Una descomposición espectral para conjuntos singulares hiperbólicos

José Manuel Chautá Torres

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de ciencias, Departamento de matemáticas

Bogotá D.C., Colombia

2012

Una descomposición espectral para conjuntos singulares hiperbólicos

José Manuel Chautá Torres

Trabajo final presentado como requisito para optar al título: *Magister en ciencias matemáticas.*

Director:
Prof. Serafín Bautista Díaz

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de ciencias, Departamento de matemáticas

Bogotá D.C., Colombia
2012

Dedicatoria

A mis padres,

Carmen Torres y Manuel Chautá.

Agradecimientos

Al departamento de matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, a sus profesores por la orientación y ayuda en mi proceso de aprendizaje durante el desarrollo de la maestría, especialmente al profesor Serafín Bautista por su apoyo y la confianza que depositó en mí para el desarrollo de este trabajo.

A mi familia por apoyarme y acompañarme durante este proceso.

También a Diana Carolina Cortés Salazar por toda su colaboración y apoyo.

Resumen

El teorema de descomposición espectral de Smale para sistemas hiperbólicos juega un papel central en sistemas dinámicos. Para un conjunto hiperbólico attracting con órbitas periódicas densas, este teorema asegura que el conjunto es unión finita y disjunta de clases homoclínicas [Sma67]. En este documento presentamos una versión de este resultado en el contexto de sistemas singulares-hiperbólicos, probando que un conjunto singular-hiperbólico attracting con órbitas periódicas densas y una única singularidad es unión finita de conjuntos transitivos. Además veremos que la unión es disjunta o el conjunto contiene un número finito de clases homoclínicas. Si el flujo es C^r-genérico, la unión es de hecho disjunta.

Palabras claves: Singular- hiperbólico, descomposición espectral, lema de inclinación, máscara de Venecia.

Abstract

The Smale's spectral decomposition theorem for hyperbolic sets plays a central role in dynamical systems. For a hyperbolic attracting set in which the set of periodic orbits is dense this theorem asserts that the set is a finite disjoint union of homoclinic classes [Sma67]. Here we present a version of this result in the context of singular hyperbolic systems, proving that a attracting singular hyperbolic set with dense periodic orbits and a unique equilibrium is a finite union of transitive sets. Moreover we will see the union is disjoint or the set contains a finite number of homiclinic classes. If the flow is C^r generic the union is in fact disjoint.
Keywords Singular hyperbolic, spectral decomposition, inclination lemma, mask of Venice.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definiciones

Sea M una 3-*variedad* cerrada y X un campo vectorial de clase C^r en M, donde $r \geq 1$. El flujo generado por X será denotado por X_t, $t \in \mathbb{R}$.

Dado un punto $p \in M$, la *órbita* de p es

$$Orb(p) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{X_t(p)\}.$$

- p es *singular* (un equilibrio), si $Orb(p) = \{p\}$.
- p se denomina *periódico*, si existe $T > 0$ tal que $X_T(p) = p$; T es un periodo de p.

Note que si p es una singularidad entonces es periódico de cualquier periodo, y si p es periódico y no es singularidad entonces existe un mínimo T llamado periodo principal de p, que lo llamaremos simplemente el periodo de p.

Un conjunto $A \subseteq M$ compacto, es *invariante* por X si

$$X_t(A) = A, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

El conjunto *omega-límite* de p está definido por:

$$\omega_X(p) = \{x \in M : x = \lim_{n \to \infty} X_{t_n}(p), \text{ para alguna sucesión } t_n \to \infty\}.$$

Un conjunto compacto invariante A es: *transitivo* si $A = \omega_X(p)$ para algún $p \in A$, *attracting* si existe una vecindad compacta U de A (llamada bloque aislante) tal que

$$A = \bigcap_{t \geq 0} X_t(U),$$

atractor si es un conjunto transitivo *attracting*.

Un punto $p \in M$ se denomina *no errante* si para cada vecindad U de p y cada $T > 0$, existe $t > T$ tal que

$$X_t(U) \cap U \neq \emptyset.$$

Notaremos el conjunto de puntos no errantes de X por $\Omega(X)$ o por $\Omega(X_t)$.

1.1.1. Conjuntos singulares hiperbólicos

En esta sección daremos la definición precisa de conjunto hiperbólico introducido en [PJ93] y luego haremos lo propio con el concepto de conjunto singular hiperbólico.

Definición 1. *Un conjunto compacto invariante $H \subset M$ es* hiperbólico *si existe una descomposición continua y DX_t-invariante del fibrado tangente, $TH = E^s \oplus E^X \oplus E^u$, tal que para unas constantes positivas k, λ, una métrica Riemanniana y todo $p \in H$ se tiene:*

1) $\|DX_t(p)|_{E^s_p}\| \leq ke^{-\lambda t}, \;\; \forall t > 0;$

2) $\|DX_{-t}(p)|_{E^u_p}\| \leq ke^{-\lambda t}, \;\; \forall t > 0;$

3) $E^X_p = \langle X(p) \rangle.$

En la descomposición de la definición 1, E^s se denomina el subfibrado estable, E^u el subfibrado inestable y E^X es la dirección del campo. Una órbita periódica o una singularidad es hiperbólica si lo es como conjunto compacto invariante. Como consecuencia de la Definición 1, un conjunto hiperbólico conexo es una singularidad o no posee singularidades (es no singular).

Si H es un conjunto hiperbólico, por la teoría de variedades invariantes [HM77], para cada $p \in H$ los conjuntos topológicos

$$W^{ss}(p) = \{x \in M : d(X_t(p), X_t(x)) \to 0 \text{ cuando } t \to \infty\},$$

$$W^{uu}(p) = \{x \in M : d(X_{-t}(p), X_{-t}(x)) \to 0 \text{ cuando } t \to \infty\}$$

son variedades inmersas biunívocamente en M y tangentes en p a E^s y E^u respectivamente. Estas variedades son llamadas las variedades estable fuerte e inestable fuerte respectivamente. Para todo $p \in M$ definimos la variedad estable y la variedad inestable de la órbita de p como

$$W^s(p) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{ss}(X_t(p)),$$

$$W^u(p) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{uu}(X_t(p))$$

respectivamente. Si p y p' están en H, entonces $W^s(p)$ y $W^s(p')$ coinciden o son disjuntas, análogamente para la variedad inestable. Además como M es 3-dimensional las variedades estable e inestable son de dimension 2 si H es tipo silla ($E^s \neq 0$ y $E^u \neq 0$).

Una clase más general de conjuntos compactos invariantes es la conformada por los conjuntos singulares hiperbólicos, la cual contiene propiamente a los conjuntos hiperbólicos, este concepto fue introducido por Morales, Pacífico y Pujals en 1998.

Definición 2. *Un conjunto Λ compacto invariante de X es* parcialmente hiperbólico *si existe una descomposición continua y DX_t-invariante del fibrado tangente $T\Lambda = E^s \oplus E^c$ y constantes positivas K, λ tales que:*

1. *E^s es contracción:*

$$\| DX_t(x)|_{E^s_x} \| \leq Ke^{-\lambda t}, \qquad \forall x \in \Lambda, \forall t > 0.$$

2. *E^s domina a E^c, esto es, $E^s_x \neq 0$, $E^c_x \neq 0$ y*

$$\frac{\| DX_t(x)|_{E^s_x} \|}{m(DX_t(x)|_{E^c_x})} \leq Ke^{-\lambda t} \qquad \forall x \in \Lambda, \forall t > 0;$$

donde

$$m(DX_t(x)|_{E_x^c}) = \inf_{0\neq v_x^c \in E_x^c} \frac{\|DX_t(x)v_x^c\|}{\|v_x^c\|}.$$

El subespacio E^c se denomina subespacio central y E^s subespacio estable.

Decimos que el subespacio central E^c de un conjunto parcialmente hiperbólico Λ *expande volumen* si las contantes K y λ satisfacen

$$|J(DX_t/E_x^c)| \geq Ke^{\lambda t},$$

para todo $x \in \Lambda$ y $t > 0$, donde $J(\cdot)$ es el jacobiano.

Definición 3. *Sea Λ un conjunto compacto invariante de un campo vectorial X. Decimos que Λ es **singular-hiperbólico** si es parcialmente hiperbólico, el subespacio central expande volumen y todas sus singularidades son hiperbólicas.*

Un atractor singular-hiperbólico es un conjunto singular-hiperbólico que además es un atractor.

La teoría de variedades invariantes [HM77] también se puede aplicar a los conjuntos singulares hiperbólicos. Es decir, si E^s es la dirección estable entonces por cada $x \in \Lambda$ pasa una subvariedad inmersa de dimensión 1 tangente a E^s. Además, esta descomposición es transversal, es decir, $T_xM = E_x^s \oplus E_x^c$ para cada $x \in \Lambda$. Para conjuntos singulares hiperbólicos existe una serie de resultados importantes que mencionamos a continuación.

Si A es un conjunto compacto invariante de X, notaremos el conjunto de singularidades de X en A por $Sing_X(A)$, es decir,

$$Sing_X(A) = \{x \in A | X_t(x) = x, \forall t \in \mathbb{R}\}$$

y el conjunto de las órbitas periódicas no singulares de X en A por $Per_X(A)$.

