

GENERACIÓN DE CAMPOS MAGNÉTICOS
PRIMORDIALES
“Generation of Primordial Magnetic Fields”

Por:
HECTOR JAVIER HORTUA ORJUELA

TESIS SOMETIDA PARA OPTAR EL GRADO DE:
MAESTRÍA EN CIENCIAS ASTRONOMÍA



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA,
FACULTAD DE CIENCIAS
OBSERVATORIO ASTRONÓMICO NACIONAL
BOGOTÁ, COLOMBIA.

April 2011

Resumen

La explicación del origen de campos magnéticos galácticos y extra galácticos sigue siendo un problema sin resolver en la cosmología actual. Una posible explicación viene en el hecho de que dichos campos surgieron a partir de un campo magnético muy pequeño, “una semilla”, generada en el universo temprano (transiciones de fase o de inflación) y que fueron evolucionando a través del tiempo. Una manera de analizar la evolución de esta semilla es por medio de la teoría de perturbaciones cosmológicas. En esta tesis se presentan las ecuaciones de Maxwell y de campo de Einstein perturbadas a primer y segundo orden, cuyas fuentes contienen un background de fluido perfecto junto con un background electromagnético. Se estudian dichas ecuaciones sin fijar el gauge y se determinan las cantidades invariantes gauge de la teoría. Por medio de las ecuaciones de evolución en términos de invariantes gauge se estudia la propagación de dichos campos en la historia cosmológica.

Cap.2 se dará una introducción acerca de las observaciones de campos magnéticos y procesos que conllevan a una generación y amplificación de estos.

Cap.3 vamos a estudiar el formalismo general de teoría de perturbaciones cosmológicas que después usaremos a primer y segundo orden.

Cap.4,6,5 estudiaremos el tensor momento energía electromagnético en un espacio plano. Luego seguiremos con el trabajo desarrollado el cual fué tratar una teoría de perturbaciones cosmológicas que se basa en el hecho de perturbar las ecuaciones de campo de Einstein hasta segundo orden, con un background de fluido perfecto y campo electromagnético con sus ecuaciones de conservación, todo en términos de invariantes gauge. Además se muestra como es la expresión para las ecuaciones de Maxwell. Por último se dará una discusión alrededor de los resultados y las conclusiones del trabajo.

Abstract

The explanation for the origin of galactic and extra-galactic magnetic fields continues being an unsolved problem in the modern cosmology. A possible explanation comes from the fact that these fields emerged from a small field, "a seed", produced in the early universe (phase transitions or after of inflation) and these evolved with time. One way to study this evolution is through Cosmological Perturbation Theory. In this thesis I will present the perturbed Einstein and perturbed Maxwell equations to first and second order, with sources that contain a background of perfect fluid and an electromagnetic field. Through the evolution equations in terms of Gauge Invariants quantities, the propagation of these fields in the cosmological history is shown.

Chap.2. I will give an introduction about of observations of magnetic fields and process that produce generation and amplification of these fields.

Chap.3. We study the general formalism of Cosmological Perturbations Theory and we will use this to first and second order.

Chap.4,6,5. We study the electromagnetic energy momentum tensor in a flat space-time. After, we continue with the result of this thesis which was to perturb the Einstein and Maxwell equations to second order, with a perfect fluid and an electromagnetic fluid as a background with their conservation equations written in terms of gauge invariant quantities. For last, we will give a discution about of the results and conclusions of the thesis.

Prefacio (Preface)

Este trabajo fue elaborado en el grupo de gravitación y cosmología del Observatorio Astronómico Nacional de la Universidad Nacional de Colombia, bajo la dirección del profesor Leonardo Castañeda Colorado. La tesis fue una generalización de mi tesis de grado para optar el título de físico en el año 2008, trabajo a cargo del profesor J. M. Tejeiro y del profesor L. Castañeda. Esta tesis además de contener una idea original acerca de una nueva manera de observar la evolución de los campos en el universo, es también una recopilación de lo que se tiene actualmente en materia de Perturbaciones Cosmológicas, campo que es muy utilizado en la cosmología y del cual queremos generar escuela en nuestro país.

Agradecimientos (Acknowledgements)

En primer lugar quiero darle las gracias al profesor Leonardo Castañeda Colorado, director de esta tesis, ya que sin su ayuda y conocimiento amplio en la cosmología yo no habría podido desarrollar este trabajo. Su orientación y consejos me ayudaron no sólo a crecer como científico sino también a crecer como persona, pienso que si tendré éxito profesional en la vida, una gran parte será debida a él. Agradezco a la Universidad Nacional de Colombia por la ayuda económica recibida para asistir a algunos eventos y por el programa de beca “Vicerectoria Academica” ya que con esta beca me fué posible continuar con mis estudios. También agradezco a los profesores del Observatorio Astronómico Nacional por la orientación prestada, en especial al director J. M. Tejeiro. Agradezco inmensamente la ayuda de mis compañeros del grupo de gravitación y cosmología del Observatorio Astronómico Nacional; los seminarios que se elaboraron durante mi estadia en la universidad fueron espacios donde surgieron preguntas e ideas que fueron vitales para la realización de este trabajo. Agradezco a Roger H. por las graficas elaboradas para esta tesis. Además del apoyo en lo académico también quiero agradecer el apoyo moral dado por mi madre Mariela Orjuela y por mis hermanos Alejandro y Adrian Felipe, ellos son sin lugar a dudas la razón **necesaria, única y suficiente** para salir adelante y triunfar en la vida. A mi familia en Chipaque por todo el apoyo que me brindaron. Agradezco a mis compañeros Diego A., David V., Carlos A., Jonathan F., Tatiana G., Fabian G. por la amistad y consejos.

Índice general

Resumen	I
Abstract	III
Prefacio (Preface)	V
Agradecimientos (Acknowledgements)	VII
Índice de figuras	XI
Capítulo 1. Introducción (Introduction)	3
Capítulo 2. Campos Magnéticos(Magnetic Fields)	9
2.1. Métodos Observacionales (Observational Methods)	9
2.2. Mecanismo de Dinamo (Dynamo Mechanism)	11
2.3. Procesos de Magnetogénesis (Magnetogenesis)	17
2.4. Condiciones de Campos Magnéticos (Constraints on primordial magnetic fields)	22
Capítulo 3. Perturbaciones Cosmológicas(Cosmological Perturbation Theory)	25
3.1. Introducción (Introduction)	25
3.2. Expansión de Taylor de campos tensoriales (Taylor expansions of tensor fields)	27
3.3. Difeomorfismos Knight (Knight diffeomorphisms)	33
3.4. Definición de perturbación y escogencia gauge (What is perturbations of spacetime and gauge choices)	35
3.5. Transformaciones Gauge (Gauge transformations)	37
3.6. Invarianza Gauge (Gauge invariance)	39
3.7. Transformaciones gauge para cantidades no invariantes (Gauge transformations in non gauge invariance quantities)	40
Capítulo 4. Espacio Magnetizado(The Magnetized Universe)	43
4.1. Tensor Momento Energía (Energy Momentum Tensor)	43

4.2. Ecuaciones de Maxwell en Espacios Curvos (Maxwell equations in Curves space-times)	48
Capítulo 5. Perturbaciones Cosmológicas en Robertson-Walker (RW)(Cosmological Perturbations in RW)	53
5.1. Ecuaciones de Campo de Einstein (Einstein Field Equations)	53
5.2. Métrica de Robertson-Walker (RW) (Robertson-Walker metric)	53
5.3. Evolución del Background (RW) (Evolution of RW metric)	55
5.4. Perturbaciones en la métrica (R-W) (Perturbations in RW metric)	57
5.5. Shear y Vorticidad a Segundo Orden (Shear and Vorticity to Second Order)	73
Capítulo 6. Tensor electromagnético(Electromagnetic Tensor)	79
6.1. Ecuaciones de Maxwell (Maxwell Equations)	88
6.2. Ecuación de Dinamo	91
Conclusiones y Discusión	99
Apéndice	101
Bibliografía	117

Índice de figuras

2.1.Modificación del espectro de CMB debida a ondas magnetosónicas rapidas para un campo magnético de $3 \times 10^{-7}G$. (Durrer, 2006)	23
3.1.Escogencias Gauge	28
3.2.En el lado izquierdo se muestra la contribución que hace el campo vectorial a primer orden para relacionar dos puntos. En el lado derecho se muestra la corrección a segundo orden tanto del campo vectorial a segundo orden como del acople de campos vectoriales a primer orden, esta es una corrección de la transformación desde \tilde{x}^μ a x^μ .	34
3.3.Se debe exigir que en cada subvariedad \mathcal{M}_λ se satisfaga las ecuaciones de campo de Einstein	36
3.4.Expansión de un campo tensorial.	37
3.5.En el lado izquierdo se muestra la interpretación pasiva, como se observa, la transformación se genera en \mathcal{M}_λ . En el lado derecho se muestra la interpretación activa, en general vemos que el campo vectorial genera una escogencia gauge y el cambio en la escogencia genera una transformación de coordenadas en \mathcal{M}_0 .	38
3.6.Cantidades Invariantes Gauge no deben depender de la escogencia en cualquier campo ξ .	40

Por muy larga que sea la noche, el amanecer llegará.

