# INCIDENCIA DE LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN COMO ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA EN ESTUDIANTES DE PRIMER SEMESTRE DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE PALMIRA

**JAIME GARCÍA ECHAVARRÍA**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA Y ADMINISTRACION**

**PALMIRA**

**2012**

# INCIDENCIA DE LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN COMO ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA EN ESTUDIANTES DE PRIMER SEMESTRE DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE PALMIRA

**JAIME GARCÍA ECHAVARRÍA**

**Trabajo de grado para optar al título de**

**MAGISTER EN LA ENSENANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES**

**Director**

**BORIS ALEJANDRO VILLAMIL RAMÍREZ**

**Magister en Ingeniería**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA Y ADMINISTRACION**

**PALMIRA**

**2012**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE PALMIRA

**FACULTAD DE INGENIERÍA Y ADMINISTRACIÓN**
**FACULTAD DE CIENCIAS AGROPECUARIAS**

**ACTA DE JURADO DE TRABAJO FINAL**

**MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES**

En Palmira, a los 04 días del mes de junio de 2012, se reunió en esta Sede el jurado evaluador del trabajo final, integrado por los docentes RAUL ANTONIO DÍAZ y LUIS OCTAVIO GONZALEZ SALCEDO

Para calificar el trabajo final de maestría de:

JAIME GARCÍA ECHAVARRÍA

Titulado:

"INCIDENCIA DE LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN COMO ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA EN ESTUDIANTES DE PRIMER SEMESTRE DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE PALMIRA" bajo la dirección del docente Boris Alejandro Villamil Ramirez

Después de oír el informe del jurado evaluador compuesto por los docentes RAUL ANTONIO DÍAZ y LUIS OCTAVIO GONZALEZ SALCEDO y de haber cumplido con el proceso de evaluación, el trabajo final fue calificado como:

APROBADO X

REPROBADO:______

Raul Diaz P.
RAUL ANTONIO DÍAZ

LUIS OCTAVIO GONZALEZ SALCEDO

## AGRADECIMIENTOS

*A Dios por guiarme en este camino y acompañarme en cada momento de mi vida.*

*A mi esposa Blanca Ruby, a mis hijas Valentina y Princesa por su apoyo y comprensión en este proceso. Las amo mucho.*

*A mi director Boris Alejandro Villamil por sus valiosas orientaciones para realizar satisfactoriamente este proyecto.*

*Finalmente agradezco a mis profesores y compañeros por sus consejos y motivaciones y a todas las personas que aportaron un granito de arena para realizar está investigación.*

## CONTENIDO

pág.

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE TABLAS

## ANEXOS

# GLOSARIO

**AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA (AGD**): software para la enseñanza de la Geometría que permite realizar figuras que pueden ser modificadas dinámicamente. Un ejemplo de un AGD es el software de GeoGebra.

**ANOVA:** es una herramienta estadística que sirve para hacer un Análisis de Varianza al poder comparar el comportamiento entre diferentes columnas de datos que cumplan con las siguientes condiciones:

- ✓ Cada columna de datos debe ser independiente de las otras.
- ✓ Los resultados en cada columna de datos deben presentar una distribución normal.

**BINOMIO:** es una expresión algebraica que consta de dos términos, los cuales están separados por el signo mas (+) o el signo menos (-). Las expresiones $a+b, xy-z, x^2-y^2$, etc. son ejemplos de binomios.

**DIALÉCTICA HERRAMIENTA-OBJETO (DHO):** para Douady (1998), la Dialéctica Herramienta-Objeto es un proceso cíclico, toda vez que los conceptos matemáticos juegan alternativamente el papel de Herramienta en la resolución de un problema, y de Objeto tomando un lugar en la construcción de un conocimiento organizado, y a la vez este Objeto pasa a convertirse en herramienta para la solución de otro problema.

**E-LEARNING:** es un modelo de educación a distancia y que utiliza el internet como herramienta en el proceso de enseñanza y de aprendizaje. Lo interesante de este modelo es que permite a cualquier alumno ingresar a un computador desde cualquier parte del mundo, en el horario que desee, para acceder a la información que necesite, e interactuar con su profesor para resolver sus dudas.

**FACTORIZACION:** es el proceso inverso a la multiplicación de polinomios, ya que dado un polinomio, este puede ser expresado como el producto de dos o más factores, que al ser multiplicados dan nuevamente el polinomio original (antes de factorizarla).

**IRRACIONALIDAD NUMÉRICA:** cuando ciertas longitudes al ser medidas no se encuentra ningún número entero o fraccionario que las exprese. Estas magnitudes se llaman inconmensurables, y los números que se originan al medir tales magnitudes se llaman irracionales.

**JUEGO DE MARCOS:** según Douady (1998) define los juegos de marcos como los cambios provocados por iniciativa del docente en problemas que se le propongan a los estudiantes, y donde se pueden iniciar en un marco aritmético, luego cambiarse a un marco algebraico o también a un marco geométrico, de tal forma que el estudiante pueda movilizar varios registros de representación que le ayuden a resolverlo.

**MICRO INGENIERIA DIDÁCTICA:** La ingeniería didáctica de acuerdo con Artigue (1995), se caracteriza por la realización y análisis de secuencias didácticas que requieran de un tiempo corto para su realización.

**MOSTRACIONES:** Se habla de mostración cuando simplemente tratamos de indicar algo, es decir, basta con señalarlo haciendo uso de la visual.

**OBJETOS DE APRENDIZAJE (OA):** El Objeto de Aprendizaje aparece desde 1992, desarrollados por los principales grupos de "e-learning" con el objeto de que facilite su almacenamiento, identificación y recuperación.

**PRODUCTO NOTABLE:** Según Baldor (2002) se llaman productos notables a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir sin verificar la multiplicación.

**SECUENCIA DIDÁCTICA:** La secuencia didáctica se puede entender como el conjunto de actividades organizadas en un orden específico para un fin educativo y que requiere de una programación de tiempo para su realización en la construcción de un concepto.

**SISTEMAS TUTORIALES INTELIGENTES (STI):** Los STI son programas con características similares al trabajo de un docente pero en forma virtual. Según Betancourt (2009) los STI tienen una arquitectura adaptativa y que permiten emular el proceso enseñanza y de aprendizaje, adaptando el tipo y el contenido de la instrucción a las necesidades específicas del alumno; decidiendo cuándo introducir nuevos conceptos o repasar los anteriores si éstos no han sido asimilados y ayudando al profesor en la construcción efectiva y completa de sus cursos.

**VARIANZA:** Es una medida estadística que nos permite conocer en una distribución de datos, la media aritmética del cuadrado de las desviaciones con respecto a la media.

# INTRODUCCION

La investigación que se presenta en esta Memoria se desarrolla en torno a la enseñanza y el aprendizaje de los Productos Notables y el concepto de Irracionalidad Numérica en los cursos de matemática básica de la Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira y las posibles formas de mejorar su comprensión por parte de los estudiantes a través de Ambientes de Geometría Dinámica utilizando el software de GeoGebra. Los resultados que se desarrollan en esta investigación demuestran la pertinencia de la aplicación de nuevas estrategias pedagógicas para incentivar el estudio del algebra en los alumnos. La elección de estos tópicos no es casual. A lo largo de varios semestres y después de revisar los resultados que ellos obtienen en su primer parcial de matemática que contiene los temas de algebra, es una muestra de su bajo nivel en esta área. Además, a través de diferentes estudios como el de Robledo (2003) se ha demostrado que los estudiantes llegan a la universidad con falencias que traen desde sus estudios de Básica Secundaria en temas de álgebra.

De acuerdo con Robledo quien basó su estudio en resultados académicos entre los años 2001 al 2004 de estudiantes en el primer parcial de Cálculo I durante el primer semestre en las carreras de Ingeniería de la Universidad del Valle. Los temas tratados en esta evaluación que tiene un valor del 30% de la nota del curso son de algebra y funciones reales. El resultado de su estudio determinó que el 60% de los estudiantes que matriculan el curso lo reprueban o lo cancelan. De quienes aprueban el primer parcial, el 85% aprueba el curso, y entre los que lo reprueban, el 94% también reprueban el curso. Una de las conclusiones a la que llega es: "*La formación matemática de los estudiantes de primer semestre de ingeniería de la Universidad del Valle (¿y de la mayoría de las universidades de Colombia?) es desigual: hay estudiantes con una buena formación matemática, al lado de estudiantes que debido a su deficiente formación matemática se constituyen en una población en riesgo de desertar de la universidad o de permanecer en la misma durante períodos de tiempo socialmente inaceptables*".

Los objetivos trazados, descritos en la sección 1.3, de la presente investigación se logran a través de diferentes estrategias metodológicas que permiten obtener resultados positivos para el estudio. Las estrategias se desarrollan en las clases presenciales, la utilización de la plataforma virtual Blackboard de la universidad, elaboración de secuencias didácticas a través de las guías y los objetos de aprendizaje, también actividades complementarias de autoaprendizaje.

Esta investigación en su parte didáctica, tiene como objetivo último el de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, lo que implica aportar elementos teóricos y prácticos que permitan incrementar la eficacia de una formación inicial de los estudiantes universitarios que les facilite su desarrollo profesional. Además, con ella aportar nuevas ideas para el currículum de Matemáticas en los primeros cursos de Universidad y aportar materiales didácticos variados para los estudiantes, en particular, conocer mejor las ventajas e inconvenientes de la utilización de las nuevas tecnologías para su formación y su posterior uso en las labores profesionales.

Por su parte, en el marco teórico de la sección 3, se adopta la teoría de los registros de representación semiótica (Duval 1995), en la que "*no hay conocimiento sin representación*" para la comprensión de los objetos matemáticos. De este modo, reconocer la importancia que tienen las diversas representaciones de los objetos matemáticos es el primer paso para elaborar actividades que permitan la puesta en marcha de diferentes representaciones en paralelo para alcanzar una adecuada apropiación de los conocimientos. Se distinguen tres registros para el estudio de los temas de algebra seleccionados: el registro algebraico, el registro numérico y el registro gráfico; también se sitúa en una perspectiva de micro Ingeniería Didáctica apoyada en los juegos de marcos y dialéctica herramienta objeto, teorías que se abordan en el capítulo 0.

De otro lado, el estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS, por sus siglas en inglés) y que tiene como objetivo mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y las ciencias, realiza una evaluación de conocimientos en los estudiantes de los países participantes para medir que fallas encuentra en sus currículos y la identificación de buenas prácticas de enseñanza. Nuestro país ha tenido la oportunidad de participar dos veces en este estudio, en los años 1995 y 2007, presentando un bajo nivel en matemáticas, y aunque al comparar los dos años se nota una pequeña mejoría de 20 puntos en los resultados del 2007, llama la atención los factores que pudieron incidir para que esto se diera según los análisis realizados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), y es que los estudiantes que usan el computador y que tienen acceso a internet obtienen promedios más altos de quienes no utilizan este recurso. En el capítulo 1 cuando se aborda el problema de investigación se muestra en forma detallada los resultados de esta prueba.

De esta manera, los propósitos investigativos son importantes porque tuvieron en cuenta las debilidades en el conocimiento de las matemáticas con las que los estudiantes llegan a la universidad.

# 1 SOBRE EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta la descripción de los problemas que tienen los estudiantes en el aprendizaje del algebra desde la perspectiva de la educación secundaria y desde la universitaria. Se abordan las dificultades de los estudiantes en estos niveles y sus principales debilidades, especialmente en lo relacionado con el manejo de conceptos como multiplicación de polinomios, productos notables factorización y el concepto de número irracional. En ese sentido, revisemos en primera instancia el informe presentado por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) de los resultados de la evaluación TIMSS en el año 2007 y que mide el rendimiento académico de los estudiantes colombianos de cuarto y octavo grados en esta área.

Los estudiantes que se tomaron como muestra y que en total fueron 4801 quedaron distribuidos de la manera como se muestra en la tabla 1.

**Tabla 1.** Distribución porcentual de los estudiantes colombianos evaluados en TIMSS 2007

| Categoría | | Grados | |
|---|---|---|---|
| | | Cuarto | Octavo |
| Sector | Oficial | 83,4% | 82,0% |
| | Privado | 16,6% | 18,0% |
| Zona | Urbana | 75,1% | 88,0% |
| | Rural | 24,9% | 12,0% |
| Género | Hombres | 50,4% | 49,0% |
| | Mujeres | 49,6% | 51,0% |

**Fuente**. Base de datos TIMSS 2007. Realizados por la Dirección de evaluación del ICFES

En la prueba se evaluaron *dominios de contenido* que incluyen temas específicos del área y *dominios cognitivos* que corresponde a las destrezas y habilidades que el estudiante debe saber aplicar. La prueba combinó preguntas de selección múltiple con otras abiertas que en algunos casos requerían de su justificación. En la tabla 2 se muestran los contenidos evaluados, y donde se puede observar que entre los temas que evalúa la prueba TIMSS se encuentran incluidos los trabajados en esta investigación en lo relacionado con los contenidos de Números y Álgebra, y de acuerdo a los análisis estadísticos realizados por el ICFES daremos cuenta del nivel que presentan en esos contenidos los estudiantes colombianos.

**Tabla 2.** Dominios de contenido y cognitivos evaluados en las pruebas de matemáticas TIMSS 2007

| Grado | Dominios de contenido | Dominios cognitivos |
|---|---|---|
| Cuarto | Números | Conocer |
| | Formas geométricas y medidas | Aplicar |
| | Presentación de datos | Razonar |
| Octavo | Números | Conocer |
| | Álgebra | Aplicar |
| | Geometría | Razonar |
| | Datos y probabilidad | |

**Fuente**. Base de datos TIMSS 2007. Realizada por la Dirección de evaluación del ICFES

Los resultados de la prueba TIMSSS se expresan en puntajes promedios y niveles de desempeño. El promedio que se manejó en el año 2007 fue de 500 con una desviación estándar de 100. Así mismo, los puntajes por niveles de desempeño se ponderan de acuerdo al nivel en que se le presente la pregunta que puede ser en un nivel alto, medio o bajo. En la tabla 3 se muestran los promedios obtenidos por los estudiantes colombianos y en la tabla 4 los niveles de desempeño que indican el saber hacer en contexto de parte de los estudiantes en cada grado.

**Tabla 3.** Promedios de los estudiantes colombianos en matemáticas según sector, zona y género

| Grado | Colombia | Sector | | | Zona | | | Género | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Oficial | Privado | Diferencia | Urbana | Rural | Diferencia | Niñas | Niños | Diferencia |
| Cuarto | **355** | 345 | 410 | 65 | 365 | 327 | 38 | 347 | 364 | 17 |
| Octavo | **380** | 369 | 427 | 58 | 385 | 340 | 45 | 364 | 396 | 32 |

**Fuente**. Base de datos TIMSS 2007. Realizados por la Dirección de evaluación del ICFES

Se observa que el promedio de los estudiantes colombianos de cuarto grado fue de 355 puntos (muy por debajo del promedio TIMSS que recordemos fue de 500), mientras que en los países asiáticos como Hong Kong es de 607 o Japón con 568, nuestro país superó solamente a países como El Salvador con 330, Kuwait con 316 o Yemen 224. En grado octavo el promedio colombiano es similar con 380 puntos, mientras que Taipéi obtuvo 598 y Corea 597. Al final, y después de ver el análisis realizado por el ICFES, Colombia en el grado cuarto ocupo el puesto 37 entre 43 países y 7 entidades subnacionales (estados de algunos países como Canadá y Estados Unidos), en octavo ocupo el puesto 56 entre 59 países y 6 entidades subnacionales participantes, lo que indica el bajo nivel que presenta nuestro país en el área de matemáticas.

**Tabla 4.** Niveles de desempeño en la prueba de matemáticas

| Nivel de desempeño | Cuarto grado | Octavo grado |
|---|---|---|
| **Avanzado** (625 puntos o más) | Aplican su conocimiento y comprensión en una variedad de situaciones relativamente complejas y explican su razonamiento | Organizan y plantean conclusiones a partir de información, hacen generalizaciones y resuelven problemas no rutinarios |
| **Alto** (entre 550 y 624 puntos) | Aplican su conocimiento y comprensión para resolver problemas | Aplican su conocimiento y comprensión en situaciones relativamente complejas |
| **Medio** (entre 475 y 549 puntos) | Aplican conocimiento matemático básico en situaciones simples | Aplican conocimiento matemático básico en situaciones simples |
| **Bajo** (entre 400 y 474 puntos) | Tienen un conocimiento básico de las matemáticas | Tienen algún conocimiento sobre números naturales y decimales, operaciones y gráficos |
| **Inferior** (399 puntos o menos) | Tienen un conocimiento matemático inferior al mínimo que permite describir la prueba de TIMSS 2007 | Tienen un conocimiento matemático inferior al mínimo que permite describir la prueba de TIMSS 2007 |

**Fuente**. Base de datos TIMSS 2007. Tomados por la dirección de evaluación del ICFES

Los resultados por niveles de desempeño en cuarto grado indican que el 69% de los estudiantes colombianos están en el nivel inferior, el 22% en el nivel bajo, un 7% en el medio, 2% en el alto y ninguno en el avanzado. En octavo la situación es similar, puesto que el 61% tuvo logros inferiores, el 28% se ubicó en el nivel bajo, en tanto que el 9% en el medio, el 2% en el alto y ninguno en el avanzado. Estas cifras son preocupantes, puesto que casi las dos terceras partes de los estudiantes colombianos presentan dificultades con el manejo de los conocimientos básicos de las matemáticas, mientras que en países como Singapur, Hong Kong, Taipéi, los porcentajes tanto en grado cuarto como en octavo estuvieron altos, con más del 40% en el nivel avanzado, lo que indica que en estos países gran parte de sus estudiantes saben aplicar la matemática para resolver problemas complejos.

Al comparar los resultados anteriores que recordemos fueron del año 2007 con los del año 1995 el promedio de nuestro país subió 20 puntos en matemáticas de grado octavo, que es un aumento estadísticamente significativo, aunque siguen siendo bajos. Entre los factores que explica el ICFES pudieron haber incidido para que este fenómeno se diera se resaltan los siguientes:

- ✓ **En el hogar:** Tener computador con acceso a internet se asocia positivamente a los resultados, ya que los estudiantes que lo usan obtienen promedios más altos de quienes no utilizan este recurso. Esto, según el ICFES evidencia que la utilización de nuevas tecnologías de comunicación y de información en las aulas favorecen la obtención de mejores aprendizajes.

- ✓ **Actitudes de los estudiantes:** A nivel internacional, los puntajes mas altos están en los estudiantes que dicen tener actitud positiva hacia la matemáticas, pero en Colombia donde el 69% de los estudiantes de octavo dicen tener buena actitud hacia esa disciplina tuvo un promedio de 385 y quienes dijeron lo contrario 380.

- ✓ **Ambiente escolar:** Los estudiantes que asisten con mayor regularidad a clase obtienen un puntaje más alto en matemáticas de grado octavo con un promedio de 404, en comparación con los estudiantes que presentan una baja asistencia con un promedio de 369.

- ✓ **Preparación y desarrollo profesional de los docentes:** Entre mayor es la preparación de los docentes, los promedios de los estudiantes son más altos. Además, cuando el trabajo es realizado en forma colaborativa el promedio en matemáticas es 384, mientras que cuando no se realiza el promedio es de 371.

Por otra parte, en las experiencias socializadas en el *Sexto Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* 2004 por docentes investigadores en didáctica de la matemática y cuyo eje temático fue: *Procesos Matemáticos y desarrollo de competencias en matemática,* ya se evidenciaba la importancia de capacitar a los futuros profesores en el diseño e implementación de ambientes propicios para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con el fin de mejorar el bajo nivel que presenta esta área en nuestro país.
Entre las conclusiones de las ponencias que se tomaron en cuenta para la realización de esta investigación fueron las siguientes:

- ✓ Samper C., Leguizamón C., Aya O. y Martínez L., de la Universidad Pedagógica Nacional, en su ponencia *La exploración como actividad en el aprendizaje de la geometría* sugieren: “incluir como parte de la formación profesional del docente de matemáticas el uso reflexivo y significativo de la geometría dinámica, a través de talleres donde se puedan realizar procesos de construcciones geométricas, así como la formulación y validación de conjeturas. Para lograrlo, el estudiante debe tener manejo ágil del recurso tecnológico”.

- ✓ Guerrero F., de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, respecto al trabajo con los *Universos Numéricos en su ponencia Formación de profesores en la transición aritmética al algebra: el caso de la variable y los universos numéricos* concluye que: “A nivel del conocimiento profesional del profesor de matemáticas se espera que los participantes reflexionen sobre las implicaciones didáctico cognitivas en la construcción del significado de número irracional y sus posibilidades de trabajo en el aula ” también dice que: “A nivel de la investigación en el aula, la incorporación en la reflexión didáctica del uso de instrumentos y la generación de nuevos aprendizajes en torno a la relación entre los universos numéricos y la idea de variable a partir de la fracción como mecanismo constructivo”

- ✓ Tamayo G. Guerrero A., Torres P. del *Grupo de Estudio en Nuevas Tecnologías Departamento del Cesar en su ponencia Herramientas Semióticas y currículo de Matemáticas* revisten la importancia del uso de la tecnología y los registros de representación diciendo: “Para el desarrollo curricular de las matemáticas, las herramientas semióticas se convierten en amplificadores y reestructurantes del currículo. La tecnología computacional (caso de las calculadoras graficadoras TI-92 Plus y/o Voyage-200), enfatiza la exploración semántica de la actividad matemática", agregan también: "La representación de registros semióticos posibilita la construcción del conocimiento en lo referente a la comprensión de los objetos matemáticos porque los estudiantes superan la simple manipulación de expresiones y se detienen en observar el procedimiento analítico –simbólico comunicando significados y razonando sobre las expresiones".

Adicionalmente, es preciso señalar que estudios realizados por Martos (2008) han mostrado que es muy importante dominar los productos notables para un buen manejo de la matemática, pues siempre estarán presentes en la resolución de ejercicios que impliquen simplificar expresiones algebraicas, y después de indagar a varios docentes sobre la importancia de este concepto llega a la siguiente conclusión.

*"Dos valores epistémicos de los productos notables detectados:*

- ✓ *Podrían ser un "puente" para que estudiantes aprendan la idea de factorización, la cual es fundamental en el álgebra porque el teorema fundamental del álgebra la involucra (este valor epistémico es infra-matemático).*
- ✓ *El otro valor epistémico es extra matemático, motivacional. Dado que hay evidencia del énfasis puesto en que estudiantes dominen productos notables, ya que estos están presentes en distintos tipos de tareas en la institución, si el estudiante los domina podrá acometer varios de estos tipos de tareas, ganará buenas experiencias por saber hacer las tareas, situación que podría ser favorable para su aprendizaje de la matemática y posiblemente tendrá éxito en la institución".*

## 1.1 Descripción de la Recolección de Datos del Problema desde una Institución Educativa de Básica Secundaria

A manera de ejemplo de lo explicado por el ICFES en el informe anterior sobre el bajo nivel en matemáticas que presentan los estudiantes colombianos y que quedo demostrado en la prueba internacional TIMSSS en los dos años que se ha participado, se presenta una experiencia realizada por el Área de Matemáticas en la Institución Educativa de Básica Secundaria Jorge Isaacs durante el año lectivo 2010, con un grupo de grado 11 conformado por 40 estudiantes y a los cuales se les llevó a cabo un repaso general de conceptos básicos de matemáticas para presentar las pruebas ICFES.

Antes de la explicación de cada tema el profesor realiza a los estudiantes una actividad de tipo diagnostico con el fin de saber el nivel de dominio que tienen los estudiantes del tema que se va a enseñar (en este caso multiplicación de expresiones algebraicas y productos notables), además se realizó un análisis a la solución presentada por los estudiantes de acuerdo a lo dicho por Duval (1995) con *Los Sistemas De Representación Semiótica* (explicado en la sección 3.2), donde se observa que el desarrollo de la actividad implica la movilización del pensamiento para buscar significados y relaciones entre las cosas cuando se pretende llegar al objeto matemático.

Los instrumentos que hicieron parte de esta experiencia se evidencian en las figuras 1 y 2: la actividad aplicada a todo el grupo y los resultados obtenidos con dos tipos de soluciones (A y B), que son una muestra representativa porque agrupa todas las demás soluciones del total del 70% que la reprobaron.

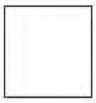
**Figura 1.** Actividad Diagnóstico: Multiplicación de expresiones algebraicas

**ACTIVIDAD A – MULTIPLICACION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS**

1. Desarrollar las operaciones indicadas:

- A. $(-2X^3Y)(-3X)(2Y^2)$
- B. $(2X^{-2}Y)(-X^3Y^{-2})(4XY^2)$
- C. $X^2(X-3) + 2(X^3 - 3X^2 + 4)$
- D. $(X-3)(2X + 1)$

2. Expresar el área total de las tres figuras mostradas como una expresión algebraica simplificada.

a) 

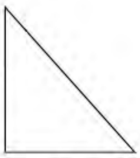
X + 1

X + 1

b)

X + 1

X + 3

c) 

4

X - 2

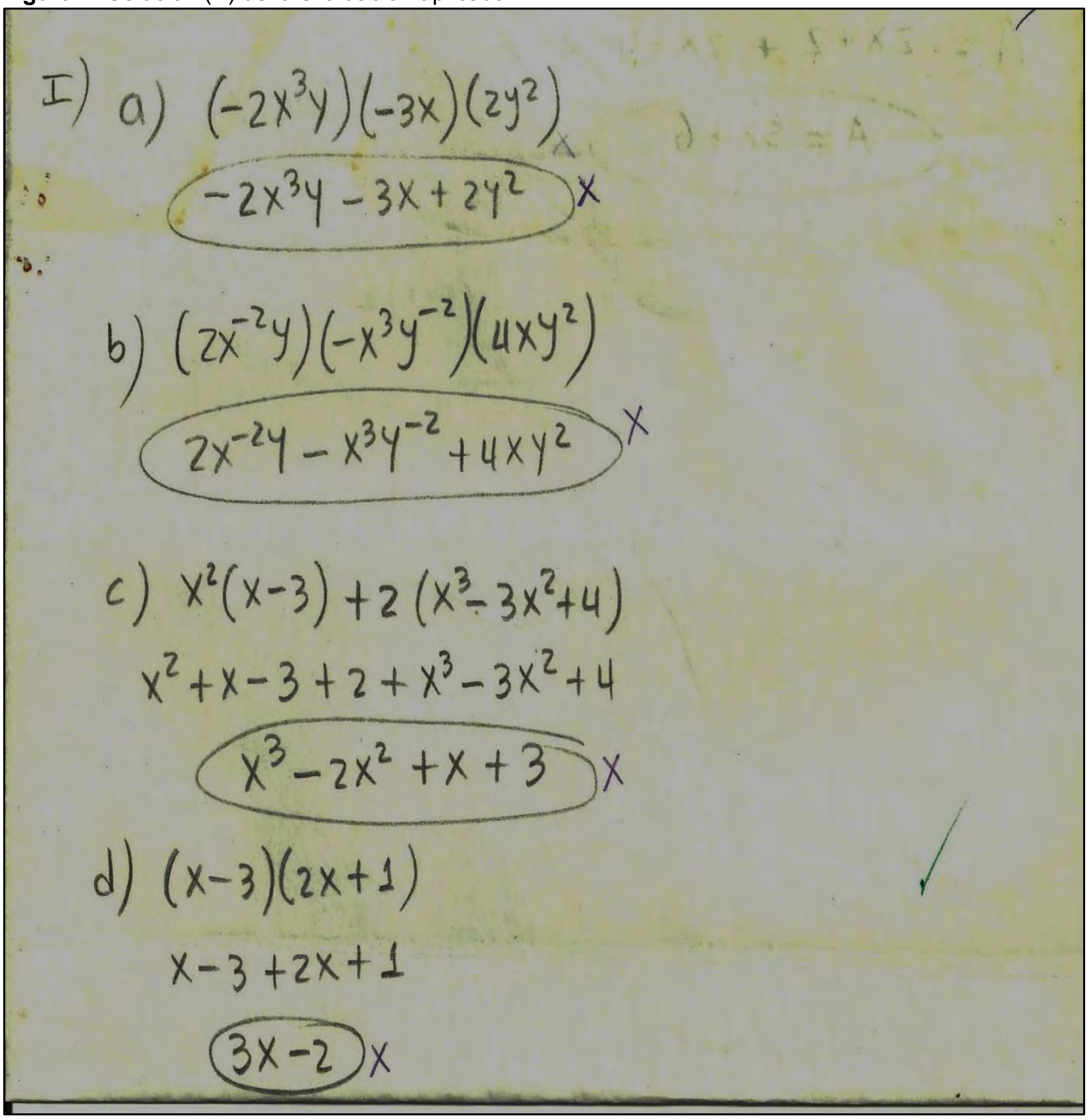
**Fuente**. Area de Matemáticas(2010). Institución Educativa Jorge Isaacs.

### 1.1.1 Descripción de la Actividad

Observemos que esta actividad tiene dos tipos de representaciones para evaluar el concepto de producto de polinomios: En la primera parte los productos se dan en una representación algebraica y en la segunda parte los productos se dan en una representación geométrica partiendo del área de unas figuras geométricas conocidas como el cuadrado, el rectángulo y el triángulo, con el propósito de analizar si el estudiante presenta buena apropiación de este concepto y además si lo utiliza en la aplicación del cálculo de áreas.

De otro lado, las operaciones de los registros figurativos están fundamentadas en la distinción del signo de multiplicación entre los signos más (**+**) y el menos (**-**), lo mismo que realizar la adición de los exponentes a partir de la diferenciación del producto, y finalmente reconocer las semejanzas entre las representaciones obtenidas.

**Figura 2.** Solución (A) de la evaluación aplicada.



I) a) $(-2x^3y)(-3x)(2y^2)$

$-2x^3y - 3x + 2y^2$ X

b) $(2x^{-2}y)(-x^3y^{-2})(4xy^2)$

$2x^{-2}y - x^3y^{-2} + 4xy^2$ X

c) $x^2(x-3) + 2(x^3-3x^2+4)$

$x^2 + x - 3 + 2 + x^3 - 3x^2 + 4$

$x^3 - 2x^2 + x + 3$ X

d) $(x-3)(2x+1)$

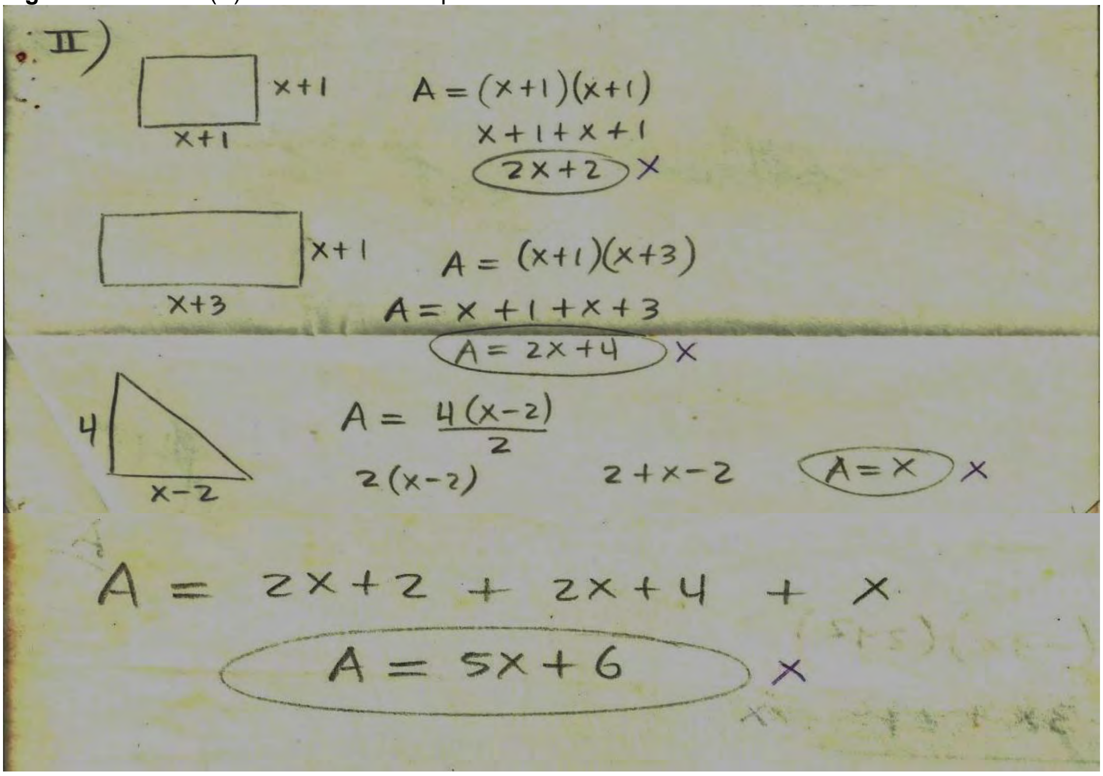
$x - 3 + 2x + 1$

$3x - 2$ X

**Fuente**. Area de Matemáticas(2010). Institución Educativa Jorge Isaacs.

Continuación figura 2

**Figura 2.** Solución (A) de la evaluación aplicada.




**Fuente**. Area de Matemáticas(2010). Institución Educativa Jorge Isaacs. El Cerrito.

### 1.1.2 Análisis de la Solución A de la Evaluación Aplicada

- ✓ Tanto en el punto 1 como en el punto 2 el estudiante identifica el signo de agrupación y sabe que deben de eliminarse, y de igual forma reconoce semejanza con las representaciones tanto algebraica como gráfica.