Una singularidad $\sigma \in Sing_X(A)$ es Lorenz-like si sus valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son reales y satisfacen

$$\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1.$$

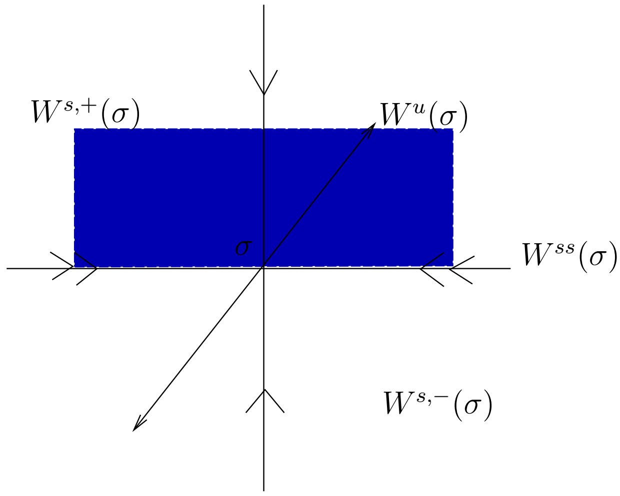


Figura 1.1:

En este caso la variedad estable fuerte de σ se define como el espacio tangente al subespacio asociado al valor propio λ_2. Esta variedad estable fuerte divide la variedad estable de σ en dos componentes conexas $W_X^{s,+}$, $W_X^{s,-}$. Ver figura 1.1.
Diremos que un conjunto A tiene órbitas periódicas densas si el conjunto de órbitas periódicas contenidas en A es denso en A. Además si A tiene órbitas periódicas densas, entonces diremos que A cumple la propiedad $H1$.

Sea Λ un conjunto singular hiperbólico con órbitas periódicas densas de un flujo 3-dimensional. Entonces,

1. Todas las singularidades en Λ son Lorenz-like.

2. $W_X^{ss}(\sigma) \cap \Lambda = \{\sigma\}$.

3. Por el lema hiperbólico, todo subconjunto de Λ compacto, invariante y sin singularidades es hiperbólico tipo silla.

4. Si Λ es attracting con singularidades, para cada $p \in Per_X(\Lambda)$ existe una singularidad σ tal que $W_X^u(p) \cap W_X^s(\sigma) \neq \emptyset$.

Si Λ tiene una única singularidad σ definimos

$$\begin{aligned} P^{+} &= \{p \in Per_X(\Lambda) : W_X^u(p) \cap W_X^{s,+}(\sigma) \neq \emptyset\}, \\ P^{-} &= \{p \in Per_X(\Lambda) : W_X^u(p) \cap W_X^{s,-}(\sigma) \neq \emptyset\}, \\ H_X^{+} &= Cl(P^{+}), \\ H_X^{-} &= Cl(P^{-}). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Definición 4. *Dado un punto periódico p, la* clase homoclínica *asociada a la órbita de p es la clausura de los puntos homoclínicos transversos, es decir,*

$$H_X(p) = Cl(W_X^s(p) \pitchfork W_X^u(p)).$$

Nota: la intersección de dos conjuntos L_1 y L_2 es transversa si para todo $x \in L_1 \cap L_2$ se tiene que $T_xM = T_xL_1 \oplus T_xL_2$.

1.1.2. Campos vectoriales

Dentro de los campos vectoriales definidos sobre una variedad existen campos que cumplen algunas condiciones importantes y que permitirán establecer algunos resultados.

Definición 5. *Un campo vectorial X de clase C^r, $r \geq 1$ es Kupka-Smale si cumple las siguientes condiciones:*

1. *Las órbitas cerradas (singularidades y órbitas periódicas) de X_t son hiperbólicas,*

2. *Si σ_1 y σ_2 son dos órbitas cerradas, entones $W^s(\sigma_1)$ es transversal a $W^u(\sigma_2)$.*

Un conjunto es residual en un espacio topológico si se puede escribir como intersección contable de conjuntos abiertos y densos. En el espacio de los campos vectoriales de clase C^r sobre M, notado por $\chi^r(M)$, se tiene el siguiente resultado [JP82]:

Teorema 1. *Los campos vectoriales Kupka-Smale forman un conjunto residual en $\chi^r(M)$.*

Este último resultado nos dice que el conjunto de campos vectoriales Kupka-Smale es *grande* en $\chi^r(M)$.

En [Bau05] se introdujo otra clase de campos vectoriales que a continuación definimos y sobre los cuales obtendremos un resultado importante más adelante.

Definición 6. *Un campo vectorial X de clase C^r en M es singular-hiperbólico si $\Omega(X_t)$ es la clausura de sus órbitas cerradas y $\Omega(X_t) \setminus S(X_t)$ es la unión disjunta de dos conjuntos singulares-hiperbólicos, uno para X y otro para $-X$; donde $S(X_t)$ es el conjunto de órbitas cerradas fuente o sumidero.*

Una propiedad es *genérica* si el conjunto de los elementos que cumplen la propiedad es residual. Por ejemplo en $\chi^r(M)$ ser campo vectorial de Kupka-Smale es una propiedad genérica (Teorema 1).

1.2. Resultados previos

En la demostración de los teoremas principales de este trabajo se usarán los siguientes resultados, omitiremos algunas de las demostraciones.

1.2.1. Lema de inclinación

Sean σ una singularidad hiperbólica tipo silla de un flujo X_t de clase C^r con $r \geq 1$, $W^s_{loc}(\sigma)$ y $W^s_{loc}(\sigma)$ las variedades estable local e inestable local de σ respectivamente, y B^s un disco inmerso en la variedad estable local de σ tal que ∂B^s es transversal al campo. La esfera ∂B^s es un *dominio fundamental* para $W^s(\sigma)$, dado que si $x \in W^s(\sigma) \setminus \{\sigma\}$, la órbita de x intersecta ∂B^s en un único punto. De la misma manera definimos un dominio fundamental ∂B^u para $W^u(\sigma)$.

Sea D^u una sección transversal a $W^s_{loc}(\sigma)$ que contiene un punto $q \in W^s_{loc}(\sigma)$ y tiene la misma dimensión que la variedad inestable local de σ. Sea $V = B^s \times B^u$ una vecindad de σ. En estos términos enunciamos el Lambda lema o lema de inclinación.

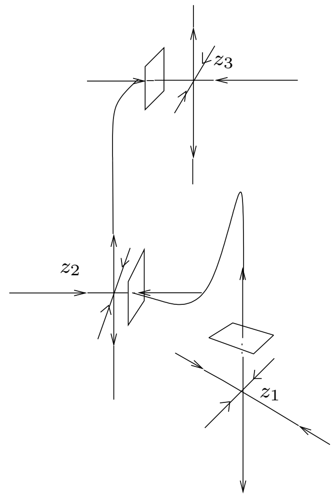


Figura 1.2: Lema de inclinación

Lema 1.2.1 (de inclinación). *Dado $\epsilon > 0$ existe $T_0 > 0$ tal que si $t > T_0$ y D_t^u es la componente conexa de $X_t(D^u) \cap V$ que contiene a $X_t(q)$, entonces D_t^u es C^r-cercano a B^u. [JP82]*

Una consecuencia inmediata del lema de inclinación es el siguiente corolario que será de gran importancia en las demostraciones posteriores en este trabajo.

Corolario 1. *Sean z_1, z_2, z_3 puntos singulares hiperbólicos de X_t. Si $W^u(z_1)$ tiene una intersección transversal con $W^s(z_2)$ y $W^u(z_2)$ tiene una intersección transversal con $W^s(z_3)$, entonces $W^u(z_1)$ tiene una intersección transversal con $W^s(z_3)$.*

Una interpretación de este resultado se presenta en la figura 1.2.

1.2.2. Otros resultados

Teorema 2 (de Birkoff-Smale). *Toda clase homoclínica es la clausura de sus órbitas periódicas y es un conjunto transitivo. [PJ93].*

El siguiente lema esta escrito en los términos incluidos en la ecuación 1.1 y aparece como lema 2.1 en [MP04].

Lema 1.2.2. *Sea Λ un conjunto singular hiperbólico attracting, conexo, con órbitas periódicas densas y una única singularidad, entonces*

$$\Lambda = H_X^+ \cup H_X^-.$$

Dado $x \in \Lambda \setminus Sing_X(\Lambda)$ y Σ una sección transversal a $W_X^s(x)$ denotamos por $W_X^s(x, \Sigma)$ a la componente conexa de $W_X^s(x) \cap \Sigma$ que contiene a x.

Usando el teorema de Grobman-Hartman podemos asumir que el flujo de X cerca de una singularidad σ es el flujo lineal

$$\lambda_1 \partial_{x_1} + \lambda_2 \partial_{x_2} + \lambda_3 \partial_{x_3}$$

En el sistema de coordenadas $(x_1, x_2, x_3) \in [0,1]^3$ tomamos las secciones transversales $\Sigma^+ = \{x_3 = 1\}$, $\Sigma^- = \{x_3 = -1\}$ y las rectas $l^+ = \Sigma^+ \cap \{x_1 = 0\}$, $l^- = \Sigma^- \cap \{x_1 = 0\}$, en estos términos tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.2.3. *Sea Λ un conjunto singular hiperbólico con órbitas periódicas densas de un flujo X_t 3-dimensional, fijemos $\sigma \in Sing_X(\Lambda)$, Existen secciones transversales Σ^+, Σ^- tales que cualquier órbita en Λ pasando cerca de algún punto de $W_X^{s,+}(\sigma)$ intersecta Σ^+ (respectivamente $W_X^{s,-}(\sigma)$, Σ^-). Si $p \in \Lambda \cap \Sigma^+$ es cercano a l^+, entonces $W_X^s(p, \Sigma^+)$ es una curva vertical atravesando Σ^+. Si $p \in Per_X(\Lambda)$ y $W_X^u(p) \cap W_X^{s,+}(\sigma) \neq \emptyset$ entonces $W_X^u(p)$ contiene un intervalo $J = J_p$ intersectando transversalmente a l^+.*

Para probar transitividad usaremos los siguientes lemas

Lema 1.2.4 (Criterio de Birkhoff). *Si es T un conjunto compacto invariante de X tal que para cualquier par de conjuntos abiertos U, V intersectando T, existe $s > 0$ tal que $X_s(U \cap T) \cap V \neq \emptyset$, entonces T es transitivo.*

Lema 1.2.5. *Sea Λ un conjunto conexo, singular hiperbólico attracting, con órbitas periódicas y una única singularidad σ. Sean U, V conjuntos abiertos, $p \in Per_X(\Lambda) \cap U$ y $q \in Per_X(\Lambda) \cap V$. Si $W_X^u(p) \cap W_X^{s,+}(\sigma) \neq \emptyset$ y $W_X^u(q) \cap W_X^{s,+}(\sigma) \neq \emptyset$, entonces existe $t > 0$ y $z \in W_X^u(p)$ arbitrariamente cercano a $W_X^u(p) \cap W_X^{s,+}(\sigma)$ tal que $X_t(z) \in V$. El resultado es válido si se reemplaza $+$ por $-$*

Note que Λ cumple la propiedad $H1$, es decir,

$$\Lambda = Cl(Per_X(\Lambda)).$$

1.2.3. Resultados de [MP04]

Los resultados de esta sección aparecen en [MP04] y los desarrollaremos junto con su demostración a continuación.