CAPÍTULO 1

Introducción (Introduction)

Campos Magnéticos han sido observados en un amplio rango de escalas, partiendo de los $\sim nG$ en medios intergalácticos de los cúmulos de galaxias con longitudes de coherencia de unos cuantos Mpc^1 , $\sim \mu G$ en el caso de galaxias cercanas y de alto redshift con longitudes de coherencia del orden de los Kpc , pasando por el orden de $\sim G$ en planetas, hasta los $\sim 10^{12} G$ en estrellas de neutrones. También en escalas cosmológicas se han dado cotas superiores del campo magnético menor a $< 10^{-9} G$ [1]. Estos campos han sido detectados por emisión sincrotrón que mide el campo magnético perpendicular a la línea de visión del observador. El problema de estas mediciones debidas a la emisión sincrotrón de partículas cargadas es que sólo dan una medición de la amplitud del campo transversal y no dan un valor del campo total, también con este efecto, no hay forma de determinar las densidades de energía en el campo magnético porque su emisión puede ser el resultado de pocas partículas cargadas y un campo fuerte, o un campo débil y muchas partículas cargadas o un estado intermedio; además depende del modelo usado [2]. El efecto Zeeman, resultado del desdoblamiento de líneas espectrales en presencia de un campo magnético, es muy usado en la detección de campos magnéticos muy fuertes en objetos astrofísicos. El problema es que este efecto es muy pequeño (de unos pocos Hertz para un campo de μG) por lo que otros fenómenos físicos como emisión térmica pueden opacarlo [3]. Otro método de detección es la polarización óptica de estrellas que pueden revelar la presencia de campos magnéticos a grandes escalas en la galaxia². Esto se puede deber a que la inhomogeneidad en la galaxia tendría una orientación preferencial en un campo magnético, absorbiendo luz polarizada a lo largo del eje preferencial, es decir perpendicular al campo, por lo que dicha inhomogeneidad transmite radiación polarizada con dirección paralela al campo magnético. Dicho efecto también se encuentra en debate, debido a que depende de la extinción del medio; es pequeño y también puede ser producido por dispersión anisotrópica en el medio interestelar [4]. Por último, la rotación de Faraday,

¹El campo magnético cósmico es aleatorio, de forma que considerando volúmenes muy grandes su valor medio es cero (aunque no la densidad de energía magnética). A escalas más pequeñas, en cambio, el campo puede estar ordenado. La longitud de coherencia sería una longitud característica en la cual el campo sí está ordenado.

²Entiéndase grandes escalas del campo magnético como campos con longitudes de coherencia mayores a $> 1 A.U$

causada por una rotación del plano de polarización de la radiación que se encuentra en un medio con partículas cargadas y en un campo magnético, es muy usada para detectar campos magnéticos a grandes escalas con una buena precisión, por ejemplo en un campo magnético uniforme de $10^{-9}G$, induce una rotación del orden de 1° a la frecuencia de $30GHz$ [5]. Debido a que los anteriores métodos sólo son aplicables a objetos astrofísicos con alta densidad, la detección de campos magnéticos en el vacío (voids) parece ser muy difícil. Existen métodos para la detección de campos en estas zonas que implican cálculos estadísticos (maximum likelihood method) y mediciones del espectro de potencias del campo magnético en el espacio intergaláctico y en el vacío [6, 7, 8, 9].

Aunque se han detectado campos magnéticos en el universo en varias escalas, el origen de estos campos magnéticos todavía sigue siendo un misterio. En galaxias espirales se asume que el campo es originado y mantenido por mecanismo de dinamo, que consiste en la transformación de energía cinética del movimiento turbulento del medio interestelar en energía magnética. Sin embargo, dicho mecanismo exige un campo magnético inicial “*una semilla*”. Actualmente se pone en duda la eficiencia de este mecanismo para la generación de campo no sólo por algunos trabajos teóricos sino también, por observaciones de campos magnéticos en galaxias de alto redshift [10]. También se observa que dichos campos pueden tener longitudes de coherencia del tamaño del objeto astrofísico y hasta incluso más. Ahora, dada la teoría de formación de cúmulos en el escenario de materia oscura (C.D.M) [11], en el cual la generación de estos halos viene dado por agregación de galaxias; el campo magnético generado inyectado en el medio intergaláctico debido al campo de las galaxias, no es suficiente para explicar el campo magnético existente en estas zonas, por lo que una teoría astrofísica de generación de campo magnético en estos cúmulos parece ser excluida. Modelos astrofísicos se han estudiado para explicar el origen de esta semilla. El modelo de Biermann es un modelo astrofísico en el cual una corriente producida por gradientes espaciales de la presión de partículas cargadas (debido a movimientos rotacionales del plasma) conduce a la generación de campos magnéticos (modelo que involucra a su vez procesos no adiabáticos) [12, 13, 14, 15]. Escenarios de Harrison también generan campo magnético como parte de procesos en la formación de la galaxia [16, 17], por lo que su longitud de coherencia es del tamaño de la galaxia, y su magnitud depende de la vorticidad en esa época (ver siguiente capítulo). También se tienen modelos astrofísicos de generación de campos que involucran movimientos turbulentos en fluidos altamente densos y calientes (plasmas) llamados cascadas y cuya semilla generada depende del fluido (el cual viene caracterizado por los números de Reynolds $R_m = vL_B\sigma$ y $R = \frac{vL_v}{\nu}$, con v la velocidad σ la conductividad, ν el coeficiente de difusión, L_B, L_v las escalas típicas de variación del campo magnético y de la velocidad, para un plasma

$R_m \sim R \gg 1$) [18, 19].

Sin embargo, estos mecanismos astrofísicos generan campos con longitud de coherencia baja (con respecto a observaciones en campos en el medio intergaláctico) y por lo tanto estos mecanismos podrían no ser directamente el origen de campos magnéticos de grandes escalas.

Por otro lado el origen de estos campos magnéticos puede ser primordial. Dichos mecanismos que surgieron antes de recombinación son llamados mecanismos de magnetogénesis. La posible existencia de estos campos primordiales sería una pieza muy importante en la cosmología actual. Campos magnéticos primordiales³ han sido bastante estudiados, y varios modelos de magnetogénesis han sido propuestos [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34]. Modelos de magnetogénesis en eras de prerecombinación consisten en la interacción de fotones y partículas cargadas a través de dispersión de Thomson y Compton. Debido a que la transferencia de momento es mayor entre fotones y electrones respecto a fotones y protones (dado que la masa del proton es mucho mayor a la del electron), la dispersión Thomson induce una diferencia en la velocidad entre estas dos partículas, induciendo a su vez una corriente eléctrica local y densidad de carga neta generando un campo magnético. Este proceso es adecuado en la época después de la aniquilación e^+e^- y termina en etapas finales de recombinación [35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]. Por otro lado, varios mecanismos en el universo temprano con condiciones fuera del equilibrio o violación de paridad macroscópica, podrían también haber generado campos magnéticos [42, 43]. Dichas condiciones son encontradas en transiciones de fase como puede ser en el confinamiento de quarks en QCD [44, 45], transición de fase electrodébil EW [46, 47], o transiciones de fase en GUT [48]. Durante estas transiciones, los campos magnéticos pueden ser generados por movimientos de turbulencia inducidos por una rápida variación de algunas cantidades termodinámicas (transiciones a 1°orden) o por dinámica de los campos gauge [49, 50, 51, 52, 33]. Además defectos topológicos generados en transiciones de fase, podrían también inducir campos magnéticos [53]. En escenarios de inflación, la generación de campos magnéticos requiere extensiones del modelo estandar de física de partículas debido a que el modelo de inflación produce sólo perturbaciones escalares y tensoriales, y por lo tanto campos magnéticos no pueden ser generados normalmente en estos escenarios a menos que se coloquen términos que rompan la invarianza conforme modificando la teoría electromagnética de Maxwell [54, 55, 56, 57, 58, 59, 60]. Debido a la no linealidad del dinamo que en teoría amplificó el campo primordial (si es que existe), sería muy difícil encontrar un valor de este campo magnético inicial. Sin embargo se pueden dar cotas a este campo debido a que este campo paso por varias épocas

³Campos Magnéticos generados antes de recombinación.

del universo trayendo efectos consigo. Varios observables como nucleosíntesis, anisotropías en CMB, época de Reionización, formación de estructura y ondas gravitacionales pueden dar cuenta del campo magnético cósmico y colocar condiciones en el espectro primordial [61, 62, 63, 64, 65, 66, 67].