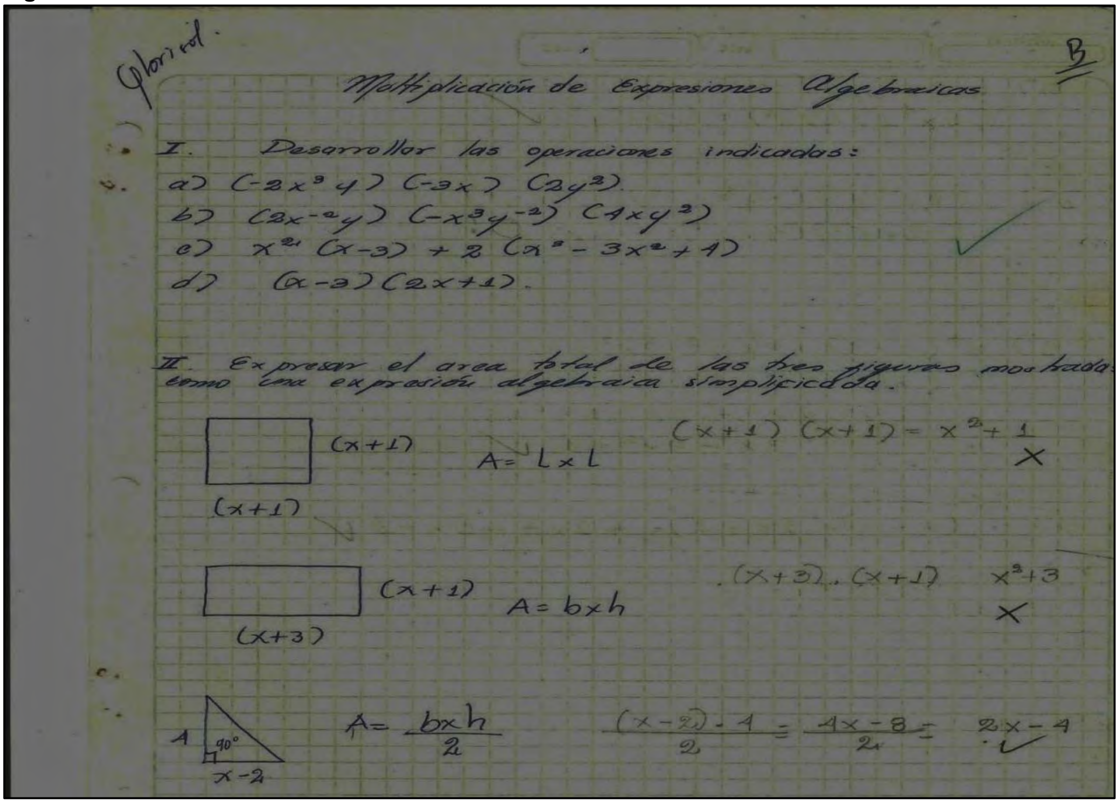
- ✓ Presenta deficiencia en la naturaleza del signo de multiplicación (implícito en el paréntesis), no visualizándolo en tanto pierde su significancia.

- ✓ Al pasar por alto el aspecto inicial de la representación, no aplica la adición en los exponentes como consecuencia del error cometido inicialmente.

*CUESTIONAMIENTO:* ¿Podré determinar con los elementos proporcionados en la solución, si efectúa la diferenciación de suma en los exponentes al visualizar el producto?

Ahora se observa otra solución en la figura 3 dada por otro estudiante en la misma actividad, donde se pueden analizar otros tipos de errores en el tema de multiplicación de polinomios.

**Figura 3.** Solución B de la evaluación indicada.



Multiplicación de Expresiones Algebraicas B

I. Desarrollar las operaciones indicadas:

a) $(-2x^3y)(-3x)(2y^2)$

b) $(2x^{-2}y)(-x^3y^{-2})(4xy^2)$

c) $x^2(x-3)+2(x^3-3x^2+1)$

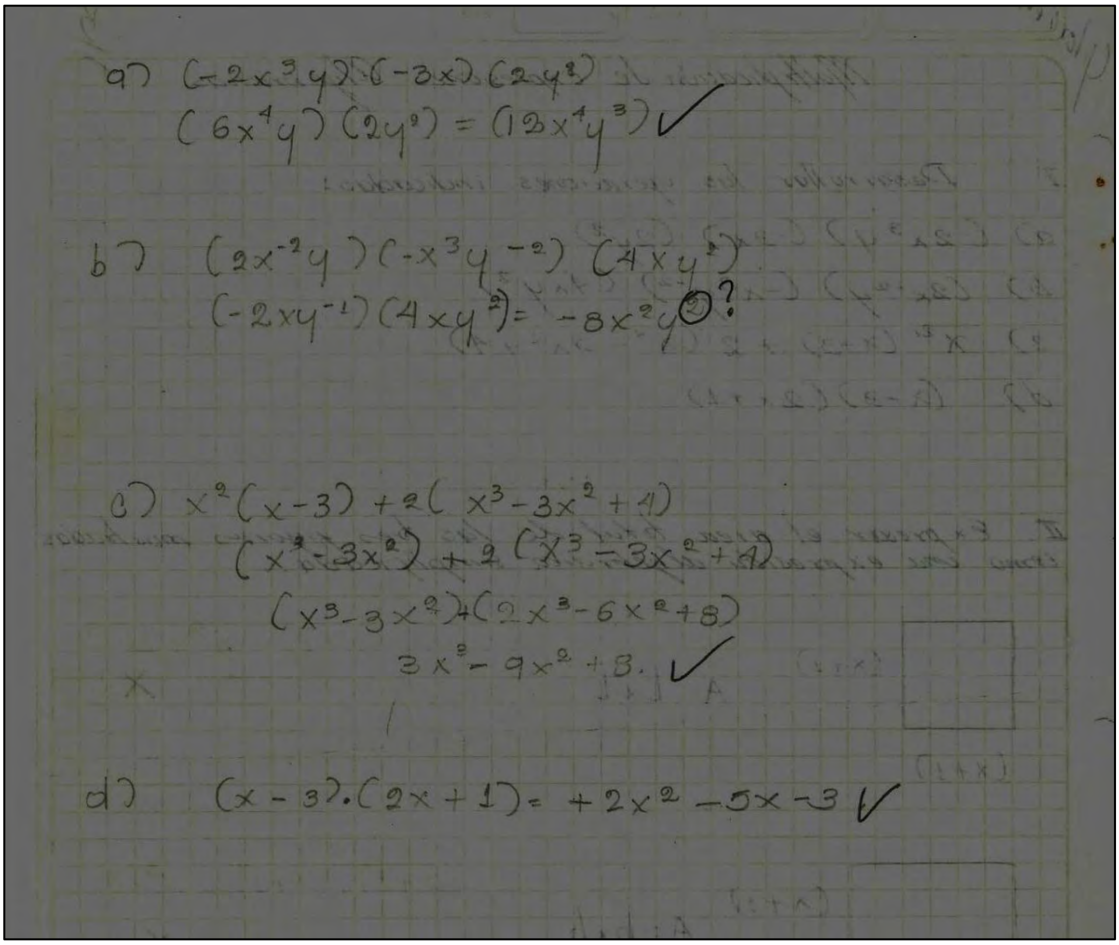
d) $(x-3)(2x+1)$.

II. Expresar el área total de las tres figuras mostradas como una expresión algebraica simplificada.

$(x+1)$, $(x+1)$ $A = L\times L$ $(x+1)(x+1) = x^2+1$

$(x+1)$, $(x+3)$ $A = b\times h$ $(x+3).(x+1)$ $x^2+3$

$4$, $90°$, $x-2$ $A = \frac{b\times h}{2}$ $\frac{(x-2)\cdot 4}{2} = \frac{4x-8}{2} = 2x-4$



a) $(-2x^3y)(-3x)(2y^2)$

$(6x^4y)(2y^2) = (12x^4y^3)$

b) $(2x^{-2}y)(-x^3y^{-2})(4xy^2)$

$(-2xy^{-1})(4xy^2) = -8x^2y$ ?

c) $x^2(x-3)+2(x^3-3x^2+1)$

$(x^3-3x^2)+2(x^3-3x^2+1)$

$(x^3-3x^2)+(2x^3-6x^2+8)$

$3x^3-9x^2+8.$

d) $(x-3).(2x+1) = +2x^2-5x-3$

**Fuente**. Area de Matemáticas(2010). Institución Educativa Jorge Isaacs.

### 1.1.3 Análisis de la Solución B de la Evaluación Aplicada

- ✓ En esta otra solución observamos que la variación de la representación entre los registros del punto **1** al **2** produjo un error en el estudiante que podemos considerar según Duval desde el punto de vista *Estructural*, ya que no determina bien la significancia de los signos (*parte semiótica*) y las posibilidades de representación que ellos ofrecen.
- ✓ El segundo numeral busca mediante la adición de otros elementos (elementos de carácter geométrico como el área), o al hacer unas variaciones estructurales internas en el mismo registro, que el individuo llegue a una representación semiótica del mismo registro, sin embargo el desarrollo (proceso cognitivo en la realización del problema, y la interpretación del registro), no fue correctamente efectuada.

### 1.1.4 Hallazgos de los Datos Encontrados en la Educación Básica

Entre los hallazgos presentados en este estudio, se pueden mencionar:

- ✓ Siempre que se pretende llegar al conocimiento o esperar que los alumnos lo hagan, se van a presentar errores, los cuales no se deben de tomar como "*intencionales para buscar culpables",* sino más bien en convertirlos en elementos pedagógicos, para analizarlos y tratar de darles un tratamiento beneficioso, evitando de esta forma que se puedan seguir repitiendo.
- ✓ Una propuesta en el proceso de enseñanza y aprendizaje del algebra debe tener en cuenta diferentes sistemas de representación como se explica en la sección 3.2, que dan desde diferentes puntos de vista, el significado del concepto matemático en estudio.
- ✓ Abordar el aprendizaje de las matemáticas en la Básica Secundaria desde el uso de diferentes sistemas de representación semióticos como lo dice Duval (1995), permite analizar, desde lo cognitivo, las operaciones, procesos, y estrategias que utiliza el alumno cuando construye el conocimiento, proporcionándole medios que le ayuden a reflexionar sobre sus propios procesos cognitivos, además de facilitarle al docente trabajar directamente sobre las dificultades que se presenten durante todo este proceso.
- ✓ Y, por ultimo, una propuesta curricular basada en los sistemas de representación utilizando la mediación de las TIC como lo realizado en esta investigación para enseñar los conceptos del álgebra en los que se han detectado que los estudiantes han tenido dificultad, favorecería la motivación en clase, esto es, serian mas positivas las relaciones profesor- alumno, las relaciones de los alumnos entre si, y con el conocimiento.

## 1.2 Descripción de la Recolección de Datos del Problema en la Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira

El proceso de recolección de datos en la universidad se inició en el semestre 2011-1 y terminó en el 2011-2. En el primero, el docente trabajó sin mediación tecnológica mientras que para el segundo, el docente sí utiliza la mediación tecnológica como recurso pedagógico. En el capítulo 4 se explica la forma detallada en que se realizó.

En el periodo académico 2011-1 se aplicó el primer parcial de matemáticas (figura 4) que fue resuelto por todos los grupos de estudio de esta investigación. Vale la pena decir que, al revisar los resultados, de los 77 estudiantes que presentaron la prueba y que estaban distribuidos en dos grupos, sólo el 23% alcanzó resultados favorables, mientras que el 77% en el grupo 1 y el 85% en el grupo 2, obtuvieron resultados desfavorables, en la sección 5.4 podemos ver el respectivo análisis de varianza.

**Figura 4.** Primer parcial de Matemática Básica periodo académico 2011-1. Preguntas 1-3

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE PALMIRA
FACULTAD DE INGENIERÍA Y ADMINISTRACIÓN

*PRIMER EXAMEN PARCIAL DE MATEMÁTICAS BÁSICAS*

*PROFESOR:_______________________________ FECHA: Sábado, 05 de marzo de 2011A*

*ESTUDIANTE:________________________ CODIGO: ____________ GRUPO:____*

***Todas las preguntas son de selección múltiple con única respuesta***

***MARQUE LA RESPUESTA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS (Pág. 3) Y SUSTÉNTELA EN EL ESPACIO INDICADO (Pág. 3 - 4) IDENTIFICÁNDOLA DE FORMA PRECISA.***

- ✓ *Si marca dos respuestas a una misma pregunta, esta se tomará como incorrecta.*
- ✓ *Si su respuesta es CORRECTA se revisará su sustentación, en caso contrario NO.*
- ✓ *Cada pregunta tiene un valor de* $0,65$ *si está bien sustentada.*
- ✓ *Respuesta marcada correctamente pero sin sustentación o mal sustentada tiene un valor* $0,25$

**1.** *Considere el conjunto universal* $U=\{x\in\mathbb{N}/8\leq x<40\}$ *y los siguientes subconjuntos de* $U$:

$E=\{x/x \text{ es impar}\}$, $F=\{x/x \text{ es primo}\}$, $G=\{x/x \text{ es divisor de } 35\}$, $H=\{x/x \text{ es múltiplo de } 3\}$

*La operación* $(E\cap G)-(F\cap H)$ *es equivalente con:*

*A.* $\varnothing$ *B.* $\{35\}$ *C.* $\{13, 35\}$ *D.* $\{35, 40\}$

**2.** *Al simplificar la expresión algebraica* $\left(\dfrac{2}{7}\right)^2\times\dfrac{(3\times6)^2\times7^2}{12}$ *se obtiene:*

*A.* $2^3\times3^3$ *C.* $2^3\times3^2$

*B.* $2^2\times3^3$ *D.* $2^3\times3\times7$

**3.** *La expresión algebraica* $\dfrac{a^6+1}{a^2+1}$ *es equivalente con:*

*A.* $\dfrac{a^6}{a^4}$ *C.* $a^4-a^2+1$

*B.* $a^4$ *D.* $a^4+a^2+1$

LUCY JANETH MEDINA BEJARANO
JAIME GARCIA ECHAVARRIA
MIGUEL ANGEL CARRANZA RODRIGUEZ
PABLO EDILSON CERÓN MUÑOZ
OSCAR MAURICIO MORA ARROYO

*Página 1 de 4*

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE PALMIRA

**Fuente**.Departamento de Ciencias Básicas. Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira

Continuación figura 4

**Figura 4.** Primer parcial de Matemática Básica periodo académico 2011-1. Preguntas 4-6

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE PALMIRA
FACULTAD DE INGENIERÍA Y ADMINISTRACIÓN

**4.** *Al simplificar la expresión algebraica* $\dfrac{(x^6-64)}{(x-2)(x+2)}$ *se obtiene:*

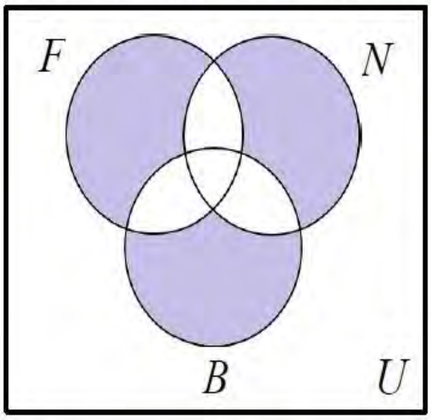
$A.\ \dfrac{x^4+4x^2+16}{(x-2)}$

$B.\ \dfrac{x^4+4x^2+16}{(x+2)}$

$C.\ x^4-4x^2+16$

$D.\ x^4+4x^2+16$

**5.** *Los resultados de una encuesta a un grupo de estudiantes acerca de la preferencia en la práctica de deportes de alto rendimiento como el Fútbol* $(F)$*, el Baloncesto* $(B)$ *y la Natación* $(N)$*, entre otros, se incluyen en el siguiente diagrama.*




*De las proposiciones siguientes:*

*I. La región sombreada representa los estudiantes que practican los 3 deportes.*

*II. La región sombreada representa los estudiantes que practican solamente un deporte.*

*III. La región sombreada representa los estudiantes que no practican alguno de los tres deportes.*

*A. I y II son verdaderas.*

*B. I y III son falsas.*

*C. I y III son verdaderas.*

*D. I, II y III son verdaderas.*

**6.** *Al realizar la operación* $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+2x+1}$ *se obtiene la respuesta simplificada:*

$A.\ \dfrac{1}{x-1}$

$B.\ -1$

$C.\ \dfrac{x}{x+1}$

$D.\ \dfrac{x-1}{(x+1)^2}$

LUCY JANETH MEDINA BEJARANO
JAIME GARCIA ECHAVARRIA
MIGUEL ANGEL CARRANZA RODRIGUEZ
PABLO EDILSON CERÓN MUÑOZ
OSCAR MAURICIO MORA ARROYO



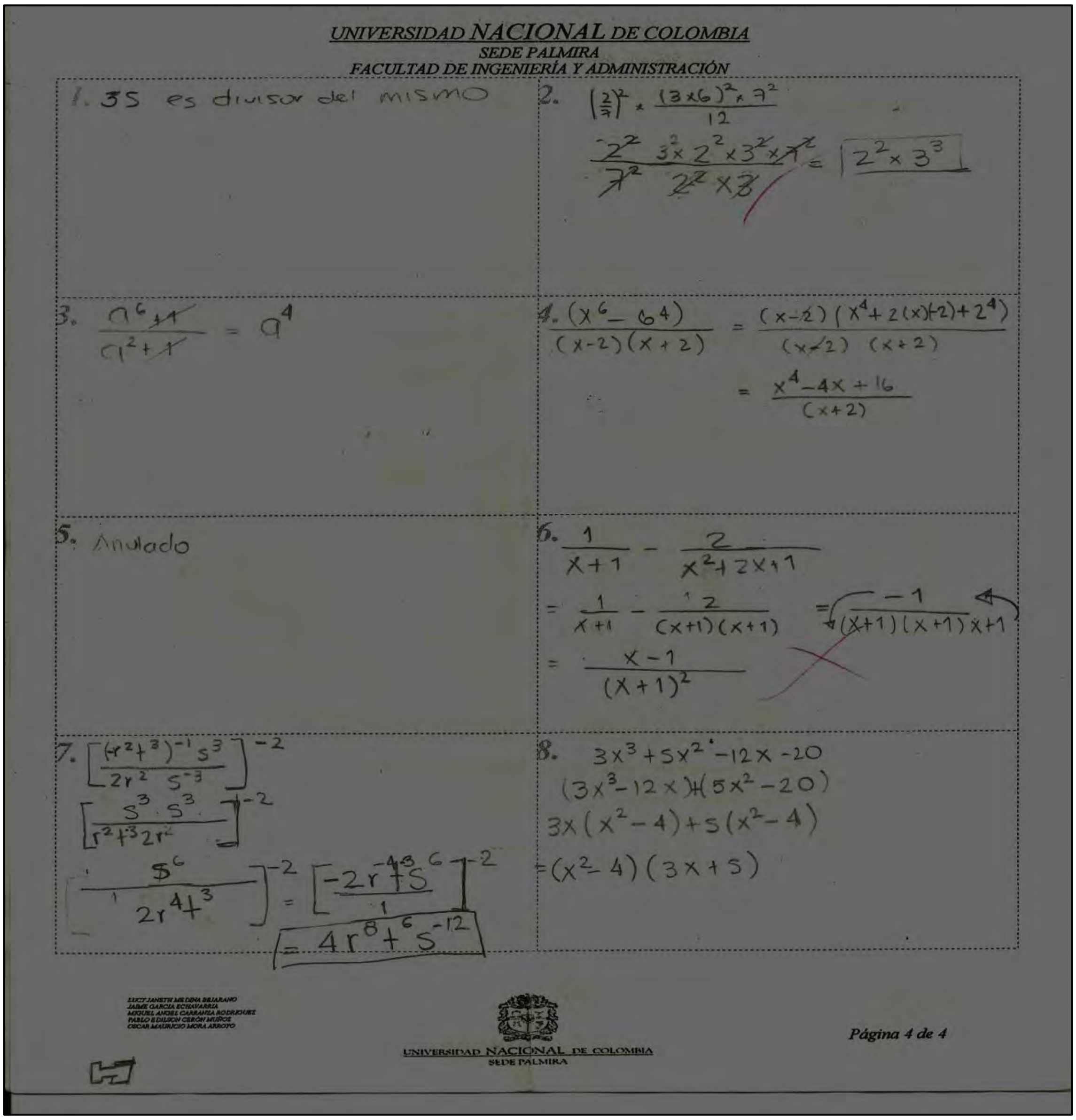
**Fuente**.Departamento de Ciencias Básicas. Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira

### 1.2.1 Descripción y Análisis de la Solución del Primer Parcial 2011-1

Observemos que la actividad presenta en los puntos 2, 3, 4 y 6 problemas de algebra (el 75% de su nota) que involucra tener claro los conceptos de productos notables y factorización, y solo contiene dos preguntas del tema de conjuntos que no tomaremos en cuenta para el análisis de la evaluación.

A continuación se observan las soluciones dadas por los estudiantes en este primer parcial. Para ello, en cada una de las preguntas se realiza una descripción de los resultados que se tomaron como muestra y que agrupo las diferentes respuestas analizadas del total de estudiantes que lo presentaron. Estas soluciones se identifican como estudiante 1, 2, 3, etc.

R/ (Estudiante 1)



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE PALMIRA

FACULTAD DE INGENIERÍA Y ADMINISTRACIÓN

1. 35 es divisor del mismo

2. $\left(\frac{2}{7}\right)^2 \times \frac{(3\times 6)^2 \times 7^2}{12}$

$= \boxed{2^2 \times 3^3}$

3. $\frac{a^6+1}{a^2+1} = a^4$

4. $\frac{(x^6-64)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x-2)(x^4+2(x)(2)+2^4)}{(x-2)(x+2)}$

$= \frac{x^4-4x+16}{(x+2)}$

5. Anulado

6. $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+2x+1}$

$= \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)(x+1)} = \frac{-1}{(x+1)(x+1)}$

$= \frac{x-1}{(x+1)^2}$

7. $\left[\frac{(r^2t^3)^{-1}s^3}{2r^2 s^{-3}}\right]^{-2}$

$\left[\frac{s^3 \cdot s^3}{r^2t^3 2r^2}\right]^{-2}$

$\left[\frac{s^6}{2r^4t^3}\right]^{-2} = \left[\frac{2r^4t^3 s^6}{1}\right]^{-2}$

$\boxed{= 4r^8 t^6 s^{-12}}$

8. $3x^3+5x^2-12x-20$

$(3x^3-12x)(5x^2-20)$

$3x(x^2-4)+5(x^2-4)$

$=(x^2-4)(3x+5)$

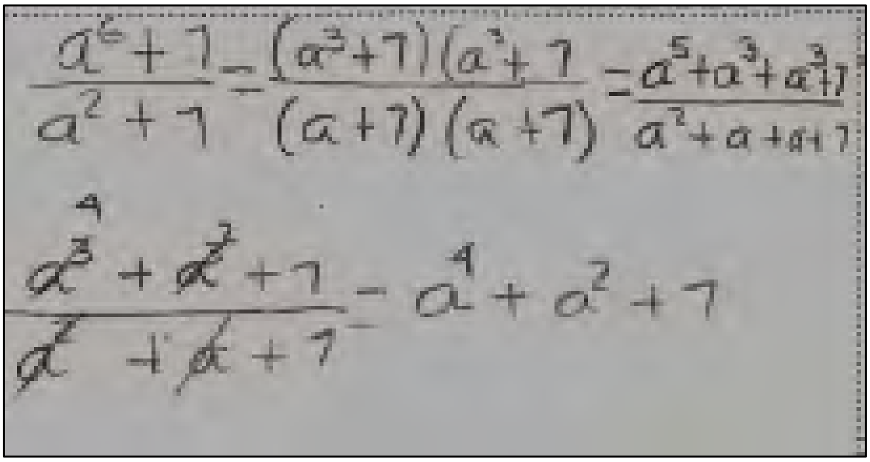
Página 4 de 4

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

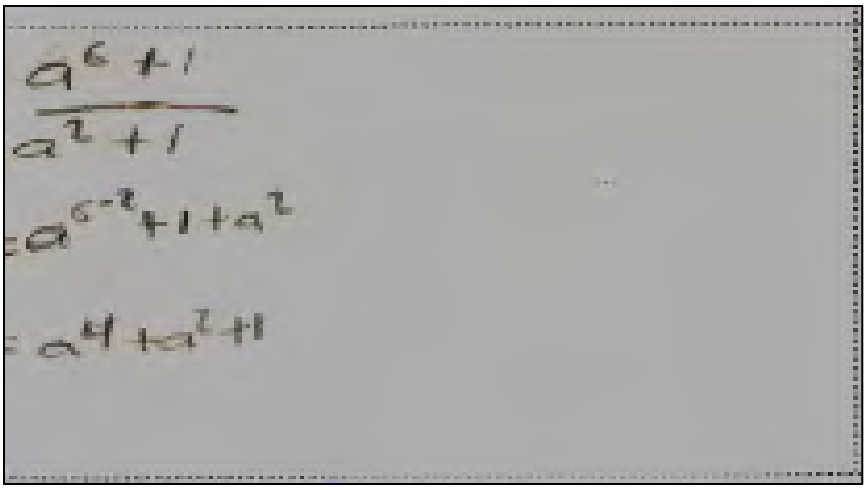
SEDE PALMIRA

- ✓ En el punto 3 el 90% de los estudiantes se limitaron a realizar una simplificación errónea dentro del proceso matemático, no visualizaron que la simplificación la deben hacer una vez hayan realizado las respectivas factorizaciones de forma adecuada como la *suma de cuadrados* en las expresiones dadas y, pierden la significancia de que sólo se pueden simplificar expresiones que estén en forma de producto y no con la operación suma o resta como ocurre en estos otros casos.

R/ (estudiante 2)

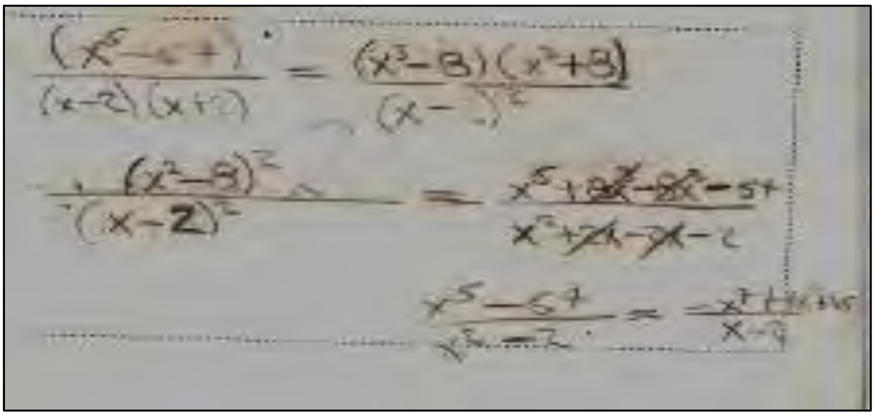



R/ (estudiante 3)

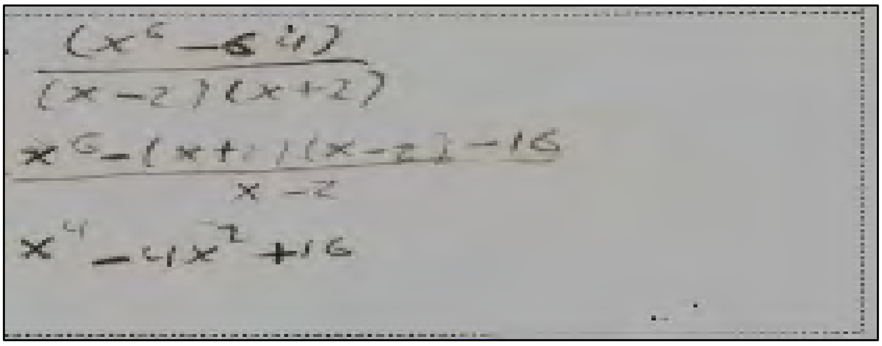



- ✓ En el punto 4 se evidencia que los estudiantes confunden la factorización *diferencia de cuadrados* que aparece en el numerador, con el producto notable cuadrado de la diferencia y hacen una combinación de los dos casos llegando a una representación errónea. En el denominador los estudiantes no visualizan el producto notable *suma por su diferencia* y pierde su significancia. Veamos otras soluciones que le llevaron a la misma respuesta por otro procedimiento.

R/ (estudiante 4)

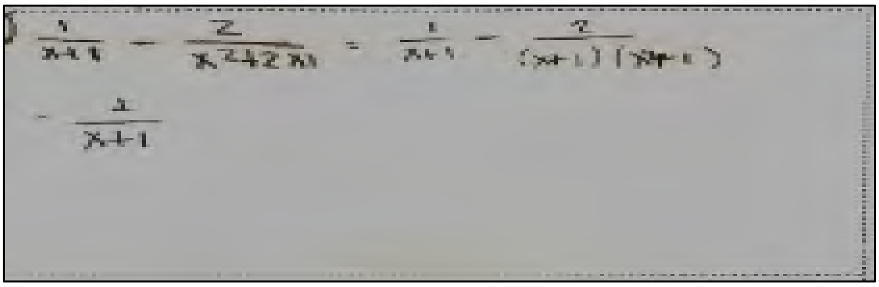


R/ (estudiante 5)

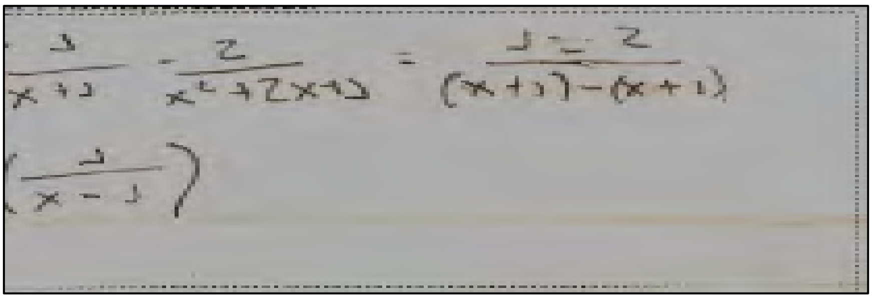


- ✓ En el punto 6 cuando los estudiantes sacan el Máximo Común Denominador (M.C.D) para realizar la resta de las expresiones algebraicas no visualizan el producto notable *cuadrado de la suma*, por tanto toman mal el M.C.D. y llegan de nuevo a una respuesta errónea.

R/ (estudiante 6)



R/ (estudiante 7)



### 1.2.2 Hallazgos de los Datos Encontrados en el Semestre 2011-1 en la Universidad Nacional

- ✓ Esta experiencia es un ejemplo del bajo nivel que presentan los egresados de la Educación Secundaria y que se refleja en su altísima tasa de reprobación en los primeros parciales en los cursos de matemáticas de la universidad, como lo muestra en su investigación Robledo (2003) y que coinciden con los hallazgos descritos en la presente investigación en la Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira, como se evidencia en la sección 1.2 con las dificultades presentadas por los estudiantes al resolver su primer parcial que contiene los temas de algebra, durante los semestres académicos 2011-1 y 2011-2. De igual manera en la sección 5.4 se puede evidenciar el respectivo análisis estadístico de esta situación con la herramienta ANOVA.

- ✓ Es importante tener en cuenta que los estudiantes de la Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira tienen acceso a la tecnología, como las plataformas virtuales Blackboard, Moodle, Moodle 2, de igual forma los salones de clase cuentan Video Beam, salas de sistemas con acceso a internet, o sus computadores personales, donde todo esto puede ser utilizado como una potente herramienta didáctica en el proceso de enseñanza y aprendizaje, para tratar de superar las dificultades o "vacíos matemáticos" que traen desde su educación básica, y de esta manera tratar de construir el conocimiento matemático de la en forma adecuada.

- ✓ Teniendo en cuenta lo anterior, sin lugar a dudas, el papel del docente como mediador en el proceso de aprendizaje es muy importante para que el estudiante construya su propio conocimiento. Las orientaciones dadas en el aula y la comunicación permanente entre docente-estudiante y viceversa permiten vislumbrar qué conceptos de las matemáticas están generando mayor dificultad en el aprendizaje o cuales son reforzados en el momento en que el aprendiz por voluntad propia decide ingresar a las plataformas virtuales y resolver por sí mismo los problemas o llegar al aula de clase con dudas y preguntas para que el profesor termine de explicarle y así el mismo pueda reconocer si aprendió o no determinado tema.

- ✓ El aprovechamiento de los recursos, la motivación, el desarrollo de competencias y habilidades cognitivas son las que le permiten al estudiante fortalecer su proceso de aprendizaje, valorando los esfuerzos que su docente hace para facilitarle la construcción de conocimiento. En ese sentido, es el alumno quien debe poner de su parte para que el proceso iniciado en el aula de clase continúe de manera autónoma e independiente cuando decide ingresar a las plataformas virtuales y profundizar en los temas tratados durante las horas de clase. El seguimiento y la supervisión permanente que hace el docente son parte del proceso de mejoramiento en el aprendizaje de las matemáticas. Los aprendices deben aprovechar los recursos que están a su alcance para apropiarse de ese conocimiento matemático, leer, resolver problemas, hacer preguntas, trabajar en equipo y crear problemas, son algunas de las actividades cognitivas que el mismo debe estar dispuesto a realizar después de cada sesión de clase para que de forma consciente e intencional revise qué tanto ha progresado y qué le falta por aprender.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo General

El objetivo general de la presente investigación es desarrollar una secuencia didáctica en la que a través de la mediación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), se orienten procesos de enseñanza y de aprendizaje, de tal manera que permitan mejorar las competencias en matemática básica de los estudiantes, a través de un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) como el software GeoGebra, en esta investigación las actividades propuestas para construir los conceptos de irracionalidad numérica y el de los productos notables

### 1.3.2 Objetivos Específicos

Consecuentemente los objetivos específicos planteados son:

1.3.2.1 Diseñar y utilizar objetos de aprendizaje a través de GeoGebra en los conceptos de productos notables y el de irracionalidad numérica.

1.3.2.2 Aplicar la teoría de micro ingeniería didáctica apoyada en los juegos de marcos y la dialéctica herramienta-objeto en la elaboración de las guías de los objetos de aprendizaje.

1.3.2.3 Mejorar los desempeños de los estudiantes en sus evaluaciones sobre temas de algebra específicamente los que involucren productos notables y el concepto de numero irracional.

Finalmente, se logra movilizar el proceso de indagación hacia la siguiente hipótesis.

## 1.4 Hipótesis de la Investigación

*Es posible promover el aprendizaje de los productos notables, y el concepto de irracionalidad numérica en estudiantes del curso de matemáticas básica, a través del diseño de secuencias didácticas en un Ambiente de Geometría Dinámica como GeoGebra y de esta forma mejorar los desempeños de los estudiantes en su primer parcial cuyos temas abordados sean de algebra.*

# 2 MARCO CONCEPTUAL

En éste capítulo se describen las definiciones desde las cuales se trabajó el proceso investigativo. Es necesario tener claro desde qué perspectiva se abordan los conceptos para lograr comprender el análisis y los resultados obtenidos.

## 2.1 Los Números Irracionales

Los números fueron creados por la mente humana para contar los objetos en diversas colecciones. Al construir conjuntos adicionando uno a uno más elementos y representando la cantidad de elementos por un símbolo, genero el conjunto de los **números naturales** que está formado por: N = {0, 1, 2, 3,. . .}. Para algunos autores los naturales comienzan en 1 y al conjunto {0, 1, 2,. . .} lo llaman el conjunto de los enteros no-negativos o números cardinales. En éste último caso, el 0 corresponde al cardinal del conjunto vacío. El conjunto formado por los números naturales y sus opuestos se les llamo los **números enteros** Z = {. . ., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3,. . .}. El conjunto formado por los enteros y cociente de enteros forman los **números racionales**, al realizar la división encontramos la expresión decimal del número. Dicha división puede terminar, como en 5 / 8 = 0,625 o puede ser infinita, pero con un tramo de cifras que se repite, como en 2 / 11 = 0,1818181818. . . , podemos decir entonces, que los números racionales son aquellos cuya expresión decimal es finita o periódica.