Proposición 1. *Sea Λ un conjunto conexo, singular hiperbólico attracting con órbitas periódicas densas y una única singularidad σ. Suponga que para todo $p, q \in Per_X(\Lambda)$ se tiene que:*

a) $W^u_X(p) \cap W^{s,+}_X(\sigma) \neq \emptyset$ *y* $W^u_X(q) \cap W^{s,+}_X(\sigma) \neq \emptyset$ *ó*

b) $W^u_X(p) \cap W^{s,-}_X(\sigma) \neq \emptyset$ *y* $W^u_X(q) \cap W^{s,-}_X(\sigma) \neq \emptyset$,

entonces Λ es transitivo.

Demostración. Sean U, V conjuntos abiertos que intersecan a Λ. Por la propiedad $H1$ existen $p \in Per_X(\Lambda) \cap U$ y $q \in Per_X(\Lambda) \cap V$, luego para este par de puntos periódicos se cumple a) ó se cumple b). Sin pérdida de generalidad podemos asumir que se cumple a). Por el lema 1.2.5, existen $t > 0$ y $z \in W^u_X(p)$ tal que $X_t(z) \in V$. Como $z \in W^u_X(p)$ existe $t' > 0$ tal que $w = X_{-t'}(z) \in U$. Además $w \in \Lambda$, pues Λ es attracting. Entonces si tomamos $s = t + t'$ obtenemos que $w \in (U \cap \Lambda) \cap X_{-s}(V)$ y por lo tanto $X_s(w) \in (X_s(U) \cap \Lambda) \cap V$, es decir, esta intersección es no vacía. El criterio de Birkhoff nos permite concluir que Λ es transitivo. □

Proposición 2. *Sea Λ un conjunto conexo, singular hiperbólico attracting con órbitas periódicas densas y una única singularidad σ. Si existe una sucesión p_n de puntos periódicos que converge a algún punto de $W^{s,+}(\sigma)$, tal que*

$$W^u_X(p_n) \cap W^{s,-}_X(\sigma) \neq \emptyset$$

para todo n, entonces Λ es transitivo. Lo mismo es verdad intercambiando + por -.

Demostración. Sean p, q puntos periódicos fijos y supongamos que $W^u_X(p) \cap W^{s,+}_X(\sigma) \neq \emptyset$ y $W^u_X(q) \cap W^{s,-}_X(\sigma) \neq \emptyset$. Esto lo podemos suponer porque Λ es attracting con única singularidad, la variedad inestable de cualquier punto periódico intersecta la variedad estable de σ. Si intersectan la misma componente conexa de $W^s(\sigma) \setminus \{W^{ss}(\sigma)\}$, estaríamos en el caso de la proposición anterior y por lo tanto el conjunto es transitivo.

Por el lema 1.2.2 podemos fijar una sección transversal $\Sigma = \Sigma^+$ a $W^{s,+}_X(\sigma)$ y un arco abierto $J \subset \Sigma \cap W^u_X(p)$ intersectando $W^{s,+}_X(\sigma)$ transversalmente. De nuevo, por el lema 1.2.2 podemos asumir que $p_n \in \Sigma$ para todo n pues como p_n converge a algún punto en la variedad estable superior de σ ($W^{s,+}_X(\sigma)$) la órbita de p_n intersecta a $\Sigma \cap \Lambda$. Como la dirección E^s de Λ es contracción, el tamaño de la variedad estable de p_n está uniformemente acotada superior e inferiormente para todo n. Esto nos permite asegurar que existe n suficientemente grande tal que J intersecta $W^s_X(p_n)$. Aplicando el lema de inclinación a la intersección de J y $W^s_X(p)$ y teniendo en cuenta que por hipótesis $W^u_X(p_n) \cap W^{s,-}_X(\sigma) \neq \emptyset$, concluimos que

$$W^u_X(p) \cap W^{s,-}(\sigma) \neq \emptyset,$$

es decir, la alternativa b) de la proposición 1 se cumple, por lo tanto Λ es transitivo.

$\square$

Proposición 3. *Si Λ es un conjunto conexo, singular hiperbólico attracting con órbitas periódicas densas y una única singularidad σ y existe $a \in W^u_X(\sigma) \setminus \{\sigma\}$ tal que $\sigma \in \omega_X(a)$, entonces Λ es transitivo*

Demostración. Podemos asumir que existe $z \in \omega_X(a) \cap W^{s,+}_X(\sigma)$ y observemos que $\omega_X(a) \subset \Lambda$ y que $W^{ss}(\sigma) \cap \Lambda = \{\sigma\}$. Además como la descomposición del fibrado tangente es dominada y $W^u(\sigma)$ es tangente a el subespacio asociado al valor propio positivo de σ, entonces la órbita de a no puede tener como omega límite $\{\sigma\}$ y se tiene que acumular en la parte superior o inferior del plano generado por la variedad estable fuerte y la variedad inestable, es decir, debe acumular un punto en la variedad estable de σ y podemos suponer que ese punto está en $W^{s,+}(\sigma)$. El otro caso es análogo.

Si para todo punto periódico q en Λ se tiene que $W_x^u(q) \cap W_X^{s,-}(\sigma) = \emptyset$, entonces $W_x^u(q) \cap W_X^{s,+}(\sigma) \neq \emptyset \ \forall q \in Per_X(\Lambda)$, [CMP98]. Podemos entonces aplicar la proposición 1 ya que se cumple a) para todo $p, q \in Per_X(\Lambda)$ y por lo tanto Λ es transitivo.

Ahora, si existe $q \in Per_X(\Lambda)$ tal que $W_x^u(q) \cap W_X^{s,-}(\sigma) \neq \emptyset$ se sigue de la condición de descomposición dominada que la intersección $W_x^u(q) \cap W_X^{s,-}(\sigma)$ es transversal. Esto nos permite elegir un punto en $W_X^u(\sigma)$ arbitrariamente cercano a $W_X^{s,-}(\sigma)$ en el lado en que $W_X^u(q) \cap W_X^{s,-}(\sigma)$ acumula a a. Como Λ es attracting y cumple $H1$ podemos encontrar una sucesión p_n de puntos periódicos que converge a $z \in W_X^{s,+}(\sigma)$ tal que para todo n existe p_n' en la órbita de p_n, de tal forma que la sucesión p_n' converge a algún punto $z' \in W_X^{s,-}(\sigma)$. Supongamos que Λ no es transitivo, por la proposición 2 tenemos que

$$W_X^u(p_n') \cap W_X^{s,+}(\sigma) = \emptyset$$

y

$$W_X^u(p_n) \cap W_X^{s,-}(\sigma) = \emptyset$$

para n suficientemente grande. Como p_n esta en la misma órbita de p_n', entonces $W_X^u(p_n) = W_X^u(p_n')$ y por lo tanto

$$W_X^u(p_n) \cap \left(W_X^{s,+}(\sigma) \cup W_X^{s,-}(\sigma)\right) = \emptyset$$

y como $W_X^{ss}(\sigma) \cap \Lambda = \sigma$ concluimos que

$$W_X^u(p_n) \cap W^s(\sigma) = \emptyset$$

pero σ es la única singularidad en Λ con lo cual llegamos a una contradicción. (Propiedad 4. de Λ) □

Teorema 3. *Sea Λ un conjunto conexo, singular hiperbólico attracting con órbitas periódicas densas y una única singularidad σ. Si Λ no es transitivo, entonces para todo $a \in W_X^u(\sigma) \setminus \{\sigma\}$ existe una órbita periódica O de X con valores propios repulsores de su aplicación de Poincaré asociada mayores que 1 tal que $a \in W_X^s(O)$.*

Demostración. Sea $a \in W^u_X(\sigma) \setminus \{\sigma\}$ y supongamos que $\omega_X(a)$ no es una órbita periódica. Obtendremos una contradicción si probamos que si $p, q \in Per_X(\Lambda)$, entonces p, q satisfacen alguna de las dos alternativas en la proposición 1.

Sean p, q punto periódicos, entonces $W^u_X(p)$ y $W^u_X(q)$ intersectan $W^s(\sigma)$, podemos asumir que

$$W^u_X(p) \cap W^{s,+}(\sigma) \neq \emptyset$$

y

$$W^u_X(q) \cap W^{s,-}(\sigma) \neq \emptyset$$

pues si intersectan la misma componente conexa de la variedad estable de σ, estaríamos en uno de los dos casos de la proposición 1. Usando las coordenadas lineales (Teorema de Grobman-Hartman) podemos construir un intervalo I_a contenido en una sección transversal $\Sigma = \Sigma_a$ que contiene a a tal que $I_a = I^+_a \cup I^-_a \cup \{a\}$, con $I^+ \subset W^u_X(p)$ y $I^-_a \subset W^u_X(q)$, el vector tangente a I_a esta contenido en $E^c \cap T\Sigma_a$, la proposición 3 implica que $\sigma \notin \omega_x(a)$ pues Λ no es transitivo, luego $H = \omega_x(a)$ es no singular, invariante y compacto por lo tanto es hiperbólico tipo silla [CMP98], luego H tiene dimensión topológica 1 [Mor03]. Podemos aplicar la teoría de Bowen, en particular, escoger una familia de secciones transversales $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_r\}$ tal que H no intersecta la frontera de las secciones transversales. $I \subset \Lambda$ pues Λ es attracting como $TI \in E^c$ y la subvariedad central expande volumen, el mapa de Poincaré inducido por X en I es expansivo pues H es no singular.