Durante los últimos 25 años, perturbaciones cosmológicas a orden lineal han sido bien estudiadas entre otras para describir los escenarios del universo temprano así como su evolución, resultando en buena concordancia con los datos observacionales de la anisotropía en la radiación cósmica de fondo concluyendo en que las fluctuaciones primordiales son adiabáticas y obedecen a una distribución gaussiana en este orden [68, 69, 70, 71, 72, 73, 74]. Sin embargo, dada la precisión de los datos (de futuras observaciones como es el caso del Planck, CMBpol, Spider, LISA, entre otros [75]), se debe estudiar a un orden más alto la teoría de perturbaciones para poder explicar estos resultados debidos exclusivamente a la no linealidad de las ecuaciones de Einstein. Esta no linealidad puede originar que las fluctuaciones sean no gaussianas y que empezaron con condiciones de isocurvatura, además de la aparición de las ondas gravitacionales en el universo temprano, campos magnéticos primordiales, origen de rotación de galaxias y fenómenos que se presentan en escalas considerablemente pequeñas respecto al radio de Hubble [76, 77, 78, 79, 80, 81].

La idea de que la estructura a gran escala del universo pudo haberse desarrollado a partir del crecimiento de pequeñas fluctuaciones iniciales por medio de la inestabilidad gravitacional es de la época de Newton (Letter to Bentley, 1692) [82]. La teoría de perturbaciones tiene todavía algunas preguntas acerca de la interpretación física de algunas variables (por ejemplo la perturbación en la densidad de energía) cuando la longitud de onda de las perturbaciones son más grandes que el horizonte de partícula (escala superhorizonte). El problema radica en que si estamos en escalas superhorizonte debemos recurrir a tratamientos relativistas y debido a la covarianza de las ecuaciones tenemos una libertad en la escogencia de las coordenadas, y cualquier variable dependiente de las mismas (ej. $\rho(t)$) tendrá diferentes valores e interpretaciones en diferentes sistemas coordinados y las soluciones podrán tener modos ficticios los cuales no tendrán interpretación física en el universo real; cosa que no ocurre en escalas subhorizonte (aquí las perturbaciones tienen longitudes de onda menores al horizonte de partícula) donde todos los gauges coinciden (gauge Newtoniano es el límite de bajas energías), esto es lo que se denomina problema gauge en teoría de perturbaciones [83]. De manera que al trabajar en esta teoría, se debe tener cuidado en que las cantidades que conocemos normalmente tales como la densidad, presión o velocidad, no pueden ser tratadas como variables físicas debido a que dependen del sistema de coordenadas, así que se hace necesario definir unas cantidades

independientes de la sistema de coordenadas llamadas cantidades invariantes gauge. La teoría de perturbaciones cosmológicas puede ser vista como una herramienta muy útil en la cosmología actual, dicha herramienta nos ayuda a analizar los datos arrojados por los satélites (WMAP, COBE y Planck) para estudiar las anisotropías de CMB y definir variables a observar. Sin embargo, no es el único escenario para poner en práctica la teoría de perturbaciones, en general podemos utilizarla para tener análisis más precisos en cualquier modelo que necesitemos estudiar como estrellas, agujeros negros entre otros [84]. Actualmente se está estudiando los procesos que dieron origen a los campos magnéticos y a su amplificación, pero dado modelos de magnetogénesis, se necesita también estudiar como es su evolución a lo largo de la historia cosmológica, desde que se originaron hasta que procesos astrofísicos tomaron lugar para amplificarlos. Teoría de perturbaciones ofrece un medio para estudiar dicha evolución [1, 85, 86, 87].

En la tesis que se presenta a continuación, se estudió la evolución de campos magnéticos a través de perturbaciones cosmológicas, se observa si en general las perturbaciones geométricas del espacio tiempo ofrecen una alternativa para poder amplificar o mantener los campos magnéticos, de tal manera que el campo primordial tenga la suficiente amplitud para que procesos astrofísicos como el dinamo puedan tomar lugar en su posterior amplificación. La organización del trabajo viene dada por una introducción (Cap.2) acerca de las observaciones de campos magnéticos y procesos que conllevan a una generación y amplificación de estos. Siguiendo vamos a estudiar el formalismo general de teoría de perturbaciones cosmológicas que después usaremos hasta segundo orden (Cap.3). Después estudiaremos el tensor momento energía electromagnético en un espacio plano (Cap.4). Luego seguiremos con el trabajo desarrollado el cual fué tratar una teoría de perturbaciones cosmológicas que se basa en el hecho de perturbar las ecuaciones de campo de Einstein hasta segundo orden, con un background de fluido perfecto y campo electromagnético con sus ecuaciones de conservación, todo en términos de invariantes gauge; además se muestra la expresión para las ecuaciones de Maxwell en el espacio perturbado y llegaremos a una ecuación que nos da cuenta de la evolución del campo magnético a través de la historia cosmológica, es decir una ecuación que tenga en cuenta las perturbaciones del espacio-tiempo generadas por variaciones del contenido de materia. Por último se dará una discusión alrededor de los resultados y las conclusiones del trabajo.

Campos Magnéticos(Magnetic Fields)

Campos magnéticos han sido observados en la mayoría de sistemas astrofísicos. El valor del campo promedio en el medio interestelar es aproximadamente de 3 a 4 μG , mientras que para galaxias espirales el campo llega a ser del orden de los 10 μG con longitudes de coherencia del tamaño del disco galáctico. Sin embargo, en galaxias elípticas aunque el valor del campo es aproximadamente similar al de galaxias espirales, su estructura parece ser distinta, no sólo por su longitud de coherencia que es más pequeña, sino también, por que la estructura del campo es aleatoria. En cúmulos de galaxias la magnitud del campo llega a ser del orden de $\sim G$ en el medio intercluster, mientras que en su centro el campo puede tener de 10 hasta 70 μG con longitudes de coherencia del tamaño del cúmulo [88]. También en supercúmulos como Abell 1367 han sido detectados campos magnéticos del orden de 1 μG [4, 87].

La única detección de campos magnéticos esta asociado con objetos astrofísicos generados por colapso gravitacional, aunque se pueden tener cotas de campos magnéticos cósmicos ya sea con datos de CMB o de nucleosíntesis. Una posible explicación de los campos observados viene del hecho que un pequeño campo magnético fué amplificado por mecanismo de dinamo en la etapa de formación de estructura hasta el valor medido actualmente. El factor de amplificación depende del modo dominante de crecimiento o formación de la estructura y del tiempo que el mecanismo opera. También dicha amplificación depende del modelo, por ejemplo para universos planos sin constante cosmológica, la semilla debe ser del orden de $10^{-20} G$ para obtener el valor deseado, mientras que para modelos con constante cosmológica, la semilla debe ser mayor de $10^{-30} G$ [89]. En este capítulo se dará una introducción acerca de las técnicas observacionales, amplificación de los campos magnéticos por mecanismo de dinamo y posibles mecanismos de magnetogénesis. Por último se dará a conocer algunas cotas del campo primordial.

2.1. Métodos Observacionales (Observational Methods)

A continuación se dará una breve descripción de las técnicas observacionales utilizadas para la detección de campos magnéticos en estructuras astrofísicas, en general existen 4

principales métodos para dicha detección: Efecto Zeeman, emisión polarizada, emisión sincrotrón y rotación Faraday.

