos el buen planteamiento de (3) en X^s. Observese que en este espacio el problema (3) es equivalente a la ecuación

$$\begin{cases} u_t + u^p u_x + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha \mathcal{H} \partial_y^2 u - \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} = 0, \\ u(0) = \phi. \end{cases} \tag{2.18}$$

Para ver ésto apelaremos al método de regularización parabólica. Así pués, consideremos primero el problema

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha \mathcal{H} \partial_y^2 u - \gamma \partial_x^{-1} \partial_y^2 u + u^p u_x = \mu \Delta u \\ u(0) = \phi, \end{cases} \tag{2.19}$$

en X_s, para $\mu > 0$.

Como es usual en éste método, se estudia el comportamiento de las soluciones del problema lineal asociado al problema (2.19)

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha \mathcal{H} \partial_y^2 u - \gamma \partial_x^{-1} \partial_y^2 u = \mu \Delta u, \\ u(0) = \phi, \end{cases} \tag{2.20}$$

en X_s. Haciendo uso de la tranformada de Fourier llegamos a que la solución de (2.20) es

$$u(t) = E_\mu(t)\phi = \left(e^{(i(\operatorname{sgn}(\xi)(\xi^2 + \alpha\eta^2) - \gamma\frac{\eta^2}{\xi}) - \mu(\xi^2+\eta^2))t} \widehat{\phi} \right)^{\vee}.$$

Luego, llegamos al siguiente lema.

Lema 2.7. *Sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces:*

(a) Para $\mu \geq 0$, E_μ define un C_0 semigrupo de contracciones en X^s y H^{s-2}. En $\mu = 0$, éste puede ser extendido a un grupo unitario fuertemente continuo. Más aún, si $u(t) = E_\mu(t)\phi$, u satisface (2.20) en la topología fuerte de H^s, si $\phi \in \{\psi \in H^s \mid (i(\operatorname{sgn}(\xi)(\xi^2 + \alpha\eta^2) - \gamma\frac{\eta^2}{\xi}) - \mu(\xi^2+\eta^2))\widehat{\psi} \in L^s\}$, y en la topología fuerte de H^{s-2}, si $\phi \in X^s$.

(b) Si $\lambda \geq 0$ y $\mu > 0$ entonces, para todo $t > 0$, $E_\mu(t) \in B(X^s, X^{s+\lambda})$ y

$$\|E_\mu(t)\phi\|_{X^{s+\lambda}} \leq K_\lambda \left(1 + (2\mu t)^{-\lambda}\right)^{1/2} \|\phi\|_{X^s} \tag{2.21}$$

para toda $\phi \in X_s$, donde K_λ es una constante que depende únicamente de λ.

Demostración. (a) es inmediato de la definición de E_μ. Bosquejamos la demostración de (b). Es claro que

$$\begin{aligned}\|E_\mu(t)\phi\|_{s+\lambda}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} (1+\xi^2+\eta^2)^{s+\lambda} |\widehat{\phi}(\xi,\eta)|^2 e^{-2\mu(\xi^2+\eta^2)t} d\xi d\eta \\ &\leq \sup_{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2} [(1+\xi^2+\eta^2)^\lambda e^{-2\mu(\xi^2+\eta^2)t}] \|\phi\|_s^2\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\|\partial_x^{-1}(E_\mu(t)\phi)\|_{s+\lambda}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\xi^2} (1+\xi^2+\eta^2)^{s+\lambda} |\widehat{\phi}(\xi,\eta)|^2 e^{-2\mu(\xi^2+\eta^2)t} d\xi d\eta \\ &\leq \sup_{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2} [(1+\xi^2+\eta^2)^\lambda e^{-2\mu(\xi^2+\eta^2)t}] \|\partial_x^{-1}\phi\|_s^2.\end{aligned}$$

De aquí se sigue (b), ya que

$$\sup_{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2} [(1+\xi^2+\eta^2)^\lambda e^{-2\mu(\xi^2+\eta^2)t}] \leq K_\lambda \left(1 + \left(\frac{1}{2\mu t}\right)^\lambda\right)^{1/2}$$

□

Admitiendo como válido el principio de Duhamel, tendríamos que la ecuación (2.19) es equivalente a la ecuación integral

$$u(t) = E_\mu(t)\phi - \int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt'. \tag{2.22}$$

Veamos que ésto es efectivamente así en X^s.

Lema 2.8. *Para $s > 2$ y $\mu > 0$, el problema* (2.19) *es equivalente a la ecuación integral* (2.22) *en X^s. Más precisamente, para $u \in C([0,T], X^s)$, $u \in C^1([0,T], H^{s-2})$ y es una solución de* (2.19)*, si, y sólo si, u satisface* (2.22)*.*

Demostración. Sea $u \in C([0,T], X^s)$. Supongamos primero que $u \in C^1([0,T], H^{s-2})$ y es una solución de (2.19). Del Lema 2.7, se sigue que

$$\begin{aligned}\partial_{t'}\left(E_\mu(t-t')u(t')\right) &= E_\mu(t-t')(A_\mu u(t') + u_{t'}(t')) \\ &= E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t'),\end{aligned}$$

para $t > t'$, donde $A_\mu = -\mathcal{H}\partial_x^2 - \alpha\mathcal{H}\partial_y^2 + \gamma\partial_x^{-1}\partial_y^2 + \mu\Delta$. Luego, del teorema fundamental del cálculo, se sigue que u satisface la ecuación integral (2.22).

Ahora supongamos que u satisface la ecuación integral (2.22). Veamos primero que la integral en (2.22) tiene derivada continua en H^{s-2}. Para este efecto, del Lema 2.7, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt' - \int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt'\right] = \\ = \frac{E_\mu(h)-I}{h}\int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt' + \\ + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt', \end{aligned} \tag{2.23}$$

para $h>0$. Como $u \in C([0,T],X^s)$ y satisface la ecuación integral (2.22),

$$\int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt' \in C([0,T],X^s). \tag{2.24}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0+} \frac{E_\mu(h)-I}{h}\int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt' = \\ = A_\mu \int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt', \end{aligned} \tag{2.25}$$

en H^{s-2}. Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt' - u^p u_x(t)\right\|_{s-2} \leq \\ \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left\|E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t') - u^p u_x(t)\right\|_{s-2} dt'. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Del Teorema 2.7, la función dentro de la integral de la parte derecha de (2.26) es continua para $t' \in [t,t+h]$. Por consiguiente, del teorema del valor medio para integrales, se sigue que

$$\lim_{h\to 0+}\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t') - u^p u_x(t)dt'\right\|_{s-2} = 0. \tag{2.27}$$

En particular, tenemos que

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt' = u^p u_x(t) \tag{2.28}$$

en H_{s-2}. Si $h < 0$, como antes, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt' - \int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt'\right] = \\ = \frac{E_\mu(-h)-I}{-h}\int_0^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt' + \\ + \frac{1}{-h}\int_{t+h}^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt'. \quad (2.29)\end{aligned}$$

Como

$$\left\|\frac{E_\mu(-h)-I}{-h}\phi\right\|_{s-2} \leq \|\phi\|_{X^s},$$

para toda $\phi \in X_s$, de (2.24),

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0-} \frac{E(-h)-I}{-h}\int_0^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt' = \\ = \lim_{h\to 0-}\frac{E_\mu(-h)-I}{-h}\int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt', \quad (2.30)\end{aligned}$$

en H_{s-2}. También tenemos que

$$\lim_{h\to 0-}\frac{1}{-h}\int_{t+h}^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt' = u^p u_x(t) \quad (2.31)$$

en H^{s-2}. Por lo tanto, la integral en (2.22) tiene derivada con respecto a t en H^{s-2} y

$$\frac{d}{dt}\int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt' = A_\mu\int_0^t E_\eta(t-t')(u^p u_x)(t')dt' + u^p u_x(t).$$

De aquí se sigue que u es derivable en H^{s-2} y satisface la ecuación (2.19). $\square$

Para $u \in C([0,T], X^s)$, sea

$$A(u)(t) = V_\eta(t)\phi - \int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt'. \quad (2.32)$$

Veamos que $A(u) \in C([0,T], X^s)$, para $s \geq 1$. Basta ver que

$$\int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt'$$

es continua en t. Gracias al Teoremas 2.7 y a que H^r es un álgebra de Banach, si $r > 1$, tenemos que

$$\|E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')\|_{X^s} \leq C_s\left(1+\frac{1}{2\mu(t-t')}\right)^{\frac{1}{2}}\|u(t')\|_s^{p+1}, \quad (2.33)$$

donde para $t > 0$. Como $(1 + (2\mu t)^{-1})^{\frac{1}{2}}$ es localmente integrable, se tiene que

$$\int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt' \in X_s.$$

Para $h > 0$ tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt' - \int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt' = \\ = (E_\mu(h) - I)\int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt' + \\ + \int_t^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt'\end{aligned}$$

Ya que, de la desigualdad (2.33),

$$\left\| \int_t^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt' \right\|_{X^s} \leq \sup_{[0,T]} \|u\|_{X^s}^{p+1} \int_0^h \left(1 + \frac{1}{2\mu\tau}\right)^{\frac{1}{2}} d\tau,$$

tenemos la continuidad a derecha de

$$\int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt'.$$

Si $h < 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt' - \int_0^t E_\mu(t+t')(u^p u_x)(t')dt' = \\ = \int_{t+\tilde{h}}^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt' + \\ + (E_\mu(-\tilde{h}+h) - E_\mu(-\tilde{h}))\int_0^{t+\tilde{h}} E_\mu(t+\tilde{h}-t')(u^p u_x)(t')dt' - \\ - \int_{t+\tilde{h}}^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt'\end{aligned}$$

para $-t < \tilde{h} < h$. Escogiendo $\tilde{h}$ tal que

$$\int_0^{\tilde{h}} \left(1 + \frac{1}{2\mu\tau}\right)^{\frac{1}{2}} d\tau < \epsilon/3,$$

y haciendo uso de la desigualdad (2.33), tenemos que la norma en X^s del primer y tercer términos del lado derecho de la última ecuación son menores que $\epsilon/3$. Por un momento fijando este $\tilde{h}$, podemos tomar h suficientemente pequeño tal que la norma en X^s del segundo término la podemos hacer menor que $\epsilon/3$. Por lo tanto, para $h < 0$ suficientemente pequeño,

$$\left\| \int_0^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt' - \int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt' \right\|_{X^s} < \epsilon.$$

Esto demuestra la continuidad a izquierda de

$$\int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt'.$$

Así pues, para $u \in C([0,T], X^s)$, $A(u) \in C([0,T], X^s)$.

Veamos que A es una contracción en algún subespacio cerrado de $C([0,T], X^s)$ con la norma de la convergencia uniforme. La elección conveniente es el conjunto

$$\Upsilon_s(T) = \{u \in C([0,T], X^s) \mid \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - E_\mu(t)\phi\|_{X^s} \leq M\},$$

donde $M > 0$ es fijo. Veamos que podemos ecoger $T > 0$ suficientemente pequeño tal que A es una contracción en $\Upsilon_s(T)$ con la métrica inducida

$$d_s(u,v) = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - v(t)\|_{X^s}.$$

Veamos primero que podemos elegir $T > 0$ tal que $A(\Upsilon_s(T)) \subseteq \Upsilon_s(T)$. Sea $u \in \Upsilon^s(T)$. Entonces, de (2.33)

$$\begin{aligned}\|(Au)(t) - E_\mu(t)\phi\|_{X^s} &\leq C\int_0^t \left(1 + \frac{1}{2\mu(t-\tau)}\right)^{1/2} \|u(\tau)\|_{X^s}^{p+1} d\tau \\ &\leq C(M + \|\phi\|_{X^s})^{p+1}\left(T + \left(\frac{T}{\sqrt{\mu}}\right)^{1/2}\right) \qquad (2.34)\end{aligned}$$

Luego, para T suficientemente el lado derecho de (2.34) se puede hacer menor que M, o en otras palabras, para este mismo T, $A(\Upsilon_s(T)) \subseteq \Upsilon_s(T)$.