Usando la construcción que aparece en [MP01] podemos encontrar $\delta > 0$ y una sucesión de arcos abiertos $J_n \subset S'$ en la órbita positiva de I con longitud acotada superior e inferiormente, tales que existe a_n en la órbita positiva de a en el interior de J_n, podemos fijar $S = S_i$ para algún i pues tenemos una sucesión infinita y un número finito de S_i's con el fin de asumir que $J_n \subset S$.

Sea $x \in S$ un punto de acumulación de a_n, entonces $x \in H \cap Int(S')$, como I es tangente a E^c la sucesión de intervalos J_n converge en la topología C^1 a un intervalo $J \subset W^u_X(x)$, recordemos que $W^u_X(x)$ existe pues H es hiperbólico. J es no trivial

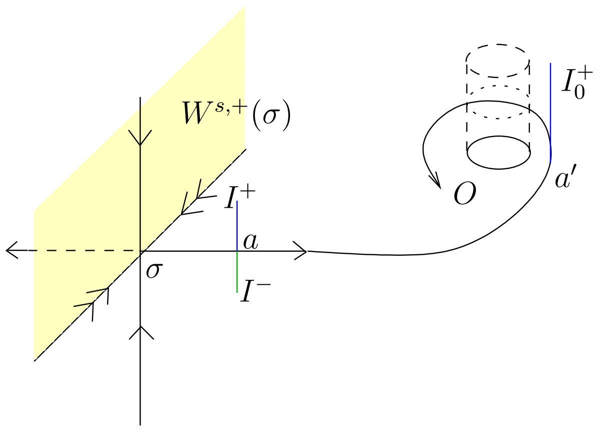


Figura 1.3: Órbita periódica del teorema 3

pues la longitud de los J_n esta acotada inferiormente. Si a_n estuviera en $W_X^s(\sigma)$ para n grande podríamos concluir que x es periódico [MP01, lema 5,6] lo cual es una contradicción pues $\omega_x(a)$ no es periódico. Por lo tanto para valores arbitrariamente grandes de n se tiene que $a_n \notin W_X^s(\sigma)$, ahora, como $J_n \to J$ tiene variedades estables de tamaño uniforme, entonces existe

$$z_n \in (W_X^s(a_{n+1}) \cap S) \cap (J_n \setminus \{a_n\})$$

para todo n grande. Como I es transversal a $W_X^u(a)$, entonces J_n es transversal a $W_X^u(a_n)$. Sean J_n^+, J_n^- las partes conexas de $J_n \setminus \{a_n\}$ con J_n^+ en la órbita positiva de I^+ y J_n^- en la órbita positiva de I^-, entonces $z_n \in J_n^+$ o $z_n \in J_n^-$.En el primer caso, existe $v_{n+1} \in Per_X(\Lambda) \cap S$ cercano a a_{n+1} tal que

$$W_X^s(v_{n+1}) \cap J_n^+ \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad W_X^s(v_{n+1}) \cap J_n^- \neq \emptyset,$$

como $v_{n+1} \in Per_X(\Lambda)$ concluimos entonces que $W^{s,+}(\sigma)$ o $W^{s,-}(\sigma)$ son intersectados por $W_X^u(v_{n+1})$ ([CMP98]), la elección de v_{n+1} implica que su órbita pasa cerca de un punto en $W_X^{s,-}(\sigma)$. Como Λ no es transitivo concluimos que $W_X^u(v_{n+1})$ intersecta a $W^{s,-}(\sigma)$. La intersección entre $W_X^u(v_{n+1})$ y J_n^+ es transversal, el lema de inclinación implica que $W_X^u(p) \cap W_X^{s,+}(\sigma) \neq \emptyset$, por lo tanto

$$W_X^u(p) \cap W_X^{s,+}(\sigma) \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad W_X^u(q) \cap W_X^{s,+}(\sigma) \neq \emptyset$$

por medio de argumentos similares concluimos que si $z_n \in J_n^-$ entonces

$$W_X^u(p) \cap W_X^{s,-}(\sigma) \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad W_X^u(q) \cap W_X^{s,-}(\sigma) \neq \emptyset$$

en cualquiera de los dos casos llegamos por la proposición 1 a que Λ es transitivo, lo cual es una contradicción. por lo tanto

$$\omega_X(a) = O$$

con O una órbita periódica.

Para terminar la demostración mostraremos que el valor expansivo de O es positivo. Supongamos que no es así, fijamos entonces una sección transversal a O en p_0, esta sección transversal define el mapa de Poincaré $\Pi : Dom(\Pi) \subset \Sigma \to \Sigma$ para el cual p_0 es un punto fijo hiperbólico debido a lo que asumimos tenemos que $D\Pi(p_0)$ tiene valor propio expansivo negativo, como p_0 es periódico se tiene que $W_X^u(p_0) \cap W_X^{s,+}(\sigma) \neq \emptyset$ o $W_X^u(p_0) \cap W_X^{s,-}(\sigma) \neq \emptyset$.

Podemos asumir el primer caso, el segundo caso es similar. Afirmamos que $W_X^u(p) \cap W_X^{s,+}(\sigma) \neq \emptyset$ para todo punto $p \in Per_X(\Lambda)$.

Sea p un punto periódico fijo, $W_X^u(p) \cap (W_X^s(\sigma) \setminus W^{ss}(\sigma)) \neq \emptyset$. Si $W_X^u(p) \cap W_X^{s,+}(\sigma) \neq \emptyset$ terminamos si $W_X^u(p) \cap W_X^{s,-}(\sigma) \neq \emptyset$ en esta intersección obtenemos un intervalo $K \subset W_X^u(p) \cap \Sigma$ intersectando a $W_X^s(p_0, \Sigma)$ transversalmente, además existe un intervalo $J \subset W_X^{s,+}(\sigma) \cap \Sigma$ que intersecta a $W_X^s(p_o, \Sigma)$ transversalmente. Como asumimos que el valor propio expansivo es negativo, el lema de inclinación implica que las iteraciones hacia atrás $\Pi^{-n}(J)$ acumulan a $W_x^u(p_0, \Sigma)$ en ambos lados. Debido a que K tiene intersección transversal con $W_X^s(p_0, \Sigma)$, concluimos que una de esas iteraciones hacia atrás de J intersecta a K y por lo tanto $W_X^u(p) \cap W^{s,+}(\sigma) \neq \emptyset$, probando nuestra afirmación. La proposición 1 implica que Λ es transitivo, lo cual es una contradicción, luego el valor propio debe ser positivo. $\square$

De aquí en adelante asumiremos que Λ no es transitivo, sea $a \in W_X^u(\sigma)$, por el teorema 3 $a \in W_X^s(O)$ para alguna órbita periódica $O \subset \Lambda$ con valor expansivo positivo, esta última propiedad implica que la variedad inestable de O es un cilindro separado por O en dos partes conexas las cuales notaremos por $W^{u,+}$ y $W^{u,-}$ de acuerdo con la siguiente convención.

Existe un intervalo $I = I_a$ contenido en una sección transversal conveniente que contiene a a y tal que si I^+, I^- son las partes conexas de $I\backslash\{a\}$ entonces $I^+ \subset W^u_X(p)$ y $I^- \subset W^u_X(q)$ para $p, q \in Per_X(\Lambda)$ (recordemos que estamos asumiendo que Λ no es transitivo) Además I es tangente a E^c. Como $a \in W^s_X(O)$ y el intervalo I es llevado por el flujo a un intervalo I' transversal a $W^s_X(O)$ en a' (ver figura 1.2.3). Note que $X_t(I^+) = I^+_0$, $X_t(I^-) = I^-_0$.

Notamos por $W^{u,+}$ la componente conexa de $W^u_X(O)$ que es acumulada por la órbita positiva de I^+ y por $W^{u,-}$ la componente conexa que es acumulada por la órbita positiva de I^-. Por el lema de inclinación esta definición no depende de p y q ni de los intervalos escogidos.

Proposición 4. *Con la notación anterior tenemos*

$$W^{u,+} \cap W^{s,-}_X(\sigma) = \emptyset \qquad y \qquad W^{u,+} \cap W^{s,+}_X(\sigma) \neq \emptyset$$

lo mismo es válido intercambiando + por −

Demostración. 1). Veamos que $W^{u,+} \cap W^{s,-}_X(\sigma) = \emptyset$. Supongamos que esta intersección es no vacía. Como la intersección debe ser transversal, existe un intervalo $J \subset W^{s,-}_X(\sigma)$ intersectando $W^{u,+}$ transversalmente. Ahora fijamos una sección transversal Σ^+ como en el lema 1.2.2 y sea $p \in Per_X(\Lambda)$ tal que $W^u_X(p) \cap W^{s,+}_X(\sigma) \neq \emptyset$. Existe un intervalo $I \subset W^u_X(p) \cap \Sigma^+$ transversal a $\Sigma^+ \cap W^{s,+}_X(\sigma)$. Por la definición de $W^{u,+}$, la órbita positiva de I acumula a $W^{u,+}$, como J es transversal a $W^{u,+}$ el lema de inclinación implica que la órbita positiva de I intersecta a J.Además $J \subset W^{s,-}_X(\sigma)$ e $I \subset W^u_X(p)$, entonces para todo $p \in Per_X(\Lambda)$

$$W^{s,-}_X(\sigma) \cap W^u_X(p) \neq \emptyset$$

por lo tanto la opción b) en la proposición 1 se cumple, es decir, Λ es transitivo. Lo anterior es una contradicción. Luego

$$W^{s,-} \cap W^{u,+} = \emptyset.$$

2). Veamos que $W^{u,+} \cap W_X^{s,+}(\sigma) \neq \emptyset$.