- El campo magnético puede ser medio por efecto Zeeman: Los átomos en el medio intergaláctico absorben ciertas frecuencias en el espectro electromagnético, produciendo líneas de absorción en el espectro. Cuando los átomos se encuentran dentro de un campo magnético, estas líneas de absorción se separan en múltiples líneas (degeneración). Adicionalmente, la energía se polariza con una orientación que depende de la orientación del campo magnético. Por lo tanto, la fuerza y la dirección del campo magnético del medio pueden determinarse examinando las líneas del efecto Zeeman. En general, el campo produce un desdoblamiento de las líneas espectrales dado por¹:

$$\Delta\nu = \frac{eB_{\parallel}}{2\pi m_e}$$

Donde ν es la frecuencia, e y m_e son la carga y masa del electrón y B_{\parallel} campo magnético a lo largo de la línea de visión. Por ejemplo, la presencia de un campo magnético de μG tendría un desdoblamiento de $\Delta\nu \sim 3Hz$. Sin embargo, debido al efecto Doppler originado por movimientos térmicos en el medio, se generaría también un desdoblamiento de las líneas espectrales del orden de $\Delta\nu_D \sim 30kHz$ (por ejemplo en nubes HI de alta velocidad[4]), por lo que opaca los efectos debido al campo magnético, así que esta técnica sólo es utilizada en medir campos magnéticos en estrellas.

- La emisión sincrotrón: Es la radiación emitida por partículas cargadas relativistas en presencia de un campo magnético. Dicha radiación puede presentar un grado de polarización muy alto (hasta $p \sim 75\%$, siendo p la razón entre la intensidad de la radiación polarizada lineal y la intensidad total). La radiación ciclotrón (i.e., no relativista) también es polarizada. La emisión sincrotrón se detecta especialmente hacia remanentes de supernovas y en forma más general hacia el disco de la galaxia (en frecuencias de radio). La emisión sincrotrón total de una fuente puede proveer estimativos de la amplitud del campo en galaxias y cluster, mientras que su polarización da cuenta de la uniformidad y estructura de dicho campo.
- Rotación Faraday: Es la rotación del plano de polarización de radiación linealmente polarizada en un campo magnético, debido a la interacción con los electrones en el medio. Dicha rotación es generada por el rompimiento de la simetría de reflexión dado la presencia del campo; este efecto hace que los índices de refracción de mano izquierda y derecha sean diferentes $n_L \neq n_R$ [90]; en presencia

¹El campo magnético rompe la degenerancia al colocar una dirección preferencial en el espacio. Si el momento angular total es $J = S + L$, con S el espín y L el momento angular, entonces habrá $j = 2j + 1$ niveles con j el número cuántico asociado a J .

de partículas cargadas, el plano de polarización es rotado por la diferencia de velocidad de fase de los dos modos de polarización de mano izquierda y derecha. El ángulo de rotación viene descrito por una cantidad llamada “rotation measure” (RM) que viene dado por:

$$RM = 811,9 \int_0^L n_e B_{\parallel} dl \quad \left[\frac{rad}{m^2} \right]$$

Donde n_e es la densidad electrónica, B_{\parallel} es el campo magnético a lo largo de la línea de vision y L es la longitud de la trayectoria a través de la rotación. En general la rotación Faraday recibe contribuciones de todas las regiones magnetizadas a lo largo de la línea de vision de la fuente y el RM puede descomponerse en $RM = RM_g + RM_s + RM_{ig}$ donde cada una recibe contribución de la rotación de la galaxia, la fuente y el medio intergaláctico respectivamente[4][88].

- Otra manera de medir el campo magnético es por medio de polarización de emisión y absorción en el óptico, radio y el infrarojo. Dicha polarización es causada por el alineamiento de polvo con el campo magnético estelar y por lo tanto da una medición del campo magnético perpendicular a la línea de vision. Sin embargo, esta técnica es muy difícil de analizar en el sentido de que depende del modelo de polvo que se use y de modelos de absorción[3].

2.2. Mecanismo de Dinamo (Dynamo Mechanism)

El mecanismo de dinamo consiste en que la materia eléctricamente conductora se mueve en un campo magnético, tal que dicho movimiento induce corrientes generando un campo magnético inducido, el cual amplifica y mantiene el campo original.

El modelo de dinamo fué conocido en 1800, pero en 1919, Lamor sugirió este mecanismo como el responsable de campos magnéticos en el sol y en la tierra, después, dicho mecanismo fué aplicado a varios problemas en astrofísica (Steenbeck, Krause y Radler 1966, Parker 1971, Ruzmaikin 1972)[4].

Hoy en día, se trabaja con un mecanismo estándar de dinamo conocido como $\alpha\Omega$ – *dinamo*, el cual es generado por movimiento turbulento del gas y rotaciones diferenciales, generando un campo regular a grandes escalas.

2.2.1. Aproximación (M.H.D). Magnetohidrodinámica (MHD) es una aproximación que se usa cuando los efectos de separación de las cargas son despreciables, es decir, se puede tratar la materia como un fluido conductor (Si el fluido empieza a comprimirse de tal manera que la interacción entre las partículas del fluido no es despreciable, se deben agregar términos que den cuenta de dicha interacción, dicha interacción viene

descrita por las ecuaciones tratadas en el marco de la teoría cinética). En MHD las variables que describen el fluido, vienen descritas por la densidad $\rho(x, t)$, la presión $P(x, t)$, la corriente $\mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ y la velocidad $\mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$.

Primero vamos a deducir la ecuación de inducción de campo medio. Para esto escribamos las ecuaciones de Maxwell sin la corriente de desplazamiento:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ (2.1) \quad \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \end{aligned}$$

Y la ley de Ohm dada por:

$$\mathbf{J}' = \sigma \mathbf{E}'$$

Con σ la conductividad (la cual es una cantidad global) y las cantidades primadas se refieren al sistema en reposo del fluido. Ahora en un fluido eléctricamente neutro y no relativista, se tiene que²:

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J}, \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

Ahora sustituyamos la última ecuación en la ecuación de Ohm, teniendo lo siguiente:

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \right)$$

Despejando \mathbf{E} de la última ecuación y sustituyendo en las ecuaciones de Maxwell, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}}{\sigma} - \frac{1}{c} (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \right) = -\nabla \times \left(\frac{c}{4\pi\sigma} \nabla \times \mathbf{B} \right) + \frac{1}{c} (\nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

Usando la identidad $\nabla \times \nabla \times B = \nabla (\nabla \cdot B) - \Delta B$, tenemos lo siguiente:

$$(2.2) \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})) + \eta \Delta \mathbf{B}$$

²En este caso se hace una transformación de Lorentz del tensor electromagnético $F^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\beta} F^{\alpha\beta}$.

Donde $\eta \equiv \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ es el coeficiente de difusión. Esta última ecuación es conocida como ecuación de campo medio. También podemos definir la escala de tiempo t_σ y de longitud L_σ típica como:

$$t_\sigma \sim 4\pi\sigma L_\sigma^2$$

Donde un campo magnético con una escala de correlación $L < L_\sigma$ es difundido, por ejemplo para una galaxia de $L \sim 1 \text{ kpc}$ y $\sigma \sim 10^{-7} \text{ Hz}$ se tiene una escala de tiempo de $t \sim 10^9 \left(\frac{L}{\text{kpc}}\right) \text{ s}$ [91]. En general para plasmas no relativistas $\sigma \sim T^{\frac{3}{2}}$ y relativistas $\sigma \sim T$, con T la temperatura en el medio[92]. En (2.2) se observa que la variación temporal del campo magnético proviene de dos términos, el primero *dinamo* contiene términos de vorticidad debido a la presencia del rotor de V , por lo que la presencia de rotación en el plasma amplifica el campo magnético, haciendo que la energía cinética en el plasma sea transformada en energía magnética. Ahora el segundo término *difusion magnética* tiene el efecto de amortiguar la intensidad del campo magnético. La ecuación de campo medio (2.2) es una ecuación que describe el campo magnético en todas las escalas. Ahora si dividimos este campo magnético y el campo de velocidades en un campo medio el cual se define como un ensamble promedio de muchas realizaciones del campo $\langle \mathbf{B} \rangle, \langle \mathbf{V} \rangle$, mas una perturbación generada en pequeñas escalas \mathbf{b}, \mathbf{v} , tenemos que:

$$\mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b}$$

$$(2.3) \quad \mathbf{V} = \langle \mathbf{V} \rangle + \mathbf{v}$$

y al sustituir en (2.2), tenemos que:

$$(2.4) \quad \frac{\partial (\langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b})}{\partial t} = (\nabla \times (\langle \mathbf{V} \rangle + \mathbf{v}) \times (\langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b})) + \eta \Delta (\langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b})$$

Donde obtenemos dos ecuaciones dadas por³:

$$(2.5) \quad \frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = (\nabla \times \langle \mathbf{V} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle) + \eta \Delta (\langle \mathbf{B} \rangle) + (\nabla \times \langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle)$$

³La separación viene del hecho que podemos hacer una separación de términos que actúan en diferentes escalas. La primera ecuación nos da la evolución del campo en grandes escalas en términos de factores que son ensambles promedios, y la otra ecuación nos da cuenta de pequeñas escalas y conduce a variaciones con respecto a este valor promedio.

$$(2.6) \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = (\nabla \times \mathbf{v} \times \langle \mathbf{B} \rangle) + (\nabla \times \langle \mathbf{V} \rangle \times \mathbf{b}) + (\nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{b}) - (\nabla \times \langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle) + \eta \Delta \mathbf{b}$$

Procedemos a hacer varias suposiciones:

- $\eta = 0$. Esto implica que la conductividad σ es infinita, en la mayoría de los casos esta suposición es válida.
- $(\nabla \times \langle \mathbf{V} \rangle \times \mathbf{b}) = 0$. Si escogemos un sistema de referencia donde $\langle \mathbf{V} \rangle = cte$ es decir, un sistema que se mueva con el fluido (el valor medio de la velocidad del fluido) podemos hacer esta cantidad nula.
- $(\nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{b}) = 0$. Dado que $|\mathbf{B}| \gg |\mathbf{b}|$ debido a que estamos tratando a \mathbf{b} como una perturbación de \mathbf{B} .