Finalmente, veamos que este T también puede ser elegido de tal manera que A es una contracción sobre $\Upsilon^s(T)$. Del Lema 2.7, tenemos que

$$\begin{aligned}\|(Au)(t) - (Av)(t)\|_{X^s} &\leq C\int_0^t \left(1 + \frac{1}{2\mu(t-\tau)}\right)^{\frac{1}{2}} ||(u^{p+1} - v^{p+1})_x(\tau)||_{X^{s-1}} d\tau \\ &\leq C_s \sup_{t\in[0,\tilde{T}]} ||u^{p+1} - v^{p+1}||_s \int_0^t \left(1 + \frac{1}{2\mu(t-\tau)}\right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\ &\leq C_s(M + \|\phi\|_{X^s})^p \left(T + \left(\frac{T}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - v(t)\|_{X^s},\end{aligned}$$

gracias a que

$$||u^{p+1} - v^{p+1}||_s \leq C(||u||_s^p + ||v||_s^p)||u - v||_s, \qquad (2.35)$$

para todo u y $v \in H^s$. Luego, asimismo, podemos elegir T tal que $C_s(M + |\phi|_s)(T + (\frac{T}{\mu})^{\frac{1}{2}}) < 1$. Para estos T, A es una contracción sobre $\Upsilon^s(T)$.

Luego, en resumen, hemos demostrado parcialmente el siguiente teorema.

Teorema 2.9. *Sean $\mu > 0$, $s > 2$ y $\phi \in X^s$. Entonces, existe $T = T(s, \|\phi\|_{X^s}, \mu) > 0$ y una única función $u \in C([0,T], X^s) \cap C([0,T], H^{s-2})$ solución de (2.19). La transformación $\phi \mapsto u$ de X^s en $C([0,T], X^s)$ es continua.*

Demostración. Falta probar la unicidad de la solución y la dependencia continua del dato inicial. Para ello necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.10. *Supongamos que $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\beta+\gamma > 1$, $a \geq 0$ y $b \geq 0$. Sea f una función definida en $[0,T]$, no negativa y tal que $t^{\gamma-1} f(t)$ localmente integrable allí. Si*

$$f(t) \leq a + b \int_0^t (t-t')^{\beta-1} (t')^{\gamma-1} f(t') dt' \tag{2.36}$$

para casi todo $(0,T)$, entonces

$$f(t) \leq a F_{\beta,\gamma}((b\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\nu}} t), \tag{2.37}$$

donde $\nu = \beta + \gamma - 1 > 0$ y

$$F_{\beta,\gamma}(y) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m y^{m\nu} \tag{2.38}$$

con $c_0 = 1$ y c_m definido por la relación de recurrecia $\frac{c_{m+1}}{c_m} = \frac{\Gamma(m\nu+\gamma)}{\Gamma(m\nu+\gamma+\beta)}$, para m entero no negativo.

Además,

$$F_{\beta,\gamma}(y) = O\left(y^{1/2(\frac{\nu}{\beta}-\gamma)} e^{\frac{\beta}{\nu} y^{\frac{\nu}{\beta}}} \right), \tag{2.39}$$

cuando $s \to \infty$.

Demostración. Ver el Lema 7.1.2 en [10] □

Ahora probaremos la siguiente proposición, que da una forma más precisa de lo que deseamos demostrar en el teorema.

Proposición 2.11. *Sean ϕ y $\psi \in X^s$, y u y $v \in C([0,T]; X^s)$ las correspondientes soluciones de la ecuación en derivadas parciales en (2.19), con $u(0) = \phi$ y $v(0) = \psi$. Sea $M = \sup_{t\in[0,T]} (\|u(t)\|^p_{X^s} + \|v(t)\|^p_{X^s})$. Entonces, para $t \in [0,T]$,*

$$\|u(t) - v(t)\|_{X^s} \leq F_{1/2,1} \left(b\Gamma(1/2) t \right) \|\phi - \psi\|_{X^s}, \tag{2.40}$$

donde $b = MC_s \mu^{-\frac{1}{2}} ((\mu T)^{\frac{1}{2}} + 1)$

Demostración. Sean u y v como en el enunciado de la proposición y sea $w(t) = u(t) - v(t)$. Luego, de la ecuación integral (2.22), se sigue que

$$w(t) = E_\mu(t)(\phi - \psi) - \int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x(t') - v^p v_x(t')) dt'. \tag{2.41}$$

Tomando la norma en X^s y ya que $E_\mu(t)$ es un semigrupo de contracciones, de la desigualdad triangular, tenemos

$$\|w(t)\|_{X^s} \leq \|\phi - \psi\|_{X^s} + \frac{1}{2}\int_0^t \|E_\mu(t-t')(u^p u_x(t') - v^p v_x(t'))\|_{X^s}\, dt' \quad (2.42)$$

Ahora veamos como está acotada la integral que aparece en esta última desigualdad. Del Lema 2.7 y de (2.35), tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \|E_\mu(t-t')(u^p u_x(t') - v^p v_x(t'))\|_{X^s}\, dt' \\
&\leq C_s \int_0^t \left(1 + \frac{1}{2\mu(t-t')}\right)^{\frac{1}{2}} \left\|\partial_x(u^{p+1}(t') - v^{p+1}(t'))\right\|_{X^{s-1}} dt' \\
&\leq C_s \int_0^t \left(1 + (2\mu(t-t'))^{-\frac{1}{2}}\right) \left\|u^{p+1}(t') - v^{p+1}(t')\right\|_s dt' \\
&\leq C_s M \int_0^t \mu^{-\frac{1}{2}} \left((2\mu T)^{\frac{1}{2}} + 1\right)(t-t')^{-\frac{1}{2}} \|w(t')\|_{X^s}\, dt'
\end{aligned} \quad (2.43)$$

De aquí y gracias al Lema 2.10 sigue la proposición. □

Esto completa la demostración del Teorema 2.9 □

Teorema 2.12. *Si* $u \in C([0,T], X^s)$ *es solución de* (2.19), $u \in ((0,T], X^\infty)$, *donde* $X^\infty = \bigcap_{s\in\mathbb{R}} X^s$ *dotado con la topología de Frechet.*

Demostración. De (2.21) y (2.22), se sigue que

$$\|u(t)\|_{X^{s+\lambda}} \leq$$
$$\leq C\left(1 + \left(\frac{1}{2\mu t}\right)^\lambda\right)^{1/2} \|\phi\|_{X^s} + C\int_0^t \left(1 + \left(\frac{1}{2\mu(t-\tau)}\right)^{\lambda+1}\right)^{1/2} \|u(\tau)\|_{X^s}^{p+1} d\tau \quad (2.44)$$

Luego, si $\lambda < 1$, $u(t) \in X^{s+\lambda}$, para $0 < t \leq T$. Un argumento análogo a la discusión precedente de Teorema 2.9 nos garantiza que $u \in C((0,T], X^{s+\lambda})$, si $\lambda < 1$. Un sencillo argumento de inducción demuestra el teorema. □

Lema 2.13. *El tiempo de existencia* T*, en el Teorema 2.9, puede ser escogido independiente de* μ*.*

Demostración. Supongamos que u es solución de (2.19). Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}
\partial_t ||u(t)||_s^2 &= 2\langle u, \mu\Delta u\rangle_s - 2\langle u, uu_x\rangle_s \\
&= 2\langle u, \mu\Delta u\rangle_s - 2\langle u, \mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha\mathcal{H}\partial_y^2 u - \gamma\partial_x^{-1}\partial_y^2 u\rangle_s - 2\langle u, uu_x\rangle_s \\
&\leq -2\langle u, u^p u_x\rangle_s \\
&\leq C_s\|u(t)\|_s^{p+2},
\end{aligned}$$

y, de la Proposición 1.3,

$$\begin{aligned}\partial_t||\partial_x^{-1}u(t)||_s^2 &= 2\langle\partial_x^{-1}u, \mu\Delta\partial_x^{-1}(u)\rangle_s - \frac{2}{p+1}\langle\partial_x^{-1}u, u^{p+1}\rangle_s \\ &\leq \frac{2}{p+1}|\langle\partial_x^{-1}u, u^{p+1}\rangle_s| \leq C||\partial_x^{-1}u||_s||u||_s^{p+1} \\ &\leq C\|u(t)\|_{X^s}^{p+2},\end{aligned}$$

para $0 < t \leq T$. En otras palabras,

$$\partial_t\|u(t)\|_{X^s}^2 \leq C_{s,p}\|u(t)\|_{X^s}^{p+2},$$

para $0 < t \leq T$. Luego, del teorema fundamental del cáculo, se sigue que

$$\|\phi\|_{X^s}^{-p} - \|u(t)\|_{X^s}^{-p} = \frac{p}{2}\int_{\|\phi\|_{X^s}^2}^{\|u(t)\|_{X^s}^2} \frac{dx}{x^{\frac{p}{2}+1}} \leq C_{s,p}t,$$

para $0 \leq t \leq T$. Por lo tanto, para todo $\mu > 0$,

$$\|u(t)\|_{X^s} \leq \frac{\|\phi\|_{X^s}}{(1 - C_{s,p}\|\phi\|_{X^s}^p t)^{1/p}} \leq \frac{\|\phi\|_{X^s}}{(1 - C_{s,p}\|\phi\|_{X^s}^p T)^{1/p}},$$

si $T < (C_{s,p}\|\phi\|_{X^s})^{-1}$. Esta última desigualdad y el Teorema 2.9 nos garantizan que, para toda $\mu > 0$, la solución u de (2.19) puede ser extendida al intervalo $[0, T]$, si $T < (C_{s,p}\|\phi\|_{X^s})^{-1}$. □

A partir de ahora y hasta el final de este capítulo ρ es la función

$$\rho(t) = \frac{\|\phi\|_{X^s}}{(1 - C_{s,p}\|\phi\|_{X^s}^p t)^{1/p}}. \tag{2.45}$$

Veamos el buen plateamiento de (2.18). Para eso exploraremos lo que ocurre con la red de soluciones de (2.19), $\{u_\mu\}_{\mu>0}$, cuando μ tiende a 0. Realmente, mostraremos que ésta converge débilmente a una solución de (2.18). Por el momento, veamos el siguiente teorema.