Supongamos que $W^{u,+} \cap W_X^{s,+}(\sigma) = \emptyset$ como ya vimos $W^{s,-} \cap W^{u,+} = \emptyset$. Entonces

$$W^{u,+} \cap W^s(\sigma) = \emptyset,$$

pero por la densidad de órbitas periódicas y el lema de inclinación se tiene que

$$W^{u,+} \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $W^{u,+} \cap W_X^{s,+}(\sigma) \neq \emptyset$. □

Proposición 5. *Con la notación de la ecuación 1.1 tenemos $H_X^+ = Cl(W^{u,+})$, $H_X^- = Cl(W^{u,-})$.*

Demostración. Sea $p \in P^+$, es decir, $W^u(p) \cap W^{s,+}(\sigma) \neq \emptyset$. Por la proposición 4 $W^{u,t} \cap W^{s,+}(\sigma) \neq \emptyset$. Usando la densidad de las órbitas periódicas y el lema de inclinación se puede mostrar que $W^{u,+}$ acumula a p, luego $H^+ \subset Cl(W^{u,+})$. Recíprocamente, sea $x \in W^{u,+}$ fijo. Como el conjunto de órbitas periódicas es denso en Λ, existe $z \in Per_x(\Lambda)$ cerca de x, eligiendo z suficientemente cerca de x, obtenemos que $W_X^s(z) \cap W^{u,+} \neq \emptyset$ debido a que el tamaño de la variedad estable es uniformemente acotada inferiormente. Si $W_X^u(z) \cap W_X^{s,-}(\sigma) \neq \emptyset$. El lema de inclinación y el hecho que $W_X^s(z)$ intersecta a $W^{u,+}$ implican que

$$W^{u,+} \cap W_X^{s,-}(\sigma) \neq \emptyset,$$

lo cual contradice la proposición 4, entonces $W_X^u(z) \cap W_X^{s,-}(\sigma) = \emptyset$, es decir, $z \in P^+$ por lo tanto $x \in H^+$. □

Proposición 6. *Si $z \in Per_x(\Lambda)$ y $W_X^s(z) \cap W^{u,t} \neq \emptyset$, entonces*

$$Cl(W_X^s(z) \cap W^{u,+}) = Cl(W^{u,+})$$

Lo mismo es verdad reemplazando + por -.

Demostración. Sea $x \in W^{u,+}$ como el conjunto de órbitas periódicas es denso en Λ, podemos encontrar $w \in Per(\lambda)$ arbitrariamente cercano a x, en particular $W_X^s(w)$ intersecta $W^{u,+}$. Si $W_X^u(w)$ no intersecta a $W_X^{s,+}(\sigma)$ entonces debe intersectar $W^{s,-}(\sigma)$

[MP01], tendríamos entonces que $W^s_X(w) \cap W^{u,+} \neq \emptyset$ y $W^u_X(w) \cap W^{s,-}_X(\sigma) \neq \emptyset$, entonces el lema de inclinación implica que

$$W^{s,-}_X(\sigma) \cap W^{u,+} \neq \emptyset.$$

Pero esto último contradice la proposición 4. Por lo tanto, lo que se debe tener es que $W^u_X(w) \cap W^{s,+}_X(\sigma) \neq \emptyset$. Note que esta última intersección es no vacía y transversa para w suficientemente cercano a x. Por el lema de inclinación podemos encontrar una intersección transversal entre $W^{u,+}$ y $W^{s,+}_X(\sigma)$ cercana a x, luego

$$Cl(W^{u,+} \cap W^{s,+}(\sigma)) = Cl(W^{u,+}). \tag{1.2}$$

Ahora demostraremos que $Cl(W^s_X(z) \cap W^{u,+}) = Cl(W^{u,+})$. Sea $x \in W^{u,+}$, la ecuación 1.2 y el hecho que ambas variedades son de dimensión dos implican que existe un intervalo $I_x \subset W^{u,+}$ arbitrariamente cercano a x tal que $I_x \cap W^{s,+}_X(\sigma) \neq \emptyset$.

Además la órbita positiva de I_x pasa por a y por lo tanto acumula $W^{u,+}$ que por hipótesis tiene intersección no vacía con $W^s(z)$. Todo esto nos permite concluir que la órbita positiva de I_x intersecta a $W^s(z)$, entonces la órbita negativa de I_x intersecta $W^s(z)$ y está contenida en $W^{u,+}$ completando la demostración. □

La siguiente proposición nos permitirá mostrar que Λ es unión de dos clases homoclínicas

Proposición 7. *Si $z \in Per_X(\Lambda)$ y es suficientemente cercano a un punto de $W^{u,+}$, entonces*

$$H_X(z) = Cl(W^{u,+})$$

Lo mismo es cierto si se reemplaza $+$ por $-$.

Demostración. Tomemos z un punto periódico en Λ cercano a $W^{u,+}$. Por la continuidad de la aplicación que envía un punto de Λ en su variedad estable tenemos que $W^s_X(z) \cap W^{u,+} \neq \emptyset$. Por la proposición 4 $W^{u,+} \cap W^{s,-}_X(\sigma) = \emptyset$, aplicando el lema de inclinación se tiene que

$$W^u_X(z) \cap W^s_X(\sigma) \subset W^{s,+}_X(\sigma),$$

pues si $W_X^u(z) \cap W_X^{s,-}(\sigma) \neq \emptyset$ el lema de inclinación implicaría que $W^{u,+} \cap W^{s,-} \neq \emptyset$ contradiciendo la proposición 4.

Por la proposición 6, $W^s(z) \cap W^{u,+}$ es denso en $W^{u,+}$ pues $W^s(z)$ intersecta $W^{u,+}$. Sean Σ una sección transversal y $x \in W^{u,+}$ fijo, podemos asumir que $z, x \in \Sigma$ pues $x \in W^{u,+}$ y z es cercano a x, por el lema 1.2.2 existe un intervalo $I \subset W_X^u(z)$ tal que $I \cap W^{s,+}(\sigma) \neq \emptyset$ y además esta intersección es transversal. La órbita positiva de I es un intervalo J que pasa cerca de σ e intersecta $W^{s,+}(\sigma)$. La órbita positiva de J es un intervalo K que intersecta $W^{s,+}$ transversalmente y acumula $W^{u,+}$. Como $W_X^s(z) \cap W^{u,+}$ es denso en $W^{u,+}$ y $x \in W^{s,+}$, la variedad estable de z pasa cerca de x. El lema de inclinación aplicado a la órbita positiva de K nos permite encontrar un punto homoclínico z' asociado a z el cual es cercano a x. Esto prueba que $x \in H_X(z)$. Así $Cl(W^{u,+}) \subset H_X(z)$.

Como $W_X^s(z) \cap W^{u,+} \neq \emptyset$ y esa intersección es transversal debido a la descomposición dominada, y además $W^{u,+}$ es invariante, entonces podemos aplicar el lema de inclinación para obtener que $W_X^s(z) \subset Cl(W^{u,+})$, por lo tanto $Cl(W_X^s(z)) \subset Cl(W^{u,+})$. Por la definición de la clase homoclínica del punto periódico z, $H_X(z) = Cl(W^s(z) \pitchfork W^u(z)) \subset Cl(W^s(z))$ concluimos que $H_X(z) \subset Cl(W^{u,+})$ y la prueba está completa. $\square$

Teorema 4. *Sea Λ un conjunto singular hiperbólico de un campo X de clase C^r sobre una 3-variedad cerrada, donde $r \geq 1$. Suponga que se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Λ es conexo,*
2. *Λ es attracting,*
3. *el conjunto de órbitas cerradas contenidas en Λ es denso en él y*
4. *existe una única singularidad en Λ.*

Entonces, H^+ y H^- son clases homoclínicas de X.

Demostración. Consideremos $Cl(W^{u,+})$ por la condición 3. podemos tomar $z \in Per_X(\Lambda)$ arbitrariamente cerca de un punto en $W^{u,+}$, aplicando la proposición 7 se tiene que $Cl(W^{u,+}) = H_X(z)$. Luego $Cl(W^{u,+})$ es una clase homoclínica y por proposición 6 $H^+ = Cl(W^{u,+})$ es una clase homoclínica. Un procedimiento análogo aplicado a $W^{u,-}$ nos permite concluir que H^- también es una clase homoclínica. □

Teorema 5. *Sea Λ un conjunto conexo, singular hiperbólico con órbitas periódicas densas y una única singularidad, entonces Λ es la unión de conjuntos transitivos. Más precisamente Λ es transitivo o es la unión de dos clases homoclínicas.*

Demostración. Observemos que si Λ no es transitivo, por el lema 1.2.2 $\Lambda = H^+ \cup H^-$ y por el teorema 4 H^+ y H^- son clases homoclínicas, es decir, Λ es unión de dos clases homoclínicas. □

Capítulo 2

Clases homoclínicas en conjuntos singulares hiperbólicos

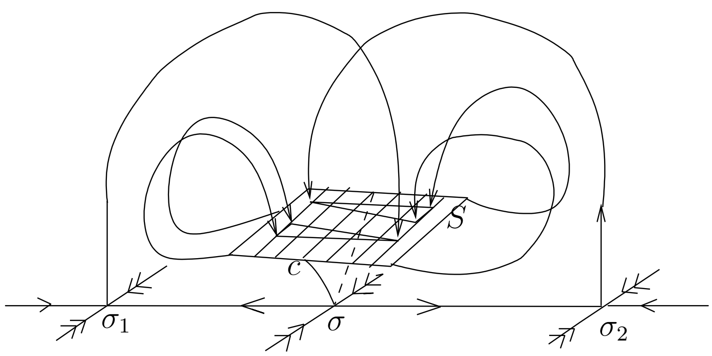


Figura 2.1:

Como ya se mencionó, un conjunto hiperbólico attracting con órbitas periódicas densas es la union finita y disjunta de clases homoclínicas. Un candidato natural para la versión en conjuntos singulares-hiperbólicos de este resultado es cambiar hiperbólico por singular-hiperbólico. Pero esta versión resulta ser falsa, un primer contraejemplo para esta versión inicial es el siguiente.