Obtenemos entonces lo siguiente:

$$(2.7) \quad \frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = (\nabla \times \langle \mathbf{V} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle) + (\nabla \times \mathcal{E})$$

$$(2.8) \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = (\nabla \times \mathbf{v} \times \langle \mathbf{B} \rangle) - (\nabla \times \mathcal{E})$$

Donde $\langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle \equiv \mathcal{E}$ es la Fuerza de Turbulencia Electromotriz (EMF). Estas últimas ecuaciones son válidas cuando:

- La escala de turbulencia (donde \mathbf{v} es apreciable) es menor que la escala típica L_σ del campo magnético $\langle \mathbf{B} \rangle$.
- Se debe tener que $|\langle \mathbf{B} \rangle| \gg |\mathbf{b}|$ (en pequeñas escalas esta suposición a veces no es cierta).
- El flujo magnético debe ser conservado (condición satisfecha cuando $\eta \rightarrow 0$).

El vector EMF, puede ser expandido en una serie cuyos primeros coeficientes son llamados inducción α_{ij} y disipación β_{ijk} [93]:

$$\mathcal{E}_i = \alpha_{ij} B_j + \beta_{ijk} \partial_k B_j + \dots$$

En el caso más sencillo de turbulencia isotrópica, se encuentra[89]:

$$\alpha = -\frac{t_\sigma}{3} \langle \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \rangle, \quad \beta = \frac{t_\sigma}{3} \langle v^2 \rangle$$

Por lo tanto la ecuación de dinamo tiene la forma:

$$(2.9) \quad \frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = (\nabla \times \langle \mathbf{V} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle) + \nabla \times (\alpha \langle \mathbf{B} \rangle - \beta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle)$$

La ecuación de dinamo tiene varios regímenes de acuerdo al valor que tomen α y β . Una manera de observar los principales mecanismos de dinamo es suponiendo $V = (0, V_y(x), 0)$ $B = (B_x(z), B_y(z), 0)$ y donde $\frac{dV_y(x)}{dx}$ describe una rotación diferencial. Al colocar estos valores en la ecuación de dinamo y suponer un campo magnético de la forma $B \sim e^{i(kz - \omega t)}$, se encuentra una relación de dispersion de la forma:

$$(-i\omega + \eta k^2)^2 = \alpha^2 k^2 + ik\alpha \frac{dV_y(x)}{dx}$$

Donde al suponer $\frac{dV_y(x)}{dx} \sim 0$ el efecto de dinamo viene dominado por α^2 este modelo es llamado $\alpha^2 - \text{dinamo}$, y si el término $\alpha^2 \sim 0$ el efecto viene generado por $\frac{dV_y(x)}{dx} \equiv \Omega$ y α , este modelo es llamado $\alpha\Omega - \text{dinamo}$ [89].

2.2.2. M.H.D a grandes Escalas (MHD in Large Scales). A grandes escalas también podemos apreciar la amplificación de los campos por el término de dinamo. Para esto, usamos (2.2) y despreciamos el efecto de difusión:

$$(2.10) \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

La ecuación de movimiento para el campo de velocidades viene determinada por la ecuación de Euler:

$$(2.11) \quad \frac{d\mathbf{V}}{dt} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \phi + \nu \Delta \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} (\mathbf{J} \times \mathbf{B})$$

Donde ν es el coeficiente de viscosidad, ϕ el potencial gravitacional y el último término es el término de Lorentz.

Ahora si usamos componentes de (2.10), tenemos lo siguiente:

$$\frac{dB_i}{dt} = B_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - B_i \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = B_j \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} B_i \frac{\partial V_j}{\partial x_j}$$

Dada la ecuación de continuidad:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V}$$

Obtenemos lo siguiente⁴:

$$(2.12) \quad \frac{dB_i}{dt} = B_j \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \right) + \frac{2 B_i}{3} \frac{d\rho}{\rho dt} = B_j \sigma_{ij} + \frac{2 B_i}{3} \frac{d\rho}{\rho dt}$$

Con $\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \right)$. La ecuación(2.12) viene escrita en derivadas convectivas por lo que la descripción se hace en el sistema de referencia del fluido “comovil”. El segundo término de (2.12) describe la compresión adiabática o expansión del campo magnético cuando se tiene la divergencia de la velocidad diferente de cero. Si se tiene un volumen \mathcal{V} de densidad constante $\rho = cte$ y existe una variación homogénea del volumen $\sigma_{ij} = 0$, se tiene que $\nabla \cdot \mathbf{V} = C(t)$, (2.12) ofrece una solución dada por:

$$B \sim \rho^{\frac{2}{3}} \sim \mathcal{V}^{-\frac{2}{3}}$$

Por lo que el campo magnético que se encuentra en un volumen el cual colapsa es amplificado, mientras que para un volumen en expansión es diluido.

El segundo término de (2.12) da cuenta de la amplificación del campo debida movimientos del fluido como son el shear y vorticidad. Por ejemplo en el caso de $B = B_0 \hat{x}$ con $\frac{\partial V_y}{\partial x} = cte$, obtenemos un campo amplificado en un factor:

$$B \sim \sqrt{1 + \left(t \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)^2}$$

En este estudio se concluye que en el límite de MHD, los campos magnéticos son distorsionados, amplificados o diluidos pero siempre se tiene que el flujo de campo magnético es constante es decir, no hay generación de flujo magnético (se puede demostrar que el flujo de campo magnético se conserva cuando $\sigma \rightarrow \infty$ [91]). Por lo que si tenemos condición inicial de $B_0 = 0$ en todo lugar del espacio, este debe ser cero todo el tiempo (además se observó que dichas ecuaciones son lineales en B). Esta afirmación viene del hecho que el efecto de la interacción de las cargas en el fluido es despreciable, además de las otras suposiciones del modelo MHD. Cuando una de estas suposiciones no es válida, existen términos no lineales o fuerzas no electromagnéticas que pueden generar campos magnéticos aún si B_0 es inicialmente nulo.

Por último hay que tener en cuenta, que además de las consideraciones impuestas sobre la MHD[94], también se está despreciando el back-reaction del campo magnético sobre el fluido, ya que a pequeñas escalas, la fuerza de Lorentz (último término de (2.11)) sobre pequeñas escalas puede causar efectos sobre el fluido alterando los movimientos de

⁴Donde se usa la convención de suma de Einstein

turbulencia, y si este efecto hace que la turbulencia disminuya, el efecto dinamo sería “apagado” [4].

Por lo tanto el origen de grandes campos magnéticos en galaxias (básicamente espirales) se reduce a: *La generación* en la cual hay controversia (actualmente no se sabe si la semilla es primordial o de origen astrofísico). *La amplificación* durante la cual el mecanismo de dinamo toma lugar, dicho efecto se genera a partir de la rotación de la galaxia (aproximadamente 30 rotaciones) desde su formación (cuando la nave protogaláctica empieza a colapsar), amplificando el campo en 30 e-folds (donde los e-folds de amplificación de B_1 a B_2 son definidos como $\ln \frac{B_2}{B_1}$) por lo que un campo requerido de unos $\sim \mu G$ se debe tener una semilla de $\sim 10^{-19} G$ con una escala típica de 30 a 100 kpc, o con una conductividad infinita la semilla es de $\sim 10^{-23} G$ con una escala típica de 1Mpc [91, 95].