**Ejemplos**

Desde el siglo IX aparecen los libros de matemáticas árabes, y con ellos las primeras bases del algebra, y todos los problemas numéricos que presenta tienen soluciones racionales positivas. Si se presenta alguna solución que no sea racional, le llaman "raíz ciega". De aquí se desprende el concepto de irracionalidad numérica para referirse a las soluciones de problemas que su solución no es racional. Un número irracional es inconmensurable, es decir, no puede ser representado por el cociente de dos números enteros, y son el complemento de los números racionales para formar el conjunto de los números reales. También definimos los números irracionales como decimales infinitos no periódicos, por ejemplo:

- ✓ Raíz cuadrada de 2: $\sqrt{2} = 1,4142135...$
- ✓ El número "pi": $\pi = 3,14159...$
- ✓ El numero Euler $e \approx$ 2,71828 18284 59045 23536…
- ✓ 0,1234567891011121314151617 . . .
- ✓ 1,2122122212222122222122222 . . .

## 2.2 Productos Notables

Los productos notables como su nombre lo indica, guardan relación entre las expresiones que se multiplican, por lo tanto se puede realizar la respectiva multiplicación siguiendo reglas que permiten hacerlo de una forma abreviada.

También se puede decir que representan la factorización de polinomios como el Trinomio Cuadrado Perfecto o una Diferencia de Cuadrados.

En los textos de álgebra un tema obligado a enseñarse antes de la factorización es el de productos notables por la relación directa entre estos dos temas, por ejemplo, Stewart (2000) dice que los Productos notables, deberán aprenderse a fin de reconocer el proceso inverso a la factorización y ahorrar tiempo en la multiplicación.

De otro lado, en el texto de Baldor (2002), aparece la explicación de los productos notables por medio de representaciones geométricas que van guiando al estudiante a través de la relación con áreas de cuadrados y rectángulos a una representación algebraica de cada producto notable, y que son precisamente los que centraron el interés para esta investigación, e introduciéndoles la aplicación de las TIC como se evidencian en la sección 4.

A continuación se pueden observar las definiciones de los productos notables dadas por Baldor (2002).

- ✓ ***Cuadrado de la suma de dos cantidades:***

  Elevar el cuadrado de ***a + b*** equivale a multiplicar este binomio por si mismo.

  $$(a+b)^2 = (a+b) \times (a+b)$$

  $$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$

  $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{………………… (Ecuación 1)}$$

  Luego, el cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, más el doble producto de la primera cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad.

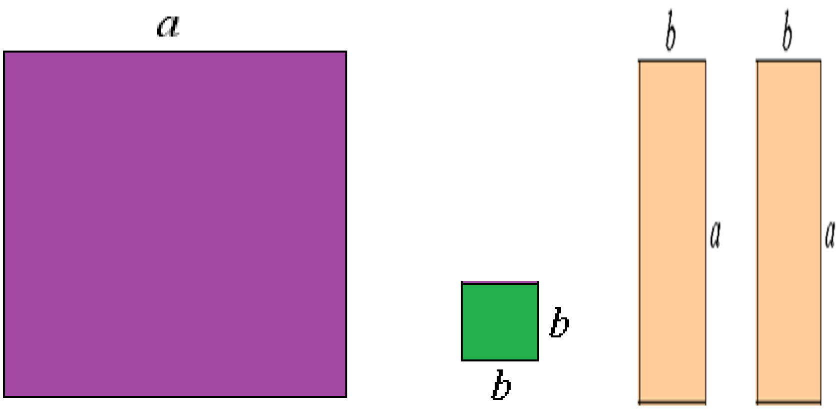
  Ejemplo:

  $$\left(3a^2+5x^3\right)^2 = (3a^2)^2 + 2(3a^2)(5x^3) + (5x^3)^2 = 9a^4 + 30a^2x^3 + 25x^6$$

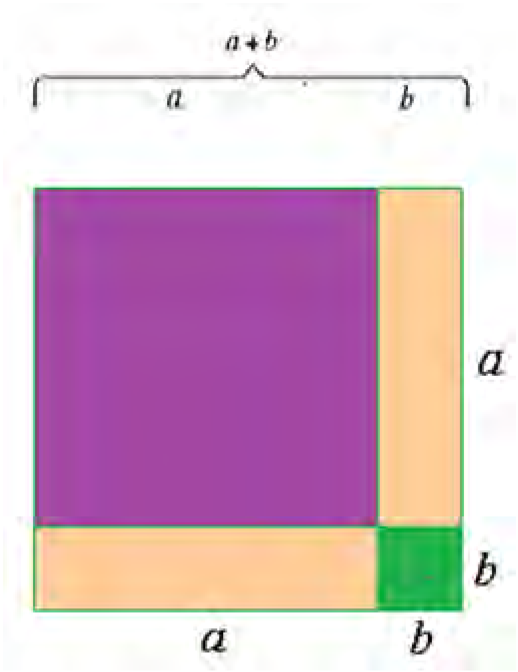
  $$\left(2x+3y\right)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

La representación geométrica de este producto notable es:

Se construye un cuadrado de lado **a** unidades, otro de lado **b** unidades, y dos rectángulos de largo **a** y ancho **b**.




Uniendo las cuatro figuras anteriores, se forma un cuadrado de **a + b** unidades de lado, como se muestra en la *figura a*.




..........................................*Figura a*

El área de esta figura es $(a+b)(a+b)=(a+b)^2$ y como puede verse en la figura 1 esta área esta formada por un cuadrado de área $a^2$, un cuadrado de área $b^2$ y dos rectángulos de área ***ab*** cada uno o sea ***2ab***, por lo tanto:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- ✓ ***Cuadrado de la diferencia de dos cantidades:***

Elevar el cuadrado de ***a - b*** equivale a multiplicar este binomio por si mismo.

$$(a-b)^2 = (a-b)x(a-b)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - ab - ab - b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$ .................. (Ecuación 2)

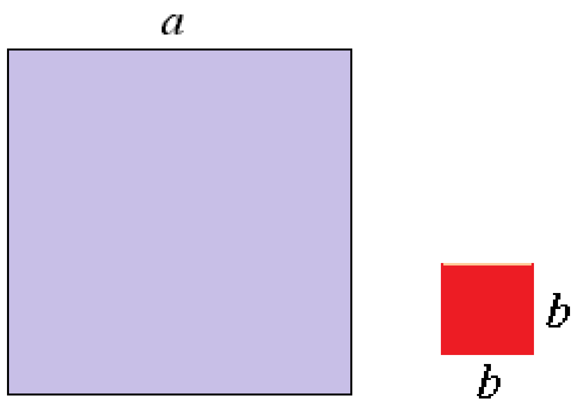
Luego, el cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, menos el doble producto de la primera cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad.

Ejemplo:

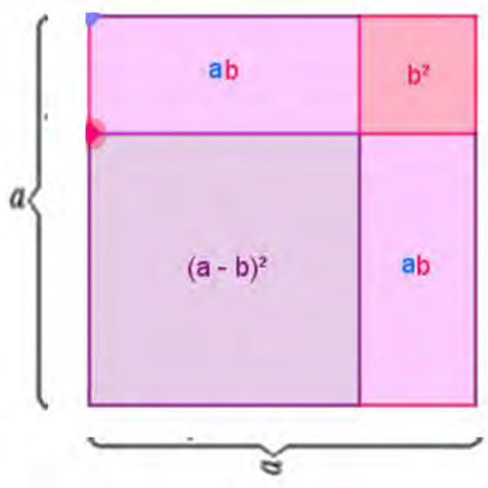
$$(2x-3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(-3y) + (-3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

La representación geométrica de este producto es:

Se dibuja un cuadrado de lado **a** y otro de lado **b**.




Luego, al sobreponer en un extremo del cuadrado de lado **a,** el cuadrado de lado ***b***, se observa que se forman dos rectángulos de largo ***a*** y ancho ***b,*** lo mismo que el cuadrado de lado ***a-b*** unidades, como se muestra en la *figura b*.




................*Figura b*

El área del cuadrado de lado **a-b** es $(a-b)(a-b)=(a-b)^2$ y como puede verse en la figura 2 esta área esta formada por un cuadrado de área $a^2$, un cuadrado de área $b^2$, y la resta de las areas de los dos rectángulos de los dos rectangulos ***( -2ab***), es decir:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- **Suma por su diferencia:**

El producto de la suma por la diferencia es igual al producto de dos binomios que se diferencian solo en su signo como se muestra en la *ecuación 3*.

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$ ………………...*Ecuación 3*

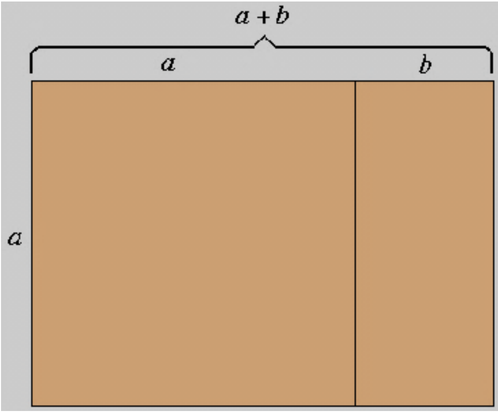
Luego, la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia es igual al cuadrado del minuendo (en diferencia) menos el cuadrado del sustraendo.

Ejemplo:

$$(2x+3y)(2x-3y)=(2x)^2-(3y)^2=4x^2-9y^2$$

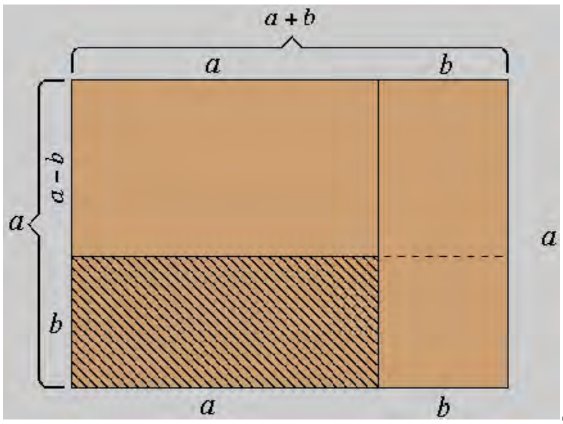
La representación geométrica de este producto es:

Se construye un cuadrado de lado **a** unidades, y le agregamos un rectángulo de largo **a** y ancho **b** unidades, como se muestra en la *figura b*.



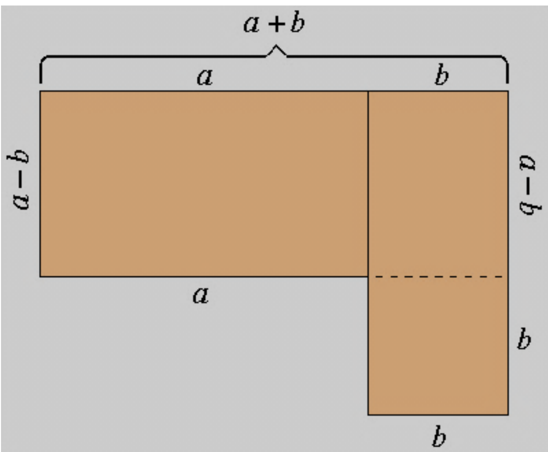

................*Figura b*

A la *figura b* se le recorta un rectángulo de ancho **a** y largo **b,** rectángulo subrayado (*figura c*)**.**



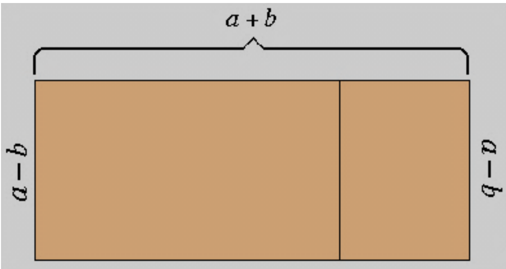

**............***Figura c*

La figura queda (figura d):




**............***Figura d*

Por último, a la figura 3 le quitamos el cuadrado de lado **b**, quedando un rectángulo de área **(a + b) (a - b),** como se muestra en la *figura e*




……………….*Figura e*

El área de la *figura e* es:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

## 2.3 Ambientes de Geometría Dinámica (AGD) y GeoGebra

El constante desarrollo de las TIC permite la aplicación de nuevos métodos y modelos educacionales, lo que hace necesario un esfuerzo de innovación pedagógica como lo propone Trouche (2003), para él una calculadora graficadora es un ejemplo de un artefacto que permite la movilización de conocimientos matemáticos, ya que su empleo sistemático puede reforzar el estudio de las operaciones con números no solo para efectuar cálculos, sino también para verificar resultados y visualizar representaciones de gráficas.

De acuerdo a lo anterior, en los objetos de aprendizaje diseñados en esta investigación se interesó en trabajar una metodología motivadora para la enseñanza de los temas de álgebra en el curso de matemática básica. Para este fin se analizan algunos recursos tecnológicos que pueden ser de ayuda didáctica para cumplir con esta tarea.

Existen unos programas conocidos como los Sistemas de Calculo Simbólico (SCS) que permiten resolver ecuaciones, graficar funciones, realizar operaciones con matrices, o dibujar figuras en dos y tres dimensiones y que pueden estar en una calculadora para tal fin o instalarse en un computador, como los que se describen a continuación.

- ✓ **DERIVE:** Es un software comercial, y está diseñado para resolver la mayoría de operaciones matemáticas como resolver limites, hallar derivadas, integrar cualquier tipo de función o realizar graficas en 2 o 3 dimensiones, algo para resaltar de este programa es que permite mostrar los pasos de las simplificaciones algebraicas que mejora la comprensión de los procesos matemáticos. Es usado por educadores, ingenieros y científicos en todo el mundo. Encontramos mayor información en la dirección: http://www.chartwellyorke.com/derive.html.

- ✓ **PROYECTO DE DESCARTES:** Es un programa (libre) basado en las TIC, es similar a un libro que contiene aplicaciones interactivas de geometría, aritmética, algebra, probabilidad y estadística, pero también se puede mirar como una plataforma donde se hace intercambio de materiales didácticos entre docentes de matemáticas. La ventaja que tiene es que se puede acceder desde cualquier computador, y el material que allí encuentra puede ser modificado y ajustado de acuerdo a las necesidades del usuario. La información complementaria se puede encontrar en: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/

- ✓ **GRAPH:** Es un software (comercial) que permite realizar en forma simultanea gráficas de funciones matemáticas en el plano (xy), y diferenciarlas por medio de colores o sombras y copiar la imagen en otra aplicación, también resuelve algunos cálculos de operación de funciones. Se puede saber más sobre este software en: http://www.vitutor.com/programas_matematicas.html

De otro lado, existen programas especiales para la enseñanza de la Geometría de forma dinámica, son los llamados Ambientes de Geometría Dinámica (AGD), entre ellos se destacan los siguientes.

- ✓ **CABRI:** Es de los primeros software (comercial), por eso el que más usuarios ha tenido. Con él se pueden obtener figuras geométricas como polígonos regulares o convexos, pero también ofrece la posibilidad con su menú de ser construidos con los elementos fundamentales de la geometría. También se ha extendido al trabajo en el espacio (CABRI 3D). Por sus ventajas es utilizado para hacer estudios en Arquitectura, Diseño Industrial, Astronomía, electricidad, etc. La desventaja de este software es que no permite ver sus aplicaciones en cualquier navegador, por lo cual se hace necesario tenerlo instalado en el computador, aunque existe un proyecto llamado Cabri Web que evita este inconveniente. Se puede ampliar esta información en: http://www.cabri.com/es/cabri-2-plus.html.

- ✓ **CINDERELLA:** Software comercial. Maneja un entorno geométrico para realizar construcciones de figuras esféricas e hiperbólicas, las cuales pueden interactuar entre sí, permite conectar un conjunto de puntos, además puede ser usado como un lenguaje de programación independiente para resolver problemas. Lo negativo de este software es que no admite construcciones pequeñas (auxiliares) que son de gran utilidad. Se puede encontrar mayor información sobre este software, en la siguiente dirección: http://www.cinderella.de/tiki-index.php

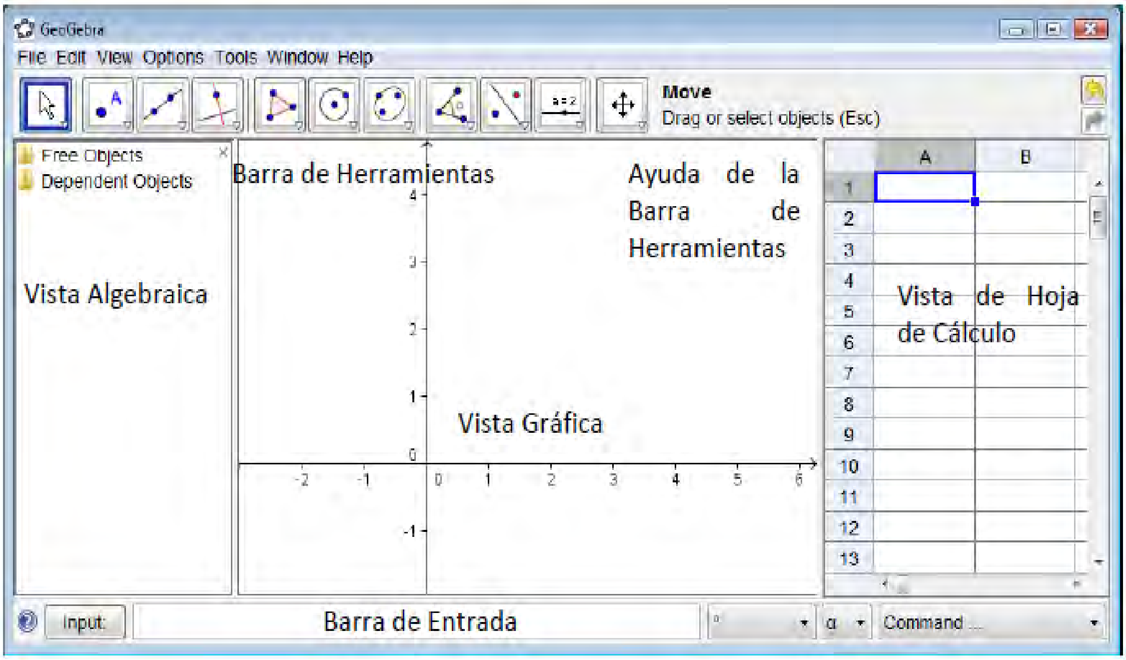
- ✓ La existencia de un AGD que incluye el trabajo en conjunto de aritmética, algebra, calculo y geometría de forma dinámica es **GeoGebra**, el cual se creó para enseñar geometría con elementos de algebra. Se puede acceder de forma gratuita para ser descargado en cualquier computador en www.geogebra.org

Este software trabaja con la geometría de las transformaciones de figuras “robustas” que se arrastran conservando las mismas propiedades, se puede operar con deslizadores que son la representación gráfica de un número, y permite cambiar el tamaño del lado o el ángulo en la figura para observar su comportamiento, y realizar múltiples operaciones como hallar derivadas e integrales de funciones con su respectiva gráfica, esto lo convierte en algo novedoso en comparación con los programas anteriores, y que fue precisamente lo que motivo incluirlo en el trabajo didáctico de esta investigación.

En reconocimiento de las ventajas y cualidades ofrecidas por el GeoGebra, su creador Hohenwarter (2011), menciona que es un “software interactivo de matemática que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo, ofrece múltiples vistas de los objetos matemáticos: una vista gráfica, una numérica, una algebraica y una vista de Hoja de Cálculo”. Lo anterior facilita la apreciación de los objetos desde lo gráfico, por ejemplo el caso de puntos y gráficos; desde lo algebraico, por ejemplo las coordenadas de puntos, ecuaciones y, los objetos matemáticos de las celdas de la hoja de cálculo. Las representaciones se van realizando automáticamente cuando el programa recibe la orden de parte del programador.

Por último, en la figura 5 se muestra la ventana de trabajo de GeoGebra con sus principales características simplemente para identificar la forma de trabajo aplicada en la creación de los Objetos de Aprendizaje que se evidencian en el capítulo 4, pero sin la pretensión de hacer un manual de instrucciones.

**Figura 5.** Ventana de trabajo de GeoGebra 3.2




**Fuente.** GeoGebra 3.2 *Documento de ayuda GeoGebra. Manual oficial de la versión 3.2.* Disponible en www.geogebra.org

- ✓ **Barra de Entrada:** Se pueden editar coordenadas, ecuaciones, expresiones algebraicas o cualquier función que se representan sobre la Vista Algebraica y la Vista Gráfica.
- ✓ **Vista Gráfica:** Se encuentran los ejes coordenados (xy) que tienen la opción de ocultarse, y se puede visualizar las construcciones realizadas con las escritas en la Barra de Entrada.
- ✓ **Barra de Herramientas:** Seleccionando el menú de la barra de herramientas, se pueden ubicar puntos, trazar rectas y círculos, ángulos, etc. Para la realización de las figuras.
- ✓ **Vista algebraica:** Aparece el paso a paso de la escritura algebraica de cada una de las líneas, puntos, ecuaciones que se utilizaron en el bosquejo de la figura.
- ✓ **Vista de la Hoja de Cálculo:** Se puede ingresar puntos, expresiones algebraicas y de igual forma podemos visualizar su representación en la Vista Gráfica. Cada objeto que se escribe en la Hoja de Cálculo se referencia por ejemplo A5 (columna A con fila 5), o D3 (columna D con fila 3), etc.

## 2.4 Objeto de Aprendizaje

En los últimos años, el avance tecnológico ha empezado a introducirse en el proceso enseñanza y aprendizaje con mayor fuerza debido al uso que se hace del internet en la educación virtual, por lo tanto aparecen los Sistemas Tutoriales Inteligentes (STI) que son un nuevo soporte para que el estudiante asimile de otra manera los conceptos nuevos y repase los anteriores. En ese sentido, los STI contienen los *Objetos de Aprendizaje*, ya que permiten el almacenamiento, identificación y recuperación de contenidos digitales educativos. Según el Instituto de Ingenieros en Electricidad, Electrónica y Computación (IEEE) que es la Asociación Profesional Formada por Ingenieros que trabajan en las nuevas tecnologías, y que es referenciada por Betancur (2009) dice que: “un objeto de aprendizaje puede considerarse como una entidad digital con características de diseño instruccional, que puede ser usado, reutilizado o referenciado durante el aprendizaje soportado en computador; con el objetivo de generar conocimientos, habilidades, actitudes y competencias en función de las necesidades del alumno”. Con base a esta definición se puede decir, que un estudiante tiene la posibilidad de acceder a un contenido en forma digital, no solamente para repasar o aprender algún concepto nuevo, sino que también tiene la posibilidad de crear otros Objetos de Aprendizaje generados a partir de los ya existentes.

Asimismo, Cruz y Galeana citados por Betancur (2009) caracterizan los objetos de aprendizaje de la siguiente manera:

- ✓ Interoperabilidad: corresponde a la capacidad que tiene un sistema para trabajar en otro.

- ✓ Reusabilidad: es la capacidad de los objetos para ser combinados dentro de nuevos cursos (o entornos de aprendizaje)

- ✓ Escalabilidad: característica de los objetos que les permite ser integrados a estructuras más complejas o extensas dentro del dominio de aprendizaje para el que fueron creados, así como también que las capacidades (multiusuario) que se le anexen no implique un incremento proporcional en costos.

- ✓ Generatividad: característica del objeto que permite generar otros objetos derivados de él.

- ✓ Gestión: Facilidad que brinda el sistema para tener la información concreta y correcta acerca de los contenidos que aborda y de las posibilidades de estudio que ofrece al estudiante.

- ✓ Interactividad: capacidad que posee el objeto para generar la actividad y la comunicación entre los sujetos involucrados en el proceso de aprendizaje.

- ✓ Accesibilidad: facilidad que ofrece al usuario para acceder libremente a los contenidos apropiados en el tiempo que se requiera.

- ✓ Durabilidad: se refiere a la vigencia de la información de los objetos a fin de eliminar su obsolescencia.

- ✓ Adaptabilidad: característica del objeto de aprendizaje para acoplarse a las necesidades de aprendizaje de cada individuo.

- ✓ Autocontención Conceptual: capacidad de los objetos para auto explicarse y posibilitar experiencias de aprendizaje integral.

Mientras tanto, Duque (2009) define un Objeto de Aprendizaje como la suma entre un contenido educativo y los metadatos, refiriéndose a estos últimos como un conjunto información provista con el fin de organizar un material educativo (similar al catálogo de una biblioteca que informa el contenido de sus libros), para luego ser almacenados en un repositorio de objetos de aprendizaje, los cuales son utilizados en ambientes learning. Según Ianalle y Waugh (2008) citados por Betancur (2009), los metadatos pueden ser útiles para:

- ✓ Resumir el significado de los datos.
- ✓ Permitir a los usuarios búsqueda de datos.
- ✓ Permitir a los usuarios determinar si los datos son los que quieren
- ✓ Dar información que afecta la utilización de los datos (condiciones jurídicas, tamaño, la edad, y así sucesivamente.
- ✓ Indicar las relaciones con otros recursos.

A partir de las anteriores características se diseñaron los objetos de aprendizaje utilizados en esta investigación. En las secciones 4.2 y 4.3 se describen en profundidad los objetos de aprendizaje usados para la enseñanza de conceptos de algebra en los cursos de matemática básica y la forma como son abordados por parte de los estudiantes para la construcción del conocimiento.

# 3 MARCO TEÓRICO

Los avances de la investigación en el campo de las didácticas de las matemáticas, muestran resultados que constituyen referentes útiles para el estudio y solución de los diversos problemas que se plantean en este campo del saber. Dichos avances han permitido el desarrollo de metodologías específicas de investigación e intervención en el aula, que no sólo dan cuenta de la naturaleza social de la enseñanza, sino también de la naturaleza del conocimiento matemático. En la actualidad circulan conceptos nuevos, teorías y enfoques metodológicos que se divulgan para ser trabajados y enriquecidos.

De acuerdo con Sessa (2005), interpela el modo distanciado en que usualmente el álgebra y la geometría conviven en la escuela, según ella, pensar la geometría como herramienta para validar leyes y resolver problemas algebraicos y concebir el álgebra como herramienta para resolver problemas geométricos constituye dos facetas en un *juego de marcos* que permitiría a los alumnos la construcción de sentidos potentes para ambos campos.

De acuerdo a las reflexiones explicadas por Sessa, es posible evidenciar que en el campo de la Didáctica de las Matemáticas son muchas las dificultades que se dan en el aprendizaje de algunos conceptos de algebra debido, en gran parte, a las estrategias metodológicas usadas por los profesores. Desde este punto de vista "…para los profesores, el álgebra representa la herramienta por excelencia de la matemática: se podría decir que los profesores se forman en una matemática algebrizada. Del lado de los alumnos, el álgebra se presenta como una fuente inagotable de perdida de sentido y de dificultades operatorias muy difíciles de superar"

En esta investigación se retoma una de las perspectivas teórico- metodológicas que contribuyan a la consolidación de la didáctica de las matemáticas como un campo científico. La perspectiva a la que se hace referencia, ha surgido en la comunidad de investigadores franceses en los años 80 con la noción de micro-*Ingeniería Didáctica* en el campo de la didáctica de las matemáticas.

La ingeniería didáctica de acuerdo con Artigue (1995), se caracteriza por la realización y análisis de secuencias didácticas. También se puede ver la ingeniería didáctica como una estrategia de indagación para la organización de las intervenciones en clase y que presenta características fundamentales que están relacionadas con la metodología, los medios de validación y los objetivos que esta plantee. En ella sobresalen cuatro teorías: "Situación didáctica", "Transposición didáctica", "Campos conceptuales", y las que se abordaron en esta investigación: "*Los juegos de marcos*" y "*Dialéctica Herramienta-Objeto"*, explicadas en este capítulo.

## 3.1 Dialéctica Herramienta-Objeto

La *Dialéctica Herramienta-Objeto* es un proceso cíclico, toda vez que los conceptos matemáticos juegan alternativamente el papel de *Herramienta* en la resolución de un problema, y de *Objeto* tomando un lugar en la construcción de un conocimiento organizado, y a la vez este *Objeto* pasa a convertirse en herramienta implícita o explícita para la solución de otro problema. En ese mismo sentido, Douady (1998) explica que "dado un problema, convenientemente elegido, para que sea resuelto por los alumnos, la *dialéctica herramienta-objeto* es un proceso en el cual se distinguen varias fases, en las que se cumplen funciones diferentes a medida que los alumnos van resolviendo dicho problema". En las secciones 4.3.1 y 4.3.2 veremos la forma en que se desarrollan estas fases en las secuencias didácticas que se plantean en esta investigación, y las cuales aparecen descritas a continuación en la tabla 5.

**Tabla 5.** Fases de la Dialéctica Herramienta-Objeto

| ***Fases de la Dialéctica Herramienta-Objeto*** | ***Definición de la fase*** | ***Cómo se utilizan estas fases en el presente trabajo investigativo*** |
|---|---|---|
| **A.** Antigua | Los conceptos matemáticos se ponen en acción como herramientas explicitas para resolver al menos parcialmente el problema | Esta fase se evidencia en el diseño de la guía, y durante todo el proceso de aprendizaje. En el diseño es notorio porque en la guía quedan muy explícitos los conceptos matemáticos que el estudiante debe manejar y saber de que forma utilizarlos para la solución del problema planteado. |
| **B.** Nueva búsqueda implícita | Los alumnos encuentran dificultades para resolver completamente el problema y las nuevas preguntas los llevan a la búsqueda y adaptación de nuevos medios. Muy a menudo los progresos eficaces provienen de un juego de marcos: en efecto, estos permiten poner en acción implícitamente herramientas que son nuevas para ir avanzando en la solución del problema | Durante el desarrollo de la guía, el docente provoca cambios de representación del concepto matemático. Estas representaciones se dan entre los registros aritmético, algebraico y geométrico. |

**Fuente.** Adaptado de Douady (1998)

Continuación Tabla 5

**Tabla 5.** Fases de la Dialéctica Herramienta-Objeto

| ***Fases de la Dialéctica Herramienta-Objeto*** | ***Definición de la fase*** | ***Cómo se utilizan estas fases en el presente trabajo investigativo*** |
|---|---|---|
| **C.** Explicitación e institucionalización local | En esta fase el profesor explicita y realiza una institucionalización local de la herramienta que se ha descubierto y discute la validez de los trabajos y las propuestas de los alumnos. | Como en el desarrollo de la guía algunos estudiantes pueden encontrar o no la solución a la situación planteada, el docente interviene para hacer las revisiones y aclaraciones respectivas. |
| **D.** Institucionalización estatu-objeto | Se oficializan conocimientos que hasta aquí no han sido más que herramientas para darles un estatu de objeto matemático. | En esta fase, el alumno podrá hacer uso del objeto matemático que construyó durante el desarrollo de la guía en el momento que lo requiera. |
| **E.** Familiarización y reinversión | El docente propone a los alumnos ejercicios donde utilizan las nuevas herramientas encontradas para familiarizarse con ellas. | En la guía se proponen ejercicios donde los alumnos apliquen el objeto matemático encontrado. |
| **F.** La tarea o el nuevo problema se hace más complejo | Por último el docente propone a los alumnos problemas más complejos donde se pongan en juego todos los conocimientos aprendidos y se pueda profundizar en ellos. | Al final de la guía el docente propone otra situación problema con un grado de mayor complejidad. |

**Fuente.** Adaptado de Douady (1998)

## 3.2 Registros de Representación y Juego de Marcos

Si se está interesado en la evolución de las matemáticas en la historia pasada, reciente o en la actualidad, se constata que una parte importante del trabajo de los matemáticos es consagrada a interpretar los problemas que se proponen resolver, a cambiar de punto de vista (por ejemplo, para una ecuación diferencial, adoptar un punto de vista cualitativo, o un punto de vista algebraico), a formularlos de otra manera, a realizarles diferentes *registros de representación*, al menos parcialmente, a confrontar problemas planteados en marcos diferentes pero cuya traducción en un mismo marco lleva a plantear nuevas cuestiones y sugiere el uso de herramientas diferentes a las solicitadas inicialmente.

En los registros de representación semiótica, según la teoría de Duval (1995) explica que el conocimiento se moviliza por los sujetos a través del uso de sistemas de representación, lo cual promueve la ejercitación de tareas cognitivas esenciales. Para él es imprescindible que un concepto sea enseñado, al menos, en dos registros de representación, que puede movilizarse entre el algebraico, el geométrico, el aritmético, entre otros.

Las representaciones semióticas son definidas por Duval como:

- ✓ Producciones conformadas por signos que hacen parte de un sistema de representación, que tiene sus limitaciones en cuanto al significado y al funcionamiento. Es importante que se cumplan las siguientes características para poder hablar de un sistema semiótico como un registro de representación.

- ✓ Realizar una representación identificable dentro de un registro.

- ✓ Transformar la representación en el mismo registro donde ha sido formada.

- ✓ Transformar la representación en otra, dentro de otro registro.

Para la comprensión de lo que se entiende por Juegos de Marcos, es preciso retomar la propuesta de Douady (1998) quien los define como los cambios de marcos provocados por iniciativa del docente, en relación con problemas que responden a ciertas condiciones con el objeto de hacer avanzar las fases de búsqueda en la solución de un problema. En las secciones 4.3.1 y 4.3.2 podemos ver los problemas que se plantean en esta investigación, y donde se puede apreciar que los problemas se pueden iniciar en un marco aritmético, luego cambiarse a un marco algebraico o también a un marco geométrico, de tal forma que el estudiante pueda movilizar varios registros de representación que le ayuden a resolverlo. Es un proceso en el que se distinguen tres fases descritas en la tabla 6 y la forma de cómo se trabajan en esta investigación.