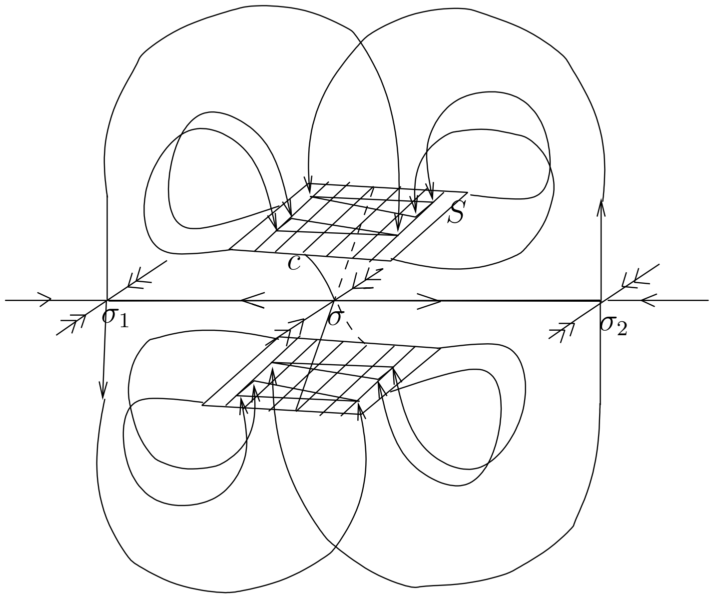


Figura 2.2:

2.1. Ejemplo con varias singularidades

En [Bau04] se demostró que el atractor geométrico de Lorenz es una clase homoclínica, para construir el ejemplo consideramos una modificación de este atractor, adicionando dos singularidades σ_1, σ_2 asintóticas a la variedad inestable de σ cómo se indica en la figura 2.1.

Esta modificación se hace de tal forma que el nuevo flujo restringido a la sección transversal S tiene una foliación invariante estable C^∞ y el mapa cociente en el espacio foliado es expansivo, con una única singularidad c que es la folia correspondiente a la intersección de S y la variedad estable de σ.

El conjunto es una clase homoclínica attracting [Bau04]. En particular es un conjunto transitivo singular-hiperbólico con órbitas periódicas densas. Luego unimos dos copias del conjunto anterior a lo largo de la variedad inestable de σ y obtenemos el conjunto de la figura 2.2.

De esta forma hemos construido un conjunto singular-hiperbólico con órbitas periódicas densas que **no** es la unión disjunta de clases homoclínicas, sin embargo, es la

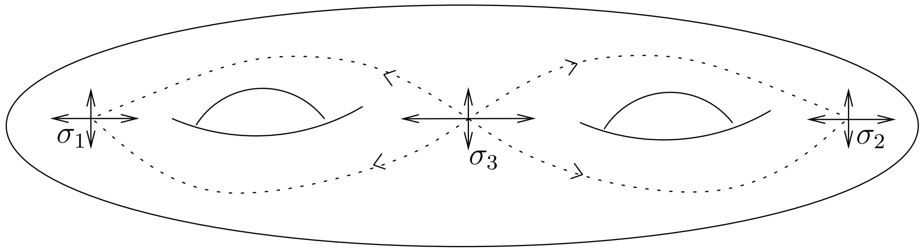


Figura 2.3: Dinámica en T_1^2

unión de dos conjuntos transitivos. Este contraejemplo tiene tres singularidades, es posible construir uno con una única singularidad. La construcción la desarrollamos en la siguiente sección.

2.2. La máscara de Venecia

Tomemos $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ y consideremos en $\mathbb{R}^3$ un bitoro Π^2, de tal forma que $S^3 \setminus \Pi^2$ tiene dos componentes conexas cuya adherencia son dos bitoros sólidos T_1^2, T_2^2. Vamos a construir un flujo en S^3 tal que en T_1^2 el flujo apunte hacia afuera transversalmente a lo largo de su frontera y en T_2^2 el flujo apunte hacia adentro transversalmente a lo largo de su frontera. Pegando estos dos bitoros por la frontera obtendremos el flujo deseado.

En T_1^2 el flujo tiene tres singularidades $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ donde σ_1 y σ_2 son singularidades hiperbólicas tipo silla con variedad inestable de dimensión 2 y σ_3 es una singularidad fuente, ver figura 2.3.

En T_2^2 el flujo se define en dos plugs, el primer plug es llamado caja de flujo de Che-rry con dos orejas y su construcción es la siguiente: partimos de una caja de flujo de Cherry en dos dimensiones quitando un disco V alrededor de la singularidad atractora como se indica en la figura 2.4. Para obtener el flujo en tres dimensiones ponemos una contracción fuerte en dirección transversal a esta caja de dimensión 2 obteniendo el flujo descrito en la figura 2.5. luego colocamos dos semidiscos perforados (dos orejas) como se muestra en la figura 2.6.

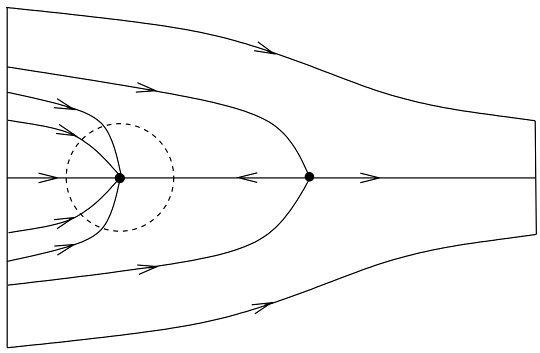


Figura 2.4: Caja de flujo de Cherry 2-dimensional

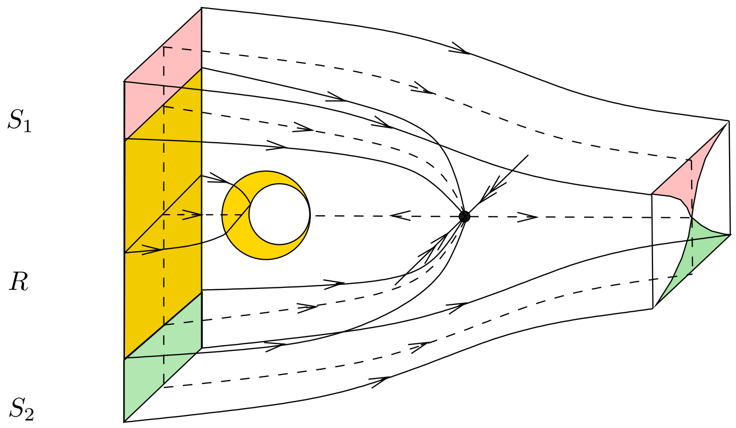


Figura 2.5: Caja de flujo de Cherry 3-dimensional

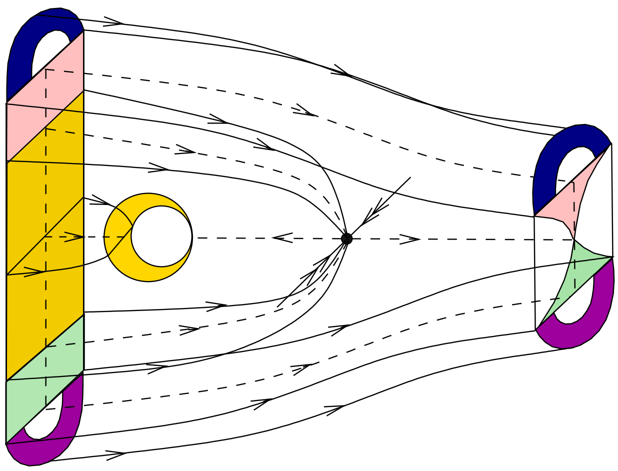


Figura 2.6: Caja de flujo de Cherry 3-dimensional con orejas

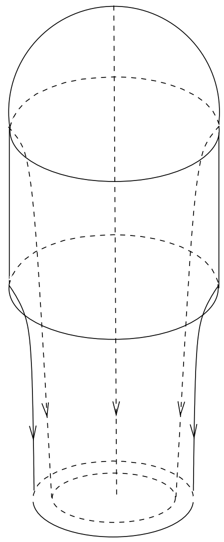


Figura 2.7: Segundo plug

El flujo tiene una sección transversal $S = S_1 \cup R \cup S_2$. La imagen de el rectángulo central R (rectángulo en amarillo) determinado por la variedad estable local de la singularidad σ, es atraída al cilindro generado por el disco que se había quitado anteriormente, y la imagen de los rectángulos restantes y los semidiscos perforados es la que se muestra en la figura 2.6. Este primer plug tiene una única singularidad σ que asumiremos de Lorenz. El segundo plug no tiene singularidades y se muestra en la figura 2.7.
Finalmente obtenemos el flujo en T_2^2 pegando estos dos plugs y adicionando dos órbitas periódicas O_1, O_2 repulsoras que pasan por los huecos en los semidiscos perforados como se muestra en la figura 2.8.

Por construcción tenemos que para este flujo

$$\Omega(T_2^2) \subset \bigcap_{t \geq 0} X_t(T_2^2) = \{O_1, O_2\} \cup A,$$

donde

$$A = \bigcap_{t \geq 0} X_t(V),$$

con $V = T_2^2 \setminus (V_1 \cup V_2)$ y V_1, V_2 son vecindades de las órbitas periódicas O_1, O_2, es decir, son toros sólidos.