Teorema 2.14. *Sea $s > 2$. Entonces, para cada $\phi \in X^s$, existen $T = T(\|\phi\|_{X^s})$ y $u_0 \in C_w([0, T], X^s) \cap C_w^1([0, T], H^{s-2})$ tal que $u_0(0) = \phi$ y u_0 es solución de la ecuación* (2.18)*, en el sentido débil, es decir,*

$$\frac{d}{dt}\langle u_0(t), \psi\rangle_{s-2} = -\langle u_0^p u_{0x} + \mathcal{H}\partial_x^2 u_0 + \alpha\mathcal{H}\partial_y^2 u_0 - \gamma\partial_x^{-1}u_{0yy}, \psi\rangle_{s-2}, \tag{2.46}$$

para todo $\psi \in H^{s-2}(\mathbb{R})$. Ademas, $\|u_0\|_{X^s} \leq \rho(t)$, para todo $t \in [0, T]$, donde $\rho(t)$ es como en (2.45)*.*

Demostración. Para cada μ, notaremos por u_μ la solución de (2.19) en el intervalo $[0, T]$, donde, gracias al Lema 2.13, T es tomado indendientemente de μ. Ahora sean $u = u_\mu$, $v = u_\nu$, para μ y $\nu > 0$. Es fácil ver que

$$\partial_t\|u - v\|_0^2 \leq 4M^2|\mu - \nu| + C_s M^p\|u - v\|_0^2$$

donde C_s depende únicamente de s y $M = \sup_{t\in[0,T]} \rho(t)$. De la desigualdad de Gronwall, obtenemos

$$\|u - v\|_0 \leq C|\mu - \nu|,$$

para todo $t \in [0,T]$. Ya que $C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^2))$ es completo con la norma de la convergencia uniforme, existe $u_0 \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^2))$ tal que

$$\lim_{\mu\to 0+} \sup_{t\in[0,T]} \|u_\mu(t) - u_0(t)\|_0 = 0$$

Ahora veamos que $u_0 \in X_s$. Sea $t \in [0,T]$. Puesto que $\lim_{\mu\to 0+} u_\mu = u_0$ en $L^2(\mathbb{R}^2)$, existe una subsucesión $\left\{\mu_n^{(j)}\right\}$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} \widehat{u}_{\mu_n^{(j)}}(t,\xi,\eta) = \widehat{u}_0(t,\xi,\eta) \qquad \xi,\eta\text{–c.t.p.}$$

Del Lema de Fatou, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|u_0\|_{X^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2+\eta^2)^s(1+\xi^{-2}) \left|\widehat{u}_0\right|^2 d\xi \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2+\eta^2)^s(1+\xi^{-2}) \left|\widehat{u}_{\mu_n^{(j)}}\right|^2 d\xi \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \|u_{\mu_n^{(j)}}\|_{X^s}^2 \\
&\leq \rho(t).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $u_\mu \rightharpoonup u_0$ en X^s. En efecto, sea $\varphi \in X^s$ y $\epsilon > 0$. Tomando $\varphi_\epsilon \in \partial_x^2 \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\|\varphi - \varphi_\epsilon\|_{X^s} \leq \frac{\epsilon}{4M}$, tenemos

$$\begin{aligned}
|\langle u_\mu - u_0, \varphi\rangle_{X_s}| &\leq |\langle u_\mu - u_0, \varphi - \varphi_\epsilon\rangle_{X_s}| + |\langle u_\mu - u_0, \varphi_\epsilon\rangle_{X_s}| \\
&\leq \|u_\mu - u_0\|_{X^s}\|\varphi - \varphi_\epsilon\|_{X^s} + \\
&\quad + \|u_\mu - u_0\|_0 \|(1-\Delta)^s(1+\partial_x^{-2})\varphi_\epsilon)\|_0 \\
&\leq \epsilon,
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T]$ y $\mu > 0$ suficientemente pequeño. Luego,

$$\lim_{\mu\to 0+} \sup_{t\in[0,T]} \langle u_\mu - u_0, \varphi\rangle_{X^s} = 0,$$

para toda $\varphi \in X_s$. Como la convergencia es uniforme para toda $\varphi \in X_s$, $u_0 \in C_w([0,T];\, X_s)$.

Finalmente probemos que $u_0 \in C_w^1([0,T]; H^{s-2}\left(\mathbb{R}^2\right))$ y satisface la ecuación (2.22) para toda $\psi \in H^{s-2}\left(\mathbb{R}^2\right)$. En efecto,

$$\langle u_\mu, \psi\rangle_{s-2} = \langle \phi, \psi\rangle_{s-2} - \int_0^t \langle A_\mu(u_\mu) + u_\mu^p u_{\mu x}, \psi\rangle_{s-2} d\tau \tag{2.47}$$

para todo $t \in [0,T]$ y toda $\psi \in H^{s-2}\left(\mathbb{R}^2\right)$, donde $A_\mu = \mathcal{H}\partial_x^2 + \alpha\mathcal{H}\partial_y^2 - \gamma\partial_x^{-1}\partial_y^2 - \mu\Delta$. Dado que $u_\mu \to u_0$ en $L^2(\mathbb{R}^2)$ y $u_\mu \rightharpoonup u_0$ en $H^s\left(\mathbb{R}^2\right)$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
A_\mu(u_\mu) &\rightharpoonup A_0(u_0) \qquad && \text{en } H^{s-2}\left(\mathbb{R}^2\right), \\
u_\mu^p u_{\mu x} &\rightharpoonup u_0^p u_{0x} \qquad && \text{en } H^{s-1}\left(\mathbb{R}^2\right),
\end{aligned}
$$

uniformemente en $[0,T]$ cuando $\mu \to 0+$. Luego, si hacemos $\mu \to 0+$ en (2.47) obtenemos (2.46). Esto termina la prueba. □

Corolario 2.15. *Sea u_0 como en el teorema anterior. $u_0 \in AC([0,T]; H^{s-2})$.*

Demostración. Puesto que $t \in [0,T] \mapsto \mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha\mathcal{H}\partial_y^2 u - \gamma\partial_x^{-1}\partial_y^2 u + u^p u_x$ es débilmente continua en $H^{s-2}\left(\mathbb{R}^2\right)$, del Teorema de Bochner Pettis, esta función es fuertemente integrable en $H^{s-2}\left(\mathbb{R}^2\right)$. Luego, de la ecuación (2.46),

$$
u_0(t) = \phi - \int_0^t \left[\mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha\mathcal{H}\partial_y^2 u - \gamma\partial_x^{-1}\partial_y^2 u + u^p u_x\right] d\tau. \tag{2.48}
$$

De aquí se sigue el corolario. □

Proposición 2.16. *Sean $T > 0$ fijo, $\phi_j \in H^s\left(\mathbb{R}^2\right)$, $j = 1, 2$ y $v_j \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}))$ $\cap C_w([0,T];\, H^s\left(\mathbb{R}^2\right)) \cap AC([0,T]; H^{s-2}\left(\mathbb{R}^2\right))$ soluciones de la ecuación (2.18) en el sentido débil y tales que $v_j(0) = \phi_j$. Entonces,*

$$
\|v_1(t) - v_2(t)\|_0 \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_0\, e^{tL_0(K)}
$$

donde L_0 es una función continua y creciente en los números reales positivos y $K = \max\left\{\sup_{[0,T]}\|v_1(t)\|_s, \sup_{[0,T]}\|v_2(t)\|_s\right\}$.

Demostración. Sea $w(t) = v_1(t) - v_2(t)$. Como $s > 2$, v_1 y v_2 son fuertemente derivables con respecto a t en $L^2(\mathbb{R}^2)$ y

$$
\partial_t v_i = \mathcal{H}\partial_x^2 v_i + \alpha\mathcal{H}\partial_y^2 v_i - \gamma\partial_x^{-1}\partial_y^2 v_i + v_i^p v_{ix}.
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_0^2 &= \langle v_1^p\partial_x v_1 - v_2^p\partial_x v_2, w(t)\rangle_0 \\
&= \left\langle q(u,v)\partial_x v_2, w^2(t)\right\rangle_0 + \langle v_1^p\partial_x w(t), w(t)\rangle_0 .
\end{aligned}
$$

donde $q(u,v) = \sum_{i=0}^{p-1} u^i v^{p-1-i}$. Por lo tanto,

$$
\frac{d}{dt}\|v_1(t) - v_2(t)\|_0^2 \leq L_0(K)\,\|v_1(t) - v_2(t)\|_0^2
$$

donde $L_0(x) = Cx^p$ y $K = \max\left\{\sup_{[0,T]}\|v_1(t)\|_s, \sup_{[0,T]}\|v_2(t)\|_s\right\}$. De la desigualdad de Gronwall se sigue la proposición. □

Teorema 2.17. *Sea u_0 como en el Teorema 2.14. $u_0 \in C([0,T], X^s) \cap C^1([0,T], H^{s-2}\left(\mathbb{R}^2\right))$ y es la única solución de (2.18).*

Demostración. De la proposición inmediatamente anterior se sigue u_0 es la única solución débil de (2.18). Primero veamos que u_0 es continua en 0. Tenemos que

$$|(u_0(t), \varphi)_s| \leq \|u_0(t)\|_s \leq [\rho(t)]^{\frac{1}{2}},$$

para toda $\varphi \in X^s$, con $\|\phi\| = 1$, y todo $t \in [0, T]$. Luego,

$$|(\phi, \varphi)_s| = \liminf_{t \to 0+} \|u_0(t)\|_s \leq \limsup_{t \to 0+} \|u_0(t)\|_s \leq \lim_{t \to 0+} [\rho(t)]^{\frac{1}{2}} = \|\phi\|_s$$

para toda $\varphi \in X^s$. Luego, el límite de $\|u_0(t)\|_{X^s}$, cuando $t \to 0+$, existe y $\lim_{t \to 0^+} \|u_0(t)\|_s = \|\phi\|_s$. Ya que $u(t) \to \phi$ débilmente en X^s cuando $t \to 0+$, se sigue que $\lim_{t \to 0+} u_0(t) = \phi$ en la norma de X^s.

Sea $t^* \in [0, T)$ fijo, entonces existe $\widetilde{T} > 0$ y una única $v \in C_w([0, \widetilde{T}]; H^s) \cap C_w^1([0, \widetilde{T}]; H^{s-2})$ que satisface (2.18) con $u(t^*)$ en lugar de ϕ. La unicidad implica que $v(t) = u(t + t^*)$, para $t \in [0, \widetilde{T}]$. Como v es continua a derecha de $t = 0$, u es continua a la derecha de $t = t^*$.

Ahora, observese que $u(t^* - t, -x, -y)$ es solución del problema (2.18) con $u(t^*)$ en lugar de ϕ. Luego, $u(t^* - t, -x, -y)$ es continua a derecha en $t = 0$, y por ende, u es continua izquierda en t^*.

En resumen, se tiene que $u \in C([0, T], X^s(\mathbb{R}))$. En particular, $\mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha\mathcal{H}\partial_y^2 u + \gamma\partial_x^{-1}\partial_y^2 u + u^p u_x \in C([0, T], H^{s-2}(\mathbb{R}))$. Así, de la ecuación (2.48) y la proposición anterior, se sigue que $u \in C^1([0, T], H^{s-2}(\mathbb{R}))$ y es la única solución fuerte de (2.18). □

Veamos ahora la dependencia continua del dato inicial. Para ésto seguiremos las ideas usadas por Bona y Smith, en [7], para probar la dependencia continua del dato inicial en el caso del problema de Cauchy asociado a la ecuación KdV. Así pues, sea $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ una sucesión de funciones en X^s tales que $\phi_n \to \phi_\infty$ en X^s, cuando $n \to \infty$. Del Teorema 2.9 y el Lema 2.13, para cada $n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$ fijo y $\mu \geq 0$, existen $T_{s,n} = T_{s,n}(\phi_n) > 0$ independiente de μ y una única $u_{\mu,n} \in C([0, T_{s,n}], X^s)$ que satisface la ecuación (2.19) con $u_{\mu,n}(0) = \phi_n$

Proposición 2.18. *Sea $T \in (0, T_{s,\infty})$ fijo. Entonces, existen N_s entero positivo y una constante $M > 0$ tal que $T_{s,n} \geq T$, para todo $n \geq N_s$, y $\|u_{\mu,n}(t)\|_{X^s} \leq M$, para todo $t \in [0, T]$.*

Demostración. Este es tan solo un refinamiento de la demostración del Lema 2.13. □

Lema 2.19. *Sea $\phi \in H^s$, $s > 0$. Defina*

$$\phi^\tau = \exp\left(-\tau(1 - \Delta)^{\frac{s}{2}}\right)\phi = \left(\widehat{\phi}(\cdot)\exp\left(-\tau(1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\right)\right)^{\vee} \tag{2.49}$$

Entonces

$$\lim_{\tau \to 0+} \|\phi^\tau - \phi\|_s = 0$$

y existe una constante $C = C(s)$ tal que

$$\|\phi^\tau\|_{s+1} \leq C \left(\frac{1}{\tau s}\right)^{\frac{1}{s}} \|\phi\|_s \tag{2.50}$$

y

$$\left\|\phi^\tau - \phi^\theta\right\|_0 \leq C|\tau - \theta| \, \|\phi\|_s \tag{2.51}$$

Ahora, para la sucesión $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ antes introducida, sean ϕ_n^τ las aproximaciones definidas en (2.49) y $u_{\mu,n}^\tau$ las soluciones de (2.19) correspondientes. Puesto que $\|\phi_n^\tau\|_{X^s} \leq \|\phi_n\|_{X^s}$, para todo τ y todo $n = 1, 2, \ldots, \infty$, la Proposición 2.18 puede ser reformulada con los los mismos T, $N_0 > 0$ y M mencionados allí, en el sentido de que todas las soluciones $u_{\mu,n}^\tau$ están definidas en $[0, T]$, para todo $n \geq N_0$ y toda $\mu \geq 0$, y son tales que $\left\|u_{\mu,n}^\tau(t)\right\|_{X^s} \leq M$, para todo $t \in [0, T]$.