**Tabla 6.** Fases de los Juegos de Marcos

| ***Fases de los juegos de marcos*** | ***Definición de la fase*** | ***Cómo se utilizan estas fases en el presente trabajo investigativo*** |
|---|---|---|
| **1.** Transferencia e interpretación | Los alumnos son confrontados a un problema formulado en un marco, y luego se les lleva a confrontar la misma situación traducida en otro marco con el fin de producirles un desequilibrio que los oblígue a la búsqueda de nuevas herramientas que les conduzca a la solución del problema. | En el desarrollo de los objetos de aprendizaje se realizan representaciones geométricas, aritméticas y algebraicas de un mismo concepto matemático para que el alumno busque diferentes alternativas y darle solución al problema propuesto. |
| **2.** Correspondencias imperfectas | Pero las correspondencias entre los marcos son imperfectas ya sea por la relación matemática o bien en razón a vacíos matemáticos que presentan los alumnos, por lo tanto les produce un desequilibrio. | En el diseño de la guía se puede ver que cuando se le cambia a los alumnos las preguntas en diferentes marcos, como los mencionados en la fase anterior, algunos de ellos presentan bloqueo y les hace dudar en las respuestas. |
| **3.** Mejoramiento de las correspondencias y progreso del conocimiento | Cuando los juegos de marcos son utilizados para cambiar de representación, esto también permite que el alumno después de tanto manipular el problema, al final pueda volver a una reequilibración que le permita llegar a la solución. | Por último, el alumno de tanto estar manipulando las representaciones de un mismo objeto matemático puede llegar a responder de manera adecuada a las preguntas siguientes de la guía utilizando otras herramientas. |

**Fuente.** Adaptado de Douady (1998)

Las implicaciones que tienen los *juegos de marcos*, y que se evidencia en los objetos de aprendizaje creados en esta investigación es que se pueden obtener formulaciones diferentes de un problema que sin ser necesariamente equivalentes por completo, permiten un nuevo acceso a las dificultades encontradas y la puesta en acción de herramientas y técnicas que no se imponían en la primera formulación, y que logran en el alumno encontrar una adecuada solución a la situación problema que se hallan enfrentado. Así las interacciones entre los *juegos de marcos* pueden hacer avanzar el conocimiento en cada uno de ellos.

Los fundamentos teóricos mostrados en este capítulo justifican las opciones que se han tomado en el diseño de los objetos de aprendizaje, así como el uso de un *software* que permita la visualización, pues éste intenta promover la adquisición de un conocimiento más estable según los supuestos teóricos.

# 4 DISEÑO METODOLÓGICO

La presente investigación se desarrolló con estudiantes de primer semestre matriculados en los siguientes programas de pregrado: Administración de Empresas, Zootecnia, Diseño industrial y las ingenierías: Agronomía, Agrícola, Agroindustrial y Ambiental de la Universidad Nacional de Colombia, sede Palmira. Los grupos intervenidos quedaron distribuidos como se muestra en las tablas 7 y 8 durante los semestres 2011-1 y 2011-2.

**Tabla 7.** Estudiantes por programa y grupo periodo académico 2011-1

| Programa | Grupo 1 | Grupo 2 | Número de estudiantes por programa |
|---|---|---|---|
| | | | |
| Admón. Empresas | 9 | 0 | 9 |
| Zootecnia | 11 | 0 | 11 |
| Diseño Industrial | 3 | 11 | 14 |
| Ing. Agronómica | 16 | 0 | 16 |
| Ing. Agrícola | 3 | 5 | 8 |
| Ing. Agro industrial | 4 | 8 | 12 |
| Ing. Ambiental | *0* | *4* | 4 |
| Total | 46 | 28 | 74 |

**Fuente**. Registro Académico Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira.

**Tabla 8.** Estudiantes por programa y grupo periodo académico 2011-2

| Programa | Grupo 1 | Grupo 2 | Número de estudiantes por programa |
|---|---|---|---|
| | | | |
| Admón. Empresas | 4 | 1 | 5 |
| Zootecnia | 1 | 0 | 1 |
| Diseño Industrial | 0 | 23 | 23 |
| Ing. Agronómica | 4 | 36 | 40 |
| Ing. Agrícola | 0 | 19 | 19 |
| Ing. Agro industrial | *37* | *5* | 42 |
| Ing. Ambiental | 3 | 8 | 11 |
| Total | 49 | 92 | 141 |

**Fuente**. Registro Académico Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira.

Los participantes en la investigación de los cursos de matemáticas básica de la Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira durante los semestres 2011-1 y 2011-2 son:

Investigador principal: Jaime García Echavarría, Director de tesis: Boris Alejandro Villamil Ramírez, Profesores del área de matemáticas: Lucy Janeth Medina, Oscar Mauricio Mora y Miguel Ángel Carranza.

El plan de trabajo acordado entre los profesores del área fue el siguiente:

Los cursos de matemática básica se desarrollan con exposiciones del profesor acompañadas de ejemplos y ejercicios que los alumnos realizan. Como complemento a los ejercicios hechos en clase para los grupos de matemáticas que se tomaron en esta investigación con mediación tecnológica, se insistió en el trabajo fuera de ella, como el ingreso a la plataforma Blackboard para revisar las clases con ejercicios de los textos y talleres adicionales propuestos por la coordinadora nacional del curso desde la sede Bogotá de la Universidad Nacional de Colombia y los objetos de aprendizaje en el caso del curso que se trabajó con mediación tecnológica para dar los temas de algebra seleccionados en esta investigación, y como complemento en la sede de Palmira también se trabajó con los módulos que contienen todos los temas de matemática y que fueron elaborados por los docentes investigadores encargados de impartir las clases en estos cursos. Además del horario de atención de su profesor, los estudiantes disponen de un horario de consulta permanente a cargo de estudiantes de semestres avanzados que actúan como monitores.

De acuerdo con las últimas disposiciones de la Universidad Nacional de Colombia sobre la forma de evaluar, cabe destacar que el curso de Matemáticas Básicas será calificado de 0.0 a 5.0. La calificación final se obtendrá del cómputo entre la calificación del profesor que imparte el curso en la sede Palmira, que representará el 70% de la nota final y que éste ingresará en el SIA; y una última prueba realizada por el Departamento Nacional de Admisiones (DNA), que representará el 30% de la nota final. El DNA será quien computará la calificación definitiva y la informará al SIA.

Del 70% que evalúa el profesor es importante señalar que los temas de algebra son evaluados en el primer parcial de un total de 4 parciales que se hacen en el semestre de todos los contenidos del programa, y esta vez se tuvo en cuenta que la estructura de la evaluación realizada durante el semestre 2011-1 fuera la misma que se utilizó para evaluar durante el semestre 2011-2 y de esta forma comprobar si ocurre un cambio significativo en las notas.

A continuación en la tabla 9 se observa el programa de matemática básica que ofrece la universidad y que fue desarrollado durante los semestres 2011-1 y 2011-2 con los mismos temas por parcial. El programa en forma completa y detallada se puede ver en el anexo 4.

**Tabla 9.** Programa de Matemática Básica Universidad Nacional de Colombia

| Tema | Tiempo | Evaluación |
|---|---|---|
| 1. *Conjuntos numéricos y algebra elemental* | *7 semanas* | *Primer parcial* |
| 2. *Plano cartesiano, cónicas, Relaciones y funciones* | *5 semanas* | *Segundo parcial* |
| 3. *Geometría Elemental* | *2 semanas* | *Tercer parcial* |
| 4. Trigonometría | 2 semanas | Cuarto parcial |
| **Total** | 16 semanas | |

**Fuente.** Departamento de Ciencias Básicas Universidad Nacional de Colombia Palmira

## 4.1 Estrategias de Enseñanza

De manera puntual, se puede decir que la investigación se desarrolló con dos estrategias de enseñanza:

Estrategia 1. Con mediación Tecnológica haciendo uso de los AGD.

Estrategia 2. Sin mediación Tecnológica.

Se usó GeoGebra como software matemático específico (por las ventajas que tiene sobre otros software como se explicó en la sección 2.3) para desarrollar la mediación tecnológica en el grupo seleccionado, es decir, para reforzar los procesos de significación, usando varios sistemas de representación (como el numérico, el gráfico, el simbólico y el analítico) haciendo interacción dinámica entre ellos.

Los grupos sin mediación tecnológica recibieron la clase tradicional, es decir, la clase donde las ayudas tecnológicas no existieron, por lo tanto no se les trabajo con los objetos de aprendizaje, y el tablero fue el principal recurso didáctico.

En resumen podemos decir que el trabajo de investigación en los cursos de Matemática Básica se organizó en dos fases como se muestra en la tabla 10, y en la sección 5.4 se analiza el impacto que tuvieron los cursos donde se trabajó con mediación tecnológica comparándolos con los cursos donde no se tuvo, por medio de análisis de varianza (ANOVA), utilizando la herramienta de Excel y Varianza de un Factor, que realiza un análisis simple de variaciones de los datos del primer parcial, las notas de la evaluación de Bogotá y las notas definitivas del curso de matemática básica, para de esta forma determinar si la hipótesis de investigación se confirma.

Tabla 10. Fases de trabajo en los grupos de investigación

| Fase | Semestre | Población | Procedimiento |
|---|---|---|---|
| 1 | 2011-1 | Dos grupos de primer semestre, del curso de matemática básica. | Los dos grupos hicieron parte del proceso de enseñanza de los temas de álgebra sin mediación tecnológica. |
| 2 | 2011-2 | Dos grupos de primer semestre, del curso de matemática básica. | Un grupo hizo parte del proceso de enseñanza del álgebra SIN mediación tecnológica y, el otro CON mediación tecnológica. En este último caso, se aplicaron los objetos de aprendizaje utilizando el software de GeoGebra. |

Fuente. Elaboración propia.

## 4.2 Descripción de los Objetos de Aprendizaje

En los cursos que se utilizó la mediación tecnológica, los temas trabajados a lo largo de la Secuencia didáctica fueron los productos notables y el concepto de irracionalidad numérica, se elaboraron guías (evidenciadas en la sección 4.3.1 y 4.3.2 con especificidades muy claras, de tal manera que fuera el mismo estudiante quien construyera su significado. Así pues, se estaba cumpliendo con el objetivo del objeto de aprendizaje, ofrecer las herramientas y orientaciones necesarias para que los estudiantes llegaran al conocimiento a través de unas pautas precisas y comprendieran la importancia de este tema para su formación profesional. Sin lugar a dudas, la elaboración de las guías fue un proceso intencional, diseñadas con consignas muy detalladas por ejemplo cuando de utilizan los juegos de marcos o registros de representación que le van indicando al estudiante el paso a paso de su acción. Además, cada actividad planeada tuvo un objetivo orientado al mejoramiento de las debilidades de los estudiantes y sus necesidades de aprendizaje de acuerdo a los hallazgos del análisis del primer parcial durante el semestre 2011-1 y que se evidencian en la sección 1.2. En ese sentido, el estudiante no sólo aprendía sobre los temas de productos notables y el concepto de irracionalidad numérica, sino que también desarrolló competencias para el uso del GeoGebra, como un software útil para profundizar los conocimientos sobre las matemáticas.

En las guías se evidencia claramente los Juegos de Marcos explicados en la sección 3.2, estos permiten al estudiante conocer todo el proceso y posibilidades de llegar al concepto desde diversos Registros de Representación, así por ejemplo se les presenta problemas de factorización (representación algebraica) y luego se hace su equivalencia en el trabajo con áreas (representación Geométrica). Este aspecto facilitó al estudiante la construcción de su conocimiento, ya que a través de las orientaciones dadas en clase y el seguimiento de las guías, encontraron su propia manera de aprender los conceptos, tal como se evidencia en su desarrollo en las secciones 5.1 y 5.2.

Se destaca el hecho de que los estudiantes nunca habían experimentado con un software de geometría dinámico AGD, por ello, antes de comenzar la aplicación de la primera situación, el docente hace una breve presentación de las características de GeoGebra, refiriéndose principalmente a las diferentes herramientas que conforman el software y enfatizando sobre las que podrían ser utilizadas, al igual que la forma en que debían instalar el programa en el computador en el que fueran a desarrollar la actividad.

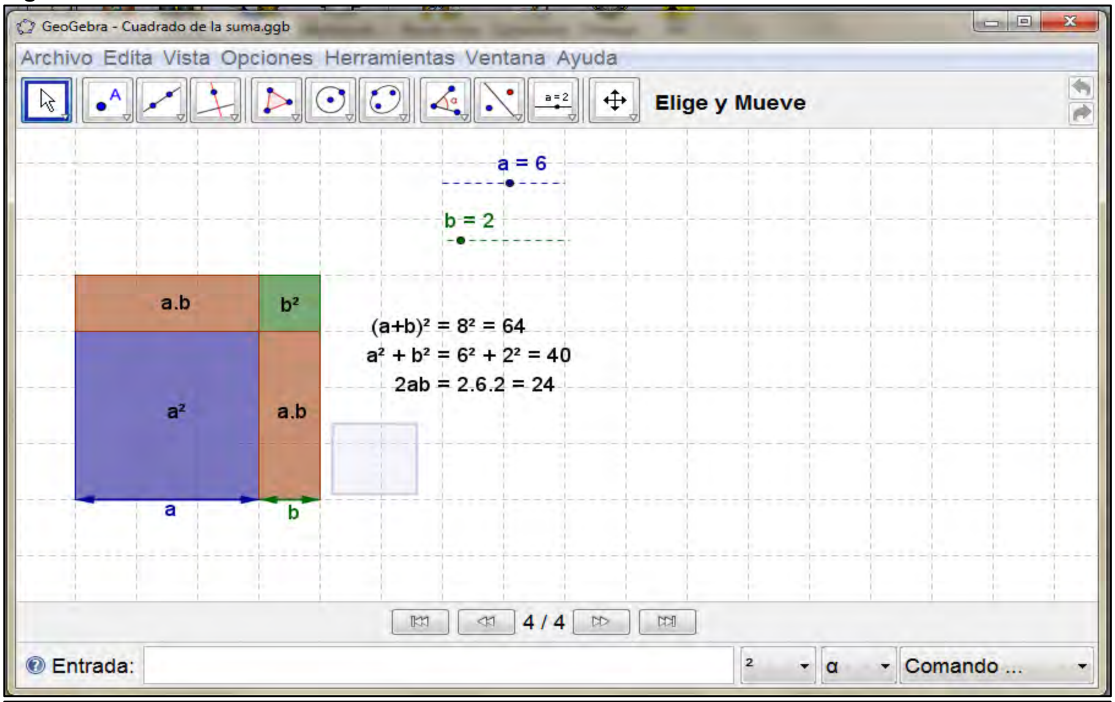
Posteriormente, el docente publica en la plataforma Blackboard dos objetos de aprendizaje descritos en las secciones 4.3.1 y 4.3.2 para que los estudiantes los resuelvan de forma individual, a medida que los estudiantes avanzan en el proceso de resolución de estos objetos de aprendizaje pueden ir revisando y comparando los resultados con los de sus compañeros, después se hacen las correcciones con el docente y les aclara las dudas.

Complementario a estas dos actividades el profesor investigador utilizó dos aplicaciones creadas también con GeoGebra por Sada (2007) para enseñar los otros productos notables sin guía de desarrollo: *Cuadrado de la suma de dos cantidades y Suma por su Diferencia.* Es importante resaltar que dichas aplicaciones fueron de gran apoyo para el diseño de los objetos de aprendizaje propios de esta investigación, ya que a partir de ellos se tuvo en cuenta como podrían ser complementados cumpliéndose así con la característica de generar otros objetos a partir de los ya existentes.

Teniendo en cuenta la necesidad de enseñar los productos notables y el concepto de irracionalidad numérica en esta investigación por lo analizado en la sección 1.1 y 1.2, se destaca la forma en que se propone su enseñanza, utilizando la mediación tecnológica con los aplicativos de los objetos de aprendizaje creados con GeoGebra, de tal forma que estos conceptos sean construidos por los mismos estudiantes, más que aprenderse fórmulas o reglas sin ninguna profundidad o análisis llevando a que sean olvidadas al momento de utilizarlas, y lo mas importante es que a diferencia de los aplicativos creados por Sada que se limitan a dar una orden de mover unos botones para adelantar o atrasar los cambios que se van produciendo en la figura para luego responder unas preguntas que tienen las respuestas, los aplicativos creados para esta investigación como se había mencionado antes, tienen una guía de desarrollo que se evidencia en la secciones 4.3.1 y 4.3.2 que permiten al estudiante tener múltiples opciones para construir los conceptos de forma autónoma.

A continuación en las figuras 6 y 7 se muestran los aplicativos creados por Sada.

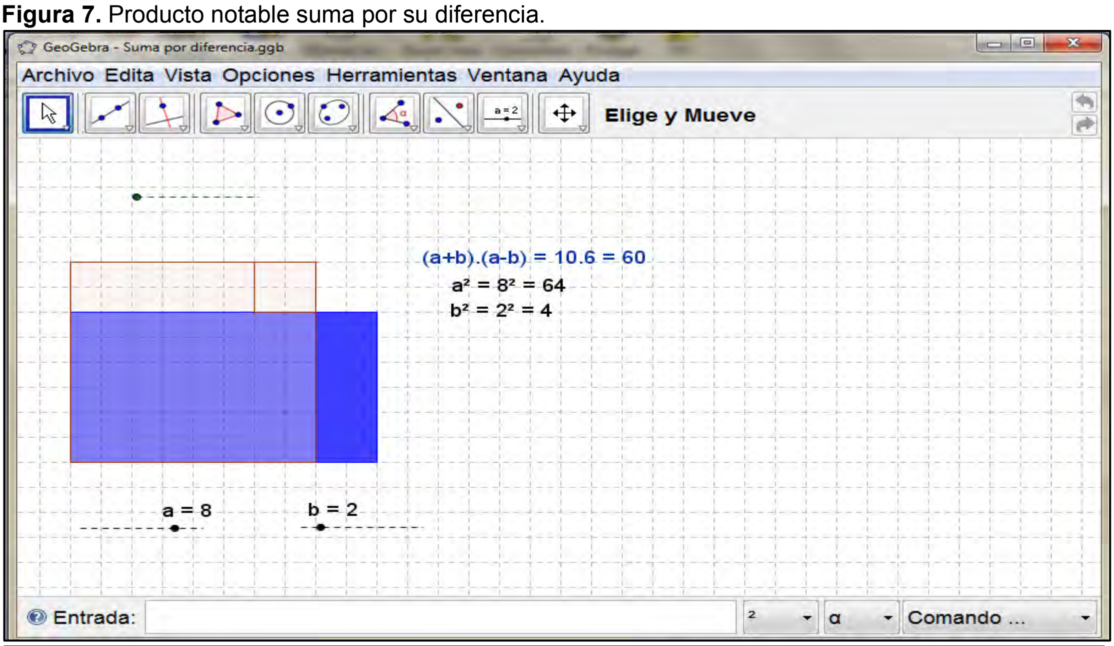
**Figura 6.** Producto notable Cuadrado de la suma de dos cantidades.




¿Cuál es la representación del "cuadrado de la suma"?
¿Y la suma de los cuadrados?
¿En qué se diferencian el cuadrado de la suma y la suma de los cuadrados?

**Fuente**. Creado con GeoGebra por Manuel Sada Allo (2007)

**Figura 7.** Producto notable suma por su diferencia.




¿Cuál es la relación entre las dimensiones del rectángulo azul y los números **a** y **b**?
¿Cuál es su área?
Desliza el punto verde hacia la derecha.
¿A que otra área es equivalente la del rectángulo inicial?
¿A que será igual el producto de la suma por la diferencia de dos números?

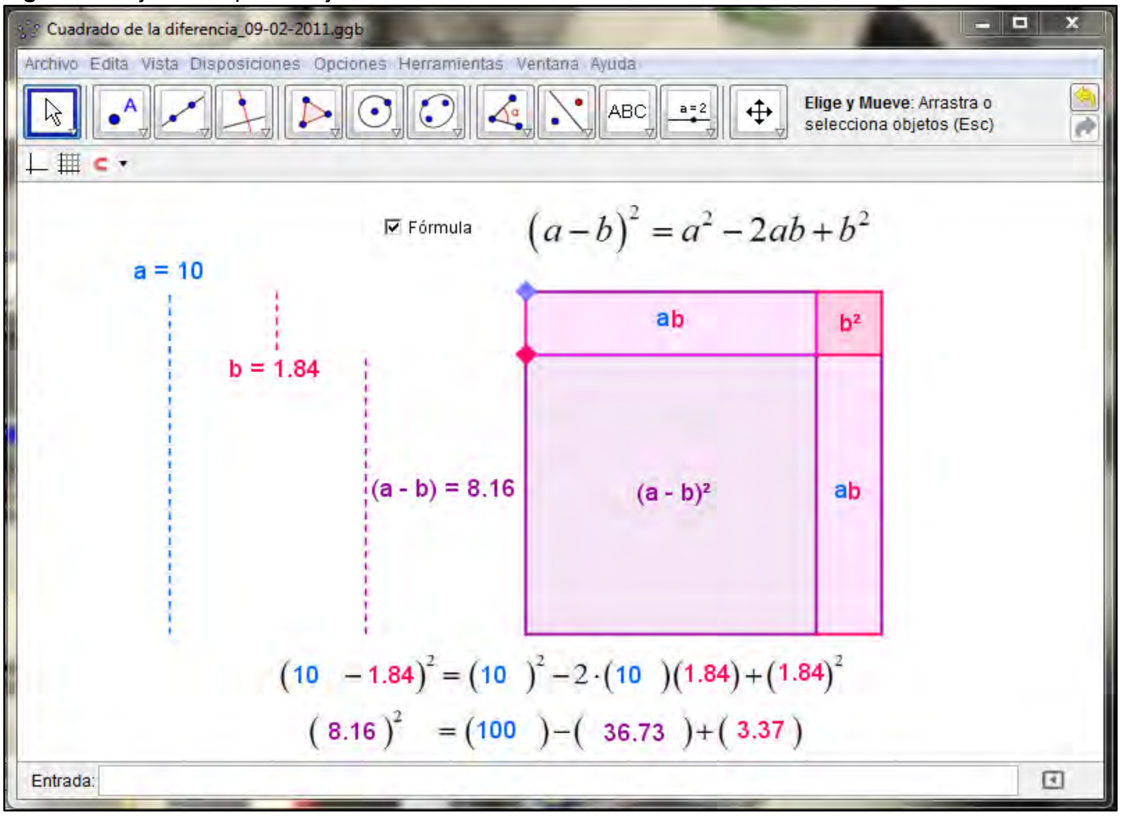
**Fuente**. Creado con GeoGebra por Manuel Sada Allo (2007)

## 4.3 Aplicativos de los Objetos de Aprendizaje creados en la Investigación

En las figuras 8, 9, 10 y 11 se describen los aplicativos de los Objetos de Aprendizaje desarrollados en ésta investigación creada con GeoGebra y su correspondiente guía; dichos objetos fueron trabajados en esta investigación bajo el enfoque didáctico mencionado en las teorías de la sección 0 y su respectivo análisis. De esta forma, se evidencia la autonomía y responsabilidad que asumieron los estudiantes ya que lograron construir el otro producto notable *cuadrado de la diferencia de dos cantidades* y el concepto de *irracionalidad numérica*, sin la mediación total del docente.

### 4.3.1 Objeto de Aprendizaje 1: Producto Notable Cuadrado de la Diferencia de Dos Cantidades

**Figura 8.** Objeto de Aprendizaje 1. Producto notable cuadrado de la diferencia de dos cantidades.




**Fuente.** Elaboración propia.

Para la realización de este objeto de aprendizaje se tuvieron cuatro etapas que duraron aproximadamente tres meses. La primera consistió en buscar aplicaciones creadas con el software de GeoGebra en internet y que estuvieran relacionadas con los temas de algebra que son evaluados en el primer parcial de matemáticas. Entre las aplicaciones que más se aproximaron a las condiciones buscadas se pueden mencionar las encontradas en los blog de los profesores en matemáticas:

- ✓ Sardina (2009) en http://mariasardina.blogspot.com/

- ✓ Rodríguez (2010) en http://espegesteira.blogspot.com/2010_11_01_archive.html

- ✓ Fernández (2011) en http://profeblog.es/blog/javierfernandez/geogebra/, y finalmente fueron las de.

- ✓ Sada (2007) en http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/index.htm las que inspiraron los aplicativos realizados en esta investigación.

En la segunda etapa se empezó a crear el aplicativo del producto notable cuadrado de la diferencia de dos cantidades, se hicieron los ajustes necesarios hasta llegar al aplicativo con el diseño y características propios que más adelante se describen.

Luego en una tercera etapa, al objeto de aprendizaje se le diseño una guía de trabajo bajo el enfoque teórico de la ingeniería didáctica apoyada en la *Dialéctica Herramienta –Objeto y los juegos* de marcos de tal forma que se pudieran realizar representaciones del objeto matemático en estudio en los registros algebraico, numérico y gráfico.

Y en la última etapa se probó el funcionamiento del aplicativo desde la plataforma Blackboard de la Universidad Nacional con el fin de hacerle los ajustes finales y darles el instructivo a los estudiantes de cómo descargar en su computador el aplicativo creado en GeoGebra.

A continuación se describen las principales características del objeto de aprendizaje.

- ✓ La característica fundamental de este objeto de aprendizaje consiste en la modelización de cuadrados y rectángulos creados en GeoGebra, donde a partir de la variación de las figura, es posible construir el producto notable cuadrado de la diferencia de dos cantidades.

- ✓ El Objeto de Aprendizaje tiene dos deslizadores ubicados directamente sobre la figura que se mueven de arriba hacia abajo. En azul, el deslizador **a** y en rojo, el deslizador **b**, con incremento de 0,1 desde el valor 0 hasta llegar al valor 10 (al lado izquierdo se puede ver unas líneas punteadas del mismo color de los deslizadores que muestra las medidas que va tomando la figura).

- ✓ Cuando los deslizadores son arrastrados con el mouse, forman los cuadrados y rectángulos en la figura. El deslizador **a**, forma el cuadrado de color azul, y el deslizador **b,** forma el cuadrado de color rojo que se superpone sobre el cuadrado azul, para formar en color magenta, el cuadrado **a-b** y los rectángulos **ab**.

- ✓ A medida que lo anterior se va modelando, se observa en la parte inferior del aplicativo la representación numérica de las relaciones y equivalencias que se dan entre las medidas de la figura (conservando los mismos colores). Esas relaciones y equivalencias, pertenecen a las áreas de los cuadrados y rectángulos que se forman, esto con el fin, de que el estudiante generalice por medio de una fórmula (representación algebraica) el área del cuadrado que se formó **a-b** y que pertenece al producto notable cuadrado de la diferencia de dos cantidades. Los estudiantes tendrán la oportunidad de verificar en el aplicativo en la parte superior, si esta fórmula les coincide con las que ellos encontraron haciendo un clic con el mouse sobre el cuadro que aparece con la palabra fórmula.

- ✓ Por último, a medida que los estudiantes empiecen a mover los deslizadores para modelar la figura y encontrar todas las relaciones antes mencionadas, deben de ir diligenciando la siguiente guía que hace parte del objeto de aprendizaje, y que recordemos su intención es manejar los juegos de marcos que permitan al estudiante utilizar diversos registros de representación para la construcción del concepto del producto notable cuadrado de la diferencia de dos cantidades.

**Figura 9.** Guía OA 1. Producto notable cuadrado de la diferencia de dos cantidades.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

**CURSO: MATEMÁTICA BÁSICA**
**DOCENTE: JAIME GARCIA ECHAVARRIA**

**GUÍA OBJETO APRENDIZAJE CUADRADO DE LA DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES**

**OBJETIVO GENERAL:** Desarrollar en esta secuencia didáctica con la mediación de un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) como el de software GeoGebra, la construcción del producto notable Cuadrado de la Diferencia de Dos Cantidades.

**OBJETIVOS ESPECÍFICOS:**

- Aplicar la teoría de micro ingeniería didáctica apoyada en los juegos de marcos y la dialéctica herramienta-objeto en la construcción del concepto Cuadrado de la Diferencia de Dos Cantidades.
- Mejorar los desempeños de los estudiantes en su evaluación de los temas de algebra que involucre el concepto del producto notable Cuadrado de la Diferencia de Dos Cantidades.

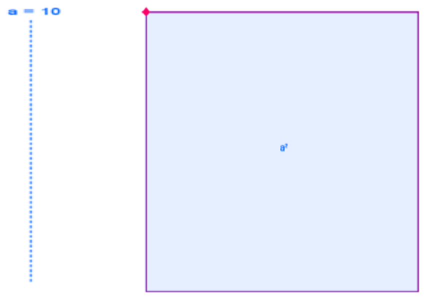
**Fuente.** Elaboración propia.

Continuación Figura 9

**Figura 9.** Guía OA 1. Producto notable cuadrado de la diferencia de dos cantidades.

**Situación Problema**

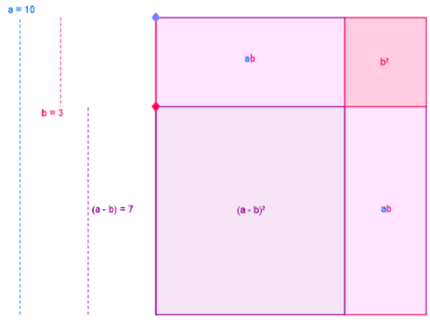
1. Se ha construido un cuadrado de lado a=10 unid.




2. Utiliza el mouse para deslizar hacia abajo el punto rojo y observa lo que sucede.

3. ¿Qué relación existe entre el cuadrado de lado a inicial y el cuadrado de lado b que se formó?

4. Como un caso en particular lleva el cuadrado de lado b=3 unid. y observa lo que sucede. Prueba con otros valores para b. Observa al mismo tiempo las mostraciones que se van dando con los números.




Según los valores que tomaste para el cuadrado de lado b contesta las siguientes preguntas. Ayúdate nuevamente con las mostraciones numéricas.

**Fuente.** Elaboración propia.

Continuación Figura 9.

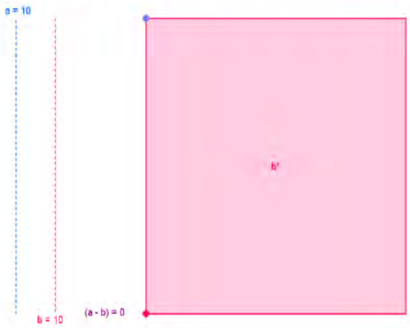
**Figura 9.** Guía OA 1. Producto notable cuadrado de la diferencia de dos cantidades.

5. ¿Cuánto mide el área del cuadrado de lado a-b que se formó? Pues tomando unos valores distintos al ejemplo anterior a=10 b=4 a-b=6

6. ¿Cuánto miden las áreas de los otros dos rectángulos que se formaron?

7. ¿Qué relación encuentras entre el área inicial $a^2$ con las áreas que se formaron $b^2$ y las de los rectángulos ab?_

- ¿Qué ocurre si se hace el cuadrado de lado b igual al del lado a ?




8. ¿Podrías encontrar una fórmula algebraica que relacione el valor del área $(a-b)^2$ con el área inicial $a^2$, y las áreas que se formaron $b^2$ y ab?

9. Compara la fórmula que obtuviste con la fórmula que se encuentra en la aplicación (marca con el mouse sobre el cuadrito del lado para verla).

10. Escribe en palabras el resultado de esta fórmula: el primero termino al cuadrado menos dos veces el primer término por el segundo más el segundo término al cuadrado

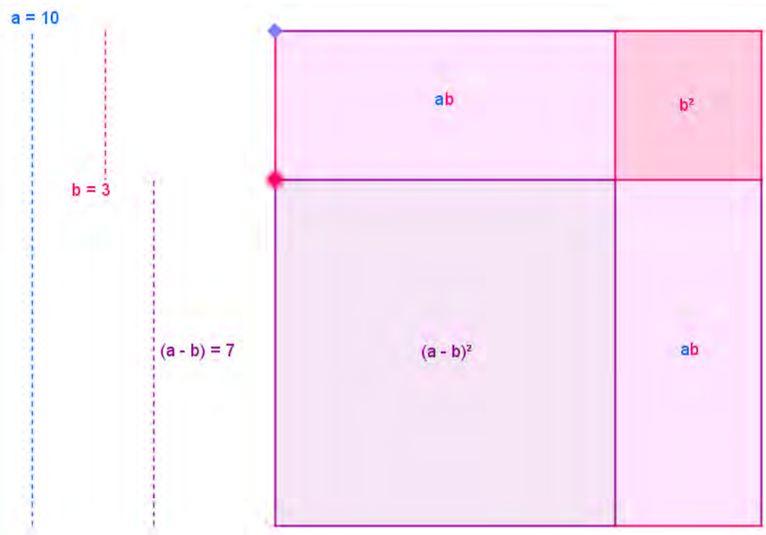
11. Escribe una conclusión de lo que aprendiste de está activad

**Fuente.** Elaboración propia.

A continuación se describen cada una de las preguntas que conforman la guía anterior, se determinará el papel del profesor dentro de su desarrollo, y las posibles estrategias y dificultades que los estudiantes encontrarán en cada una de las fases de análisis bajo enfoque de la dialéctica Herramienta-Objeto (DHO) y el Juego de Marcos explicados en el capitulo 3. En la sección 5.1 se evidencian los resultados de cada una de estas fases.

**D.H.O. Fase a. "Antiguo"**

En las tres primeras preguntas de la guía los alumnos pueden identificar y relacionar las variables en juego, interpretando las variaciones de los lados y las áreas de los cuadrados y rectángulos que se forman en la figura dada. De esta manera los alumnos podrán formar rectángulos con dimensiones enteras de sus lados, como se muestra en la *figura a*.




………. *figura a*

Es posible que no todos los alumnos interpreten correctamente la variación de las áreas que están ocurriendo, lo que puede llevarlos a contestar erróneamente las preguntas planteadas o no poder hacerlo.

**D.H.O. Fase b. "Búsqueda de lo nuevo implícito"**

Pero en las siguientes cuatro preguntas de la guía (de la 4 a la 8) ante las dificultades que puedan presentarse, el docente propone analizar la información del gráfico, haciendo hincapié en la interpretación de las variaciones que se van dando entre el área del cuadrado inicial con las áreas de los cuadrados y rectángulos que se empiezan a formar al utilizar la herramienta de arrastre que ofrece GeoGebra y procediendo a un cambio de marco en este caso del geométrico al aritmético, y en el cual podrán comprobar de acuerdo la longitud de los lados, el valor de las áreas y sus relaciones aditivas. La siguiente expresión 1 nos indica la forma de comprobación.

$$(10 \quad -3.4 \quad)^2 = (10 \quad)^2 - 2\cdot(10 \quad)(3.4 \quad) + (3.4 \quad)^2$$

$$(\,6.6\,)^2 \quad = (100 \quad) - (\ 68 \quad) + (\ 11.56)$$

$$43.56 \quad = \quad 43.56$$

……Expresión 1

De otro lado el docente guía a los alumnos mediante el planteamiento de nuevos interrogantes en las siguientes dos preguntas (9 y 10) para que descubran de qué manera se relacionan las áreas de los cuadrados y rectángulos que se forman e introducirlos así al concepto del producto notable cuadrado de la diferencia de dos cantidades, y mediante la observación de la gráfica y la mostración aritmética los orienta para que determinen una fórmula que generalice este producto notable realizándoles un nuevo cambio de marco (del aritmético al algebraico).