2.3. Procesos de Magnetogénesis (Magnetogenesis)

Actualmente sigue sin entenderse el origen de los campos magnéticos en las diferentes escalas del universo. Se ha visto que la ecuación de dinamo que ayuda a la amplificación de los campos magnéticos, necesita un campo magnético inicial para encender el mecanismo, esto debido a que dicha ecuación es lineal en el campo. Principalmente existen dos modelos para la generación de campos magnéticos, uno viene de procesos astrofísicos, mientras que el otro proviene de antes de la formación de la estructura originando campos magnéticos primordiales.

2.3.0.1. Procesos Astrofísicos (Astrophysical Processes). Son procesos de generación de campos magnéticos durante la formación de estructura o generados antes del desacople durante procesos magnetohidrodinámicos. El mecanismo de Harrison [3], es un mecanismo astrofísico en el cual campos magnéticos son generados durante dominio de radiación con vorticidad no nula. Si consideramos una región rotante en el universo expandiéndose (con factor de escala a), que consiste de protones, electrones y fotones, y además se desprecia el acople protón-electrón (interacción de Coloumb), tenemos entonces dos fluidos: protones con densidad ρ_m , velocidad angular ϖ_m , y electron-fotón (que están débilmente acoplados por dispersión Thomson) con densidad ρ_r , velocidad angular ϖ_r . Cuando la región se expande la energía se debe conservar por lo que se tiene:

$$\rho_m a^3 = cte \quad \rho_r a^4 = cte$$

Ahora debido a que no existe ninguna interacción entre estos fluidos, se tiene que la conservación del momento angular $L \sim m \varpi a^2$ se debe conservar, por lo que tenemos que:

$$L_m = \rho_m a^3 \varpi_m a^2 \sim cte \quad L_r = \rho_r a^3 \varpi_r a^2 \sim cte$$

Ahora haciendo la comparación de estas últimas ecuaciones se encuentra que:

$$\varpi_m \sim \frac{1}{a^2} \quad \varpi_r \sim \frac{1}{a}$$

Por lo que en un factor de escala grande la vorticidad del fluido de protones puede ser despreciada, así que una corriente aparece proporcional a la velocidad del fluido electrón-foton $J \sim \frac{e}{m_p c} \varpi_r a$, y un campo magnético es generado proporcional a:

$$B \sim \frac{m_p c}{e} \varpi_r$$

Este mecanismo genera campos en el escenario de formación de estructura, con una longitud de coherencia del tamaño del objeto astrofísico. Sin embargo, este proceso necesita una vorticidad inicial para su ejecución, que en el modelo estandar no aparece debido a que la vorticidad decae rápidamente con la expansión (proporcional a $\sim \frac{1}{a^2}$). Por otro lado el mecanismo de Biermann es muy utilizado para explicar la generación de campos magnéticos en formación de estructura. La ecuación de movimiento (2.11) para protones y electrones en presencia de un campo externo viene dada por:

$$\frac{d\mathbf{V}_e}{dt} = -\frac{\nabla P_e}{\rho_e} - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} - \nabla \phi, \quad \frac{d\mathbf{V}_p}{dt} = -\frac{\nabla P_p}{\rho_p} + \frac{e}{m_p} \mathbf{E} - \nabla \phi$$

Donde ignoramos el backreaction, y se supone la conductividad infinita, ahora al restar las últimas ecuaciones, sabiendo que $\frac{m_e}{e} \frac{\partial(V_p - V_e)}{\partial t} = \frac{m_e}{n_e e^2} \frac{\partial J}{\partial t}$ y despreciando los términos $\frac{m_e}{m_p}$, se tiene lo siguiente:

$$\frac{m_e}{n_e e} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \frac{\nabla P_p}{n_e} + e \mathbf{E}$$

Aplicando el rotacional a esta ecuación, se obtiene:

$$\frac{m_e}{n_e e^2} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = -\frac{\nabla n_e \times \nabla P_p}{n_e^2} + e \nabla \times \mathbf{E}$$

Junto con las ecuaciones de la sección anterior (ecuaciones de Maxwell y la relación entre J y B), se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \frac{m_e c}{e} \frac{\nabla P_e \times \nabla \rho_e}{\rho_e^2}$$

Esto significa que existe una diferencia de velocidades entre los dos plasmas de electrones y protones los cuales crean una corriente como se observó en la ecuación anterior, el campo magnético es inducido debido a un campo eléctrico con rotacional diferente de cero el cual puede ser generado cuando los gradientes de presión y densidad no son paralelos como vemos en la última expresión, por último la conductividad en el plasma aumenta hasta que el campo eléctrico se difunde y el flujo de campo magnético es conservado.

2.3.0.2. Campos magnéticos primordiales (Primordial Magnetic Fields). Campos magnéticos primordiales son generados antes de recombinación. Existen modelos para la generación de campos magnéticos en el universo temprano a partir de procesos de turbulencia. Estos campos primordiales pueden ser divididos en causales si son campos con longitudes de coherencia dentro de las escalas subhorizonte, y no causales si están afuera.

Campos causales son generados después de inflación y tienen un espectro de potencias proporcional a $\sim k^n$ sobre grandes escalas con n un número entero ≥ 2 , Esto implica que son atenuados a grandes escalas [96]. Los campos causales pueden provenir de escenarios de transiciones de fase (fase electrodébil, confinamiento QCD) donde el proceso de nucleación y crecimiento de burbujas deben crear flujos de turbulencia a grandes escalas, el cual genera campos magnéticos. Cuando el universo se expande, la temperatura decrece generando una secuencia de transiciones de fase cosmológicas con el rompimiento de simetrías internas [52]. Al considerar la suma y diferencia de las ecuaciones relativistas de movimiento para partículas cargadas (donde se supone que globalmente la carga del fluido es nula) se encuentra un efecto llamado efecto termoeléctrico donde grandes fuerzas electromagnéticas pueden surgir si existen dos fluidos con diferentes densidades de energía y carga aún cuando la carga neta es muy pequeña. Este efecto puede generarse en la transición de fase QCD a primer orden el cual ocurre a $kT_c \sim 150 \text{ MeV}$. Cuando el universo se enfría abajo de kT_c empiezan a surgir burbujas de fase hadrónica que nuclean y crecen, dichas burbujas chocan y allí es donde el mecanismo de dinamo toma lugar para la generación de campos magnéticos. Ahora, durante la transición la componente de los quarks del plasma quark-gluon es positivamente cargado debido a que la densidad del número bariónico es positiva n_b , (producido en bariogénesis), así que hay un exceso de u ($\frac{2}{3}$), d ($\frac{1}{3}$), s ($-\frac{1}{3}$) quarks sobre antiquarks, sin embargo la masa del s es mayor respecto a u y d , por lo que hay una deficiencia de quarks s . Por lo tanto se tiene un fluido de componentes quarks positivo y un fluido leptónico negativo. Estos fluidos descritos por diferentes ecuaciones de estado, se comportan diferente en un medio inhomogéneo. Se demuestra que para este sistema se genera un campo eléctrico dado por [97]:

$$(2.13) \quad eE \sim 1,5 \left(\frac{\epsilon}{10\%} \right) \left(\frac{\delta}{10\%} \right) \left(\frac{kT_c}{150MeV} \right) \left(\frac{100cm}{l} \right) \frac{keV}{cm}$$

Donde ϵ es la razon de la densidad de energía de los dos fluidos, $\delta \equiv \frac{l\Delta P}{P}$, ΔP el gradiente de presion y l la distancia comovil entre los sitios de nucleación, así que la diferencia entre las ecuaciones de estado del fluido leptónico y de quark, produce un gradiente de presión grande dando origen a un campo eléctrico radial. La pequeña corriente generada cuando las regiones de choque se expanden, es dada por [97]:

$$(2.14) \quad J \sim \frac{vE}{4\pi l}$$

Con v la velocidad del fluido. Así cuando los frentes de choque colisionan (paredes de las burbujas), movimientos turbulentos toman lugar y la vorticidad es generada sobre escalas de l ; corrientes eléctricas de magnitud (2.14) circulan también sobre estas escalas. Dado que $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ los campos magnéticos son generados y como en el caso del mecanismo de Biermann, gradientes de presión y densidad no paralelas generan campos magnéticos. En esta fase de turbulencia sobre escalas del orden de $l \sim 100 cm$ se tiene:

$$B_l \sim \frac{v}{c} E \sim 5G$$

Sobre escalas mayores a l el mecanismo origina campos no correlacionados dados por[2]:

$$B_l \sim B_l \left(\frac{l}{k} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Por otro lado, la transición electrodébil (EWPT) puede generar campos magnéticos dependiendo del orden de la transición que a su vez depende de varios parámetros como la masa del Higgs o de Bosones vectoriales. Durante EWPT, la simetría $SU_L(2) \times U_Y(1)$ es rota y cae al grupo $U_{EM}(1)$. Si esta transición es de primer orden, la temperatura de transición es de $kT_c \sim 100GeV$ y el radio de Hubble de $l_H \sim 10cm$, burbujas empezaron a generarse, nuclear y crecer llenando todo el universo. El tamaño comóvil de la burbuja es aproximadamente de $l_B = f_B l_H$ con $f_B \sim 10^{-3} - 10^{-2}$. El fluido empezó a ser turbulento cuando las burbujas colisionaron encontrandose un campo magnético del orden de:

$$B \sim \sqrt{4\pi\epsilon} T_c^2 \left(\frac{v_{pared}}{c} \right)^2 \sim 10^{21-24} G$$

Con $\epsilon = \frac{1}{2} ag_* T_c^4 \sim 4 \times 10^{11} GeV fm^{-3}$ [98].