Antes de abordar el siguiente resultado, vale la pena mencionar que las soluciones $u_{0,n}^\tau$ están en $C([0, T], X^\infty)$. En efecto, si $\mu > 0$, de la Proposición 1.27 con $r = s + 1$ y la Proposición 1.3, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_{\mu,n}^\tau\right\|_{s+1}^2 &\leq |\langle u_{\mu,n}^\tau, {u_{\mu,n}^\tau}^p \partial_x u_{\mu,n}^\tau\rangle_{s+1}| \\
&\leq C\left\|u_{\mu,n}^\tau\right\|_s^p \left\|u_{\mu,n}^\tau\right\|_{s+1}^2,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\partial_x^{-1}u_{\mu,n}^\tau\right\|_{s+1} \leq &\frac{1}{p+1}|\langle \partial_x^{-1}u_{\mu,n}^\tau, {u_{\mu,n}^\tau}^{p+1}\rangle_{s+1}| \\
\leq &C\left(\left\|u_{\mu,n}^\tau\right\|_s^p \left\|\partial_x^{-1}u_{\mu,n}^\tau\right\|_{s+1}^2 + \left\|u_{\mu,n}^\tau\right\|_s^p \left\|u_{\mu,n}^\tau\right\|_{s+1} \left\|\partial_x^{-1}u_{\mu,n}^\tau\right\|_{s+1}\right).
\end{aligned}$$

En otras palabras,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_{\mu,n}^\tau\right\|_{X^{s+1}}^2 \leq C\left\|u_{\mu,n}^\tau\right\|_s^p \left\|u_{\mu,n}^\tau\right\|_{X^{s+1}}^2,$$

Luego, la desigualdad de Gronwall implica que

$$\left\|u_{\mu,n}^\tau\right\|_{X^{s+1}} \leq CM^p \|\phi_n^\tau\|_{X^{s+1}}, \tag{2.52}$$

para todo $\mu > 0$ y todo $t \in [0, T]$. Una fácil modificación de los razonamientos expuestos hasta aquí, muestran que, en X^{s+1}, $u_{0,n}^\tau$ se puede extender a todo el intervalo $[0, T]$ y satisface la desigualdad anterior. Un simple argumento de inducción demuestra que esta misma afirmación es válida con X^∞ en lugar X^{s+1}.

Proposición 2.20. *Sean $\phi_n \in X^s, s > 2, \phi_n^\tau$ y $u_{\mu,n}^\tau$ como antes. Supongamos que $0 \leq \theta < \tau$, entonces existen $N_0 \in \mathbb{N}$, $C = C(s, \phi_\infty, T) > 0$ y $\eta = \eta(s) \in (0, 1)$ tal que, para todo $n \geq N_0$,*

$$\left\|u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta\right\|_{X^s}^2 \leq C\left(\left\|\phi_n^\tau - \phi_n^\theta\right\|_{X^s}^2 + \tau^{2(1-\eta)}\right),$$

para todo $\mu > 0$.

Demostración. Sean N_0 tal que $u^{\tau}_{\mu,n}(t)$ este definido sobre $[0,T]$, para todo $n \geq N_0$. Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u^{\tau}_{\mu,n}-u^{\theta}_{\mu,n}\right\|_s^2 =& -\mu\left\|\nabla(u^{\tau}_{\mu,n}-u^{\theta}_{\mu,n})\right\|_s^2 - \\ &- \langle u^{\tau}_{\mu,n}-u^{\theta}_{\mu,n},(u^{\tau}_{\mu,n})^p\partial_x u^{\tau}_{\mu,n}-(u^{\theta}_{\mu,n})^p\partial_x u^{\theta}_{\mu,n}\rangle_s\end{aligned} \tag{2.53}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\partial_x^{-1}(u^{\tau}_{\mu,n}-u^{\theta}_{\mu,n})\right\|_s^2 =& -\mu\left\|\partial_x^{-1}\nabla(u^{\tau}_{\mu,n}-u^{\theta}_{\mu,n})\right\|_s^2 - \\ &- \frac{1}{p+1}\langle\partial_x^{-1}(u^{\tau}_{\mu,n}-u^{\theta}_{\mu,n}),(u^{\tau}_{\mu,n})^{p+1}-(u^{\theta}_{\mu,n})^{p+1}\rangle_s\end{aligned} \tag{2.54}$$

Veamos que

$$\begin{aligned}&|\langle u^{\tau}_{\mu,n}-u^{\theta}_{\mu,n},(u^{\tau}_{\mu,n})^p\partial_x u^{\tau}_{\mu,n}-(u^{\theta}_{\mu,n})^p\partial_x u^{\theta}_{\mu,n}\rangle_s| \leq \\ &\leq C\left(\left\|u^{\tau}_{\mu,n}-u^{\theta}_{\mu,n}\right\|_s^2+\frac{1}{2}\tau^{2\left(1-\frac{s_0+1}{s}\right)}\right),\end{aligned} \tag{2.55}$$

para $1 < s_0 < s-1$. Es claro que

$$\begin{aligned}&(u^{\tau}_{\mu,n})^p\partial_x u^{\tau}_{\mu,n}-(u^{\theta}_{\mu,n})^p\partial_x u^{\theta}_{\mu,n} = \\ &= (u^{\theta}_{\mu,n})^p\partial_x(u^{\tau}_{\mu,n}-u^{\theta}_{\mu,n})+((u^{\tau}_{\mu,n})^p-(u^{\theta}_{\mu,n})^p)\partial_x u^{\tau}_{\mu,n}.\end{aligned} \tag{2.56}$$

Ahora bien, por un lado

$$\begin{aligned}|\langle u^{\tau}_{\mu,n}-u^{\theta}_{\mu,n},(u^{\theta}_{\mu,n})^p\partial_x(u^{\tau}_{\mu,n}-u^{\theta}_{\mu,n})\rangle_s| &\leq C_s\left\|(u^{\theta}_{\mu,n})^p\right\|_s\left\|u^{\tau}_{\mu,n}-u^{\theta}_{\mu,n}\right\|_s^2 \\ &\leq C_s M^p\left\|u^{\tau}_{\mu,n}-u^{\theta}_{\mu,n}\right\|_s^2\end{aligned} \tag{2.57}$$

Por otro lado, de la Desigualdad de Cauchy-Schwartz y el Corolario 1.26, obtenemos

$$\begin{aligned}&|\langle u^{\tau}_{\mu,n}-u^{\theta}_{\mu,n},((u^{\tau}_{\mu,n})^p-(u^{\theta}_{\mu,n})^p)\partial_x u^{\tau}_{\mu,n}\rangle_s| \leq \\ &\leq \left\|u^{\tau}_{\mu,n}-u^{\theta}_{\mu,n}\right\|_s\left\|((u^{\tau}_{\mu,n})^p-(u^{\theta}_{\mu,n})^p)\partial_x u^{\tau}_{\mu,n}\right\|_s \\ &\leq C\left\|u^{\tau}_{\mu,n}-u^{\theta}_{\mu,n}\right\|_s\Big(\left\|(u^{\tau}_{\mu,n})^p-(u^{\theta}_{\mu,n})^p\right\|_s\left\|u^{\tau}_{\mu,n}\right\|_s+ \\ &\quad+\left\|(u^{\tau}_{\mu,n})^p-(u^{\theta}_{\mu,n})^p\right\|_{s_0}\left\|u^{\tau}_{\mu,n}\right\|_{s+1}\Big).\end{aligned} \tag{2.58}$$

Estimemos algunos términos que aparecen en esta última desigualdad. Uno de ellos satisface

$$\left\|(u^{\tau}_{\mu,n})^p-(u^{\theta}_{\mu,n})^p\right\|_s \leq CM^{p-1}\left\|u^{\tau}_{\mu,n}-u^{\theta}_{\mu,n}\right\|_s. \tag{2.59}$$

Del Lema 2.19 y la desigualdad (2.52), obtenemos

$$\left\|u^{\tau}_{\mu,n}\right\|_{s+1} \leq CM^p\left\|\phi^{\tau}_n\right\|_{s+1} \leq C\left\|\phi_n\right\|_s\tau^{-\frac{1}{s}}$$

El siguiente término que estimamos es

$$\begin{aligned}\left\|(u^\tau_{\mu,n})^p-(u^\theta_{\mu,n})^p\right\|_{s_0}&\leq CM^{p-1}\left\|u^\tau_{\mu,n}-u^\theta_{\mu,n}\right\|_{s_0}\\&\leq CM^{p-1}\left\|u^\tau_{\mu,n}-u^\theta_{\mu,n}\right\|_s^\lambda\left\|u^\tau_{\mu,n}-u^\theta_{\mu,n}\right\|_0^{1-\lambda}\\&\leq CM^{p-1+\lambda}\left\|u^\tau_{\mu,n}-u^\theta_{\mu,n}\right\|_0^{1-\lambda},\end{aligned}$$

con $\lambda=\frac{s_0}{s}$. Por último, estimamos $\left\|u^\tau_{\mu,n}-u^\theta_{\mu,n}\right\|_0$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u^\tau_{\mu,n}-u^\theta_{\mu,n}\right\|_0^2=&-\mu\left\|\partial_x(u^\tau_{\mu,n}-u^\theta_{\mu,n})\right\|_0^2+\\&+\frac{1}{p+1}\langle\partial_x(u^\tau_{\mu,n}-u^\theta_{\mu,n}),(u^\tau_{\mu,n})^{p+1}-(u^\theta_{\mu,n})^{p+1}\rangle_0\\\leq& CM^p\left\|u^\tau_{\mu,n}-u^\theta_{\mu,n}\right\|_0^2\end{aligned}$$

Gracias a la desigualdad de Gronwall y al Lema 2.19 se obtiene

$$\left\|u^\tau_{\mu,n}-u^\theta_{\mu,n}\right\|_0^2\leq CM^p\left\|\phi^\tau_n-\phi^\theta_n\right\|_0^2\leq CM^p|\tau-\theta|^2\left\|\phi_n\right\|_0^2. \tag{2.60}$$

De las desigualdades (2.57) a (2.60) obtenemos (2.55).

Ahora bien, de la Proposición 1.27, tenemos

$$\begin{aligned}|\langle\partial_x^{-1}(u^\tau_{\mu,n}-u^\theta_{\mu,n}),(u^\tau_{\mu,n})^{p+1}-(u^\theta_{\mu,n})^{p+1}\rangle_s|=&\\=&|\langle\partial_x^{-1}(u^\tau_{\mu,n}-u^\theta_{\mu,n}),q(u^\tau_{\mu,n},u^\theta_{\mu,n})(u^\tau_{\mu,n}-u^\theta_{\mu,n})\rangle_s\\\leq& CM^p\left\|\partial_x^{-1}(u^\tau_{\mu,n}-u^\theta_{\mu,n})\right\|_s^2,\end{aligned} \tag{2.61}$$

donde $q(x,y)=\sum_{i=0}^p x^iy^{p-i}$.