**D.H.O. Fase c. "Explicitación e Institucionalización local"**

Para dar solución al último interrogante cuando el estudiante pretenda hallar el área del cuadrado de lado $a-b$ debe descubrir que la solución es aplicar la adictividad entre todas las áreas que se están relacionando, se trata aquí de un "nuevo explícito" pues relacionaría esta expresión con el cuadrado de la suma de dos términos o cuadrado del binomio.

**D.H.O. Fase d. "Institucionalización – status de objeto"**

Cuando el estudiante realice toda la guía de forma autónoma, el docente durante la clase presencial del curso expone lo que es nuevo: El producto notable cuadrado de la diferencia de dos cantidades, lo explica con las definiciones, teoremas, demostraciones, señalando lo que es esencial y lo que es secundario y la formula que lo generaliza:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

**D.H.O. Fase e. "Familiarización –reubicación"**

Por ejemplo se les pide a los alumnos que resuelvan los ejercicios:

$$(5 \quad -3.4 \quad)^2 =$$

$$(7.66-2.66)^2 =$$

**D.H.O. Fase f. "La tarea o el nuevo problema se hace más complejo"**

El docente propone a los alumnos un problema más complejo. Por ejemplo el cuadrado de la diferencia de dos expresiones algebraicas y determinar de esta forma si el concepto quedo bien construido en el estudiante.

$$(3x-2y)^2 =$$

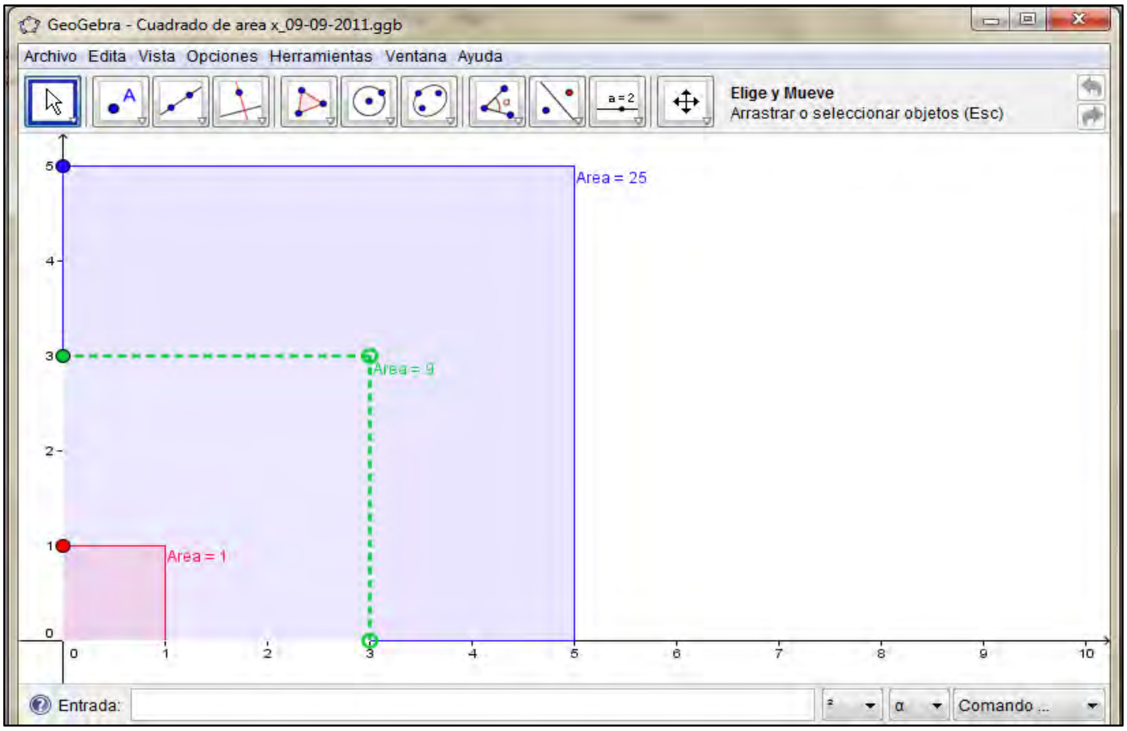
$$\left(\frac{3}{5}a^2b^4-\frac{7}{2}bc^3\right)^2 =$$

Se puede observar que en cada cuadrado del binomio propuesto aparecen letras que representan números, pero que el estudiante sabe que debe asumirlas de esta forma por hacer parte de expresiones algebraicas y no de ecuaciones, por lo tanto debe aplicarles las propiedades de los exponentes vistas en anteriores clases, junto con la fórmula del producto notable que construyo.

También es válido aclarar que el estudiante no podrá verificar la solución con la ayuda del objeto de aprendizaje creado en GeoGebra porque se habilito la opción de comprobar los resultados cuando el binomio está compuesto solo de números, y es precisamente lo que en esta última fase el docente quiere comprobar: si el estudiante es capaz de generalizar la fórmula para todo cuadrado de la diferencia de dos expresiones algebraicas.

### 4.3.2 Objeto de Aprendizaje 2: Cuadrado de Área X

**Figura 10.** Objeto de Aprendizaje 2. Cuadrado de área **X**




**Fuente.** Elaboración propia.

Para la realización de este objeto de aprendizaje, al igual que con el aplicativo anterior se trabajó en cuatro etapas que duraron aproximadamente dos meses, debido a que el docente investigador ya tenia adelantada la idea desde hace varios años de cómo incluir en el proceso enseñanza-aprendizaje el concepto de irracionalidad numérica con el enfoque de la teoría de ingeniería didáctica, pero le faltaba complementarlo con una ayuda digital que le facilitara este proceso. La primera etapa consistió en buscar algunas aplicaciones creadas con el software GeoGebra en internet y que estuvieran relacionadas con este concepto pero no se encontró ninguna, y debido a que ya se había trabajado con el aplicativo explicado en la sección anterior del producto notable cuadrado de la diferencia de dos cantidades, en este objeto de aprendizaje se realizaron aplicaciones similares. En la segunda etapa se hicieron ajustes necesarios hasta llegar al diseño y características propios que más adelante se describen. Luego en una tercera etapa, al objeto de aprendizaje se le diseño una guía de trabajo como se había mencionado, con el enfoque teórico de la ingeniería didáctica apoyada en la *Dialéctica Herramienta –Objeto y los juegos* de marcos de tal forma que se pudieran realizar representaciones del objeto matemático en estudio en los registros algebraico, numérico y gráfico. Y en la última etapa se probó el aplicativo desde la plataforma Blackboard de la Universidad Nacional con el fin de hacerle los ajustes finales y darles el instructivo a los estudiantes de cómo podía descargarse el aplicativo creado en GeoGebra en su computador, además que ya tenían instalado Java y se les sugirió no desinstalarlo cuando desarrollaron el otro aplicativo.

A continuación se describen las principales características del objeto de aprendizaje.

- ✓ La característica fundamental de este objeto de aprendizaje consiste en la modelización de cuadrados creados en GeoGebra, para que el estudiante relacione la expresión algebraica diferencia de cuadrados con áreas de cuadrados, y que de esta forma se dé cuenta que no siempre encontraremos la solución de la factorización de una diferencia de cuadrados con los conjuntos numéricos trabajados hasta el momento como son los números racionales. Lo que implica que debe encontrar la solución en otro conjunto numérico

- ✓ El Objeto de Aprendizaje tiene tres deslizadores (identificarlos en la figura 10) ubicados directamente sobre en el eje "y" del plano cartesiano. En azul, el deslizador **a,** en rojo, el deslizador **b,** y en verde el deslizador **c**, este último quedando intermedio entre los deslizadores **a** y **b**, con incremento de 0,1 unidades desde el valor 0 hasta llegar al valor 5 (el "eje x" y el "eje y" del plano cartesiano, muestran las medidas que va tomando la figura.

- ✓ Cuando los deslizadores son arrastrados con el mouse, se forman los cuadrados en la figura. El deslizador **a**, forma el cuadrado de color azul, y el deslizador **b,** forma el cuadrado de color rojo (estos dos cuadrados se pueden superponer el uno sobre el otro, dependiendo de su longitud) y el deslizador **c** forma el cuadrado de color verde solo en su borde y de forma punteada con el fin de diferenciarse de los cuadrados azul y rojo mencionados y quedando intermedio entre ellos.

- ✓ A medida que lo anterior se va modelando, se observa en la parte de los ejes coordenados la longitud de los lados de los cuadrados que se forman y dentro de cada cuadrado se muestra su respectiva área (representación numérica). En ese momento el estudiante podrá darse cuenta que buscar el área del cuadrado con las especificaciones dadas en la guía es imposible encontrarlo, por más que se aproxime, y por lo tanto debe descubrir que la solución no está en los conjuntos numéricos trabajados hasta el momento.

- ✓ De igual forma cómo ocurrió con el objeto de aprendizaje anterior, a medida que los estudiantes empiecen a mover los deslizadores deben de ir diligenciando la guía adjunta con la intención de manejar los juegos de marcos que le permiten utilizar diversos registros de representación para la construcción del concepto de irracionalidad numérica.

**Figura 11.** Guía OA 2. Cuadrado de área x

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

**CURSO: MATEMÁTICA BÁSICA**
**DOCENTE: JAIME GARCÍA ECHAVARRÍA**

**GUÍA OBJETO APRENDIZAJE CUADRADO DE ÁREA X**

**OBJETIVO GENERAL:** Desarrollar en esta secuencia didáctica con la mediación de un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) como el software de GeoGebra, la construcción del concepto de Irracionalidad Numérica.

**OBJETIVOS ESPECÍFICOS:**

- Aplicar la teoría de micro ingeniería didáctica apoyada en los juegos de marcos y la dialéctica herramienta-objeto en la construcción del concepto de Irracionalidad Numérica.

- Mejorar los desempeños de los estudiantes en su evaluación de los temas de algebra que involucre el concepto de Numero Irracional

**Fuente.** Elaboración propia.

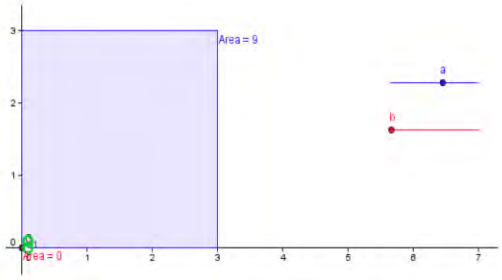
Continuación Figura 11.

**Figura 11.** Guía OA 2. Cuadrado de área x

**Situación Problema**

1. A partir de la expresión $x^2$ - $a^2$ (una diferencia de cuadrados), cuya factorización corresponde al binomio conjugado (x + a) (x – a), factorizar $x^2$ - 7, pero primero resuelva los dos ejercicios, como el ejemplo:
   - $X^2 – 25= (x + 5) (x – 5)$ porque se puede representar $x^2 - 5^2$
   - $X^2 – 9= (X^2+3) (X^2-3)$ porque se puede representar ________
   - $X^2 – 4 = (X^2+2) (X^2+2)$ porque se puede representar ________
2. Ahora sí, factoricemos la expresión:

   $X^2 – 7$ = _______________porque se puede representar _______________
3. ¿Qué ocurrió? ________________________________________________
4. Geométricamente, se sabe que la expresión $\mathbf{a^2}$ corresponde al área de un cuadrado de lado **a**, vamos entonces al aplicativo en GeoGebra y utiliza el Mouse para mover primero el deslizador **a** y construir un cuadrado de área **9 unid.**

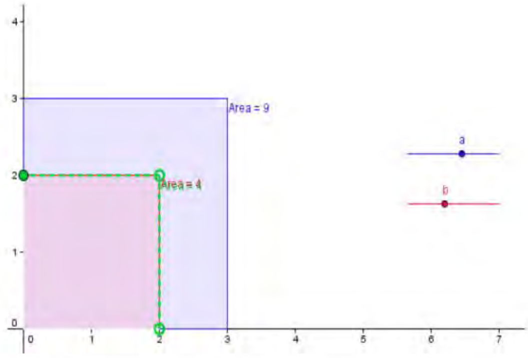



5. De igual forma mueve el deslizador **b** y construye un cuadrado de área **4 unid.**

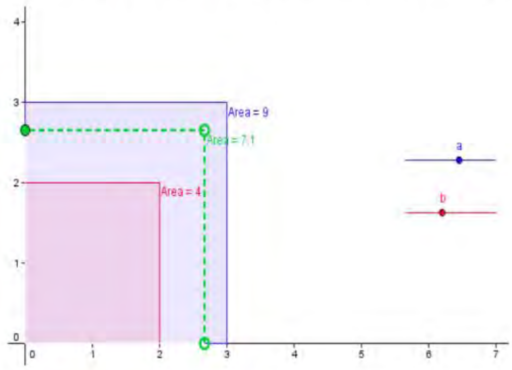
**Fuente.** Elaboración propia.

Continuación Figura 11.

**Figura 11.** Guía OA 2. Cuadrado de área x




6. Ahora utiliza el Mouse para mover el punto verde que se encuentra en el eje de las ordenadas y forma un cuadrado de área 7.




7. ¿Se puede formar? SI__________ NO_________
8. Si tu respuesta es NO contesta las preguntas:
9. ¿Entre que valores enteros está comprendida esta área**?**
10. ¿Entre que valores decimales está comprendida esta área?
11. ¿Si no es posible formar el cuadrado de área 7, se puede afirmar entonces que la expresión **$X^2 - 7$** no se puede factorizar? **SI**_____ **NO**_______
¿Por qué? ______________________________________________
12. Si la respuesta es **SI**. ¿Cuál es la solución?________________________
13. ¿Esta expresión a que campo numérico pertenece?__________________
14. Escribe una conclusión de lo que aprendiste en esta actividad.

**Fuente.** Elaboración propia.

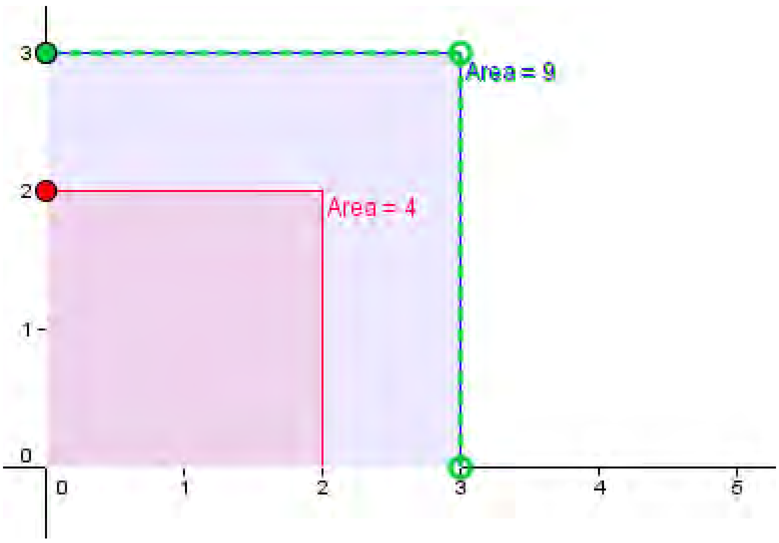
A continuación se describen cada una de las situaciones que conforman la secuencia, se determinará el papel del profesor dentro de su desarrollo, y las posibles estrategias y dificultades que los estudiantes encontrarán en cada una de las fases de análisis bajo enfoque de la dialéctica Herramienta-Objeto y el juego de marcos explicados en el capitulo 3. En la sección 5.2 se evidencian los resultados de cada una de estas fases.

**D.H.O. Fase a. "Antiguo"**

En las primeras dos preguntas los estudiantes pueden recordar la factorización de una diferencia de cuadrados y de esta forma introducirlos a la situación problema con la pregunta 3 que puede producir en algunos de ellos dificultades para responderla, si no identifica el conjunto numérico al que pertenece la solución.

**D.H.O. Fase b. "Búsqueda de lo nuevo implícito"**

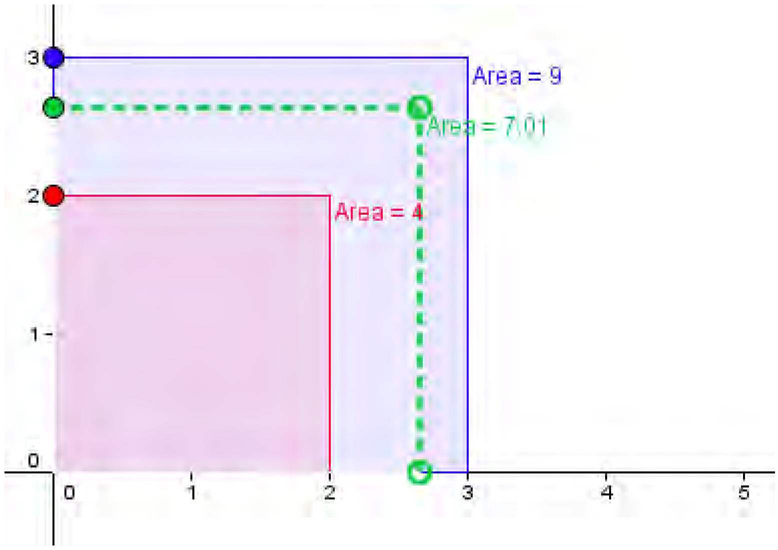
En la pregunta 4 ocurre el primer cambio de juego de marcos (del algebraico al geométrico) y ante las dificultades que puedan presentarse por no identificar la solución en el conjunto de los números irracionales, para responder la pregunta 3 de factorizar el binomio $x^2-7$ que pertenece a una diferencia de cuadrados, se le propone en el marco geométrico buscar la solución con la interpretación de las variaciones de los lados y las áreas de los cuadrados que se formaron (*figura a*).




…………..*Figura a*

**D.H.O. Fase c. "Explicitación e Institucionalización local"**

En las siguientes dos preguntas (5 y 6) de la guía el docente propone analizar la información de la figura 2, haciendo hincapié en la interpretación de las variaciones que se fueron dando entre las áreas de los cuadrados que encontró inicialmente de 4 y 9 unidades cuadradas respectivamente, con la dimensión del cuadrado de área 7 que se le pide encontrar, utilizando la herramienta de arrastre que ofrece GeoGebra y procediendo a un nuevo cambio de marco en este caso del geométrico al aritmético.




..................Figura 2

Es posible que no todos los alumnos interpreten correctamente la variación del área que se les pide encontrar, lo que puede llevarlos a contestar erróneamente las dos preguntas planteadas o no poder hacerlo. Por ejemplo, cuando el estudiante pretende hallar el lado del cuadrado de área 7 sabe que la solución está comprendida entre 2 y 3 y empieza a seleccionar números decimales como 2.6 y 2.7 se trata aquí de un "nuevo explícito" pues se da cuenta que por más que se aproxime a otros valores comprendidos en este último intervalo no encontrara la solución en los números racionales.

**D.H.O. Fase d. "Institucionalización – status de objeto"**

En las dos preguntas finales (10 y 11) a los estudiantes que no saben responderlas o para aquellos que lleguen a la solución sin saber que se trata del concepto de irracionalidad numérica, el docente durante la clase presencial introduce el tema de los números irracionales, explicándoles en profundidad todo lo expuesto en la sección 2.1 sobre este tema, y donde podrán encontrar la solución o la justificación de las respuestas dadas en esta guía.

**D.H.O. Fase e. "Familiarización –reubicación"**

El docente les pide a los alumnos que identifiquen en un listado de números, aquellos que sean irracionales.

**D.H.O. Fase e. "La tarea o el nuevo problema se hace más complejo"**

Por último se les pide a los estudiantes que factoricen la expresión $x^2 – 8$.

# 5 ANÁLISIS DE RESULTADOS

A continuación se muestran los resultados y las interpretaciones de:

- ✓ Los trabajos realizados por los estudiantes durante el desarrollo de las guías de los objetos de aprendizaje.
- ✓ Los resultados de las evaluaciones del primer parcial en los grupos de investigación que contiene los temas trabajados en los objetos de aprendizaje.
- ✓ Y por último, las comparaciones entre los resultados del primer parcial de los semestres 2011-1 y 2011-2, vale la pena recordar que, en el 2011 -1 no se utilizó la mediación tecnológica mientras que en el 2011– 2 si se utilizó. La información obtenida con la comparación de los datos de estos semestres, refleja cambios significativos respecto al uso del GeoGebra como herramienta didáctica.

## 5.1 Descripción General de los Resultados del Objeto de Aprendizaje Cuadrado de la Diferencia de Dos Cantidades

En esta primera situación se presenta el análisis sobre la construcción del producto notable *cuadrado de la diferencia de dos cantidades.* Para ello se tuvo en cuenta las respuestas de todos los estudiantes aunque se trabajó especialmente con los resultados de 17 estudiantes que fueron la muestra representativa porque agrupó las diferentes respuestas entre el total de 49 estudiantes del curso de matemática básica que la desarrollaron. Es importante mencionar que al final de cada guía del objeto de aprendizaje los estudiantes tenían la oportunidad de manifestar lo que opinaban de la actividad, lo que habían aprendido y los hallazgos del docente como se evidencia en las secciones 5.1.1 y 5.1.2 respectivamente. Es precisamente esta información la que también se tuvo en cuenta tanto para hacerle seguimiento a la actividad como para la comprobación de la hipótesis de este trabajo investigativo.

A continuación se presentan los resultados obtenidos en el desarrollo de la secuencia didáctica del objeto de aprendizaje *cuadrado de la diferencia de dos cantidades*. Para ello, en cada una de las preguntas se realiza una descripción de los resultados del trabajo hecho por los estudiantes que se tomaron como muestra y se identifican como estudiante 1, 2, 3, etc.

En la primera pregunta de la guía, el 90% de los estudiantes identificaron que el cuadrado de lado **a** y el cuadrado de lado **b** que se empieza a formar tienen una relación inversamente proporcional, así.

R (estudiante 1)/ *La relación que existe entre el cuadrado de lado **a** y el cuadrado de lado **b** que se formó, es que son inversamente proporcionales; pues cuando el cuadrado de lado **b** aumenta, el cuadrado de lado **a** disminuye.*

Y, el otro 10% de estudiantes respondió que las áreas son iguales. Se puede ver que únicamente se fijaron en la variación de la figuras de los cuadrados y no en la posición inicial de cada uno de ellos.

R (estudiante 2)/ *El cuadrado de lado* ***a*** *y el cuadrado de lado* ***b*** *poseen la misma área de 10 unidades cuadradas.*

Siguiendo con el desarrollo de la guía aparecen 4 preguntas que los estudiantes deben responder cuando arrastran el deslizador **a** hasta formar el cuadrado de lado 10 unidades y con el deslizador **b** el cuadrado de lado 3 unidades y luego probar con otros valores, a lo que el 100% de ellos responde de manera correcta las dos primeras de ellas que era dar el dato del área del cuadrado **a-b** que se forma y la de los rectángulos **ab.** Podemos notar que los estudiantes implícitamente comienzan a establecer relaciones de dependencia entre los lados y las áreas de las figura de forma acertada, así:

R (estudiante 3)/ *si* ***a****=10,* ***b****=3 entonces* ***a-b****=7 y su área* ***(a-b)*** *x****(a-b)****= 49. El área de los rectángulos de* ***a****=7 y* ***b****=3 es* ***a*** *x* ***b****=21*

De igual forma lo hacen cuando cambian los valores propuestos en la figura:

R (estudiante 4)/ *Pues tomando unos valores distintos como* ***a****=10,* ***b****=6 el área de* ***a-b*** *son 36 unidades cuadradas y la de los rectángulos* ***ab*** *es de 24 unidades cuadradas.*

Pero en la siguiente pregunta de encontrar la relación entre las áreas de los cuadrados de lados **a** y **b** y los rectángulos **ab**, el 80% de los estudiantes tuvo bastante dificultad para responderla y llegaron a respuestas muy equivocadas, así hayan tomado diferentes valores en la figura. Esto se puede deducir que ocurre por lo dicho en la teoría *D.H.O. fase b "Nueva búsqueda implícita"* explicado en la sección 3.1, donde los alumnos encuentran dificultades para resolver completamente el problema y esas nuevas preguntas los llevan a la búsqueda y adaptación de nuevos medios para encontrar soluciones, como se evidencia en las siguientes respuestas.

R (estudiante 5)/ *La relación entre* $\mathbf{a}^2$ *inicial y* $\mathbf{b}^2$ *y* ***ab****, es que cuando se multiplica* $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 \times (\mathbf{ab})^2$.

R (estudiante 6)/ *Se relacionan debido a que la suma de las áreas* $\mathbf{b}^2$ *y* ***ab*** *es la mitad* del área inicial $\mathbf{a}^2$.

Y solo el 20% de los estudiantes encontraron una acertada relación entre los cuadrados y rectángulos, así:

R (estudiante 7)/ *La relación que se encuentra es que a partir del área inicial* $\mathbf{a}^2$ *con las áreas que se formaron* $\mathbf{b}^2$ *y los dos rectángulos* ***ab*** *es que con ellos se puede calcular el área del cuadrado inicial.*

En la siguiente pregunta la totalidad de los estudiantes vuelve a responder de manera acertada, lo que llama la atención es que los dos estudiantes que respondieron mal la primera pregunta, pudieron haberla confundido con esta que tiene la intención de saber si el estudiante encuentra la relación cuando el cuadrado de lado **b** se hace igual al cuadrado de lado **a**.

R (estudiante 8)/ *Si se hace el cuadrado de lado **b** igual al del lado **a,** quedan exactamente de la misma área, y la diferencia seria de 0 (cero).*

Finalmente, en las últimas preguntas de la guía se puede establecer que el 90% de los estudiantes pudieron encontrar la fórmula del producto notable *cuadrado de la diferencia de dos cantidades*, coincidiéndole con la que le muestra el aplicativo, y describiéndola en palabras, así:

R (estudiante 9)/ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$*, que coincide con la del aplicativo y en palabras es: que **a** menos **b** al cuadrado es igual al cuadrado de **a** menos dos veces **a** por **b** mas el cuadrado de **b.***

Pero un 10% de los estudiantes no logro establecer la fórmula que relacionara las áreas de forma adecuada, y es aquí precisamente donde cobra importancia la *D.H.O. Fase c. "Explicitación e Institucionalización local"* y la *D.H.O. Fase d. "Institucionalización – status de objeto"* como se analizó en la sección 3.1, para que con la intervención del profesor se estructure de manera organizada el concepto que no se ha podido construir de forma clara y le llevo a responder equivocadamente como el caso de los siguiente dos estudiantes:

R (estudiante 10)/ *Tal vez seria:* $(a-b)^2 = a^2 \times ab \times b^2$

R (estudiante 11)/ *No me coincidió, porque **ab** del medio de la fórmula que cree, es multiplicado por **2***

### 5.1.1 Conclusiones de los Estudiantes

Primero se pueden observar las conclusiones de tres estudiantes que construyeron bien el concepto del producto notable cuadrado de la diferencia de dos cantidades.

R (estudiante 12)/ *Por medio de representaciones graficas se puede dar a conocer herramientas tan usadas como los casos de factorización.*

R (estudiante 13)/ Se reconoció el fundamento del producto notable cuadrado de la diferencia de dos cantidades por medio de herramientas gráficas.

R (estudiante 14)/ *En esta actividad principalmente aprendí la relación que existe entre los lados, en este caso particular que era a y b. Aprendí que cuando un lado aumenta, el otro disminuye, lo que me lleva a concluir que es inversamente proporcional. También aprendí la relación que existe entre la diferencia de dos lados elevados al cuadrado, a lo cual corresponde la fórmula de la diferencia. También me ayudo para recordar el área de un cuadrado y el área de un rectángulo. Excelente actividad para recordar.*

Y las conclusiones de los estudiantes que no llegaron de forma adecuada a la construcción del concepto respondieron lo siguiente.

R (estudiante 15)/ *Aunque la actividad fue muy interesante no logre entender algunas relaciones dadas en el GeoGebra que usted profesor nos colocó y espero que en la clase me explique lo que no entiendo*

R (estudiante 16)/ *Con las gráficas supe responder pero no me coincidió la formula y espero que me la explique otra vez*.

R (estudiante 17)/ *Yo se comprobar con los números pero no con la formula y no sé como usted la exija.*

### 5.1.2 Hallazgos del Docente

- ✓ El papel de GeoGebra con su herramienta de arrastre en los deslizadores fue la principal herramienta para comenzar a experimentar las variaciones de la figura.
- ✓ La visualización de la figura ayudo para que los estudiantes que construyeron bien el concepto finalmente establecieran las relaciones entre las áreas de los cuadrados y rectángulos que se formaron en la figura.
- ✓ A pesar de que al comienzo de la situación muchos de los estudiantes estaban confundiendo las relaciones que ocurren en la figura, al final se puede ver que el 90% de los estudiantes establecen correctamente la representación algebraica del producto notable *cuadrado de la diferencia de dos cantidades*, y aunque el 10% de los estudiantes no logró llegar de forma correcta a la construcción de este concepto, se observa que se debió a la mala interpretación de las preguntas propuestas en la guía para el desarrollo del objeto de aprendizaje como se evidencia en el análisis de las respuestas de la sección 5.1.
- ✓ En el trabajo siempre se tuvo presente la teoría que sustenta la Ingeniería Didáctica, desde su propuesta para la enseñanza de las matemáticas, hasta el análisis para la investigación, ya que a partir de las diferentes fases, se pudo diseñar, experimentar y evaluar la secuencia didáctica.
- ✓ Las actividades propuestas brindan la oportunidad de trabajar el concepto del producto notable *cuadrado de la diferencia de dos cantidades* en diferentes registros de representación, como el numérico, el geométrico, y el algebraico, es decir, realizar los juegos de marcos que producen los desequilibrios en los estudiantes hasta que construyan el concepto, como lo explica Douady (1998).

## 5.2 Descripción General de los Resultados del Objeto de Aprendizaje Cuadrado de Área X

En esta segunda situación se describen y analizan los resultados obtenidos en la construcción del concepto de irracionalidad numérica. Al igual que en el análisis de la situación anterior se tuvo en cuenta las respuestas de todos los estudiantes y se revisaron 13 soluciones representativas porque agrupó las diferentes respuestas de lo que desarrollaron los 49 estudiantes del curso de matemática básica. Finalmente en las secciones 5.2.1 y 5.2.2 se muestran algunas conclusiones de parte de los estudiantes y hallazgos del docente sobre la actividad desarrollada respectivamente.

A continuación se presentan los resultados obtenidos en el desarrollo de la secuencia didáctica del objeto de aprendizaje *cuadrado de área x*. Para ello, en cada una de las preguntas se realiza una descripción de los resultados del trabajo hecho por los estudiantes que se tomaron como muestra y se identifican como estudiante 1, 2, 3, etc.

Primero se inicia la guía recordando el caso de factorización Diferencia de Cuadrados para hacerles una representación algebraica de la situación, y después aparecen unas preguntas de las cuales el 100% de los estudiantes responde de forma adecuada las dos primera, pero en la tercera que es la intencional para darse cuenta si reconoce los números irracionales el 75% de los estudiantes dijo que no se podía factorizar, así:

R (estudiante 1)/ $x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$ *Porque se puede representar* $x^2 - 5^2$

$x^2 - 9 = (x+3)(X-3)$ *Porque se puede representar* $X^2 - 3^2$

$x^2 - 7 =$ *No se puede factorizar porque 7 no tiene raíz exacta.*

Pero el otro 25% de los estudiantes si sabe de la solución y esto pudo suceder por dos cosas: La primera es que reconoce los números irracionales que ya los habían trabajado en su educación básica, o lo segundo es que tiene buen manejo de las propiedades de los exponentes que se repasaron en el tema anterior; la duda surge es porque ninguno justifica de una manera adecuada su respuesta, como se muestra a continuación.

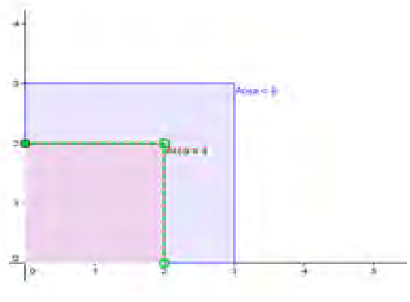
R (estudiante 2)/ $x^2 - 7 = (x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})$ *pues la multiplicación de la raíz de 7 con la raíz de 7 se puede utilizar para representar la factorización de números complicados como los primos.*

R (estudiante 3)/ $x^2 - 7 = (x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})$ *porque si multiplicamos* $\sqrt{7}x\sqrt{7}$ *desaparece la raíz.*

Al realizarles el juego de marcos que fue cambiarles esta representación algebraica a la representación geométrica del trabajo con áreas, y al hacerles las preguntas respectivas, nuevamente el 100% de los estudiantes no tiene ninguna dificultad para resolver las dos primeras preguntas en esta nueva situación.

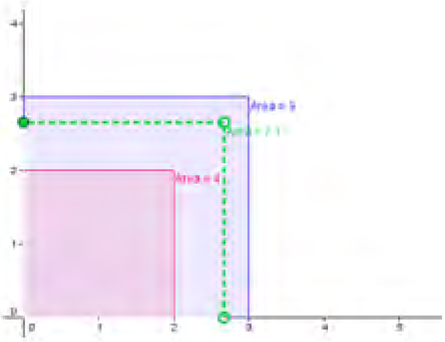
Primero se les dijo que formaran un cuadrado de área 9 unidades cuadradas, luego otro de 4.

R (estudiante 4)/



Pero en la siguiente pregunta a los estudiantes se les produce un “desequilibrio” como lo dice Douady (1998) y se analizó en *D.H.O. Fase b. “Búsqueda de lo nuevo implícito”* y la *D.H.O. Fase c. “Explicitación e Institucionalización local” explicado en la sección 3.1* ya que por el diseño del aplicativo y como ocurre realmente, no es posible construir el cuadrado de área 7, de todas formas ellos supieron llegar claramente a una solución muy aproximada de la siguiente manera.

R (estudiante 5)/ *No se puede formar y está comprendida entre los valores enteros **2** y **3** y entre los valores decimales **2.5** y **2.7***



Pero cuando se vuelve a realizar la pregunta inicial de saber si la expresión $x^2 - 7$ *es posible factorizarla, el* 75% de los estudiantes que habían dicho que no se podía siguen sosteniéndolo y justifican con la misma razón, así:.