Por otra parte campos magnéticos no causales son generados en etapas inflacionarias. Sin embargo, hay una dificultad en estos modelos y es debido a que la acción electromagnética es invariante conformal y la métrica de R.W es conformalmente plana. Para ver esto, escribamos la acción electromagnética libre:

$$S = -\frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} d^4x$$

Al hacer una transformación conformal de la métrica dada por:

$$g_{\mu\nu}^* = \Omega^2 g_{\mu\nu}$$

Implica que $\sqrt{-g^*} = \Omega^4 \sqrt{-g}$ y $g^{*\alpha\mu} = \Omega^{-2} g^{\alpha\mu}$. Además se tiene que $A_\mu^* = A_\mu$, entonces se encuentra que:

$$S^* = S$$

Por lo tanto la acción del campo electromagnético es invariante bajo transformaciones conformes.

Ahora dado que un universo R.W plano puede ser escrito como $g_{\mu\nu}^{(R.W)} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu}^{(Minkowski)}$. Ahora dado que en un universo plano en expansión el campo magnético decae con la expansión como $\frac{1}{a^2}$, los campos no pueden amplificarse en universos de R.W, dada la invarianza conformal de estos espacios con el espacio de Minkowski.

Debido a lo anterior, mecanismos de generación de campos magnéticos requieren rompimiento de la invarianza conformal el cual cambia la evolución del campo respecto al factor de escala dado por: $\frac{1}{a^\epsilon}$ con $\epsilon \ll 1$ para obtener un campo fuerte. Para obtener un rompimiento de esta invarianza en la acción se pueden agregar los siguientes términos: $RA_\mu A^\mu$, $R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$, con $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci, R el escalar de Ricci, A^ν el campo electromagnético. Estos términos rompen la invarianza conformal y generan una masa efectiva dependiente del tiempo a los fotones. Otros acoplos pueden ser $f(\phi, R) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, $g\theta F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$, $-D_\mu \psi (D_\mu \psi)^*$, donde campos escalares como el inflatón o dilatón (ϕ), axiones (θ) y campos escalares cargados (ψ), generan el rompimiento de la invarianza conformal. Por último estos términos generan una amplificación de los campos electromagnéticos desde fluctuaciones del vacío hasta llevarlas a escalas superhorizonte, después de que inflación termina, empieza la etapa de recalentamiento donde se genera producción de partículas cargadas incrementando la conductividad del universo haciendo que el campo eléctrico se apague y el campo magnético se congele en el plasma[99, 98].

2.4. Condiciones de Campos Magnéticos (Constraints on primordial magnetic fields)

El origen de los campos magnéticos sigue siendo todavía un misterio, sin embargo, estos campos juegan un rol muy importante en la evolución del universo ya sea en la evolución del plasma primordial en el universo temprano, en la propagación de rayos cósmicos en la galaxia y en cúmulos de galaxias. También los campos magnéticos primordiales jugarían un papel importante en la formación de estructura y creación de ondas gravitacionales debido a que el campo induce presión anisotrópica la cual puede actuar como fuente para la generación de ondas gravitacionales. Ahora, si existió un campo magnético primordial, este debe ser consistente con un número de condiciones impuestas por procesos generados en el universo temprano. Por ejemplo en nucleosíntesis, la presencia de un campo magnético alteraría la expansión del universo debido a la ecuación de Friedmann y por consiguiente la temperatura en esa época. La presencia de un campo magnético aumentaría la expansión del universo y por lo tanto disminuiría el tiempo durante el cual nucleosíntesis es posible, y durante el cual los neutrones pueden decaer. Si pocos neutrones decaen, se debe tener una gran abundancia de He^4 debido a la presencia del campo. Debido a que se sabe la abundancia de He^4 y la densidad de energía en esa época[95, 100], se puede dar una cota de campo magnético en nucleosíntesis, en general se tiene una cota de[100]:

$$B \sim 6 \times 10^{12} G$$

En $T = 10^9 K$.

Un campo magnético constante afecta la geometría del universo al introducir shear. Como veremos el tensor momento energía del campo magnético genera una presión anisotrópica $\Pi_{ij} \sim B_i B_j - \frac{1}{3} B^2 \delta_{ij}$. Comparando modelos de universos homogéneos pero anisotrópicos (Universos de Bianchi), con el cuadrupolo de CMB, se puede encontrar límites al campo magnético de [5]:

$$B < 6,8 \times 10^{-9} \left(\sqrt{\Omega_m h^2} \right) G$$

Dado que el tensor momento energía tiene componentes escalares (ρ), vectoriales (v_i) y tensoriales (Π_{ij}), dichas componentes modifican la propagación de los fotones que viajan desde la superficie de última dispersión hasta nosotros. En épocas antes de recombinación donde el acople entre protones, electrones y fotones, el campo magnético genera perturbaciones vectoriales en la velocidad del plasma el cual oscila “Ondas Alfvén”, si podemos tener condiciones sobre los modos vectoriales a través de las anisotropías de CMB, pode-

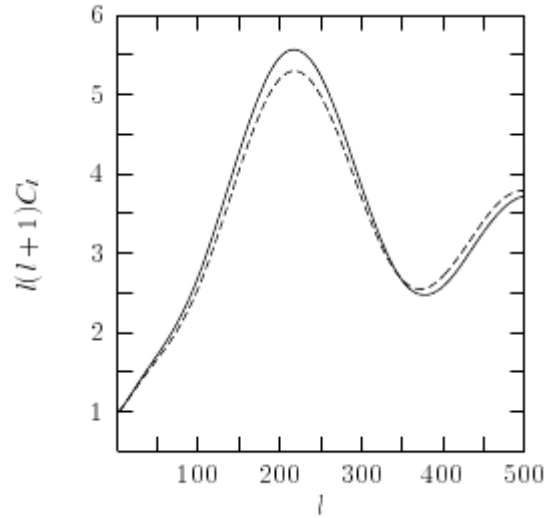


FIGURA 2.1. Modificación del espectro de CMB debida a ondas magnetosónicas rápidas para un campo magnético de $3 \times 10^{-7}G$. (Durrer, 2006)

mos tener límites sobre campos magnéticos primordiales debido a la señal de las ondas Alfvén. También hay dos modos escalares de ondas en la presencia de campos magnéticos llamados ondas magnetosónicas rápidas y lentas. Estas son inducidas por perturbaciones escalares del campo magnético en el plasma cargado. Las rápidas modifican la velocidad del sonido debido a la presencia del campo $c_s^2 \rightarrow c_s^2 + \frac{B^2}{4\pi\rho t}$, conduciendo a una variación de los picos acústicos en CMB, fig.(2.1). Las ondas lentas tienen una velocidad de sonido baja por lo que su señal en CMB es pequeña [101, 102].

Otro rasgo importante es el de polarización en CMB debida a un campo magnético principalmente por dos mecanismos. El primero es la modificación del potencial gravitacional debido al campo magnético y que conduce a un cambio en la evolución de la polarización el cual es transportado paralelamente a lo largo de las geodésicas. El otro efecto tiene que ver con rotación Faraday donde el campo magnético produce una rotación de polarización de los fotones de CMB, esto genera una mezcla de modos E en modos B [103, 104].

La existencia de un campo magnético antes de recombinación podría inducir una rotación Faraday en la señal de polarización de CMB. Para un campo magnético primordial con una amplitud actual de $\sim 10^{-9}G$ se induce una rotación de 1° a frecuencias de $30GHz$ [4].