De (2.53), (2.55), (2.54) y (2.61), se tiene que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u^\tau_{\mu,n}-u^\theta_{\mu,n}\right\|_{X^s}^2\leq C\left(\tau^{2\left(1-\frac{s_0+1}{s}\right)}+\left\|u^\tau_{\mu,n}-u^\theta_{\mu,n}\right\|_{X^s}^2\right).$$

La desigualdad de Gronwall implica que

$$\left\|u^\tau_{\mu,n}-u^\theta_{\mu,n}\right\|_{X^s}^2\leq C\left(\left\|\phi^\tau_n-\phi^\theta_n\right\|_{X^s}^2+\tau^{2\left(1-\frac{s_0+1}{s}\right)}\right)$$

□

Corolario 2.21. *Sean ϕ_n,ϕ^τ_n y $u^\tau_{\mu,n}$ como en el resultado anterior. Entonces, para $n\geq N_0$ fijo, $\left\{u^\tau_{\mu,n}\right\}_{\tau>0}$ converge uniformemente en μ y t a $u_{\mu,n}$, cuando $\tau\to 0+$. En otras palabras,*

$$\lim_{\tau\to0+}\sup_{t\in[0,T],\mu>0}\left\|u^\tau_{\mu,n}(t)-u_{\mu,n}(t)\right\|_s=0$$

Demostración. Tomando $\theta=0$ en la Proposición 2.20. □

Teorema 2.22. *En X^s, la aplicación $\phi \mapsto u$, donde u es solución de 2.18, es continua. Más precisamente, si $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ es una sucesión tal que $\phi_n \to \phi_\infty$ en X^s y si $u_{0,n} \in C([0,T_{s,n}],X^s)$ son las correspondientes soluciones de* (2.18), *entonces dado cualquier $T \in (0,T_{s,\infty})$ existe un $N_0 = N_0(s,\phi_\infty)$ tal que $T_{s,n} \geq T$ para todo $n \geq N_0$ y*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|u_{0,n}(t) - u_{0,\infty}(t)\|_s = 0$$

Demostración. Sea ϕ_n^τ como en la Proposición 2.20 y sean $u^\tau_{\mu,n}, \mu \geq 0$ las correspondientes soluciones con tiempos de existencia $T_{s,n}$. Dado $T \in (0,T_{s,\infty})$, $u^\tau_{\mu.n} \in C([0,T],X^s)$ para todo n suficientemente grande. Pues bien, de un lado tenemos

$$\begin{aligned}
\langle u_{0,n} - u_{0,\infty}, \varphi\rangle_{X^s} &= \lim_{\mu\to 0+} \langle u_{\mu,n} - u_{\mu,\infty}, \varphi\rangle_{X^s} \\
&= \lim_{\mu\to 0+} \big[\langle u_{\mu,n} - u^\tau_{\mu,n}, \varphi\rangle_{X^s} + \langle u^\tau_{\mu,n} - u^\tau_{\mu,\infty}, \varphi\rangle_{X^s} + \\
&\qquad + \langle u^\tau_{\mu,\infty} - u_{\mu,\infty}, \varphi\rangle_{X^s}\big] \\
&= \lim_{\mu\to 0+} \big[\langle u_{\mu,n} - u^\tau_{\mu,n}, \varphi\rangle_{X^s} + \langle u^\tau_{\mu,m} - u_{\mu,m}, \varphi\rangle_{X^s}\big] + \\
&\qquad + \langle u^\tau_{0,n} - u^\tau_{0,\infty}, \varphi\rangle_{X^s}.
\end{aligned}$$

De otro lado, el Corolario 2.21 implica que, dado $\epsilon > 0$

$$|\langle u_{\mu,n} - u^\tau_{\mu,n}, \varphi\rangle_{X^s} + \langle u^\tau_{\mu,m} - u_{\mu,m}, \varphi\rangle_{X^s}| \leq \epsilon \|\varphi\|_{X^s},$$

para todo $\mu > 0$. Luego,

$$|\langle u_{0,n} - u_{0,\infty}, \varphi\rangle_{X^s}| \leq \epsilon \|\varphi\|_{X^s} + \left\|u^\tau_{0,n} - u^\tau_{0,\infty}\right\|_{X^s} \|\varphi\|_{X^s},$$

para todo $\varphi \in X^s$. Por lo tanto,

$$\|u_{0,n} - u_{0,\infty}\|_{X^s} \leq \epsilon + \left\|u^\tau_{0,n} - u^\tau_{0,\infty}\right\|_{X^s}. \tag{2.62}$$

Argumentos similares a los empleados en la Proposición (2.20) nos permiten mostrar que, para τ suficientemente pequeño,

$$\left\|u^\tau_{\mu,n} - u^\tau_{\mu,\infty}\right\|_{X^s} \leq C \|\phi^\tau_n - \phi^\tau_\infty\|_{X^s} \tau^{-\frac{1}{s}}.$$

Ya que $u^\tau_{\mu,n} - u^\tau_{\mu,\infty}$ converge débilmente en X^s a $u^\tau_{0,n} - u^\tau_{0,\infty}$, se sigue que

$$\left\|u^\tau_{0,n} - u^\tau_{0,\infty}\right\|_{X^s} \leq C \|\phi^\tau_n - \phi^\tau_\infty\|_{X^s} \tau^{-\frac{1}{s}} \leq \|\phi_n - \phi_\infty\|_{X^s} \tau^{-\frac{1}{s}},$$

para τ suficientemente pequeño. Luego, fijando τ suficientemente pequeño, podemos concluir de (2.62) que

$$\|u_{0,n} - u_{0,\infty}\|_{X^s} \leq 2\epsilon,$$

para n suficientemente grande. □

Aquí también tenemos un resultado similar al Teorema 2.5.

Teorema 2.23. *El tiempo de existencia para* (2.18) *puede ser elegido independiente de s en el siguiente sentido: si $u \in C([0,T],X^s)$ es la solución de* (2.18) *con $u(0) = \phi \in X^r$, para algún $r > s$, entonces, $u \in C([0,T],X^r)$. En particular, si $\phi \in X^\infty$, $u \in C([0,T],X^\infty)$.*

Demostración. Nótese que $u = u(t)$ es una solución de (2.18) si y sólo si $v(t) = P(t)u(t)$ es una solución de

$$\begin{aligned} &\partial_t v + A(t,v)v = 0 \\ &v(0) = \phi \end{aligned}$$

donde $P(t) = e^{tA_0}$ y $A(t,a) = P(t)(P(-t)v)^p\partial_x P(-t)$. Mostrar que $v \in C([0,T], H^r)$ sigue exactamente el mismo razonamiento que se hizo en el Teorema 2.5. Ahora bien, $\partial_x^{-1}v$ satisface la ecuación

$$\partial_t\partial_x^{-1}v + \frac{1}{p+1}P(t)(P(-t)v)^{p+1} = 0.$$

Ya que $\phi \in X^r$, de aquí se sigue que $v \in C([0,T],X^r)$. □

Observación 2.1. En el caso $\gamma = 0$ se puede obtener el buen planteamiento en X^s, para $s > 2$, a partir del buen planteamiento en H^s, mostrado en la sección anterior (Sección 2.1). En efecto, si $\phi \in X^s$ y u es solución de (2.1), entonces

$$\partial_x^{-1}u = P(-t)(\partial_x^{-1}\phi) - \int_0^t P(-t+\tau)\left(\frac{u^{p+1}}{p+1}(\tau)\right)d\tau,$$

donde $P(t) = e^{tA_0}$, $A_0 = \mathcal{H}\partial_x^2 + \alpha\mathcal{H}\partial_y^2$. De aquí es fácil mostrar el buen planteamiento en X^s.

Finalicemos esta sección mostrando que los funcionales E y Q dados por (4) y (5) en la introducción, son conservados por las soluciones de (3) en X^s. Es evidente que

$$\frac{dQ(u)}{dt} = \int_{\mathbb{R}^2} uu_t\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} u(\mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha\mathcal{H}\partial_x^2 u - \gamma\partial_x^{-1}\partial_y^2 u + u^{p+1}u_x)\,dxdy = 0.$$

Para ver que E es conservado necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.24. *Sea $\gamma \neq 0$. Si u es solución de* (3) *en X^s (en otras palabras, solución de* (2.1) *en X^s) y si $\partial_x^{-1}\phi = \partial_x^{-1}u(0) \in X^s$, entonces $\frac{du}{dt} \in C([0,T],X^{s-2})$.*

Demostración. Observese primero que (2.1) es equivalente a la ecuación integral

$$u = P(-t)u(0) - \int_0^t P(-t+\tau)\,(u^p\partial_x u(\tau))\,d\tau, \tag{2.63}$$

donde $P(t)$ es dado como en la demostración del teorema anterior. Derivando en ambos lados de la ecuación, tenemos

$$\frac{du}{dt} = AP(-t)u(0) - u^p u_x - \int_0^t AP(-t+\tau)\left(u^p \partial_x u(\tau)\right) d\tau,$$

donde A también es como en la demostración anterior. Ahora bien, como

$$\begin{aligned} AP(-t+\tau)\left(u^p \partial_x u(\tau)\right) = \frac{d}{d\tau}\left(P(-t+\tau)\left(u^p \partial_x u(\tau)\right)\right) + \\ + P(-t+\tau)\partial_x \left(u^p \frac{du}{d\tau}(\tau)\right), \end{aligned} \tag{2.64}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = \partial_x P(-t)\left(A\partial_x^{-1}u(0) + \frac{u^{p+1}}{p+1}(0)\right) - 2\partial_x\left(\frac{u^{p+1}}{p+1}\right) - \\ - \int_0^t P(-t+\tau)\partial_x\left(u^p \frac{du}{d\tau}(\tau)\right) d\tau. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Claramente, el lado derecho de la anterior ecuación está en $C([0,T], X^{s-2})$, que era lo que queríamos demostrar. $\square$

Supongamos que u es solución de (2.1) en X^s y que $\partial_x^{-1}\phi \in X^s$. El lema anterior nos garantiza que $E'(u) = \mathcal{H}\partial_x u + \alpha\mathcal{H}\partial_x^{-1}\partial_y^2 u - \gamma\partial_x^{-2}\partial_y^2 u + \frac{u^{p+1}}{p+1} \in H^{s-2}$, en el caso en que $\gamma \neq 0$, y en el otro caso es evidente. Luego, en este caso, la ecuación (2.1) puede ser escrita como

$$\frac{du}{dt} = -\partial_x E'(u),$$

en H^{s-2}. De aquí, y gracias al buen planteamiento en X^s, se sigue inmediatamente que E es conservada.

Capítulo 3

Algunos resultados en espacios con peso

En este capítulo examinamos el buen planteamiento de (2.1) en algunos espacios de Sobolev con peso.

3.1. Teoría local en $X^s(w^2)$ cuando $\gamma = 0$

Teorema 3.1. *Supongamos w es un peso con todas sus primeras y segundas derivadas parciales acotadas y, para algún λ^*, existen $C_\lambda > 0$ tales que*

$$|w(x,y)| \leq C_\lambda e^{\lambda(x^2+y^2)},$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y todo $\lambda \in (0,\lambda^*)$. Sea

$$X^s(w^2) = \{f \in X^s \,|\, wf \in L^2\}.$$

Este es un espacio de Hilbert con el producto interno $\langle \cdot,\cdot \rangle_{w,s} = \langle \cdot,\cdot \rangle_{X^s} + \langle \cdot,\cdot \rangle_{L^2(w^2)}$. Entonces, para $s > 2$, el problema de Cauchy (2.1) *es bien planteado en $X^s(w^2)$.*

Demostración. En esta demostración haremos uso del siguiente lema.