R (estudiante 6)/ *No se puede factorizar porque 7 no tiene raíz exacta.*

R (estudiante 7)/ *No porque la raíz de 7 no es exacta supongo. O no hay un numero que multiplicado por el mismo me de cómo resultado 7.*

Y el otro 25% de los estudiantes que habían dicho que la expresión $x^2 - 7$ si se podía factorizar lo reafirman:

R (estudiante 8)/ *Porque la factorización de* $x^2 - 7$ *es* $\left(x + \sqrt{7}\right) por (x - \sqrt{7})$

Pero en la pregunta final para saber si reconoce el campo numérico al que pertenece la solución de esta factorización solo la responde correctamente el 10% de todos los estudiantes incluidos los que saben factorizar la expresión $x^2 - 7$

R (estudiante 9)/ *La solución pertenece a los números irracionales.*

Lo anterior confirma la duda que se presentó al principio de este análisis, y es que no todos los estudiantes reconocen el conjunto de los números irracionales, pero saben aplicar las propiedades de los exponentes para encontrar la solución, lo que indica a los docentes que las matemáticas tienen diferentes caminos validos para llegar a una respuesta correcta, lo que le demuestra a los docentes que los estudiantes tienen diferentes maneras para aprender y construir su propio conocimiento, por consiguiente, los estudiantes le exigen al docente innovar e implementar diferentes formas, mecanismos e instrumentos para llevar a cabo su proceso de enseñanza.

Y el otro 90% de los estudiantes no supo responder la pregunta dejando este campo vacío.

### 5.2.1 Conclusiones de los Estudiantes

Los que no encontraron la solución al problema propuesto concluyen:

R (estudiante 10)/ *Que la diferencia de cuadrados se relaciona con el área de cuadrados, y para poder resolverlo los valores deben tener raíces exactas.*

R (estudiante 11)/ *Verdaderamente me enredé un poco, pues no he podido encontrar una forma de factorizar $x^2 - 7$, con lo cual me hace estudiar muchísimo más para poder comprender bien las matemáticas. También recordé como realizar una factorización por medio de la diferencia de cuadrados.*

Los que si encontraron la solución al problema propuesto concluyen:

R (estudiante 12)/ *Bueno esta si me pareció un poco complicadita pero la solucioné, me enseñó y me ayudó a reforzar un poco la diferencia de cuadrados con los números irracionales.*

R (estudiante 13)/ *Se puede concluir que algunos números los cuales no tiene descomposición en factores como los números primos se pueden factorizar basándose en los números irracionales.*

### 5.2.2 Hallazgos del Docente

- ✓ El papel de GeoGebra con su herramienta de arrastre en los deslizadores fue la principal herramienta para comenzar a experimentar las variaciones de la figura cuando se presentó el juego de marcos en la secuencia didáctica.

- ✓ La visualización de la figura ayudo para que los estudiantes finalmente se dieran cuenta de la imposibilidad de formar un cuadrado de área 7 con los conjuntos numéricos trabajados hasta el momento.

- ✓ No obstante el docente al final de la actividad y como se describió en la sección 3.1, en la *D.H.O. fase c “Explicitación e institucionalización local”* y la *D.H.O. fase d “Institucionalización-estatuto del objeto”,* en clase realizan todas las explicaciones, *y* se introduce el tema del nuevo conjunto numérico de los Números Irracionales.

- ✓ A pesar de que el 90% de los estudiantes no identifico que la solución del problema planteado pertenece al conjunto de los números irracionales, este era precisamente el objetivo de la secuencia, que se dieran cuenta que en los conjuntos numéricos vistos hasta el momento (los números racionales) no era posible encontrar dicha solución, y el otro 10% de los estudiantes que si la encontró, lo hizo utilizando las propiedades de los exponentes, como se evidencia en el análisis de las respuestas de la sección 5.2.

- ✓ En el trabajo siempre se tuvo presente la teoría que sustenta la Ingeniería Didáctica, desde su propuesta para la enseñanza de las matemáticas, hasta el análisis para la investigación, ya que a partir de las diferentes fases, se pudo diseñar, experimentar y evaluar la secuencia didáctica.

- ✓ Las actividades propuestas brindan la oportunidad de trabajar el concepto de *irracionalidad numérica* en diferentes registros de representación, como el numérico, el geométrico, y el algebraico, es decir, realizar los juegos de marcos que producen los desequilibrios en los estudiantes hasta que construyan el concepto, como lo explica Douady (1998).

## 5.3 Aplicación de la Evaluación Semestre 2011-2

A continuación se describe en profundidad el proceso de intervención desarrollado con los estudiantes del semestre 2011–2, la interpretación y los hallazgos que se obtuvieron a lo largo de esta implementación.

### 5.3.1 Descripción del Primer Parcial 2011-2

En el primer parcial (figura12) aplicado a los grupos de estudio durante el semestre 2011-2, se trabajó sólo con el grupo 1 la mediación tecnológica. El 59% de los estudiantes, aproximadamente, aprobó dicha prueba (el análisis de varianza se puede observar en la sección 5.4.4), dándose una mejoría del 51% en los resultados comparados con los del otro grupo que no tuvo la mediación tecnológica, y donde solo aprobaron la evaluación aproximadamente el 8% de los estudiantes. Este hecho, evidencia lo que dice Brousseau (1993) frente a que los obstáculos no desaparecen radicalmente del individuo sino hasta mucho después que el modelo defectuoso de su sistema cognitivo haya sido rechazado.

**Figura 12.** Primer parcial de Matemática Básica periodo académico 2011-2.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE PALMIRA

FACULTAD DE INGENIERÍA Y ADMINISTRACIÓN

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

*PRIMER EXAMEN PARCIAL DE MATEMÁTICAS BÁSICAS*

*PROFESOR:*____________________________ *FECHA: Sábado, 10 de septiembre de 2011*

*ESTUDIANTE:*__________________________ *CODIGO:* _____________ *GRUPO:*____

***Todas las preguntas son de selección múltiple con única respuesta***

***MARQUE LA RESPUESTA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS (Pág. 3) Y SUSTÉNTELA EN EL ESPACIO INDICADO (Pág. 4 - 7) IDENTIFICÁNDOLA DE FORMA PRECISA.***

- ✓ *Si marca dos respuestas a una misma pregunta, esta se tomará como incorrecta.*
- ✓ *Si su respuesta es CORRECTA se revisará su sustentación, en caso contrario NO.*
- ✓ *Cada pregunta tiene un valor de* 0,625 *si está bien sustentada.*
- ✓ *Respuesta marcada correctamente pero sin sustentación o mal sustentada tiene un valor de* 0,250

**1.** *PROBLEMA: Un conjunto formado por 300 personas presentó una prueba formada por 3 preguntas. Luego de la correcciones obtuvieron los siguientes resultados:*

*27 respondieron correctamente las 3 preguntas,*
*31 respondieron correctamente la $1^{era}$ y $2^{da}$ pregunta,*
*32 respondieron correctamente la $1^{era}$ y $3^{era}$ pregunta,*
*15 respondieron correctamente **solo** la $2^{da}$ y $3^{era}$ pregunta,*
*134 respondieron correctamente la pregunta 1,*
*87 respondieron correctamente la $2^{da}$ pregunta,*
*129 respondieron correctamente la pregunta 3.*

*El número de personas que no respondió correctamente ninguna pregunta fue*

*A.* 44     *B.* 25     *C.* 28     *D.* 98

*LUCY JANETH MEDINA BEJARANO*
*JAIME GARCIA ECHAVARRIA*
*MIGUEL ANGEL CARRANZA RODRIGUEZ*
*OSCAR MAURICIO MORA ARROYO*

**Fuente.** Departamento de Ciencias Básicas. Universidad Nacional de Colombia Palmira.

Continuación figura 12

**Figura 12.** Primer parcial de Matemática Básica periodo académico 2011-2.

*PRIMER EXAMEN PARCIAL DE MATEMÁTICAS BÁSICAS* *2011B2*

**2.** *Al simplificar la expresión algebraica* $\dfrac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}$ *se obtiene:*

A. $\dfrac{y-x}{xy}$  B. $\dfrac{xy}{y-x}$  C. $x^{-1}-y^{-1}$  D. $\dfrac{x-y}{xy}$

**3.** *La expresión algebraica* $\dfrac{4x^2-9}{2x^2-9x-18}$ *es equivalente con:*

A. $\dfrac{2x-3}{x+6}$  B. $2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{18}$  C. $\dfrac{2x+3}{x+6}$  D. $\dfrac{2x-3}{x-6}$

**4.** *El valor de la suma* $\displaystyle\sum_{i=-4}^{a}(3i-4)$ *es:*

A. $-16a$  C. $3a-4a+16$

B. $\dfrac{3}{2}a^2+\dfrac{43}{2}a+62$  D. $\dfrac{3}{2}a^2-\dfrac{5}{2}a-50$

**5.** *El término 84 de la expansión binomial* $(2x-y)^{85}$ *es:*

A. $(2x)^{83}-(2xy)^{83}+y^{83}$  C. $-14280y^{83}x^2$

B. $-790160y^{83}x^2$  D. $790160y^{83}x^2$

**6.** *La operación* $2.3\overline{4}-1.4\overline{32}$ *es equivalente con*

A. $-\dfrac{1207}{90}$  B. $\dfrac{301}{330}$  C. $\dfrac{227}{250}$  D. $\dfrac{346}{495}$

LUCY JANETH MEDINA BEJARANO
JAIME GARCÍA ECHAVARRÍA
MIGUEL ÁNGEL CARRANZA RODRÍGUEZ
PABLO EDILSON CERÓN MUÑOZ
OSCAR MAURICIO MORA ARROYO



**Fuente.** Departamento de Ciencias Básicas. Universidad Nacional de Colombia Palmira.

Continuación Figura 12

**Figura 12.** Primer parcial de Matemática Básica periodo académico 2011-2. Preguntas 7-8

*PRIMER EXAMEN PARCIAL DE MATEMÁTICAS BÁSICAS* *2011B2*

**7.** *Dado el polinomio* $p(x) = -4x^5 + 12x^4 + 3x^3 - 28x^2 + 3x + 18$, *uno de sus ceros o raíces es:*

A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

**8.** *De las siguientes afirmaciones:*

*I.* $1.\overline{45} + 1.\overline{71} = 3.\overline{16}$

*II.* $\sqrt{-64}$ *es irracional*

*Es correcto decir que:*

A. *I y II son verdaderas.*
B. *I es verdadera y II es falsa*
C. *I es falsa y II es verdadera.*
D. *I y II son falsas.*

| HOJA DE RESPUESTAS | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| S N | S N | S N | S N | S N | S N | S N | S N |
| A | A | A | A | A | A | A | A |
| B | B | B | B | B | B | B | B |
| C | C | C | C | C | C | C | C |
| D | D | D | D | D | D | D | D |
| | | | | | | | |

LUCY JANETH MEDINA BEJARANO
JAIME GARCIA ECHAVARRIA
MIGUEL ANGEL CARRANZA RODRIGUEZ
OSCAR MAURICIO MORA ARROYO

*Página 3 de 7*

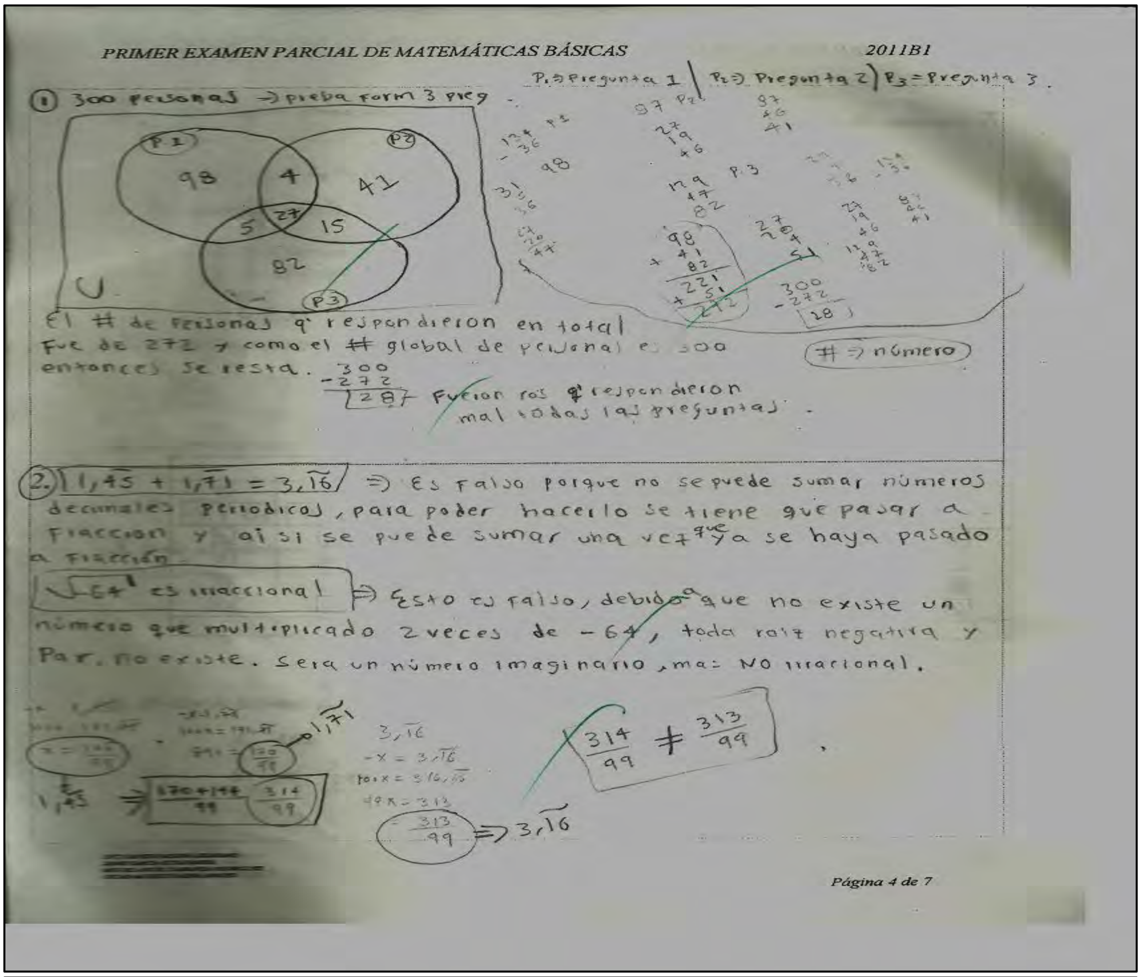
**Fuente.** Departamento de Ciencias Básicas. Universidad Nacional de Colombia Palmira.

### 5.3.2 Descripción y Análisis de la solución del Primer Parcial 2011-2

Observemos que la actividad presenta en los puntos problemas de algebra (el 90% de su nota) que involucra tener claro los conceptos de productos notables y factorización como suma de cuadrados y el concepto de numero irracional para poderlos aplicar en el desarrollo de los mismos y por ende llegar a la respuesta correcta y solo aparece una pregunta del tema de conjuntos.

A continuación se presenta la solución dada por los estudiantes en este primer parcial. Para ello, en cada una de las preguntas se realiza una descripción de los resultados que se tomaron como muestra representativa porque agrupo las diferentes respuestas analizadas del total de estudiantes que lo presentaron. Estas soluciones se identifican como estudiante 1, 2, 3, etc.

R/ (Estudiante 1)



PRIMER EXAMEN PARCIAL DE MATEMÁTICAS BÁSICAS 2011B1

$P_1 \Rightarrow$ Pregunta 1 | $P_2 \Rightarrow$ Pregunta 2 | $P_3$ = Pregunta 3.

① 300 personas → prueba form 3 preg.



El # de personas q' respondieron en total fue de 272 y como el # global de personas es 300 entonces se resta. $300 - 272 = \boxed{28}$ Fueron los q' respondieron mal todas las preguntas.

(# ⇒ número)

2. $\boxed{1,\overline{45} + 1,\overline{71} = 3,\overline{16}}$ ⇒ Es falso porque no se puede sumar números decimales periodicos, para poder hacerlo se tiene que pasar a fraccion y asi si se puede sumar una vez que ya se haya pasado a fraccion.

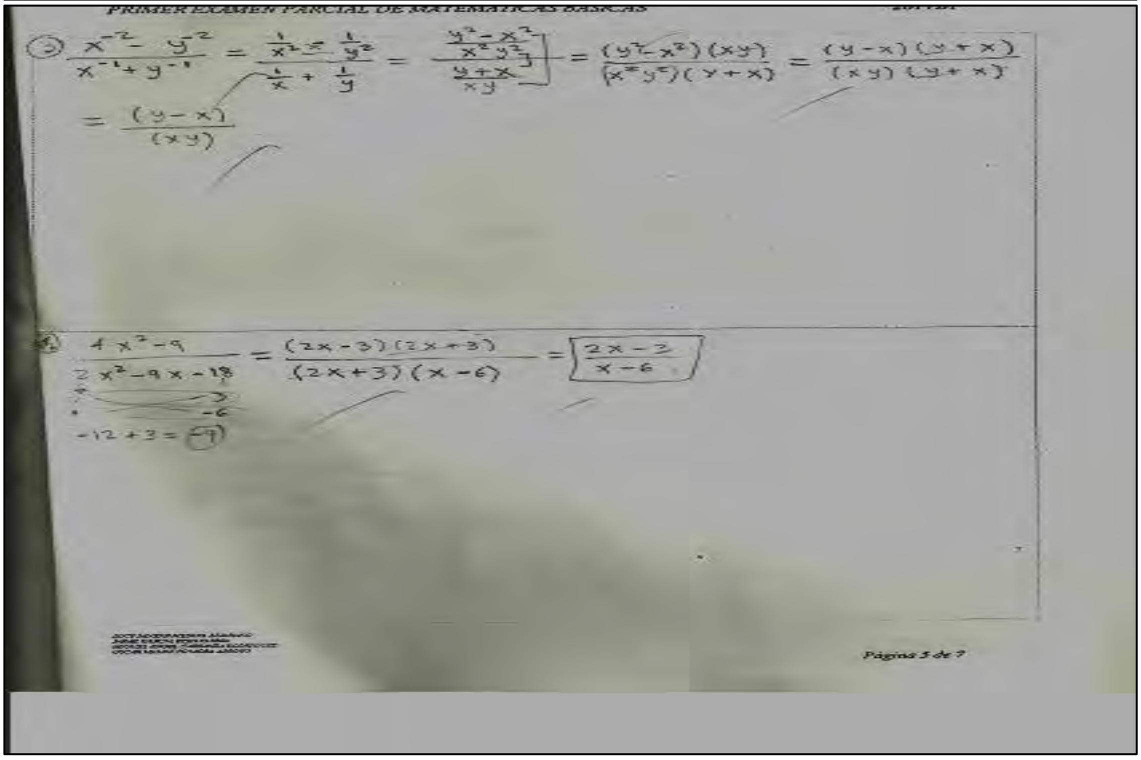
$\boxed{\sqrt{-64}\ \text{es irraccional}}$ ⇒ Esto es falso, debido a que no existe un número que multiplicado 2 veces de $-64$, toda raiz negativa y par. no existe. Sería un número imaginario, mas no irracional.

$1,\overline{45} \Rightarrow \boxed{\frac{170+144}{99} = \frac{314}{99}}$

$3,\overline{16}$; $-x = 3,\overline{16}$; $100x = 316,\overline{16}$; $99x = 313$; $\frac{313}{99} \Rightarrow 3,\overline{16}$

$\boxed{\frac{314}{99} \neq \frac{313}{99}}$

Página 4 de 7



PRIMER EXAMEN PARCIAL DE MATEMÁTICAS BÁSICAS

③ $\frac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-1} + y^{-1}} = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{\frac{y^2 - x^2}{x^2y^2}}{\frac{y+x}{xy}} = \frac{(y^2 - x^2)(xy)}{(x^2y^2)(y+x)} = \frac{(y-x)(y+x)}{(xy)(y+x)}$

$= \frac{(y-x)}{(xy)}$

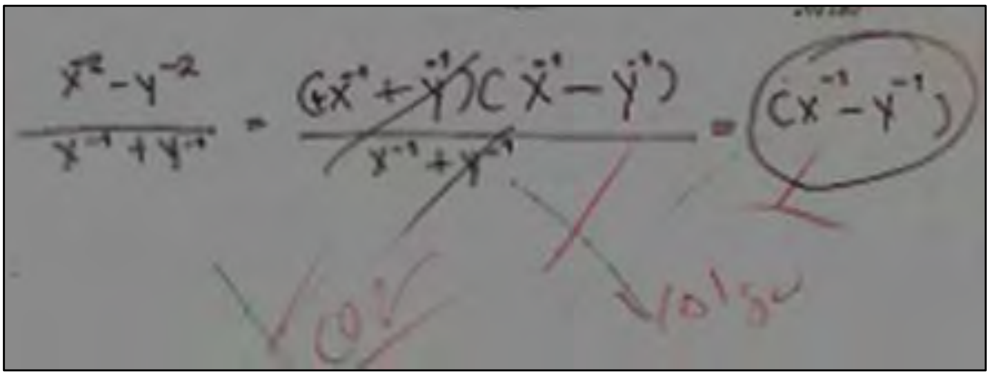
④ $\frac{4x^2 - 9}{2x^2 - 9x - 18} = \frac{(2x-3)(2x+3)}{(2x+3)(x-6)} = \boxed{\frac{2x-3}{x-6}}$

$-12 + 3 = -9$

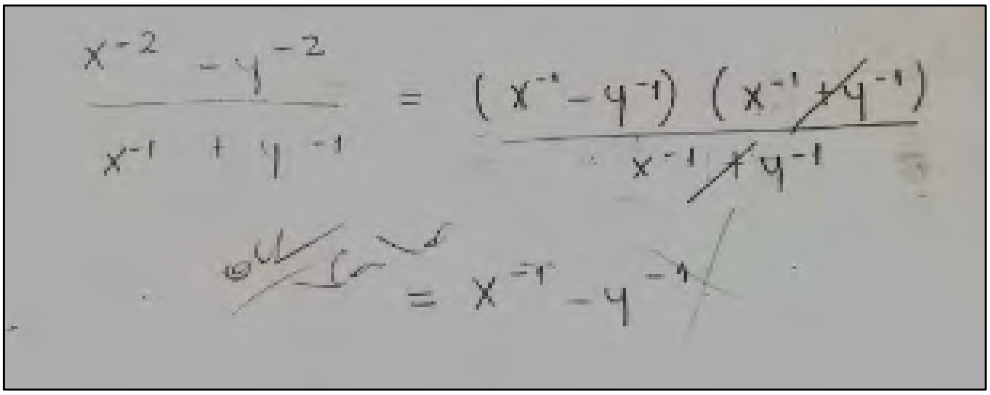
Página 5 de 7

La pregunta número **2** llama la atención porque quedó con dos opciones de respuestas que los docentes pasaron por alto, pues la intención inicial era verificar en el estudiante la apropiación de las propiedades de los exponentes negativos que de hacerlo correctamente llegaría a la respuesta **a** como efectivamente ocurrió en estas soluciones, y que no cometieran el error de simplificar directamente la expresión señalando de esta forma la respuesta del literal **c (** $x^{-1} - y^{-1}$ **)**, sin embargo, el 35% de los estudiantes identificó que en dicho ejercicio era posible llegar a su solución a través de la factorización de diferencia de cuadrados, (asunto que no tuvieron en cuenta los docentes cuando diseñaron el ejercicio) con este procedimiento simplificaron y llegaron a la respuesta **c** que es una expresión equivalente a la respuesta

*R/ (estudiante 2)*

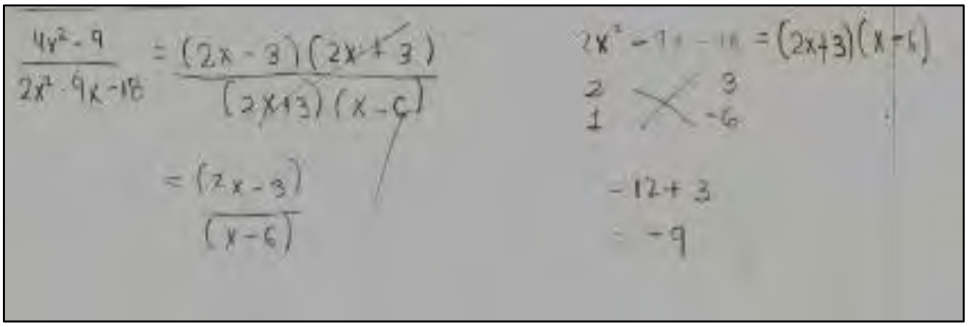


*R/ (estudiante 3)*

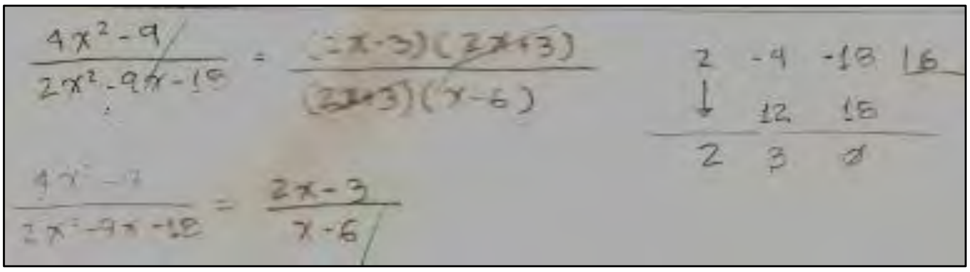


- ✓ En el punto **3,** de igual forma el 65% los estudiantes visualizan las factorizaciones diferencia de cuadrados del numerador y el trinomio del denominador, para realizar por último la simplificación, realizando un procedimiento correcto al reconocer los productos indicados en el signo de agrupación.

R/ (estudiante 4)

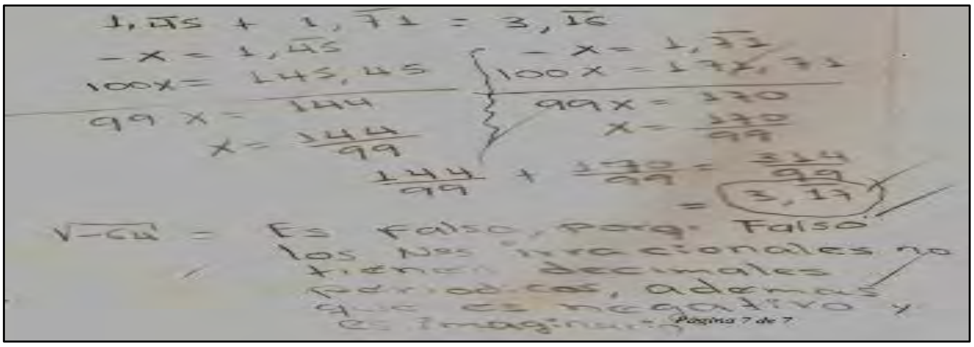


R/ (estudiante 5)

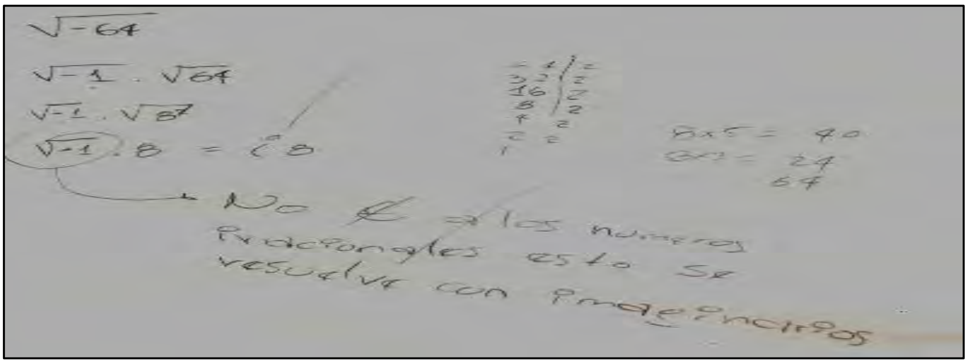


En el punto **8**, el 60% de los estudiantes reconocen de forma correcta lo que es un número irracional, diferenciándolo de un número imaginario dando una buena argumentación.

R/ (estudiante 6)



R/ (estudiante 7)



### 5.3.3 Hallazgos de los Datos Encontrados en el Semestre 2011-2 en la Universidad Nacional

Al comparar los resultados de los primeros parciales de matemáticas del semestre 2011-1 con los del semestre 2011-2 se observa que el promedio de los estudiantes que lo aprueban con mas de 3.0 en el curso donde existió la mediación tecnológica pasó del 22,7% del semestre anterior al 59% de aprobación en este semestre, que es un aumento estadísticamente significativo como se evidencia en el análisis de varianza de la sección 5.4.3, y en el grupo donde no se utilizó la mediación siguen siendo bajos, ya que los promedios de aprobación son similares, apenas del 14% en el semestre anterior y 8% durante este. Entre los factores que pudieron haber incidido para que este fenómeno se diera se resaltan los siguientes:

- ✓ La forma en que fue abordada la evaluación de parte de los estudiantes que la aprobaron es una muestra de la apropiación de los temas trabajados en los Objetos de Aprendizaje con el respectivo desarrollo de la guía como se ha indicado en la sección 5.
- ✓ Se rescata la importancia de realizar el análisis a los errores que cometen los estudiantes como lo realizado en el capítulo 0, porque esto debe conducir a la búsqueda de nuevas estrategias de enseñanza de parte de los docentes, y que de algún modo puedan mejorar los aprendizajes en los estudiantes de una forma más significativa. En este caso, la mediación tecnológica con los AGD fue la que logró que los estudiantes se apropiaran mejor de su proceso de aprendizaje de las matemáticas, y que coincide con la apreciación dada por el ICFES cuando manifiesta que en la prueba TIMSS le va mejor a los estudiantes que utilizan el recurso del computador con acceso a internet en su proceso de aprendizaje.

## 5.4 Resultados Estadísticos

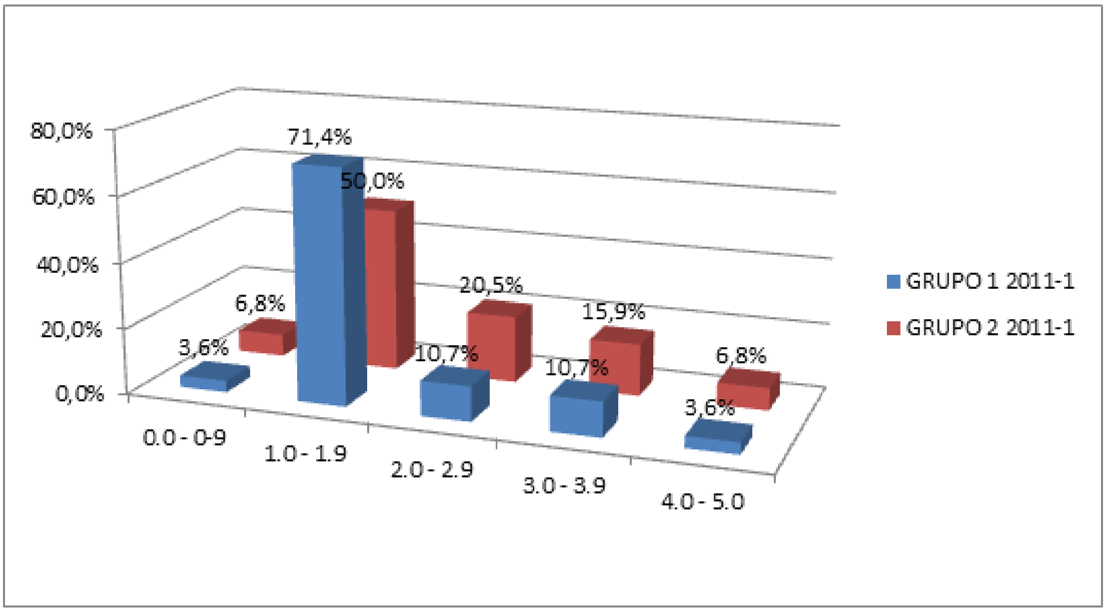
En esta sección se presentan los análisis estadísticos de los resultados obtenidos en las evaluaciones del primer parcial de matemáticas, la evaluación de Bogotá, y la nota definitiva de los estudiantes de matemática básica de la Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira durante los semestres académicos 2011-1 y 2011-2 de los grupos de estudio que se tomaron en cuenta para esta investigación.

Estos resultados estadísticos se apoyan en el análisis de varianza (ANOVA) como se indicó en la sección 4.1, utilizando la herramienta de Excel y Varianza de un Factor, la cual realiza un análisis simple de variaciones de datos de dos o más muestras, y determina si la hipótesis de investigación es correcta o por el contrario se comprueba la hipótesis nula.

### 5.4.1 Análisis de las Calificaciones del Primer Parcial Grupos 2011-1 Sin Mediación Tecnológica y Diferente Docente

Este primer análisis pertenece a los estudiantes de dos grupos de matemática básica con docentes diferentes y que no tuvieron intervención de las herramientas tecnológicas durante el semestre 2011-1, con los resultados de las notas de sus evaluaciones de su primer parcial organizados en intervalos que oscilan entre 0.0 y 5.0 como se muestra en la figura 13.

**Figura 13.** Porcentaje de estudiantes en intervalos por rendimiento en la evaluación. 2011-1




**Fuente.** Elaboración propia.

Se observa que los dos grupos tuvieron un comportamiento similar en las notas de su evaluación, y la gran mayoría de los estudiantes la perdieron, aprobándola solo el 14,6% en el Grupo 1 y el 22.7% en el Grupo 2.

Ahora se puede observar en la tabla 11 lo que ocurre cuando se realiza el análisis de varianza entre estos dos grupos.