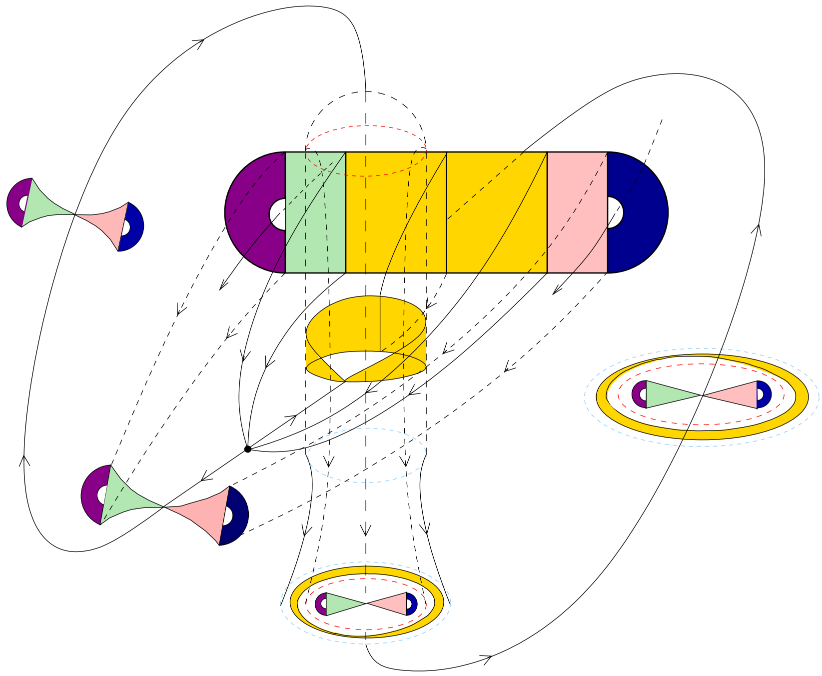


Figura 2.8: Dinámica en T_2^2

En la sección transversal S el mapa de retorno $F : S \to S$ es como se presenta en la figura 2.9, la operación de retorno tiene dominio $Dom(F) = S \setminus l^+ \cup l^-$ donde l^+ y l^- son las rectas correspondientes a la intersección de S y la variedad estable de σ. Podemos asumir que la foliación por líneas verticales en los rectángulos y por líneas radiales en las orejas es invariante por F y que F es uniformemente contractora.

Por lo tanto, el espacio foliado que notaremos por $\mathcal{F}^s$ es una foliación estable para F. Todo punto $p \in l^{\pm}$ tiene como omega-límite la singularidad σ. Existe una linea central L tal que $F(L) \subset L$, por lo tanto F tiene un punto fijo $q \in L$.

Sea B el espacio cociente de S por $\mathcal{F}^s$ y $\pi : S \to B$ la aplicación proyección. Sea $f : Dom(f) \subset B \to B$ la aplicación inducida en B por F. Es decir, $\pi \circ f(p) = F \circ \pi(p)$ para todo p en el dominio de F. B es un segmento de recta con dos curvas cerradas en los extremos de la recta como se muestra en la figura 2.10. Definimos $\pi(L) = 0$, $\pi(L^+) = x^+$ y $\pi(L^-) = x^-$.

Tomemos $B = B^+ \cup B^-$ donde B^+ y B^- son la clausura de las partes conexas de $B \setminus \{0\}$. Sean $H^+ = \pi^{-1}(B^+)$ y $H^2 = \pi^{-1}(B^-)$, entonces $S = H^+ \cup H^-$ y

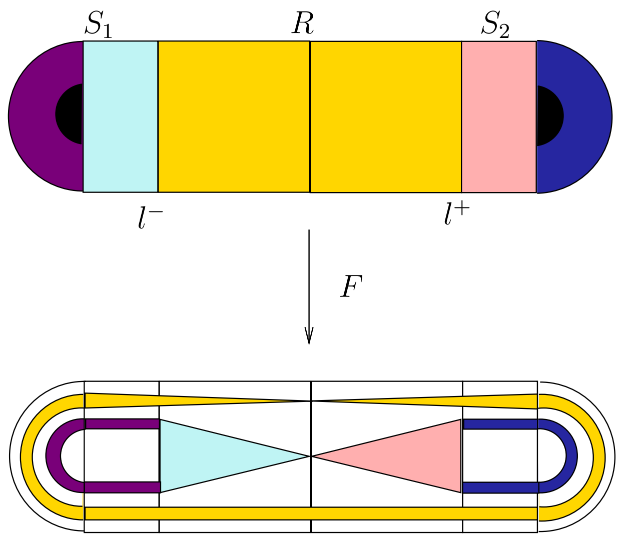


Figura 2.9: Mapa de retorno

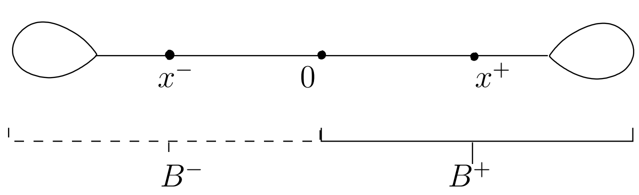


Figura 2.10: El espacio de cociente B

$L = H^+ \cap H^-$. Si $W \subset S$, tomaremos la siguiente convención $F(W) := F(W \setminus L^+ \cup L^-$
Además si $J \subset B$ $f(J) := f(J \setminus \{x^+, x^-\}$.
Una propiedad clave de F es la siguiente

$$F(H^+) \subset H^+ \qquad F(H^-) \subset H^- \tag{2.1}$$

Se puede inferir de 2.1 que el conjunto

$$A_F = CL(\cap_{n>0} F^n(S))$$

no es transitivo, de hecho podemos escribir $A_F = A_F^+ \cup A_F^-$ donde $A_F^+ = CL(\cap_{n>0} F^n(H^+))$ y $A_F^- = CL(\cap_{n>0} F^n(H^-))$.
La construcción del flujo X_t se puede hacer de tal forma que f sea diferenciable y exista $\lambda > 1$ tal que

$$|f'(x)| \geq \lambda. \tag{2.2}$$

De la ecuación 2.1 podemos inferir que $f(B^+) \subset B^+$ y $f(B^-) \subset B^-$ y por lo tanto B no es transitivo.

En [Bau05, Teorema 11] se muestra que $A_F^+ = Cl(\bigcup_{t\geq 0} X_t(A_F^+))$ y $A_F^- = Cl(\bigcup_{t\geq 0} X_t(A_F^-))$ son clases homoclínicas para F. De lo anterior y teniendo en cuenta que el conjunto A se puede escribir como

$$A = Cl(\bigcup_{t\geq 0} X_t(A^+ \cup A^-)) = A^+ \cup A^-$$

Concluimos que A es unión de dos clases homoclínicas A^+ y A^-.
Se puede verificar que $A^+ \cap A^- \neq \emptyset$ y que A no es transitivo pero es un conjunto singular hiperbólico ver [Bau05, pags 85,86].

Hemos construido entonces un conjunto singular hiperbólico conexo A con una única singularidad, que no es unión disjunta de conjuntos transitivos.

Capítulo 3

Descomposición espectral para conjuntos singulares hiperbólicos

3.1. Primer resultado

Como vimos en el capítulo 2 el teorema espectral no es válido para conjuntos singulares hiperbólicos. Sin embargo, bajo algunas condiciones adicionales podemos encontrar una versión para este caso, obteniendo una descomposición del conjunto singular hiperbólico como unión finita de conjuntos transitivos en lugar de una unión finita disjunta de clases homoclínicas. Más precisamente obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 6 (Primer resultado). *Un conjunto singular-hiperbólico attracting con órbitas periódicas densas y una única singularidad es unión finita de conjuntos transitivos.*

Demostración. Sea Λ un conjunto singular hiperbólico con órbitas periódicas densas y una única singularidad, sobre una 3-variedad compacta M. Dividimos Λ en un número finito de componentes conexas, esto lo podemos hacer debido a que Λ es attracting, es decir, existe una vecindad U de Λ compacta tal que

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} X_t(U).$$

Cada una de las componentes conexas es attracting con órbitas periódicas densas.

Las componentes que no contienen la singularidad σ, son hiperbólicas, por lo tanto podemos aplicar el teorema espectral, es decir, cada una de estas componentes es unión disjunta finita de conjuntos transitivos.

La componente que contiene a σ es un conjunto conexo, singular hiperbólico attracting con órbitas periódicas densas y una única singularidad, luego podemos aplicar el teorema 4. Obtenemos entonces que ésta componente conexa es unión de dos clases homoclínicas.

Lo anterior nos permite concluir que Λ es unión finita de conjuntos transitivos. $\square$

El tipo más común de conjunto transitivo es una clase homoclínica. Todos los ejemplos conocidos de conjuntos atractores singulares hiperbólicos son clases homoclínicas [Bau04]. Se conjetura que todo conjunto atractor singular hiperbólico es una clase homoclínica. Si esta conjetura es cierta, podemos fortalecer el resultado obteniendo una unión finita de clases homoclínicas en lugar de conjuntos transitivos.

3.2. Segundo resultado

Es natural preguntarse ¿cuándo la unión en el teorema 6 es disjunta? Para responder esta pregunta recordemos que un campo vectorial es Kupka-Smale si todas sus órbitas cerradas son hiperbólicas y dadas dos órbitas cerradas σ_1 y σ_2, se tiene que $W^s(\sigma_1)$ es transversal a $W^u(\sigma_2)$. En esta clase de campos vectoriales obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 7 (Segundo resultado)**.** *Para un campo vectorial Kupka-Smale, un conjunto singular hiperbólico attracting con órbitas periódicas densas y una única singularidad es unión finita y **disjunta** de conjuntos transitivos.*

Demostración. Sean X un campo vectorial Kupka-Smale en una 3-variedad compacta M y Λ un conjunto singular hiperbólico con órbitas periódicas densas y una única singularidad, es suficiente mostrar el resultado para la componente conexa que contiene la singularidad σ, en realidad mostraremos que tal componente resulta ser transitiva.

Supongamos que tal componente no es transitiva, entonces por el teorema 3 para cada $a \in W_X^{uu}(\sigma) \setminus \{\sigma\}$ existe una órbita periódica O tal que $O = \omega_X(a)$. Por lo tanto el campo exhibiría una intersección no transversal entre $W^s(O)$ y $W^{uu}(\sigma)$, lo cual es una contradicción ya que el campo X es Kupka-Smale. Por lo tanto la componente que contiene la singularidad es transitiva.