Lema 3.2. *Para w como en el teorema. Sea $w_\lambda(x,y) = w(x,y)e^{-\lambda(x^2+y^2)}$. entonces existen constantes $c_1,\ c_2,\ c_3$ y c_4 independientes de λ y tales que*

$$|\nabla w_\lambda|_\infty \leq c_1 |\nabla w|_\infty + c_2$$

y

$$|D^\alpha w_\lambda|_\infty \leq c_3 |\nabla w|_\infty + |D^\alpha w|_\infty + c_4,$$

para cualquier mult-índice $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$ con $|\alpha| = 2$.

En vista del buen planteamiento local en X^s, solo basta con examinar algunas estimativas en la norma de $L^2(w^2)$. Pues bien, con este propósito sea $w_\lambda(x,y) = w(x,y)e^{-\lambda(x^2+y^2)}$. Es claro que $||w_\lambda u(t)||_0 < \infty$ y $||w_\lambda u_t(t)||_0 < \infty$, para todo $t \in [0,T]$ y todo $\lambda > 0$. Así pues, multiplicando en ambos lados de la ecuación 2.1 por $w_\lambda^2 u$ e integrando obtenemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w_\lambda u||_0^2 = \langle w_\lambda u, w_\lambda\big(-\mathcal{H}^{(x)}\partial_x^2 u - \alpha\mathcal{H}^{(x)}\partial_y^2 u - u^p u_x\big)\rangle_0.$$

Los dos primeros términos de las suma en la parte derecha de la anterior ecuación satisfacen

$$\begin{aligned}\langle w_\lambda u, w_\lambda \mathcal{H}^{(x)}\partial_x^2 u\rangle_0 &= \langle w_\lambda u, [w_\lambda, \mathcal{H}^{(x)}]\partial_x^2 u\rangle_0 + \langle w_\lambda u, \mathcal{H}^{(x)}[w_\lambda, \partial_x^2]u\rangle_0\\ \langle w_\lambda u, w_\lambda \mathcal{H}^{(x)}\partial_y^2 u\rangle_0 &= \langle w_\lambda u, [w_\lambda \mathcal{H}^{(x)}]\partial_y^2 u\rangle_0 + \langle w_\lambda u, \mathcal{H}^{(x)}[w_\lambda, \partial_y^2]u\rangle_0\end{aligned}$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz, el teorema del conmutador de Calderón y el lema anterior implican que

$$\begin{aligned}\langle w_\lambda u, [w_\lambda, \mathcal{H}^{(x)}]\partial_y^2 u\rangle_0 &\le \|w_\lambda u\|_0\|[w_\lambda, \mathcal{H}^{(x)}]\partial_y^2 u\|_0\\ &\le C_1|\partial_x w_\lambda|_\infty\|w_\lambda u\|_0\|\partial_x^{-1}\partial_y^2 u\|_0\\ &\le C_2\|w_\lambda u\|_0\|u\|_{X^s}.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\langle w_\lambda u, \mathcal{H}^{(x)}[w_\lambda, \partial_y^2]u\rangle_0 &\le \|w_\lambda u\|_0\|[w_\lambda, \partial_y^2]u\|_0\\ &\le C_1\|w_\lambda u\|_0\left(|\partial_y^2 w_\lambda|_\infty\|u\|_0 + 2|\partial_y w_\lambda|_\infty\|\partial_y u\|_0\right)\\ &\le C_2\|w_\lambda u\|_0\|u\|_{X^s}.\end{aligned}$$

De manera totalmente similar obtenemos

$$\langle w_\lambda u, [w_\lambda, \mathcal{H}^{(x)}]\partial_x^2 u\rangle_0 \le C\|w_\lambda u\|_0\|u\|_{X_s}$$

y

$$\langle w_\lambda u, \mathcal{H}^{(x)}[w_\lambda, \partial_x^2]u\rangle_0 \le C\|w_\lambda u\|_0\|u\|_{X_s}.$$

Además,

$$\|w_\lambda u^p u_x\|_0 \le |u^{p-1}u_x|_\infty\|w_\lambda u\|_0 \le C_s\|w_\lambda u\|_0.$$

Con ayuda de las estimativas anteriores podemos inferir que

$$\frac{d}{dt}\|w_\lambda u\|_0^2 \le A\|u\|_{X^s}^2 + B\|w_\lambda u\|_0^2,$$

donde A y B son constantes que no dependen de λ. De la desigualdad de Gronwall se concluye que

$$\|w_\lambda u\|_0^2 \le e^{BT}(\|w_\lambda\phi\|_0^2 + TA\|u\|_{X^s}^2).$$

Gracias al teorema de la convergencia monótona de Lebesgue, se sigue que

$$\|wu\|_0^2 \leq e^{BT}(\|w\phi\|_0^2 + TA\|u\|_{X^s}^2)$$

Por lo tanto, $u(t) \in X_s(w^2)$, para todo $t \in [0,T]$. Procediendo de la misma manera se deduce que

$$\|w(u-v)\|_0^2 \leq e^{BT}(\|w(\phi-\psi)\|_0^2 + TA\|u-v\|_{X^s}^2),$$

donde $\psi \in X^s(w^2)$ y v es la solución de (2.1), con ψ en lugar de ϕ. Falta ver que $t \mapsto u(t)$ es continua de $[0,T]$ en $X^s(w^2)$. Pero ésto es inmediato del teorema de la convergencia dominada, de la continuidad de u en X^s y de la ecuación

$$\|w(u(t)-u(t'))\|_0 \leq \|(w-w_\lambda)u(t)\|_0 + \|w_\lambda(u(t)-u(t'))\|_0 + \|(w_\lambda - w)u(t')\|_0.$$

Esto termina la demostración del teorema. □

Observación 3.1. Los pesos $w_\vartheta(x,y) = (1+x^2+y^2)^{\vartheta/2}$, para $\vartheta \in [0,1]$, satisfacen las condiciones del precedente teorema.

3.2. Con peso $w = w(y)$ cuando $\gamma \neq 0$

Con $\gamma \neq 0$ tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3. *Supongamos que w en el Teorema 3.1 solo depende de y. Entonces, en este caso el problema de Cauchy 2.18 es bien planteado en $X^s(w^2)$.*

Demostración. Procedemos como en el Teorema 3.1. Aquí, el hecho de que w no dependa de y facilita las cuentas. Es claro que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w_\lambda u||_0^2 = \langle w_\lambda u, w_\lambda\big(- \mathcal{H}^{(x)}\partial_x^2 u - \alpha \mathcal{H}^{(x)}\partial_y^2 u + \gamma \partial_x^{-1}\partial_y^2 u - u^p u_x\big)\rangle_0.$$

En este caso las estimativas de los término lineales son

$$\begin{aligned}
\langle w_\lambda u, w_\lambda \mathcal{H}^{(x)}\partial_x^2 u\rangle_0 &= 0\\
\langle w_\lambda u, w_\lambda \mathcal{H}^{(x)}\partial_y^2 u\rangle_0 &= \langle w_\lambda u, \mathcal{H}^{(x)}[w_\lambda, \partial_y^2]u\rangle_0\\
\langle w_\lambda u, w_\lambda \partial_x^{-1}\partial_y^2 u\rangle_0 &= \langle w_\lambda u, [w_\lambda, \partial_y^2]\partial_x^{-1} u\rangle_0
\end{aligned}$$

De aquí en adelante la demostración sigue los mismos pasos de la demostración del Teorema 3.1. □

Observación 3.2. Observe que $w(y) = y$ es un caso particular de los pesos considerados en el anterior teorema. En realidad, este teorema vale aún para el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + u^p u_x + \delta\partial_x^3 u + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha\mathcal{H}\partial_y^2 u - \gamma\partial_x^{-1}u_{yy} = 0, \\ u(0) = \phi, \end{cases} \tag{3.1}$$

lo que representa una mejora del Teorema 2.4 en [6].

Demostración. Por comodidad haremos la prueba para el caso $\alpha = \gamma = 1$. Sea $\chi_n(y)$ definida por

$$\chi_n(y) = \begin{cases} y^2, & \text{si } -n \leq \text{y} \leq \text{n}, \\ n^2, & \text{si } \|y\| \geq \text{n}. \end{cases}$$

Multiplicando $u_t + \mathcal{H}\Delta u + \partial_x^{-1}\partial_y^2 u + u^p u_x = 0$ por $u\chi_n$ e integrando sobre $\mathbb{R}^2$. Obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} \chi_n(y)u^2 dxdy + \int_{\mathbb{R}^2} \chi_n(y)u\mathcal{H}\partial_x^2 udxdy + \int_{\mathbb{R}^2} \chi_n(y)u\mathcal{H}\partial_y^2 udxdy + \int_{\mathbb{R}^2} \chi_n(y)uv_y dxdy + \int_{\mathbb{R}^2} \chi_n(y)u^{p+1}u_x dxdy = 0$$

donde $u_x = v_y$
Nótese que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_n(y)u^{p+1}u_x dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} \partial_x[\chi_n(y)\frac{u^{p+2}}{p+2}]dxdy = 0$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_n(y)u\mathcal{H}\partial_x^2 udxdy = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_n(y)u\mathcal{H}\partial_y^2 udxdy = -\int_{\mathbb{R}^2} \chi_n'(y)u\mathcal{H}\partial_y udxdy - \int_{\mathbb{R}^2} \chi_n(y)(\partial_y u)(\mathcal{H}\partial_y u)dxdy$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^2} \chi_n' u\mathcal{H}\partial_y udxdy$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^2} uv_y\chi_n dxdy = -\int_{\mathbb{R}^2} uv\chi_n' dxdy,$$

teniendo encuenta que $|\chi_n'(y)|^2 \leq 4|\chi_n(y)|$, obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} \chi_n u^2 dxdy \leq 2\int_{\mathbb{R}^2} \chi_n u^2 dxdy + \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_y u)^2 dxdy + \int_{\mathbb{R}^2} v^2 dxdy$$

y por la desigualdad de Gronwall

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\chi_n^{1/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C(\|y\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, T, |\phi|_{X^s}]$$

Puesto que

$$\|\chi_n^{1/2}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|y\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

Obtenemos el resultado haciendo $n \to \infty$

□

Capítulo 4

Comportamiento asintótico de soluciones con dato inicial pequeño

Para $\gamma = 0$, en este capítulo mostraremos que la solución es global si tomamos un dato lo suficientemente pequeño, en un sentido que precisaremos. También mostraremos que la solución, en un tiempo suficientemente grande, se comporta como la solución de la ecuación lineal asociada. A éstas últimas se les suele llamar los *estados de dispersión de la onda* (*scattering states* en inglés).

4.1. Solución global para dato pequeño

Para $\phi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, en el Capítulo 2 nosotros notamos por $P(-t)\phi$ la solución del problema lineal asociado a la ecuación (2.1), es decir, si $u(t) = P(-t)\phi$, u satisface la ecuación

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha \mathcal{H}\partial_y^2 u = 0.$$

Sin perdida de generalidad podemos suponer que $\alpha = 1$.

Si $\phi \in \mathcal{S}$ entonces

$$P(-t)\phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i(\operatorname{sgn}(\xi)(\xi^2+\eta^2)t + x\xi + y\eta)}\widehat{\phi}(\xi,\eta)d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi}I(t) * \phi(x,y)$$

donde $I(t) = (e^{i\operatorname{sgn}(\xi)(\xi^2+\eta^2)t})^{\vee}$.

Lema 4.1. *Para cualesquiera $x,\ y$ y $t \neq 0$ números reales,*

$$I(t)(x,y) = \frac{c}{t}e^{-\frac{i}{4t}(x^2+y^2)}\int_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{\frac{i}{4}s^2}ds + \frac{\bar{c}}{t}e^{\frac{i}{4t}(x^2+y^2)}\int_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{i}{4}s^2}ds,$$

donde $c = (1+i)/2$.