**Tabla 11.** Análisis de varianza G. 1 y 2 2011-1 con diferentes docentes y sin mediación tecnológica.

| Análisis de varianza de un factor de dos grupos 2011-1 sin mediación tecnológica | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| RESUMEN | | | | | | |
| *Grupos* | *Cuenta* | *Suma* | *Promedio* | *Varianza* | | |
| Grupo 1 | 28 | 45,7 | 1,632142857 | 1,138558201 | | |
| Grupo 2 | 46 | 90,5 | 1,967391304 | 1,35557971 | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| ANÁLISIS DE VARIANZA | | | | | | |
| *Origen de las variaciones* | *Suma de cuadrados* | *Grados de libertad* | *Promedio de los cuadrados* | *F* | *Probabilidad* | *Valor crítico para F* |
| Entre grupos | 1,956219993 | 1 | 1,956219993 | 1,53525753 | 0,219349114 | 3,97389699 |
| Dentro de los grupos | 91,74215839 | 72 | 1,274196644 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 93,69837838 | 73 | | | | |

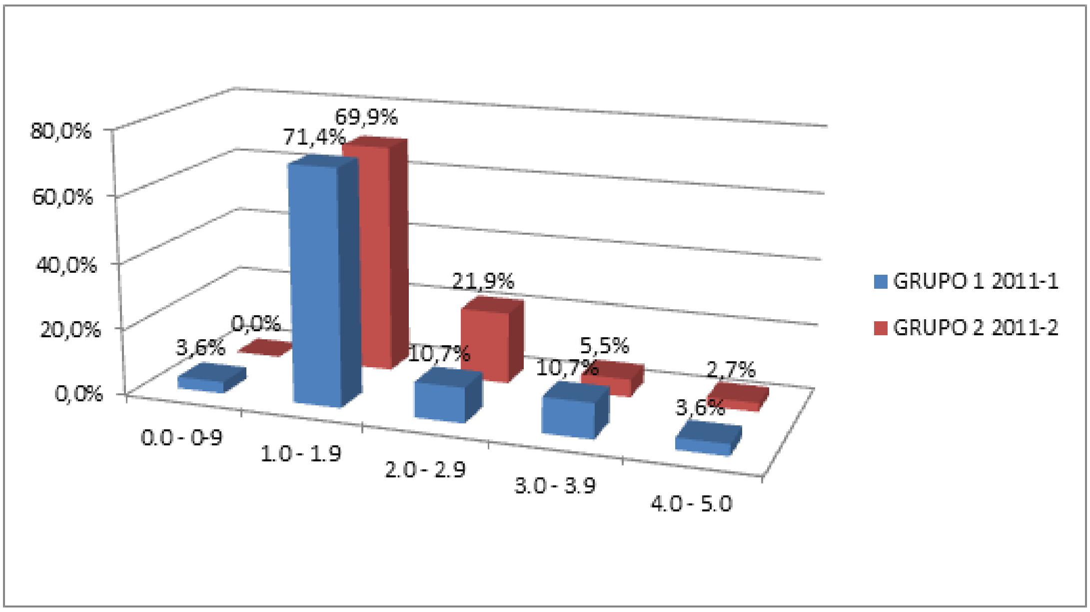
**Fuente.** Elaboración propia.

El resultado que el análisis de varianza le da al valor de la F (variación entre los dos grupos) es de 1,53525753. Para saber si el resultado en este caso es significativo (es decir, si la probabilidad de P tiene un valor menor a 0,05), el valor crítico para F necesita ser al menos 3,97389699, pero como vemos el valor de F es menor que el valor crítico para F lo que indica que los resultados de las pruebas entre los dos grupos no es significativa (La probabilidad de 0,21 indica el valor con el que el ANOVA no detectaría ninguna diferencia significativa). También se puede observar que los promedios de las notas son muy similares y muestran un bajo rendimiento académico en matemáticas. En el grupo 1 es de 1,63 con una varianza de 1,13 y en el grupo 2 de 1,96 con una varianza de 1,35 mostrando que cada grupo prácticamente tiene la misma dispersión en sus notas. Esto fue uno de los motivos que se analizaron y se tuvieron en cuenta para la realización de la presente investigación, acudir a la mediación de las TIC de tal forma que los estudiantes desarrollen competencias en esta área y que les ayude a subsanar estas deficiencias en su primer parcial.

### 5.4.2 Análisis de las Calificaciones del Primer Parcial Grupos 2011-1 Vs 2011-2 Sin Mediación Tecnológica y un Mismo Docente

El segundo análisis pertenece a dos grupos de matemática básica, uno durante el semestre 2011-1 (Grupo 1) y otro durante el semestre 2011-2 (Grupo 2) que fueron dirigidos por un mismo docente y que no tuvieron intervención de las herramientas tecnológicas, con los resultados de las notas de sus evaluaciones organizados en intervalos que oscilan entre 0.0 y 5.0 como se muestra en la figura 14.

**Figura 14.** Porcentaje de estudiantes en intervalos por rendimiento en la evaluación  2011-1 vs 2011-2




**Fuente.** Elaboración propia.

Se observa que los dos grupos tuvieron un comportamiento muy similar en sus evaluaciones donde la gran mayoría de los estudiantes la perdieron y solo la aprobaron el 14.3% en el Grupo 1 y el 8.2% en el Grupo 2.

A continuación en la tabla 12 se puede ver que ocurre cuando se realiza el análisis de varianza entre estos dos grupos.

**Tabla 12.** Análisis de varianza Grupos 1 y 2 2011-1 vs 2011-2 con un mismo docente y sin mediación.

| Análisis de varianza de un factor con el mismo docente Grup1 (2011-1) \|G- 2 (2011-2) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| RESUMEN | | | | | | |
| *Grupos* | *Cuenta* | *Suma* | *Promedio* | *Varianza* | | |
| Grupo 1 | 28 | 45,7 | 1,632142857 | 1,1385582 | | |
| Grupo 2 | 73 | 122 | 1,671232877 | 0,7298554 | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| ANÁLISIS DE VARIANZA | | | | | | |
| *Origen de las variaciones* | *Suma de cuadrados* | *Grados de libertad* | *Promedio de los cuadrados* | *F* | *Probabilidad* | *Valor crítico para F* |
| Entre grupos | 0,030923689 | 1 | 0,030923689 | 0,03675616 | 0,848355021 | 3,937116911 |
| Dentro de los grupos | 83,29066047 | 99 | 0,841319803 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 83,32158416 | 100 | | | | |

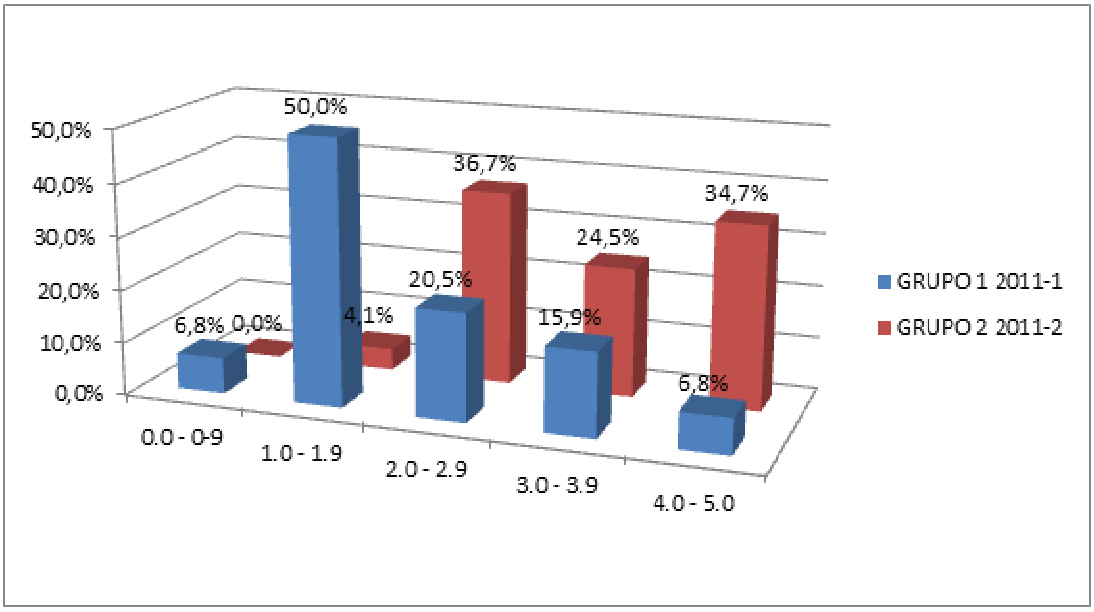
**Fuente.** Elaboración propia.

El resultado que este ANOVA le da al valor de la F (variación entre los dos grupos) es de 0,0367561. Para saber si el resultado en este caso es significativo (o sea, si la probabilidad de P tiene un valor menor a 0,05), el valor crítico para F necesita ser al menos 3,937116911, pero como vemos el valor de F es mucho menor que el valor crítico para F lo que indica que los resultados de las pruebas entre los dos grupos no es significativa (La probabilidad de 0,84 indica el valor con el que el ANOVA no detectaría ninguna diferencia significativa),. También se observa que los promedios de las notas son muy similares. En el grupo 1 durante el semestre 2011-1 es de 1,63 con una varianza de 1,13 (es el mismo grupo 1 del análisis 5.4.1) y en el grupo 2 durante el semestre 2011-2 con el mismo docente es de 1,67 con una varianza de 0,72 lo que muestra que el promedio en este último periodo académico subió en 0,3 y los datos tuvieron menor dispersión. Llama la atención que independientemente del semestre académico, cuando no se utiliza mediación tecnológica en el curso de matemáticas se reflejan resultados similares en las notas de su primer parcial.

### 5.4.3 Análisis de las Calificaciones del Primer Parcial Grupos 2011-1 Vs 2011-2 Con y Sin Mediación Tecnológica y un Mismo Docente

El tercer análisis pertenece a dos grupos de matemática básica dirigidos por un mismo docente, uno durante el semestre 2011-1 que no tuvo mediación tecnológica y otro durante el semestre 2011-2 donde sí se utilizaron herramientas tecnológicas, con los resultados de las notas de sus evaluaciones organizados en intervalos que oscilan entre 0.0 y 5.0 como se muestran en la figura 15.

**Figura 15.** Porcentaje de estudiantes en intervalos por rendimiento en la evaluación. 2011-1 vs 2011-2




**Fuente.** Elaboración propia.

Se observa que los dos grupos tuvieron un comportamiento muy diferente en sus evaluaciones, mientras en el semestre 2011-1 en el Grupo 1 solo aprobaron la evaluación el 22.7% de los estudiantes, en el Grupo 2 correspondiente al semestre 2011-2 el rendimiento mejoro y el porcentaje de aprobados fue del 59.2%.

Ahora se puede observar en la tabla 13 lo que ocurre cuando se realiza el análisis de varianza entre estos dos grupos.

**Tabla 13.** Análisis de varianza Grupos 1 y 2 2011-1 (SM) vs 2011-2 (CM)

| Análisis de varianza de un factor con diferentes docente G- 1 (2011-1) G-2 (2011-2) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| RESUMEN | | | | | | |
| *Grupos* | *Cuenta* | *Suma* | *Promedio* | *Varianza* | | |
| Grupo 1 | 46 | 90,5 | 1,967391304 | 1,35557971 | | |
| Grupo 2 | 49 | 163,8 | 3,342857143 | 1,25208333 | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| ANÁLISIS DE VARIANZA | | | | | | |
| *Origen de las variaciones* | *Suma de cuadrados* | *Grados de libertad* | *Promedio de los cuadrados* | *F* | *Probabilidad* | *Valor crítico para F* |
| Entre grupos | 44,88796568 | 1 | 44,88796568 | 34,471869 | 6,63162E-08 | 3,943408846 |
| Dentro de los grupos | 121,101087 | 93 | 1,302162225 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 165,9890526 | 94 | | | | |

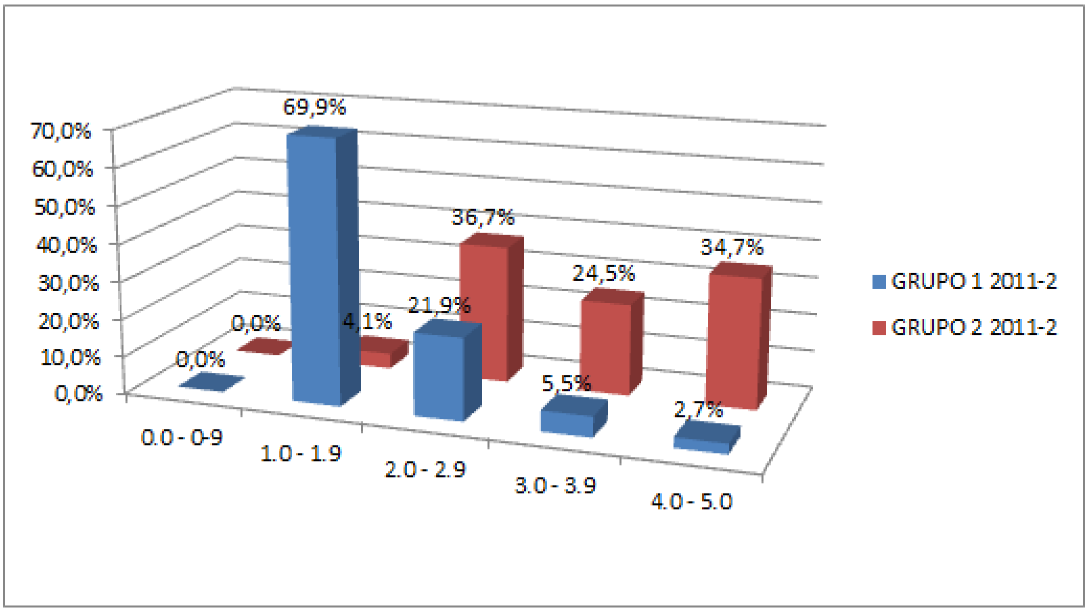
**Fuente.** Elaboración propia.

El resultado que este ANOVA le da al valor de la F (variación entre los dos grupos) es de 34,471869. Para saber si el resultado en este caso es significativo (o sea, si la probabilidad de P tiene un valor menor a 0,05), el valor crítico para F necesita ser al menos 3,943408846, pero como se puede observar el valor de F es mayor que el valor crítico para F lo que indica que los resultados de las pruebas entre los dos grupos es muy significativa (La probabilidad de 6,63 indica el valor el valor con el que el ANOVA no detectaría ninguna diferencia significativa),. También se puede observar que los promedios de las notas son muy diferentes. En el grupo 1 durante el semestre 2011-1 es de 1,96 con una varianza de 1,35 (es el mismo grupo 2 sin mediación tecnológica del análisis 5.4.1) y en el grupo 2 durante el semestre 2011-2 con el mismo docente y que en esta oportunidad utilizo mediación tecnológica es de 3,34 con una varianza de 1,25 lo que muestra que el promedio en este último periodo académico subió 1,38 y las notas tuvieron menor dispersión. De esta forma se evidencia que la mediación tecnológica y la forma en que se llevo a cabo, surtió un efecto positivo para que las notas de su primer parcial mejoraran cumpliéndose con uno de los objetivos de la presente investigación.

### 5.4.4 Análisis de las Calificaciones del Primer Parcial Grupos 2011-2 Con y Sin Mediación Tecnológica y Diferente Docente

El cuarto análisis pertenece a dos grupos de matemática básica dirigidos por docentes diferentes durante el semestre 2011-2. El Grupo 1 que no tuvo mediación tecnológica y el grupo 2 que si utilizo mediación tecnológica con los resultados de las notas de sus evaluaciones de su primer parcial organizados en intervalos que oscilan entre 0.0 y 5.0 como se muestra en la figura 16.

**Figura 16.** Porcentaje de estudiantes en intervalos por rendimiento en la evaluación. 2011-2




**Fuente.** Elaboración propia.

Se observa claramente que los dos grupos tuvieron un comportamiento muy diferente en sus evaluaciones, mientras que en el Grupo 1 que no tuvo mediación tecnológica solo aprobaron la evaluación el 8,2% de los estudiantes, en el Grupo 2 correspondiente al semestre 2011-2 que si utilizo mediación tecnológica el rendimiento mejoro y el porcentaje de los que aprobaron fue del 59.2%.

Ahora se puede observar en la tabla 14 lo que ocurre cuando se realiza el análisis de varianza entre estos dos grupos.

**Tabla 14.** Análisis de varianza Grupos 1 y 2 2011-2

| Análisis de varianza de un factor con diferentes docente G- 1 (2011-1) G-2 (2011-2) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| RESUMEN | | | | | | |
| *Grupos* | *Cuenta* | *Suma* | *Promedio* | *Varianza* | | |
| Grupo 1 | 73 | 122 | 1,671232877 | 0,7298554 | | |
| Grupo 2 | 49 | 163,8 | 3,342857143 | 1,25208333 | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| ANÁLISIS DE VARIANZA | | | | | | |
| *Origen de las variaciones* | *Suma de cuadrados* | *Grados de libertad* | *Promedio de los cuadrados* | *F* | *Probabilidad* | *Valor crítico para F* |
| Entre grupos | 81,92877161 | 1 | 81,92877161 | 87,2746423 | 6,34763E-16 | 3,920124409 |
| Dentro de los grupos | 112,649589 | 120 | 0,938746575 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 194,5783607 | 121 | | | | |

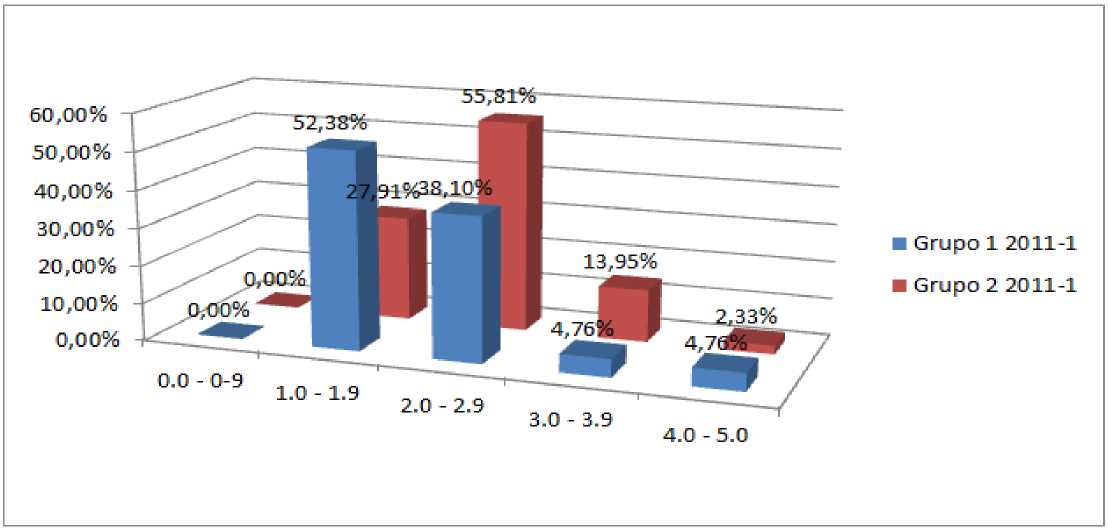
**Fuente.** Elaboración propia.

El resultado que esta ANOVA le da al valor de la F (variación entre los dos grupos) es de 87,2746423. Para saber si el resultado en este caso es significativo (o sea, si la probabilidad de P tiene un valor menor a 0,05), el valor crítico para F necesita ser al menos 3,920124409, pero como vemos el valor de F es mayor que el valor crítico para F lo que indica que los resultados de las pruebas entre los dos grupos es muy significativa (La probabilidad de 6,34 indica el valor el valor con el que el ANOVA no detectaría ninguna diferencia significativa). Los promedios de las notas son muy diferentes. En el grupo 1 es de 1,67 con una varianza de 0,72 (es el mismo grupo 2 sin mediación tecnológica del análisis 5.4.2) y en el grupo 2 con diferente docente y que utilizo mediación tecnológica es de 3,34 que equivale al doble del grupo 1, aunque con mayor dispersión en las notas porque da una varianza de 1,25, lo que refleja que se tuvieron algunas notas muy altas y otras muy bajas. Este análisis es similar al realizado en la sección 5.4.3, y una vez más coincide que en el grupo donde existe intervención tecnológica, se obtienen mejores resultados en el primer parcial de matemáticas en comparación con el grupo que no se utiliza.

### 5.4.5 Análisis de las Calificaciones de la Evaluación de Bogotá Grupos 2011-1

El quinto análisis pertenece a los resultados de las notas de la evaluación de Bogotá de dos grupos de matemática básica con docentes diferentes y que no tuvieron intervención de las herramientas tecnológicas durante el semestre 2011-1. Recordemos que esta evaluación corresponde al 30% de su nota definitiva, y están organizadas en intervalos que oscilan entre 0.0 y 5.0 como se muestra en la figura 17.

**Figura 17.** Porcentaje de estudiantes en intervalos por rendimiento en la evaluación de Bogotá. 2011-1




**Fuente.** Elaboración propia.

Se observa que los dos grupos tuvieron un comportamiento similar en las notas de su evaluación, y 74% de todos los estudiantes la reprueba al sacar menos de 3,0, y solo el 9,52% en el Grupo 1 y el 16,28% en el Grupo 2 la aprueban.

Se puede ver en la tabla 15 lo que ocurre cuando se realiza el análisis de varianza entre estos dos grupos.

**Tabla 15.** Análisis de varianza de la evaluación de Bogotá. Grupos 1 y 2 2011-1

| Análisis de varianza de un factor en dos grupos del 2011-1 con diferente docente y sin mediación tecnológica. | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| **RESUMEN** | | | | | | |
| *Grupos* | *Cuenta* | *Suma* | *Promedio* | *Varianza* | | |
| Grupo 1 | 21 | 44,48 | 2,11809524 | 0,60075619 | | |
| Grupo 2 | 43 | 101,37 | 2,35744186 | 0,420152824 | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| **ANÁLISIS DE VARIANZA** | | | | | | |
| *Origen de las variaciones* | *Suma de cuadrados* | *Grados de libertad* | *Promedio de los cuadrados* | *F* | *Probabilidad* | *Valor crítico para F* |
| Entre grupos | 0,80828102 | 1 | 0,80828102 | 1,689508345 | 0,19847773 | 3,995887126 |
| Dentro de los grupos | 29,6615424 | 62 | 0,47841197 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 30,4698234 | 63 | | | | |

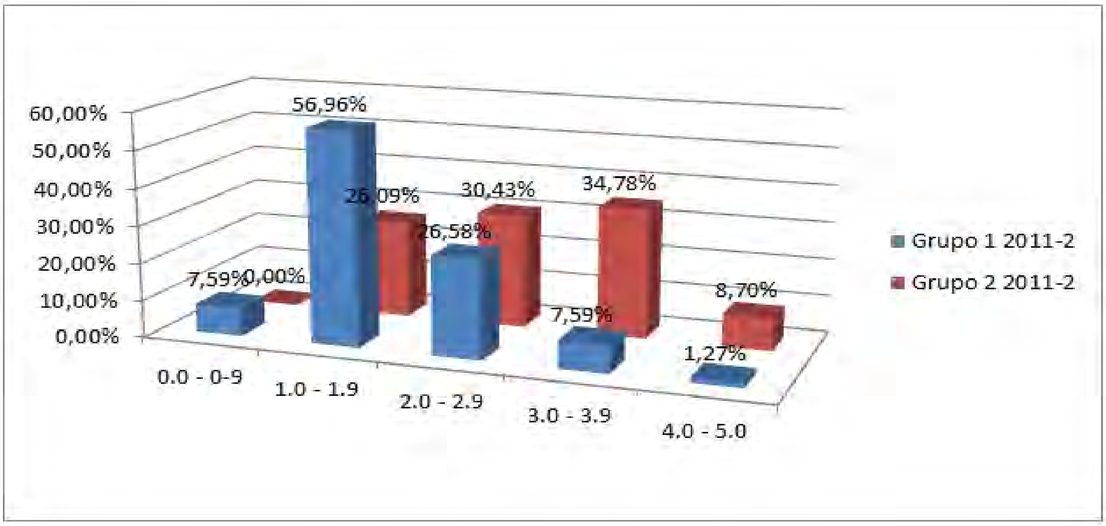
**Fuente.** Elaboración propia.

El resultado que el análisis de varianza le da al valor de la F (variación entre los dos grupos) es de 1,689508345. Para saber si el resultado en este caso es significativo (es decir, si la probabilidad de P tiene un valor menor a 0,05), el valor crítico para F necesita ser al menos 3,995887126, pero como vemos el valor de F es menor que el valor crítico para F lo que indica que los resultados de las pruebas entre los dos grupos no es significativa (La probabilidad de 0,19 indica el valor el valor con el que el ANOVA no detectaría ninguna diferencia significativa),. Obsérvese que los promedios de las notas definitivas en ambos grupos esta por debajo del 3.0 con el que se aprueba esta evaluación, en el Grupo 1 el promedio es de 2,11 con una varianza de 0,60, y el Grupo 2 que tiene el promedio en 2,35 con una varianza de 0,42 que da una dispersión mas pequeña. Este es otro dato que influye para la realización de la presente investigación, acudir a la mediación de las TIC con la pretensión de subir el nivel académico de los estudiantes de la Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira en los resultados de esta prueba.

### 5.4.6 Análisis de las Calificaciones de la Evaluación de Bogotá Grupos 2011-2

El sexto análisis pertenece a los resultados de las notas de la evaluación de Bogotá de dos grupos de matemática básica con docentes diferentes durante el semestre 2011-2, un grupo con intervención de las herramientas tecnológicas y otro sin ellas, organizadas en intervalos que oscilan entre 0.0 y 5.0 como se muestra en la figura 18.

**Figura 18.** Porcentaje de estudiantes en intervalos por rendimiento en la evaluación de Bogotá. 2011-2




**Fuente.** Elaboración propia.

Se observa claramente que los dos grupos tuvieron un comportamiento muy diferente en sus evaluaciones, mientras que en el Grupo 1 que no tuvo mediación tecnológica solo aprobaron la evaluación de Bogotá el 8,86% de los estudiantes, y en el Grupo 2 que se tuvo la mediación tecnológica el rendimiento de la prueba mejoro y el porcentaje de los que la aprobaron fue del 43,48%, que al compararlo con los grupos del semestre 2011-1 (ver sección 5.4.5) donde tampoco hubo intervención tecnológica, equivale a un aumento en la aprobación del 27,2% con respecto a un grupo y del .33,96% con el otro.

Se puede observar en la tabla 16 lo que ocurre cuando se realiza el análisis de varianza entre estos dos grupos.

**Tabla 16.** Análisis de varianza de la evaluación de Bogotá. Grupos 1 y 2 2011-2

| Análisis de varianza de un factor en dos grupos 2011-2 diferente docente. G-1 (SM) G-2 (CM) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| **RESUMEN** | | | | | | |
| *Grupos* | *Cuenta* | *Suma* | *Promedio* | *Varianza* | | |
| **Grupo 1** | 79 | 140,4 | 1,77721519 | 0,561012658 | | |
| **Grupo 2** | 46 | 122,6 | 2,665217391 | 0,748541063 | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| **ANÁLISIS DE VARIANZA** | | | | | | |
| *Origen de las variaciones* | *Suma de cuadrados* | *Grados de libertad* | *Promedio de los cuadrados* | *F* | *Probabilidad* | *Valor crítico para F* |
| **Entre grupos** | 22,92466483 | 1 | 22,92466483 | 36,41028332 | 1,73827E-08 | 3,918177508 |
| **Dentro de los grupos** | 77,44333517 | 123 | 0,629620611 | | | |
| | | | | | | |
| **Total** | 100,368 | 124 | | | | |

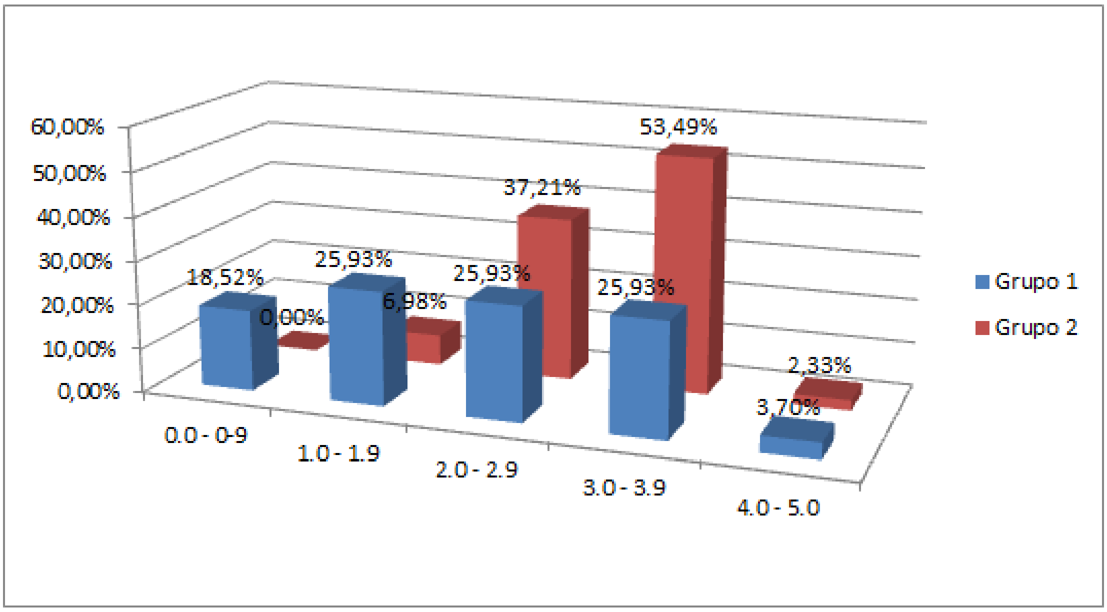
**Fuente.** Elaboración propia.

El resultado que esta ANOVA le da al valor de la F (variación entre los dos grupos) es de 36,41028332. Para saber si el resultado en este caso es significativo (o sea, si la probabilidad de P tiene un valor menor a 0,05), el valor crítico para F necesita ser al menos 3,9181775508, pero como vemos el valor de F es mayor que el valor crítico para F lo que indica que los resultados de las pruebas entre los dos grupos es significativa (La probabilidad de 1,73 indica el valor el valor con el que el ANOVA no detectaría ninguna diferencia significativa). Obsérvese que los promedios de las notas de la evaluación de Bogotá en los dos grupos esta por debajo de 3.0 con la que se aprueba, en el Grupo 1 el promedio es de 1,77 con una varianza de 0,56, y el Grupo 2 aunque presenta un promedio mas alto en 2,66 y con una varianza de 0,74 que da una mayor dispersión de las notas. Se destaca también el hecho que en este grupo 2 en el cual se utilizo la mediación tecnológica, obtuvo el mayor número de estudiantes de la Universidad Nacional de Colombia Sede de Palmira durante el semestre 2011-2 que aprobó la evaluación de Bogotá, ya que entre los 39 estudiantes que la aprobaron, 21 pertenecen al grupo de estudio en mención, que equivale al 53,8%, es decir, un porcentaje que agrupa mas de la mitad de todos los aprobados.

### 5.4.7 Análisis de las Calificaciones Definitivas Grupos 2011-1

El séptimo análisis pertenece a los estudiantes de dos grupos de matemática básica con docentes diferentes y que no tuvieron intervención de las herramientas tecnológicas durante el semestre 2011-1, con los resultados de las notas definitivas del curso organizados en intervalos que oscilan entre 0.0 y 5.0 como se muestra en la figura 19.

**Figura 19.** Porcentaje estudiantes en intervalos de las calificaciones definitivas. Grupos 1 y 2 2011-1




**Fuente.** Elaboración propia.

Se observa que los dos grupos tuvieron comportamiento diferente en sus notas definitivas del curso de matemática básica, mientras que en el Grupo 1 que no utilizo mediación tecnológica, lo aprobaron el 29,63% de los estudiantes, en el Grupo 2 que si la utiliza la mediación, el rendimiento fue superior, y el porcentaje de aprobación es del 55,82%.

Se puede observar en la tabla 17 lo que ocurre cuando se realiza el análisis de varianza entre estos dos grupos.

**Tabla 17.** Análisis de varianza de las calificaciones definitivas. Grupos 1 y 2 2011-1

| Análisis de varianza de un factor en dos grupos del 2011-1 sin mediación tecnológica y diferente docente. | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| **RESUMEN** | | | | | | |
| *Grupos* | *Cuenta* | *Suma* | *Promedio* | *Varianza* | | |
| **Grupo 1** | 27 | 55,934 | 2,07162963 | 1,16998032 | | |
| **Grupo 2** | 43 | 121,441 | 2,8242093 | 0,32576917 | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| **ANÁLISIS DE VARIANZA** | | | | | | |
| *Origen de las variaciones* | *Suma de cuadrados* | *Grados de libertad* | *Promedio de los cuadrados* | *F* | *Probabilidad* | *Valor crítico para F* |
| **Entre grupos** | 9,39375323 | 1 | 9,39375323 | 14,4841098 | 0,00030556 | 3,98189626 |
| **Dentro de los grupos** | 44,1017934 | 68 | 0,64855579 | | | |
| | | | | | | |
| **Total** | 53,4955466 | 69 | | | | |

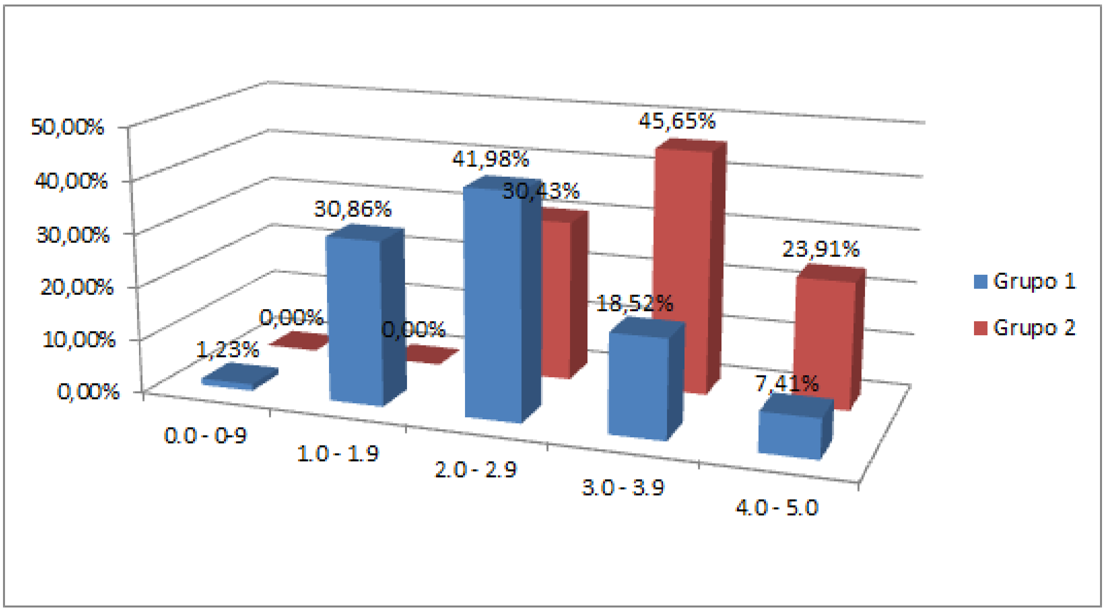
**Fuente.** Elaboración propia.

El resultado que el análisis de varianza le da al valor de la F (variación entre los dos grupos) es de 14,4841098. Para saber si el resultado en este caso es significativo (es decir, si la probabilidad de P tiene un valor menor a 0,05), el valor crítico para F necesita ser al menos 3,98189626, pero se ve que el valor de F es mayor que el valor crítico para F en una diferencia pequeña lo que indica que los resultados de las pruebas entre los dos grupos es significativa (La probabilidad de 0,0003 indica el valor el valor con el que el ANOVA no detectaría ninguna diferencia significativa). Obsérvese que los promedios de las notas definitivas en ambos grupos esta por debajo de 3.0 con el que se aprueba el curso, en el grupo 1 el promedio es de 2,07 con una varianza de 1,16 que muestra que los datos tienen mas dispersión comparados con el grupo 2, que tiene el promedio en 2,82 y en varianza 0,32 que es una dispersión mas pequeña en los datos. Este dato también influyo para la realización de la presente investigación, acudir a la mediación de las TIC con la pretensión de subir el promedio de las notas definitivas de los estudiantes en el curso de matemática básica de la Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira.