Se concluye entonces que Λ es unión disjunta y finita de conjuntos transitivos. □

Un subconjunto de $\chi^r(M)$ es *residual* si este contiene una intersección contable de subconjuntos abiertos densos de $\chi^r(M)$. El teorema de Kupka-Smale 1 afirma que los campos vectoriales Kupka-Smale forman un conjunto residual en el espacio de campos vectoriales de clase C^r en M. El teorema 7 implica que la unión en el teorema 6 es disjunta en la ma-yoría de los campos vectoriales sobre una variedad cerrada. Concretamente tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2. *En el teorema 6 la unión es disjunta para un conjunto residual en $\chi^r(M)$.*

3.3. Tercer resultado

Ahora investigamos qué puede pasar fuera del conjunto residual del corolario 2. Si Λ es un conjunto compacto invariante de un campo vectorial X, definimos

$$\mathcal{H}_X(\Lambda) = \{H : H \text{ es una clase homoclínica contenida en } \Lambda\}.$$

Es interesante buscar condiciones suficientes para que

$$Card(\mathcal{H}_X(\Lambda)) < \infty,$$

donde $Card(A)$ denota el cardinal del conjunto A. Por ejemplo $Card(\mathcal{H}_X(\Lambda)) < \infty$ si :

1. Λ es una clase homoclínica y $X \in \chi^r(M)$ es C^1- genérico, o si
2. Λ es hiperbólico.

El siguiente teorema proporciona una respuesta parcial al problema planteado.

Teorema 8 (Tercer resultado)**.** *Sea Λ un conjunto singular-hiperbólico attracting con órbitas periódicas densas y una única singularidad de $X \in \chi^r(M)$. Si Λ **no** es la unión disjunta de conjuntos transitivos, entonces $Card(\mathcal{H}_X(\Lambda)) < \infty$.*

Demostración. Tomemos $X \in \chi^r(M)$ y sea $\Lambda \subset M$ un conjunto singular hiperbólico attracting con órbitas periódicas densas y una única singularidad σ. Si z pertenece a una órbita periódica hiperbólica de X, notaremos por $H_X(z)$ a la clase homoclínica asociada a z. Si z y z' están en la misma órbita periódica, entonces $H_X(z) = H_X(z')$.

Supongamos que Λ no es unión finita de conjuntos transitivos. Como antes dividimos Λ en componentes conexas. Es suficiente mostrar que para cada componente conexa Λ_j se tiene que:

$$card(\mathcal{H}_x(\Lambda_j)) < \infty.$$

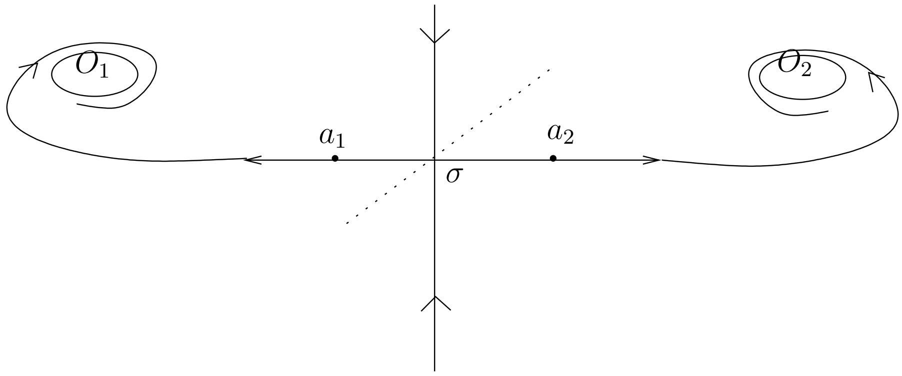
Para las componentes que no contienen a la singularidad, aplicamos el teorema espectral, por lo tanto, cada una de estas componentes es unión finita de conjuntos transitivos.

Ahora consideramos la componente Λ_0 que contiene la singularidad σ. σ tiene variedad inestable 1-dimensional, que consiste de dos órbitas regulares, tomamos a y a' en cada una de estas órbitas. Notemos que Λ_0 no es transitivo, pues si lo fuera Λ sería unión finita de conjuntos transitivos, contrario a lo que suponemos. Aplicando el teorema 3 en Λ_0, obtenemos dos órbitas cerradas O y O' tales que $\omega_X(a) = O$ y $\omega_X(a') = O'$ y con valores propios repulsores de su aplicación de Poincaré asociada mayores que 1.

Supongamos que $Card(H_X(\Lambda_0)) = \infty$, existe una sucesión de orbitas periódicas $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Lambda_0$ y una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_n \in O_n$ y $H_X(z_n) \neq H_x(z_m)$ para $n \neq m$.

Sea

$$A = Cl(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_X(z_n))$$



Si $\sigma \notin A$, A sería hiperbólico y por lo tanto sólo tendría un número finito de clases homoclínicas, lo cual contradice su construcción, por lo tanto $\sigma \in Cl(\cup_{n=1}^{\infty} H_X(z_n))$. Esto implica que podemos encontrar una sucesión $x_n \in H_X(z_n)$ con $x_n \to \sigma$, el teorema de Birkhoff-Smale implica que cada x_n es un punto de acumulación de puntos homoclínicamente relacionados a O_n (definen la misma clase homoclínica), luego podemos asumir sin pérdida de generalidad que $x_n = z_n$.

Podemos tomar cada $x_n \in H_X(z_n)$ por medio del siguiente razonamiento.Como $\sigma \in Cl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_X(z_n))$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ y $x_{n_1} \in H_X(z_{n_1})$ tal que $d(\sigma, x_{n_1}) < 1$.

Caso $\sigma \notin Cl(\bigcup_{n>n_1} H_X(z_n))$, entonces $Cl(\bigcup_{n\geq n_1} H_X(z_n))$ sería un conjunto hiperbólico.Por lo tanto con finitas clases homoclínicas lo que es impossible, pues $H_X(z_n) \neq H_X(z_)m$ para $m \neq n$. Entonces $\sigma \in Cl(\bigcup_{n>n_1} H_X(z_n))$ y así podemos encontrar $n_2 > n_1$ y $x_{n_2} \in H_X(z_{n_2})$ tal que $d(\sigma, x_{n_2}) < 1/2$.
Continuando de esa manera encontramos una sucesión $n_k \to \infty$, $x_{n_k} \in H_X(z_{n_k})$ tal que $d(\sigma, x_{n_k}) < 1/k$, para todo $k \in \mathbb{N}^+$.
Cambiando la sucesión original z_n por la subsucesión z_{n_k} se obtiene la sucesión deseada.

Como O_n es periódica y $z_n \in O_n$ tenemos que $z_n \notin W_X^s(\sigma)$ así que las órbitas O_n acumulan a o a'. podemos asumir el primer caso, el segundo caso es análogo.

Como O tiene un valor propio positivo, O divide su variedad inestable W_X^u en dos componentes conexas $W^{u,+}$, $W^{u,-}$ (ver figura 3.3) tomadas de la siguiente forma: Sean W^{s+}, $W^{s,-}$ las componentes conexas de $W_X^s(\sigma) \setminus W_X^{ss}(\sigma)$. si $I^{\pm}$ es un intervalo transversal con punto frontera a y apuntando hacia $W^{s\pm}$ entonces la órbita positiva de $I^{\pm}$ acumula a $W^{u,\pm}$ respectivamente.

La principal propiedad de $W^{u,\pm}$ es que si z está suficientemente cercano a $W^{u,\pm}$ entonces

$$H_x(z) = Cl(W^{u,\pm}) \tag{3.1}$$

Como $\omega_X(a) = O$ y los O_n se acumulan en a_0 podemos encontrar $z_n' \in O_n$ pasando suficientemente cerca de O, en particular por el lema de inclinación podemos asumir que z_n' converge a un punto en $W^{u,\pm}$. Podemos asumir el caso en que converge a un punto en $W^{u,+}$. Por (3.1) tenemos que para n suficientemente grande se tiene que

$$H_X(z_n') = Cl(W^{u,+}) \tag{3.2}$$

Además como z_n y z_n' están en la misma órbita,

$$H_X(z_n) = H_X(z_n') \tag{3.3}$$

por lo tanto a partir de un N_0 tenemos que:

$$H_X(z_n) = Cl(W^{u,+}) \tag{3.4}$$

finalmente concluimos que

$$H_X(z_m) = H_X(z_n) \qquad \text{para todo } n, m \text{ mayores que } N_0 \tag{3.5}$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $card(\mathcal{H}_x(\Lambda)) < \infty$. $\square$

El siguiente teorema es consecuencia de los teoremas 6 y 7.

Teorema 9. *Sea X un campo vectorial singular-hiperbólico con una única singularidad sobre una 3-variedad compacta. si $\Omega_1(X)$ es attracting y $\Omega_2(X)$ es repelling (attracting para $-X$) entonces $\Omega(X)$ es la unión finita de conjuntos transitivos. Si X es Kupka-Smale, entonces esta unión es disjunta. En particular es disjunta para un conjunto residual en $\chi^r(M)$, $r \geq 1$.*

Bibliografía

[Bau04] S. Bautista, The geometric Lorenz attractor is a homoclinic class, Bol. Math (N.S) (2004), 69–78.

[Bau05] S. Bautista., Sobre conjuntos hiperbólicos-singulares *, ph.d thesis*, Universidade Federal Do Rio de Janeiro (2005).

[CMP98] M. J Pacífico C.A Morales and E.R. Pujals, On C^1 robust transitive sets for three-dimensional flows, Acad. Sci. Paris. Serie 1(Math) (1998), 327–342.

[HM77] Shub M. Hirsch M., Pugh C., invariant manifolds, Lec. Not. in math, springer-verlag (1977), no. 583.

[JP82] Jr. W. de Melo J. Palis, geometric theory of dynamical systems: An introduction, Springer, New york, 1982.

[Mor03] C.A Morales, Singular-hyperbolic sets and topological dimension, Dynamical systems, Vol 18 Num 2 (2003), 181–189.

[MP01] C.A Morales and M. J. Pacífico, Mixing attractors for 3-flows, Nonlinearity (2001), no. 14, 359–378.

[MP04] C.A Morales and M. J Pacífico, Sufficient conditions for the robustness of attractors, Pacific J Math 216:2 (2004), 327–342.

[PJ93] Takens F. Palis J., hyperbolicity and Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinics Bifurcations. Fractal Dimensions and Infinitely Many attractors, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 35, 1993.

[Sma67] S. Smale, Diferential dynamical systems., Bull Amer. Math. Soc (1967), no. 73.