Demostración. Es claro que

$$
\begin{aligned}
2\pi I(1)(x,y) =& \int_{\mathbb{R}}\int_0^{\infty} e^{i(\xi^2+\eta^2+x\xi+y\eta)}\,d\xi d\eta + \int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{0} e^{i(-\xi^2-\eta^2+x\xi+y\eta)}\,d\xi d\eta \\
=& e^{-\frac{i}{4}(x^2+y^2)}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{i(\eta+y/2)^2}\,d\eta\right)\left(\int_0^{\infty} e^{i(\xi+x/2)^2}\,d\xi\right)+ \\
&+ e^{\frac{i}{4}(x^2+y^2)}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i(\eta-y/2)^2}\,d\eta\right)\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-i(\xi-x/2)^2}\,d\xi\right).
\end{aligned}
$$

Un simple cambio de variable demuestra el teorema para $t = 1$. Usando la propiedad de homogeinidad de la transformada de Fourier se sigue el teorema para cualquier $t \neq 0$. □

El lema anterior implica la siguiente estimativa $L^p - L^q$ para el grupo $P(t)$.

Proposición 4.2. *Para cualquier $f \in L^1 \bigcap L^2$, se tiene que*

$$|P(-t)f|_{\frac{2}{1-\theta}} \leq c|t|^{-\theta}|f|_{\frac{2}{1+\theta}},$$

para $\theta \in [0,1]$

Demostración. El resultado lo obtenemos aplicando la desigualdad de Young para la convolución, el lema anterior e interpolación. □

Del lema de encaje de Sobolev se sigue la siguiente propocisión.

Proposición 4.3. *Para $s > 1$ y $f \in L^1 \bigcap H^s$, tenemos que*

$$|P(-t)f|_{\infty} \leq c(1+|t|)^{-1}(|f|_1 + \|f\|_s)$$

Ahora sí, estamos en condiciones de demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.4. *Sean $p \geq 3$ y $s > 3$. Entonces, existe $\delta > 0$ y $R = R(\delta) > 0$ tal que si $\phi \in L^1_1 \bigcap H^s$ satisface*

$$|\phi|_{1,1} + \|\phi\|_s < \delta,$$

la solución u de (2.1) está en $C_b(\mathbb{R}, H^s)$ y satisface

$$\sup_{t\in R}(1+|t|)|u(t)|_{1,\infty} \leq R. \tag{4.1}$$

Demostración. Para la prueba necesitamos el siguiente lema cuya demostración puede ser encontrada en [25] (Lema 3.0.52)

Lema 4.5. *Para $t \geq 0$, sea*

$$J(t) = (1+t)\int_0^t \frac{1}{(1+t-\tau)(1+\tau)^{p-1}}d\tau.$$

Entonces,

1. $J(t) = O(1)$ *cuando* $t \to \infty$, *si* $p \geq 3$
2. $J(t) \to \infty$ *cuando* $t \to \infty$, *si* $p = 1, 2$.

Veamos primero que

$$\|u(t)\|_s \leq \|\phi\|_s \exp\left(c \int_0^t |u_x|_\infty |u|_\infty^{p-1} d\tau\right). \tag{4.2}$$

Haciendo el producto interno en H^s por u en ambos lados de la ecuación llegamos a que

$$\frac{d}{dt}\|u\|_s^2 = -2\langle u, u^p u_x\rangle_s.$$

En virtud de la desigualdad de Kato-Ponce y su corolario (Corolario 1.23), obtenemos

$$\frac{d}{dt}\|u\|_s^2 \leq C|u|_\infty^{p-1}\|u\|_s^2.$$

La desigualdad (4.2) sigue de esta última y la desigualdad de Gronwall.

Ahora, en virtud de (4.2) es suficiente demostrar (4.1). En efecto, de las hipótesis, tenemos que

$$\int_0^t |u_x|_\infty |u|_\infty^{p-1} d\tau \leq \int_0^t |u|_{1,\infty}^p d\tau \leq R^p \int_0^t (1 + |\tau|)^{-p} d\tau \leq C.$$

Entonces probemos (4.1). Tomemos $T \in (0, T_s)$ y sea $K(T) = \sup_{t\in[0,T]}\{(1+|t|)|u(t)|_{1,\infty}\}$. De la Proposición 4.3, el Lema 4.5, (4.2) y la ecuación integral (2.63), se obtiene

$$\begin{aligned}(1+t)|u(t)|_{1,\infty} &\leq c\delta + c(1+t)\int_0^t (1+t-\tau)^{-1}|u(\tau)|_\infty^{p-1}\|u(\tau)\|_s^2\, d\tau \\ &\leq c\delta + c\delta^2 K(T)^{p-1} e^{cK(t)^p},\end{aligned}$$

para $t \in [0, T]$.

Elegimos $\delta > 0$, suficientemente pequeño, tal que la funciòn $x \mapsto c\delta + c\delta^2 x^{p-1} e^{cx^p} - x$, tiene un cero positivo. Sea $R = R(\delta)$ el primer cero positivo de esta función. Entonces, las estimativas anteriormente mostradas implican que $K(T) \leq R$. Del hecho de que el conjunto de soluciones es invariante bajo la transformación $(t, x, y) \to (-t, -x, -y)$ y haciendo uso de un argumento de extensión se obtiene el teorema. □

Como corolario se tiene el siguiente interesante teorema.

Teorema 4.6. *Bajo las hipótesis del teorema anterior, existe* $\phi_\pm \in H^s$ *tal que*

$$\|u(t) - P(-t)\phi_\pm\|_r \to 0,$$

cuando $t \to \pm\infty$, *para* $r \in [s-1, s)$.

Demostración. Vea [25]. □

Capítulo 5

Existencia de ondas solitarias

En este capítulo vamos a probar la existencia de ondas solitarias no triviales para la ecuación

$$(u_t + u^p u_x + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha\mathcal{H}\partial_y^2 u)_x - \gamma u_{yy} = 0, \tag{5.1}$$

donde $\mathcal{H}$ es la transformada de Hilbert con respecto a x y α y γ son números reales no negativos y no simultaneamente cero.

5.1. Existencia

Si $\phi(x - ct, y)$ es una onda solitaria que es solución de (3), entonces

$$(-c\partial_x\phi + \phi^p\partial_x\phi + \mathcal{H}(\partial_x^2\phi + \alpha\partial_y^2\phi))_x - \gamma\partial_y^2\phi = 0. \tag{5.2}$$

Además, si $\phi \in \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$, podemos escribir (5.2) como

$$-c\phi + \mathcal{H}\partial_x\phi + \alpha\mathcal{H}\partial_x^{-1}\partial_y^2\phi - \gamma\partial_x^{-2}\partial_y^2\phi + \frac{1}{p+1}\phi^{p+1} = 0. \tag{5.3}$$

donde el término de el lado derecho está en $\left(\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\right)^*$, el dual topológico de $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$. Entonces, ϕ es un punto crítico del funcional Φ sobre $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$ definido como

$$\Phi(\phi) = \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{2}\left(c\phi^2 + (D_x^{\frac{1}{2}}\phi)^2 + \alpha(D_x^{-\frac{1}{2}}\partial_y\phi)^2 + \gamma(\partial_x^{-1}\partial_y\phi)^2\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\phi^{p+2}}{(p+1)(p+2)}\right] dxdy.$$

Por lo tanto, para garantizar que existen ondas solitarias asociadas a la ecuación (3), es suficiente probar que Φ tiene puntos críticos en $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$ no nulos.

En esta dirección, veamos primero que Φ satisface las condiciones del Lema 1.29. Es evidente que Φ es un funcional C^1 para $0 < p \leq 2$, $\Phi(0) = 0$ y, puesto que

$$\Phi(\phi) \geq \frac{\text{mín}\{c, 1\}}{2} \|\phi\|_{\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}} - \frac{|\phi|^{p+2}}{(p+1)(p+2)},$$

por el Lema 1.7, existe un ρ tal que

$$\inf_{\partial B_\rho(0)} \Phi = \tau > 0,$$

lo cual muestra 1). Ahora, para $\vartheta \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$,

$$\Phi(\vartheta u) = \vartheta^2 \left(\Phi(u) + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{u^{p+2}}{(p+1)(p+2)}\, dxdy \right) - \vartheta^{p+2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{u^{p+2}}{(p+1)(p+2)}\, dxdy.$$

Entonces, tomando u fijo y ϑ suficientemente grande, tenemos 2) con $\beta = \vartheta u$. Así, hemos probado el siguiente lema.

Lema 5.1. *Sean Φ, τ y β definidos como antes y sean κ y c definidos como en el Lema 1.29. Entonces, existe una sucesión (ϕ_n) tal que $\Phi(\phi_n) \to c$ y $\Phi'(\phi_n) \to 0$.*

Ahora, estamos en condiciones de probar el siguiente teorema .

Teorema 5.2. (5.2) *tiene soluciones no triviales en $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$.*

Demostración. Veamos que Φ tiene puntos críticos diferentes de cero en $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$. El Lema 5.1 garantiza la existencia de una sucesión de Palais-Smale (ϕ_n) al nivel c de Φ. Por lo tanto,

$$c + 1 \geq \Phi(\phi_n) - \frac{\Phi'(\phi_n)(\phi_n)}{p+2} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+2} \right) \text{mín}\{1, c\} \|\phi_n\|^2_{\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}},$$

para n suficientemente grande. De lo cual la sucesión (ϕ_n) resulta ser acotada en $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$. Considerando que

$$0 < c = \lim_{n\to\infty} \Phi(\phi_n) - \frac{1}{2}\Phi'(\phi_n)(\phi_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{p}{2(p+2)(p+1)} \int_{\mathbb{R}^2} \phi_n^{p+2}\, dxdy,$$

el Lema 1.18 implica que

$$\delta = \limsup_{n\to\infty} \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \int_{(x,y)+\Omega_1} \phi_n^2\, dxdy > 0.$$

Entonces, tomando una subsucesión si es necesario, podemos suponer que existe una sucesión (x_n, y_n) en $\mathbb{R}$ tal que

$$\int_{(x_n,y_n)+\Omega_1} \phi_n^2\, dxdy > \delta/2, \tag{5.4}$$

para n suficientemente grande. Sea $\tilde{\phi}_n = \phi_n(\cdot + (x_n, y_n))$. Entonces, nuevamente tomando una subsucesión si es necesario, podemos suponer que, para algún $\phi \in \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$, $\tilde{\phi}_n \rightharpoonup \phi$ en $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$. En vista de (5.4), para n suficientemente grande, del Lema 1.17, se tiene que $\phi \neq 0$. El Lema 1.17 y la continuidad de la función $u \to u^{p+1}$ de L^{p+2} a $L^{\frac{p+2}{p+1}}$, en cualquier espacio de medida, implican que

$$\Phi'(\phi)(w) = \lim_{n\to\infty} \Phi'(\tilde{\phi}_n)(w) = 0,$$

para todo $w \in \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$. Esto demuestra el teorema. □

5.2. Suavidad y analiticidad de las ondas solitarias

En está sección probaremos que, en el caso en que $p = 1$, las ondas solitarias asociadas a la ecuación (3) son C^∞.