### 5.4.8 Análisis de las Calificaciones Definitivas Grupos 2011-2

El octavo y último análisis pertenece a dos grupos de matemática básica dirigidos por docentes diferentes durante el semestre 2011-2. El Grupo 1 que no tuvo mediación tecnológica y el grupo 2 que si utilizo la mediación, con los resultados de las notas definitivas del curso organizadas en intervalos que oscilan entre 0.0 y 5.0 como se muestra en la figura 20

**Figura 20.** Porcentaje estudiantes en intervalos de las calificaciones definitivas. Grupos 1 y 2 2011-2




**Fuente.** Elaboración propia.

Se observa claramente que los dos grupos tuvieron un comportamiento muy diferente en sus evaluaciones, mientras que en el Grupo 1 que no tuvo mediación tecnológica solo aprobaron el curso de matemática básica el 25,93% de los estudiantes, y en el Grupo 2 que se utilizo la mediación, el rendimiento mejoro, y el porcentaje de los que la aprobaron fue del 69,56%, que al compararlo con los grupos del semestre 2011-1 (ver sección 5.4.7) donde no se utilizo la mediación tecnológica, equivale a un aumento en la aprobación definitiva del curso con respecto a uno de ellos del 13.74% y con el otro del 39,93%.

Se puede ver en la tabla 18 lo que ocurre cuando se realiza el análisis de varianza entre estos dos grupos.

**Tabla 18.** Análisis de varianza de las calificaciones definitivas. Grupos 1 y 2 2011-2

| Análisis de varianza de un factor en dos grupos del 2011-2 con diferente docente. G- 1 (Sin mediación) G-2 (con mediación) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| RESUMEN | | | | | | |
| *Grupos* | *Cuenta* | *Suma* | *Promedio* | *Varianza* | | |
| Grupo 1 | 79 | 194,5 | 2,462 | 0,834693281 | | |
| Grupo 2 | 46 | 158,8 | 3,4522 | 0,454550725 | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| ANÁLISIS DE VARIANZA | | | | | | |
| *Origen de las variaciones* | *Suma de cuadrados* | *Grados de libertad* | *Promedio de los cuadrados* | *F* | *Probabilidad* | *Valor crítico para F* |
| Entre grupos | 28,502 | 1 | 28,502 | 40,97374309 | 2,9E-09 | 3,918177508 |
| Dentro de los grupos | 85,5609 | 123 | 0,6956 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 114,063 | 124 | | | | |

**Fuente.** Elaboración propia.

El resultado que esta ANOVA le da al valor de la F (variación entre los dos grupos) 40,97374309. Para saber si el resultado en este caso es significativo (si la probabilidad de P tiene un valor menor a 0,05), el valor crítico para F necesita ser al menos 3,918177508, pero el valor de F es mayor que el valor crítico para F lo que indica que los resultados de las pruebas entre los dos grupos son significativos (La probabilidad de 2,9E-09 indica el valor el valor con el que el ANOVA no detectaría ninguna diferencia significativa). Obsérvese que la diferencia en el promedio de las calificaciones definitivas entre los dos grupos es de un punto, ya que en el grupo 1 sin mediación TIC es de 2,4 y una varianza de 0,83 y en el grupo 2 en el que si se hace uso de la mediación es de 3,4 y una menor varianza (0,45) lo que muestra que los datos están menos dispersos. De esta forma se evidencia que la mediación tecnológica y la forma en que se llevo a cabo, surtió un efecto positivo para que las notas definitivas del curso de matemática básica mejoraran cumpliéndose con uno de los objetivos de la presente investigación.

A partir de todos los anteriores análisis de varianza se puede concluir que la hipótesis de investigación descrita en la sección 1.4 se valida, ya que a lo largo este proceso investigativo se demostró que si es posible promover el aprendizaje de los productos notables, y el concepto de irracionalidad numérica en estudiantes del curso de matemáticas básica, a través del diseño de secuencias didácticas en un AGD como GeoGebra, para mejorar el rendimiento de los estudiantes en su primer parcial, y como valor agregado también se mejoraron las notas de la evaluación de Bogotá y se aumento el porcentaje de aprobación del curso de Matemática Básica.

# 6 CONCLUSIONES

En primera instancia es necesario reconocer que de acuerdo con el proceso de investigación, se evidencia con los resultados, que los objetivos tanto general y específicos propuestos fueron cumplidos. Como se menciona en el objetivo general la secuencia didáctica que se realizó a través de la mediación tecnológica permitió fortalecer los procesos de aprendizaje de los estudiantes de primer semestre de la Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira.

Respecto a los objetivos específicos 1.3.2.1 y 1.3.2.2, se evidencia que se cumplieron en tanto que se hizo un diseño de objetos de aprendizaje en los que se aplicó la teoría de micro ingeniería didáctica que fue de gran ayuda para que los estudiantes mejoraran en su desempeño y conocimientos de los productos notables y el concepto de número irracional.

De igual manera con el objetivo especifico 1.3.2.2 se demuestra que los estudiantes mejoraron el desempeño en su primer parcial, muestra de ello están las valoraciones satisfactorias que obtuvieron los estudiantes en la prueba realizada de Bogotá.

Por otro lado, frente a la hipótesis de investigación se demostró que fue *posible promover el aprendizaje de los productos notables, y el concepto de irracionalidad numérica en estudiantes del curso de matemáticas básica, a través del diseño de secuencias didácticas en un AGD como GeoGebra y de esta forma mejorar los desempeños de los estudiantes en su primer parcial cuyos temas abordados sean de algebra*, se valida y la hipótesis nula se rechaza, ya que en términos generales, los estudiantes obtuvieron un mejor rendimiento en su primer parcial de algebra debido a las secuencias didácticas que les fueron aplicadas por medio de los objetos de aprendizaje haciendo uso del AGD GeoGebra. No cabe duda, que fue una ventaja para ellos el trabajo con las guías, el explicar paso por paso los procedimientos y el contenido de los temas fue un factor determinante en este proceso, se ratifica lo propuesto por Betancourt (2009) porque los objetos de aprendizaje estuvieron diseñados al alcance de los estudiantes, atendiendo sus expectativas y conocimientos previos sobre el uso del computador para manejar el software elegido para este trabajo: GeoGebra.

El trabajo con los objetos de aprendizaje a través del software de GeoGebra fue de gran utilidad porque permitió el desarrollo dinámico de las relaciones docente, estudiantes y objeto de conocimiento, esto se evidenció a lo largo de todo el proceso. Las orientaciones dadas en las guías y el diseño fue innovador, diferente y atractivo para los estudiantes, los colores y las herramientas propician el aprendizaje intencional y consciente de parte de los estudiantes. No obstante, este software no reviste de mayores dificultades para su manejo, es de fácil accesibilidad y uso.

Otro aspecto para resaltar es la disponibilidad de los estudiantes para hacer parte de este proceso de enseñanza y aprendizaje, lograron resolver las secuencias didácticas y pudieron comprobar las relaciones entre los lados, las áreas de los cuadrados y de los rectángulos que se formaron para llegar a la construcción de los productos notables y al concepto de irracionalidad numérica y saber utilizarlos como se reflejó en la mejoría de las notas del primer parcial de matemáticas.

La metodología de investigación inspirada en la perspectiva de la ingeniería didáctica y apoyada en la Dialéctica Herramienta-Objeto y los juegos de marcos como lo señala Douady (1998), fue propicia para el desarrollo de la secuencia didáctica, pues a partir de las diferentes fases, se pudo diseñar, experimentar, analizar y evaluar satisfactoriamente la secuencia didáctica, puesto que las aclaraciones e intervenciones del profesor en el desarrollo de la secuencia permitieron mejorar el proceso de aprendizaje. La comunicación permanente, la orientación y la reflexión constante hacen que el estudiante construya su saber consciente e intencionalmente, se demostró con la participación de los estudiantes, sus opiniones en clase, sus comentarios y con el mismo desarrollo de las guías de los objetos de aprendizaje y que se evidenciaron en la secciones 5.1 y 5.2.

Los aplicativos trabajados fueron inspirados en los de Sada (2007), rediseñados y contextualizados con las necesidades y saberes de los estudiantes de la Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira. Las reformas a estos aplicativos genero confianza en los procesos de aprendizaje de los estudiantes, lo cual significa que el docente investigador conoce bien a su población para crear los ambientes adecuados y que los estudiantes construyeran su propio conocimiento.

Por último, se puede decir que el problema de investigación fue propicio para ser desarrollado a través de un Ambiente de Geometría Dinámica, pues mediante este trabajo que se puede considerar como un aporte al currículo de matemáticas no solo en la Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira sino también para la Educación Básica por los resultados positivos que se dieron al cumplirse cada uno de los objetivos, evidenciados en la sección 5.4, se muestra otra forma de enseñar los temas de algebra, y al mismo tiempo sirve para que profesores reconozcan esta alternativa como una innovación en el salón de clase y estructuren sus propios métodos de enseñanza haciendo uso de este instrumento.

# BIBLIOGRAFIA

ARCE, Jorge. CASTRILLON, Gloria y OBANDO, Gilberto. *Ingeniería didáctica. Compilación*. Instituto de Educación y pedagogía. Grupo de educación matemática. Cali: Universidad del valle. 1999. P. 156-162.

ARTIGUE, M., DOUADY, R., MORENO, L., GÓMEZ, P. (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*, pp. 33-59. "una empresa docente" Grupo Editorial Iberoamericana. México. 1995. P. 33-59

BALACHEFF, N., KAPUT, J. *Computer-Based learning environments mathematics.* En: International Handbook of Mathematics Education. Kluwer. Academic Publishers. Traducción libre Equipo de Trabajo TIC y Educación Matemática. Área de Educación Matemática, Instituto de Educación. 1996. P. 469-505.

BALDOR, Aurelio. Álgebra, Vigésima impresión, México: Publicaciones Cultural. (2002). P. 97-102

BETANCOUR, Daniel. *Modelo para la recomendación y recuperación de objetos de aprendizaje en entornos virtuales de enseñanza aprendizaje* (2009). En: http://www2.unalmed.edu.co/~pruebasminas/index.php?option=com_docman&task=doc_view&gid=552&tmpl=component&format=raw&Itemid=285.
Recuperado el 30 de Octubre de 2011.

BROUSSEAU, Geraud Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*.* *Recherches en Didactique des Mathématiques* (1993). P. 33-115

CABRI. Disponible en: http://www.cabri.com/es/cabri-2-plus.html.
Recuperado el 03 de Julio del 2011.

CINDERELLA. Disponible en: http://www.cinderella.de/tiki-index.php
Recuperado el 05 de Julio del 2011

DERIVE 6. Disponible en: http://www.chartwellyorke.com/derive.html.
Recuperado el 21 de Junio del 2011.

DOUADY, Regine. *La didáctica de las matemáticas en la actualidad. No 6 IREM*. Universidad de Paris VII. Traducción del francés al español: Gloria Castrillón. Instituto de Educación y Pedagogía. Cali, Abril 1998, segunda versión. P. 104-156

DUVAL, R. *Semiosis y pensamiento humano*. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Ediciones científicas, Petar Long S.A. 1995. Traducción del francés al español: Myriam Vega Restrepo. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática. Universidad del Valle. Noviembre 1999. Primera edición. P. 11

DUQUE, Néstor. *Objetos de Aprendizaje, Repositorios y Federaciones de Repositorios de OA*. Disponible en: http://aplicaciones.virtual.unal.edu.co/blogs/docenciaytics/files/2011/06/Presentacion-Seminario-Nestor-Dario-Duque-Objetos-de-Aprendizaje-Repositorios-y-Federaciones-de-Repositorios-de-OA.pdf
Recuperado el 30 de junio de 2011.

FERNÁNDEZ, Javier. Blog Matemáticas con Javier Fernández. Disponible en: http://profeblog.es/blog/javierfernandez/geogebra/
Recuperado el 10 de Julio de 2011.

GARCÍA, José. *Método Didáctico Para el Aprendizaje del Uso del Sistema de Cálculo Simbólico MAPLE.* Escuela Universitaria Politécnica de Valladolid. Disponible en: http://www.upc.edu/euetib/xiicuieet/comunicaciones/din/comunicacions/103.pdf
Recuperado el 04 de junio de 2011.

GARZÓN, D. *El diseño de materiales a la luz de un modelo que incorpora la concepción de recursos pedagógicos vivientes. Compilación. GECEM* de la Universidad de Antioquia y el GEM de la Universidad del Valle. 2006.

GRAPH. Disponible en: http://www.padowan.dk/graph/.
Recuperado el 24 de Junio del 2011.

GUERRERO, F. *Formación de profesores en la transición aritmética al algebra: el caso de la variable y los universos numéricos. Memorias Sexto Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Compilado.* Medellín – Colombia: Editorial Gaiga. (2004).P. 23

HOHENWARTER, Markus y HOHENWARTER Judith. *Documento de ayuda GeoGebra. Manual oficial de la versión 3.2.* Disponible en www.geogebra.org. 15 de Julio de 2011.

ICFES. *Resultados de Colombia en TIMSS 2007. Resumen Ejecutivo*. Disponible en: http://www.icfes.gov.co/timss/phocadownload/2010/informe%20ejecutivo%20timss.pdf
Recuperado el 20 de Febrero del 2011.

INSTITUCION EDUCATIVA JORE ISAACS. Departamento de Matemáticas. 2010

MARTOS, Esteban *Valores prácticos y epistémicos de los productos notables en profesores de matemáticas*. Tesis: Instituto Politécnico Nacional. Maestría en Matemática Educativa Investigación y Desarrollo Tecnológico. (2008). En: http://www.cicata.ipn.mx/maestria_matematica_educativa.html Recuperado el 23 de septiembre de 2011.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Matemáticas. Lineamientos curriculares. Bogotá, Colombia. (1998).

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá, Colombia. 2006.

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL. Proyecto incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación básica secundaria y media de Colombia. Tecnología informática: innovación en el currículo de matemáticas de la educación básica secundaria y media. Bogotá, Colombia. 2004.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE ESPAÑA. GeoGebra en la Enseñanza de las Matemáticas**.** Disponible en: http://www.ite.educacion.es/formacion/enred/formamos/c_geogebra_ini.php
Consultada en Septiembre 2010.

MORENO, L. *Cognición, Mediación y Tecnología. Avance y Perspectiva, vol. 20*. 2001. p. 65-68

PROYECTO DE DESCARTES. Disponible en: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/
Recuperado el 11 de Junio del 2011.

ROBLEDO, J. Registros semióticos de representación y Matemáticas universitarias. Tesis de maestría en Educación con énfasis en educación matemática, Universidad del Valle. 2003.

RODRÍGUEZ, Fernando. Blog En Clase de Matemáticas. Disponible en: http://espegesteira.blogspot.com/2010_11_01_archive.html
Recuperado el 18 de Julio de 2011.

ROJAS, Pedro. *Memorias Sexto Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Compilado.* Medellín – Colombia: Editorial Gaiga. 2004. P. 22

*SADA*, Manuel. *Ejemplos diversos de web interactivas de matemáticas diseñadas en GeoGebra.* En: http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/index.htm Recuperado el 20 de agosto de 2011. 2007.

SAMPER C., LEGUIZAMÓN C., Aya O. y MARTÍNEZ L. *Memorias Sexto Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Compilado.* Medellín – Colombia: Editorial Gaiga. 2004. P 26

SARDINA, María. Blog Matemáticas IES Celestino Mutis. Disponible en: http://mariasardina.blogspot.com/
Recuperado el 20 de julio de 2011.

SESSA, Carmen. *Iniciación al estudio didáctico del Algebra. Origines y perspectivas*. Edit. Libros del Zorzal. Buenos Aires, Argentina. 1995. P. 11-32

STEWART, James. *College Algebra***,** Mc Master university, Redlin L., The Pennsylvania State University, Saleem Watson, California State University, Long Beach, , third edition, Thomson learning, Mexico. 2000. P.36-40

TAMAYO G., GUERRERO A., TORRES P. *Ponencia Herramientas Semióticas y currículo de Matemáticas. Memorias Sexto Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Compilado.* Medellín – Colombia: Editorial Gaiga. 2004. P. 24

TROUCHE, L. Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessite des orchestrations. 2003. P 36-58

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE PALMIRA. Departamento de Ciencias Básicas. 2011.

# ANEXOS

**Anexo A: Resultados del Primer Parcial Semestres 2011-1 Sin Mediación Tecnológica vs Semestre 2011-2 Con y sin Mediación Tecnológica**

| Notas Grupo 1 2011-1 Sin Tecnología | Notas Grupo 2 2011-1 sin tecnología | Notas Grupo 1 2011-2 sin tecnología | Notas Grupo 2 2011-2 Con Tecnología |
|---|---|---|---|
| 1,8 | 1 | 1,8 | 3,6 |
| 2,8 | 3,5 | 3,9 | 3,1 |
| 1 | 3,6 | 2 | 2 |
| 1,3 | 1 | 2,2 | 4,5 |
| 1 | 1,4 | 1,6 | 5 |
| 1,4 | 1,4 | 2,5 | 3,9 |
| 1,7 | 3,2 | 1 | 2 |
| 1 | 4,3 | 1 | 3,7 |
| 1,6 | 0 | 3,7 | 1,6 |
| 1 | 2 | 1 | 5 |
| 3,3 | 1,1 | 1 | 4,6 |
| 1 | 1,5 | 1,8 | 2 |
| 1 | 1,3 | 2 | 2 |
| 1,6 | 1 | 2,6 | 3,7 |
| 3 | 1 | 2 | 4,7 |
| 1 | 1,1 | 4,2 | 2 |
| 1 | 1,8 | 2,5 | 3,1 |
| 2 | 2,1 | 2,1 | 2 |
| 1,1 | 1,4 | 1 | 2,8 |
| 1 | 1,5 | 1,4 | 2,8 |
| 1 | 2,2 | 2,8 | 1,7 |
| 1 | 3,5 | 1,8 | 2,6 |
| 1 | 1 | 2,9 | 2,1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1,5 | 1,8 | 2,4 | 4,6 |
| 1 | 2,5 | 1,2 | 3,4 |
| 1 | 0 | 2,4 | 4,3 |
| 4,6 | 3,6 | 1,2 | 2 |
| 1 | 2,9 | 1 | 2 |
| 1 | 1,1 | 2,4 | 3,5 |
| 1 | 3,6 | 1 | 4,6 |
| 1 | 2 | 1 | 3,1 |
| 1 | 3,8 | 2 | 2,4 |
| 2 | 1,8 | 1,9 | 4,1 |
| 1,4 | 2,9 | 1 | 4,6 |
| 1,5 | 0 | 1,4 | 2,2 |
| 2,8 | 4,3 | 1 | 5 |
| 1 | 1 | 1,6 | 5 |
| 1 | 1,8 | 1 | 3,1 |
| 1 | 4,2 | 1,4 | 2,5 |
| 3,6 | 2,9 | 1,4 | 4,3 |
| 0 | 1 | 1 | 4,6 |
| 1,5 | 1,1 | 1,2 | 5 |
| 1,1 | 2,2 | | 2,4 |
| 1 | 1,3 | | 3,5 |
| 1 | 1 | | 2,2 |
| 1,7 | 1,8 | | 4,6 |
| 3 | | | 3,8 |
| 1,4 | | | 4,3 |
| 3,6 | | | 2,2 |
| 1,5 | | | |
| 1 | | | |
| 1 | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2,2 | | | |
| 1 | | | |
| 1 | | | |
| 1,4 | | | |
| 5 | | | |
| 1 | | | |

**Anexo B: Resultados de la Nota Definitiva Semestres 2011-1 Sin Mediación Tecnológica vs Semestre 2011-2 Con y sin Mediación Tecnológica**

| Grupo 1 2011-1 Sin Tecnología | Grupo 2 2011-1 Sin Tecnología | Grupo 1 2011-2 Sin Tecnología | Grupo 2 2001-2 Con Tecnología |
|---|---|---|---|
| 2,0 | 1,7 | 1,4 | 3,3 |
| 3,4 | 3,4 | 2,9 | 3,7 |
| 2,2 | 3,2 | 2,4 | 3,4 |
| 2,7 | 1,8 | 1,9 | 4,4 |
| 3,3 | 2,5 | 1,2 | 4,8 |
| 1,3 | 2,4 | 4,1 | 3,2 |
| 0,6 | 3,3 | 2,3 | 2,9 |
| 2,0 | 3,6 | 1,6 | 2,6 |
| 2,6 | 3,3 | 1,3 | 3,4 |
| 3,6 | 2,9 | 2,6 | 3,7 |
| 0,7 | 3,0 | 1,8 | 3,4 |
| 1,5 | 2,0 | 2,9 | 2,7 |
| 0,1 | 3,0 | 1,2 | 3,9 |
| 1,6 | 2,3 | 2,6 | 4,6 |
| 3,0 | 3,1 | 4 | 2,9 |
| 2,3 | 3,6 | 3,2 | 2,1 |
| 0,4 | 3,0 | 2,2 | 3,5 |
| 3,1 | 2,3 | 2 | 2,8 |
| 1,4 | 3,0 | 1,5 | 3,1 |
| 2,1 | 3,3 | 1,1 | 3,3 |
| 0,9 | 3,0 | 3 | 2,9 |
| 1,8 | 3,0 | 3,1 | 4,4 |
| 1,5 | 2,6 | 1,4 | 3,8 |
| 3,0 | 2,9 | 1,9 | 4 |
| 3,0 | 3,7 | 1,2 | 2,4 |
| 4,6 | 2,6 | 1,3 | 2,9 |
| 1,5 | 2,4 | 3,1 | 3,7 |
| | 3,1 | 1,3 | 4,4 |
| | 2,2 | 2,3 | 2,6 |
| | 3,0 | 2,8 | 2,9 |
| | 1,6 | 2,9 | 4,1 |
| | 3,1 | 2,7 | 2,4 |
| | 3,3 | 1,2 | 4,6 |
| | 2,6 | 1,9 | 4,1 |
| | 2,6 | 1,4 | 3,5 |
| | 4,5 | 5 | 2,5 |
| | 2,8 | 2,3 | 4 |
| | 2,0 | 3,1 | 3,4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3,0 | 2,3 | 3,8 |
| | 2,6 | 2,4 | 3,4 |
| | 2,2 | 4,6 | 3,8 |
| | 3,0 | 1,3 | 2,8 |
| | 3,0 | 4,3 | 4,5 |
| | | 3 | 3,9 |
| | | 3,6 | 3 |
| | | 3,5 | 3,3 |
| | | 2,2 | |
| | | 1,5 | |
| | | 1,7 | |
| | | 3,4 | |
| | | 2,1 | |
| | | 2,5 | |
| | | 3,8 | |
| | | 2,7 | |
| | | 2,8 | |
| | | 3,1 | |
| | | 2,7 | |
| | | 2,1 | |
| | | 3,4 | |
| | | 2,6 | |
| | | 1,9 | |
| | | 1,7 | |
| | | 3,5 | |
| | | 2,7 | |
| | | 0,8 | |
| | | 1,8 | |
| | | 3,1 | |
| | | 2,7 | |
| | | 2,2 | |
| | | 1,3 | |
| | | 2,5 | |
| | | 2,7 | |
| | | 2,1 | |
| | | 4,5 | |
| | | 3,7 | |
| | | 2,9 | |
| | | 2,7 | |
| | | 2 | |
| | | 2 | |
| | | 2,2 | |
| | | 1,8 | |

**Anexo C: Resultados de la nota de Bogotá Semestres 2011-1 Sin Mediación Tecnológica vs Semestre 2011-2 Con y sin Mediación Tecnológica**

| Grupo 1 2011-1 Sin Tecnología | Grupo 2 2011-1 Sin Tecnología | Grupo 1 2011-2 Sin Tecnología | Grupo 2 2011-2 Con Tecnología |
|---|---|---|---|
| 2,2 | 1,5 | 1,6 | 1,8 |
| 2,7 | 2,5 | 3 | 3,2 |
| 1,3 | 2,3 | 1,4 | 3,4 |
| 2,8 | 2,0 | 1,8 | 3,8 |
| 3,2 | 1,5 | 0,6 | 4,6 |
| 1,2 | 1,8 | 2,4 | 1,6 |
| 2,3 | 2,3 | 1,6 | 1,8 |
| 2,2 | 2,7 | 1,4 | 1,8 |
| 2,8 | 3,2 | 1,8 | 1,8 |
| 1,3 | 2,2 | 1,4 | 1,4 |
| 1,3 | 2,7 | 2,2 | 3 |
| 1,5 | 2,2 | 1,8 | 2,2 |
| 2,3 | 2,8 | 0,6 | 3,2 |
| 2,7 | 2,2 | 1,4 | 4 |
| 1,3 | 2,7 | 1,6 | 2,8 |
| 1,8 | 2,8 | 1,8 | 1 |
| 1,8 | 1,7 | 2,2 | 2,6 |
| 1,8 | 2,8 | 1,6 | 2,4 |
| 1,8 | 2,8 | 1,6 | 2,8 |
| 4,3 | 3,0 | 2,6 | 3 |
| 1,7 | 2,2 | 2,4 | 2,2 |
| | 3,3 | 1,2 | 3,2 |
| | 1,8 | 1,6 | 3,2 |
| | 1,7 | 1,2 | 3,6 |
| | 2,5 | 1 | 1,8 |
| | 2,0 | 2 | 1,6 |
| | 1,5 | 1 | 3,4 |
| | 2,5 | 1,2 | 3,2 |
| | 1,5 | 2 | 2,2 |
| | 2,7 | 2 | 1,6 |
| | 1,7 | 1,6 | 3 |
| | 3,3 | 0,6 | 2 |
| | 3,0 | 1,2 | 4 |
| | 2,2 | 0,8 | 3,4 |
| | 2,3 | 5 | 2,8 |
| | 4,3 | 0,8 | 1,6 |
| | 2,8 | 2,2 | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1,0 | 2 | 2,2 |
| | 3,2 | 2 | 3,2 |
| | 2,0 | 3,8 | 2,4 |
| | 2,7 | 1,4 | 2,2 |
| | 1,8 | 3 | 1,2 |
| | 1,7 | 2 | 4,4 |
| | | 2,2 | 2,6 |
| | | 1,8 | 3,6 |
| | | 0,8 | 2,8 |
| | | 1,2 | |
| | | 1,8 | |
| | | 1,8 | |
| | | 1,4 | |
| | | 1,6 | |
| | | 2,4 | |
| | | 2,2 | |
| | | 1,6 | |
| | | 2 | |
| | | 2 | |
| | | 1,2 | |
| | | 2,8 | |
| | | 1,8 | |
| | | 1 | |
| | | 1 | |
| | | 2,8 | |
| | | 1 | |
| | | 1 | |
| | | 2,2 | |
| | | 3 | |
| | | 1,4 | |
| | | 1,4 | |
| | | 1,2 | |
| | | 1,2 | |
| | | 1,4 | |
| | | 3,2 | |
| | | 2,6 | |
| | | 3 | |
| | | 1,6 | |
| | | 1,8 | |
| | | 1,8 | |
| | | 1,4 | |
| | | 1,4 | |

**Anexo D: Programa del Curso de Matemática Básica**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE PALMIRA

FACULTAD DE INGENIERÍA Y ADMINISTRACIÓN

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

## *PRECÁLCULO (MATEMÁTICAS BÁSICAS)*

***O BJETIVO GENERAL***

*Nivelar a los admitidos a los programas de pregrado que tienen en su plan curricular cursos de cálculo en los contenidos y habilidades básicas en Matemáticas que requiere un estudiante universitario para comenzar dichos cursos.*

***OBJETIVOS ESPECÍFICOS***

*Desarrollar las habilidades básicas para el manejo de operaciones aritméticas. Enfatizar en un manejo adecuado de las expresiones algebraicas. Familiarizar al alumno con la noción de función, su representación gráfica e interpretación, así como con funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Proveer los elementos básicos de Geometría Euclidiana, Geometría Analítica y Trigonometría.*

<table>
<tr><th colspan="4">PROGRAMA</th></tr>
<tr><th>NO</th><th>TEMARIO</th><th>TIEMPO PREVISTO</th><th>EVALUACIÓN</th></tr>
<tr><td>1</td><td>CONJUNTOS Y SISTEMAS NUMÉRICOS<br>Nociones elementales de conjuntos, contenencia y operaciones. Ejemplos de conjuntos numéricos. Naturales, enteros, racionales y reales, operaciones y sus propiedades. Orden y sus propiedades. Intervalos. Representación gráfica, valor absoluto y distancia.</td><td rowspan="3">SIETE SEMANAS<table><tr><th colspan="6">AGOSTO – SEPTIEMBRE</th></tr><tr><th>SEMANA</th><th>L</th><th>M</th><th>W</th><th>J</th><th>V</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr><tr><td>3</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>25</td></tr><tr><td>4</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td></tr><tr><td>5</td><td>29</td><td>30</td><td>31</td><td>1</td><td>2</td></tr></table></td><td rowspan="3">1<sup>er</sup>parcial:<br>3/09/11: Conjuntos, algebra y sistemas numéricos. (20%)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>ÁLGEBRA ELEMENTAL<br>Potenciación. Álgebra de polinomios. Factorización. Productos notables. Teorema del residuo y del factor. Teorema de los ceros racionales. Teorema del binomio</td></tr>
<tr><td>3</td><td>ECUACIONES Y DESIGUALDADES<br>Ecuaciones y desigualdades lineales y cuadráticas. Desigualdades con fracciones algebraicas. Ecuaciones y desigualdades con valor absoluto. Problemas de aplicación.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td><table><tr><td>6</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr><tr><td>7</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><th>NO</th><th>TEMARIO</th><th>TIEMPO PREVISTO</th><th>EVALUACIÓN</th></tr>
<tr><td>4</td><td>PLANO CARTESIANO<br>Plano cartesiano. Distancia. Rectas, perpendicularidad y paralelismo. Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables, solución gráfica y algebraica. Circunferencia.</td><td rowspan="3">CINCO SEMANAS<table><tr><td colspan="6">SEPTIEMBRE - OCTUBRE</td></tr><tr><td>SEMANA</td><td>L</td><td>M</td><td>W</td><td>J</td><td>V</td></tr><tr><td>Semana Universitaria</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td></tr><tr><td>8</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td></tr><tr><td>9</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>10</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td></tr><tr><td>11</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td></tr><tr><td>12</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td></tr></table></td><td rowspan="3">2er parcial:<br>08/10/11:<br>Ecuaciones y desigualdades y plano cartesiano. (25%)</td></tr>
<tr><td>5</td><td>RELACIONES Y CÓNICAS<br>Ejemplos de relaciones en R2 y sus gráficas, expansión y comprensión horizontal y vertical, simetrías y desplazamientos horizontales y verticales. Parábolas, elipses e hipérbolas. Ecuaciones y gráficas.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>FUNCIONES REALES<br>Dominios y rangos. Gráficas. Funciones: lineales, cuadráticas, valor absoluto, parte entera, definidas a trozos. Gráficas. Transformaciones de funciones (expansión y comprensión horizontal y vertical, simetrías y desplazamientos horizontales y verticales). Funciones inyectivas, sobreyectivas, biyectivas, pares e impares; reconocimiento de estas propiedades en la gráfica de la función. Suma, diferencia, producto, cociente y composición de funciones y sus dominios. Función inversa. Funciones exponencial y logarítmica.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>GEOMETRÍA ELEMENTAL<br>Ángulos y medidas. Triángulos. Cuadriláteros. Circunferencia. Áreas y perímetros de figuras planas: triángulo, rectángulo, cuadrado, paralelogramo, trapecio, círculo, sector circular. Teorema de Pitágoras. Semejanza y congruencia de triángulos.</td><td rowspan="2">CUATRO SEMANAS<table><tr><td colspan="6">OCTUBRE - NOVIEMBRE</td></tr><tr><td>SEMANA</td><td>L</td><td>M</td><td>W</td><td>J</td><td>V</td></tr><tr><td>13</td><td>31</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>14</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr><tr><td>15</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr><tr><td>16</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr></table></td><td rowspan="2">3er parcial:<br>05/11/11:<br>Relaciones y cónicas y funciones reales. (25%)<br><br>4to parcial:<br>Programado por Bogotá:<br>Examen final (30%)</td></tr>
<tr><td>8</td><td>TRIGONOMETRÍA<br>Razones trigonométricas. Resolución de triángulos. Ley del seno. Ley del coseno. Funciones trigonométricas, dominio y rango, gráficas, período. Algunas identidades trigonométricas de uso frecuente. Solución de ecuaciones trigonométricas.</td></tr>
</table>

### METODOLOGÍA

*El curso se desarrolla con exposiciones del profesor, acompañadas de ejemplos y ejercicios que los alumnos deben realizar. Se trabajará con mediación virtual a través de las herramientas que ofrecen las TIC (Tecnologías de Información y Comunicación) actuales y el software matemático GeoGebra*

*Como complemento a los ejercicios hechos en clase se insiste en el trabajo fuera de ella con ejercicios de los textos y talleres adicionales. Además del horario de atención de su profesor, los estudiantes dispondrán de un horario de consulta permanente a cargo de monitores.*

**EVALUACIÓN**

*Primer examen parcial con un valor del 20%, segundo examen parcial con un valor del 25%, tercer examen parcial con un valor del 25% (estos exámenes se realizarán según se indica en el programa) y un examen final sobre la totalidad de los contenidos del programa, con un valor de 30%. Este examen es el mismo para todos los cursos de Precálculo (Matemáticas Básicas) a nivel nacional y será administrado por la Dirección Nacional de Admisiones en la fecha que fije la Universidad.*

**TEXTO GUÍA**

*Stewart, Redlin y Watson, Precálculo. Quinta edición. Cengage Learning, 2007.*

**BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA**


1. *Allendoerfer C. y Oakley C, Matemáticas universitarias. Cuarta Edición. McGraw-Hill, 1990.*
2. *Leithold L., Matemáticas previas al cálculo. Tercera edición.Oxford University Press, 1998.*
3. *Miller, Heeren y Hornsby, Matemática: razonamiento y aplicaciones. Décima edición. Pearson Addison Wesley, 2006.*
4. *Swokowski E. y Cole J., Álgebra y trigonometría. Novena edición. International Thomson editores, 1997.*
5. *Wisniewski P.M. y Gutierrez A.L., Introducción a las matemáticas universitarias. Serie Schaum, McGraw-Hill, 2003.*
6. *Zill D.y Dewar J., Precálculo. Cuarta Edición. McGraw-Hill, 2008.*