Teorema 5.3. *Sea $p = 1$. Si $\phi \in \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$ es solución de* (5.2)*, $\phi \in H^\infty = \bigcap_0^\infty H^n$. Además, ϕ es analítica.*

Demostración. Supongamos primero que $\gamma = 0$. En este caso, sin perdida de generalidad, podemos suponer que $\alpha = 1$. Por el Lema 1.7, $\phi \in L^4$. En particular, $\frac{1}{2}\phi^2 + c\phi \in L^2$. Ahora, a partir de (5.2), tenemos que

$$\Delta\phi = \mathcal{H}\partial_x(\frac{\phi^2}{2} - c\phi). \tag{5.5}$$

Entonces, el teorema de Plancherel implica que $\phi \in H^1$. Así, por el teorema de inmersión de Sobolev, $\frac{1}{2}\phi^2 + c\phi \in L^p$, $2 \le p < \infty$. Puesto que la transformada de Hilbert es acotada de $L^p \to L^p$ y, del teorema de Lizorkin (Teorema 1.30), $\frac{\xi^2}{\xi^2+\eta^2}$ y $\frac{\xi\eta}{\xi^2+\eta^2}$ son multiplicadores en L^p , de (5.5), tenemos que ϕ_x y $\phi_y \in L^p$. De donde, nuevamente (5.5) implica que $\phi \in H^2$. El teorema quedará demostrado una vez que hayamos observado que que si $\phi \in H^n$ entonces $\phi \in H^{n+1}$, para $n \ge 2$. Esta última afirmación se tiene a partir de (5.5), el hecho que H^n es un álgebra de Banach, para $n \ge 2$, y el teorema de Plancherel .

Supongamos ahora $\alpha\gamma \neq 0$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $\alpha = \gamma = 1$. Así, (5.2) se tranforma en la ecuación

$$\mathcal{H}\partial_x^3\phi + \mathcal{H}\partial_x\partial_y^2\phi - \partial_y^2\phi = -\partial_x^2(\frac{\phi^2}{2} - c\phi). \tag{5.6}$$

Aquí, se observa primero que, gracias al teorema de Lizorkin, $\frac{\xi^3}{|\xi|^3+|\xi|\eta^2+\eta^2}$ y $\frac{\xi^2\eta}{|\xi|^3+|\xi|\eta^2+\eta^2}$ son multiplicadores en L^p, $1 < p < \infty$. De aquí en adelante es solo seguir los pasos del anterior caso. El caso $\alpha = 0$ es hecho en [9].

Para ver la analiticidad de ϕ es suficiente probar que

$$\|\partial^\beta\phi\|_{H^2} \le C|\beta|!\Big(\frac{R}{2}\Big)^{|\beta|}, \tag{5.7}$$

para algún $R > 0$ y todo $\beta \in \mathbb{N}^2$. Solo consideramos el caso $\alpha \neq 0$ (el caso $\alpha = 0$ es tratado de manera similar). Demostraremos que existe $R > 0$ tal que para todo $\beta \in \mathbb{N}^2$

$$\|\partial^\beta \phi\|_{H^2} \leq C \frac{(|\beta|-1)!}{(|\beta|+1)^s} \Big(\frac{R}{2}\Big)^{|\beta|-1}, \tag{5.8}$$

donde $s > 1$. Veamos ésto por inducción. Para $|\beta| = 1$ la desigualdad (5.8) es evidente; es suficiente elegir C suficientemente grande. Supongamos ahora que (5.8) es válida para $|\beta| = 1, \cdots, n$ y R (que elegiremos convenientemnte después). De la ecuación (5.2), tenemos

$$\partial_x^2 \phi + \alpha \partial_y^2 \phi - \gamma \mathcal{H} \partial_x^{-1} \partial_y^2 \phi = \mathcal{H} \partial_x (\frac{\phi^2}{2} - c\phi). \tag{5.9}$$

Aplicando ∂^β en ambos lados de la ecuación y haciendo el producto interno en H^2 con $\partial^\beta \phi$ en la última ecuación, podemos mostrar que

$$\|\nabla \partial^\beta \phi\|_{H^2} \leq C \left\| \partial^\beta \Big(\frac{\phi^2}{2} - c\phi\Big) \right\|_{H^2}. \tag{5.10}$$

Para terminar la demostración necesitamos el siguiente lema.

Lema 5.4. *(a) Si f y $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, entonces*

$$\partial^\beta \Big(f(\phi)\Big) = \sum_{j=1}^{|\beta|} \frac{f^{(j)}(\phi)}{j!} \sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_j=\beta \\ |\beta_i|\geq 1,\ \forall\ 1\leq i\leq j}} \frac{\beta!}{\beta_1! \cdots \beta_j!} \partial^{\beta_1}\phi \cdots \partial^{\beta_j}\phi.$$

(b) para cada $(n_1, \ldots, n_j) \in \mathbb{N}^j$ tenemos que

$$|\beta|! = \sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_j=\beta \\ |\beta_i|=n_i,\ \forall\ 1\leq i\leq j}} \frac{\beta! |\beta_1|! \cdots |\beta_j|!}{\beta_1! \cdots \beta_j!}.$$

(c) Para $s > 1$ existe C_2 tal que para todo j e $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k_1+\cdots+k_j=k} \frac{1}{(k_1+1)^s \cdots (k_j+1)^s} \leq \frac{C_2^{j-1}}{(k+1)^s}$$

Regresemos a la demostración del teorema. Por la parte *(a)* del Lema 5.4, la desigualdad (5.10) y el hecho que H^2 es una álgebra de Banach, se sigue

$$\|\nabla \partial^\beta \phi\|_{H^2} \leq C_1 \sum_{j=1}^{2} \sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_j=\beta \\ |\beta_i|\geq 1,\ \forall\ 1\leq i\leq j}} \frac{\beta!}{\beta_1! \cdots \beta_j!} \|\partial^{\beta_1}\phi\|_{H^2} \cdots \|\partial^{\beta_j}\phi\|_{H^2}.$$

De la hipótesis de inducción y la parte *(b)* de el mismo lema, tenemos que

$$\begin{aligned}\|\nabla\partial^{\beta}\phi\|_{H^2} \leq& C_1\sum_{j=1}^{2}C^{j}A^{|\beta|-j}\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_j=|\beta|\\ n_i\geq 1,\ \forall\ 1\leq i\leq j}}\ \sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_j=\beta\\ |\beta_i|=n_i,\ \forall\ i}}\frac{\beta!}{\beta_1!\cdots\beta_j!}\frac{(|\beta_1|-1)!\cdots(|\beta_j|-1)!}{(|\beta_1|+1)^{s}\cdots(|\beta_j|+1)^{s}}\\ \leq& C_1\sum_{j=1}^{2}\tilde{C}^{j}A^{|\beta|-j}\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_j=|\beta|\\ |n_i|\geq 1,\ \forall\ 1\leq i\leq j}}\frac{|\beta|!}{(n_1+1)^{s+1}\cdots(n_j+1)^{s+1}},\end{aligned}$$

donde $A=\frac{R}{2}$. De esta desigualdad y la parte *(c)* de el Lema 5.4, obtenemos que

$$\|\nabla\partial^{\beta}\phi\|_{H^2}\leq C_1\frac{|\beta|!}{(|\beta|+2)^{s}}A^{|\beta|}\sum_{j=1}^{2}(\tilde{C}C_2)^{j}A^{-j}.$$

Ahora elijamos R. Tomamos A suficientemente grande tal que $C_1\sum_{j=1}^{2}(\tilde{C}C_2)^{j}A^{-j}\leq C$. Es claro que esta elección no depende de β. Por lo tanto, con $R=2A$,

$$\|\nabla\partial^{\beta}\phi\|_{H^2}\leq C\frac{|\beta|!}{(|\beta|+2)^{s}}\left(\frac{R}{2}\right)^{|\beta|},$$

demostramos (5.8). Esto completa la demostración

$\square$

Bibliografía

[1] ABLOWITZ, M. J., AND CLARKSON, P. A. *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*, vol. 149 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[2] ABLOWITZ, M. J., AND SEGUR, H. Long internal waves in fluids of great depth. *Stud. Appl. Math. 62*, 3 (1980), 249–262.

[3] ABLOWITZ, M. J., AND VILLARROEL, J. On the Kadomtsev-Petviashvili equation and associated constraints. *Stud. Appl. Math. 85*, 3 (1991), 195–213.

[4] BENJAMIN, T. B. Internal waves of permanent form in fluids of great depth. *J. Fluid Mech. 29* (1967), 559–592.

[5] BERGH, J., AND LÖFSTRÖM, J. *Interpolation spaces: an introduction.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1976.

[6] BOLING, G., AND YONGQIAN, H. Remarks on the generalized Kadomtsev-Petviashvili equations and two-dimensional Benjamin-Ono equations. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A 452*, 1950 (1996), 1585–1595.

[7] BONA, J. L., AND SMITH, R. The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 278*, 1287 (1975), 555–601.

[8] CALDERÓN, A.-P. Commutators of singular integral operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 53* (1965), 1092–1099.

[9] ESFAHANI, A. Remarks on solitary waves of the generalized two dimensional benjamin-ono equation. *Appl. Math. Comput. 218*, 2 (2011), 308–323.

[10] HENRY, D. *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, vol. 840 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[11] IÓRIO, JR., R. J. The Benjamin-Ono equation in weighted Sobolev spaces. *J. Math. Anal. Appl. 157*, 2 (1991), 577–590.

[12] IÓRIO, JR., R. J., AND NUNES, W. V. L. On equations of KP-type. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 128*, 4 (1998), 725–743.

[13] KATO, T. Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations. In *Spectral theory and differential equations (Proc. Sympos., Dundee, 1974; dedicated to Konrad Jörgens)*, vol. 448 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 1975, pp. 25–70.

[14] KATO, T. On the Korteweg-de Vries equation. *Manuscripta Math. 28*, 1-3 (1979), 89–99.

[15] KATO, T. On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation. In *Studies in applied mathematics*, vol. 8 of *Adv. Math. Suppl. Stud.* Academic Press, New York, 1983, pp. 93–128.

[16] KATO, T. Abstract evolution equations, linear and quasilinear, revisited. In *Functional analysis and related topics, 1991 (Kyoto)*, vol. 1540 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 1993, pp. 103–125.

[17] KATO, T. *Perturbation theory for linear operators.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.

[18] KENIG, C. E., AND KOENIG, K. D. On the local well-posedness of the Benjamin-Ono and modified Benjamin-Ono equations. *Math. Res. Lett. 10*, 5-6 (2003), 879–895.

[19] KIM, B. *Three-dimensional solitary waves in dispersive wave systems.* PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Mathematics., Cambridge, MA, 2006.

[20] KOBAYASI, K. On a theorem for linear evolution equations of hyperbolic type. *J. Math. Soc. Japan 31*, 4 (1979), 647–654.

[21] KOCH, H., AND TZVETKOV, N. On the local well-posedness of the Benjamin-Ono equation in $H^s(\mathbb{R})$. *Int. Math. Res. Not.*, 26 (2003), 1449–1464.

[22] LINARES, F., AND PONCE, G. *Introduction to nonlinear dispersive equations.* Universitext (1979). Springer, 2009.

[23] LIZORKIN, P. I. Multipliers of Fourier integrals in the spaces $l_{p,\theta}$. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 89* (1967), 269–290.

[24] MATSUNO, Y. *Bilinear transformation method*, vol. 174 of *Mathematics in Science and Engineering.* Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984.

[25] MILANÉS, A. *On some bidimensional versions of the generalized Benjamin-Ono equation.* PhD thesis, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 2002.

[26] ONO, H. Algebraic solitary waves in stratified fluids. *J. Phys. Soc. Japan 39*, 4 (1975), 1082–1091.

[27] PONCE, G. On the global well-posedness of the Benjamin-Ono equation. *Differential Integral Equations 4*, 3 (1991), 527–542.

[28] Reed, M., and Simon, B. *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975.

[29] Tao, T. Global well-posedness of the Benjamin-Ono equation in $H^1(\mathbf{R})$. *J. Hyperbolic Differ. Equ. 1*, 1 (2004), 27–49.

[30] Triebel, H. *Interpolation theory, function spaces, differential operators.* North-Holland mathematical library. North-Holland Pub. Co., 1978.

[31] Willem, M. *Minimax theorems.* Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.