Perturbaciones Cosmológicas (Cosmological Perturbation Theory)

3.1. Introducción (Introduction)

En cosmología, los fenómenos físicos son tan difíciles de describir por medio de soluciones exactas de las ecuaciones de campo, que necesitamos considerar aproximaciones perturbativas para entender la física que ocurre detrás de dicho fenómeno. Una de las aproximaciones a las ecuaciones de campo para acercarnos más a la física real es *perturbaciones cosmológicas*. Esta teoría es una de las más estudiadas en la actualidad para entender el universo a partir de las ecuaciones de campo. La teoría de perturbaciones cosmológicas a orden lineal es todavía un campo activo de estudio. Durante los últimos años, perturbaciones cosmológicas a orden lineal ha sido profundamente estudiada para describir los escenarios del universo temprano así como su evolución, resultando en buena concordancia con los datos observacionales de la anisotropía en la radiación cósmica de fondo, abundancia de cúmulos y el espectro de B.A.O.

Sin embargo, dada la precisión de los datos (de futuras observaciones como es el caso del Planck, CMBpol, Spider, LISA, entre otros), se debe estudiar a un orden más alto la teoría de perturbaciones cosmológicas para poder explicar estos resultados debidos exclusivamente a la no linealidad de las ecuaciones de Einstein. Esta no linealidad puede originar que las fluctuaciones sean no gaussianas y que empezaron con condiciones de isocurvatura, además de la aparición de las ondas gravitacionales en el universo temprano, campos magnéticos primordiales, origen de rotación de galaxias y fenómenos que se presentan en escalas considerablemente pequeñas respecto al horizonte. Recientemente se ha llevado a ordenes no lineales, esto es debido al conjunto de datos observacionales. Mientras que el orden lineal fué una teoría suficiente para estudiar el espectro de potencias de los observables, ahora la calidad de los datos hace que necesitemos de una teoría no lineal para explicar por ejemplo el bispectro o trispectro a escalas subhorizonte[105, 106]. Estos datos provenientes de la anisotropía de la radiación cósmica de fondo han sido estudiados por misiones como el WMAP y recientemente por el PLANCK[107]. Pero también de estudios de 21cm mapeando anisotropías en el hidrogeno neutral, como el LOFAR y el SKA[108, 109].

Sin embargo, la teoría de la Relatividad General es basada en el concepto de covarianza

general. Este principio establece que no hay un sistema de referencia privilegiado en la naturaleza, matemáticamente se introduce de una manera trivial en la definición de variedad en el espacio-tiempo. Esto es basado en el hecho de que el sistema de coordenadas es escogido por nosotros y los fenómenos naturales no deben depender del sistema de coordenadas escogido.

Ahora, debido a la covarianza de las ecuaciones de campo de Einstein¹, las perturbaciones no son invariantes bajo transformación de sistemas de coordenadas, este problema es llamado “*problema gauge*” y ha sido estudiado en profundidad a orden lineal. En general aparece en la teoría una libertad gauge la cual es un grado no físico que aparece en las ecuaciones. Para obtener resultados físicos, nosotros debemos fijar la libertad gauge o extraer cantidades que sean independientes de este.

Existen varios formalismos elaborados para tener una teoría de perturbaciones adecuada al estudio del fenómeno físico deseado . Principalmente hay dos aproximaciones para encontrar variables invariantes gauge. Una posibilidad es hacer uso del lema de Stewart-Walker el cual establece que campos tensoriales nulos en el background son invariantes gauge a primer orden, y nulos en el background y a primer orden son invariantes gauge a segundo orden y así sucesivamente (ver Ec.(3.40), (3.41)) y con esto definir variables invariantes gauge, ejemplos de estos son el tensor de Weyl, la aceleración del campo de velocidades, el tensor de esfuerzos, el shear y vorticidad del campo de velocidades y otros. Esta aproximación covariante fué propuesta por Hawking [110] y extendida por otros autores [111, 112, 113, 114, 115, 116, 117]. La otra posibilidad es parametrizar arbitrariamente la perturbación de la métrica, el tensor momento energía, la función de distribución y estudiar propiedades de transformación de estas variables dependientes del gauge bajo estas transformaciones, con esto uno puede encontrar cantidades que sean independientes del gauge. Este formalismo es trabajado por varios autores [118, 119, 120, 121, 122, 123, 124]. En esta aproximación uno realiza un análisis armónico y las variables invariantes gauge encontradas en este formalismo podrían tener una difícil interpretación física (debido a que podrían requerir funciones de Green definidas sobre el 3-espacio[125]). En lo que sigue usaremos el último formalismo siguiendo la idea de J. M. Bardeen [119] y para esto se dará una introducción al formalismo siguiendo la idea de los autores [126, 125, 127].

¹Covarianza implica que dado dos soluciones de las ecuaciones y que dado un difeomorfismo que las relacione se puede concluir que estas dos soluciones son físicamente equivalentes.

3.2. Expansión de Taylor de campos tensoriales (Taylor expansions of tensor fields)

Para explicar la libertad gauge en teoría de perturbaciones, debemos saber que es lo que estamos haciendo cuando empezamos a trabajar con las perturbaciones en alguna variable, para esto debemos encontrar como hacer la expansión en series de Taylor en un campo tensorial debido a que primero, una teoría de perturbaciones siempre implica una expansión en series y segundo para definir la invarianza en alguna variable debemos usar el lema “Stewart Walker” el cual será explicado mas adelante.

En la teoría de perturbaciones, siempre tratamos con dos variedades que nos dan el marco matemático para describir nuestro espacio tiempo, uno es un espacio de fondo el cual debemos saber de antemano (\mathcal{M}_0, g_{ab}) , en este caso utilizaremos un espacio el cual es homogéneo e isotrópico “Robertson-Walker” (R-W) debido a que observaremos la evolución de nuestro universo con dichas propiedades, y dado el principio cosmológico podemos de antemano imponer el espacio de R-W como fondo (claramente la escogencia de este espacio depende de lo que se quiera estudiar, por ejemplo para estudiar en una aproximación más real la física de un agujero negro rotante, el espacio de fondo sería el universo descrito por la métrica de Kerr, o el de una estrella por medio de la métrica de Schwarzschild). El otro espacio es el real $(\mathcal{M}, \bar{g}_{ab})$, es decir, en donde vivimos y la idea de esta teoría es que dado un espacio tiempo de fondo podamos llegar a construir un espacio tiempo real el cual nos provee información física del espacio en el cual estamos viviendo. Ahora para construir este espacio lo hacemos mediante un mapeo χ llamado “[escogencia gauge](#)” el cual toma puntos del espacio de fondo p y los lleva al espacio real $\chi(p)$, y poder así construir este espacio:

$$(3.15) \quad \chi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_0 & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ p & & \chi(p) \end{array}$$

Teniendo (3.15) podemos definir el “pull-back” χ^* el cual toma puntos del espacio real \bar{q} y los manda al espacio de fondo²:

$$(3.16) \quad \chi^* : \begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M}_0 \\ \bar{q} & & \chi^*(\bar{q}) \end{array}$$

Donde vemos que el pull-back $\chi^*(\bar{q})$ es una representación sobre el espacio de fondo \mathcal{M}_0 de la variable física \bar{q} que esta en \mathcal{M} fig.(3.1). Ahora dado la covarianza general, la

²Hacemos énfasis en que χ^* es diferente de χ^{-1} , es decir la inversa de χ

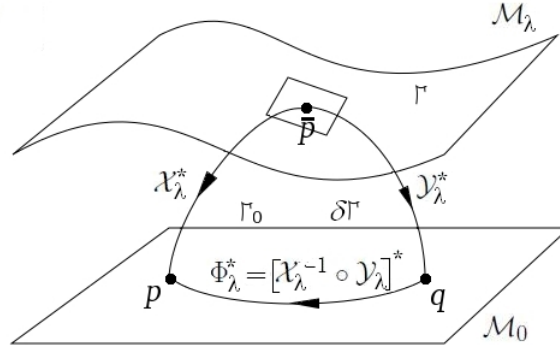


FIGURA 3.1. Escogencias Gauge

escogencia gauge no es única, es decir existe una libertad en la escogencia para poder mapear los puntos entre los dos espacios (3.15). Si definimos otro mapeo diferente \mathcal{Y}^* , en este caso la representación $\mathcal{Y}^*(\bar{q})$ sobre \mathcal{M}_0 de la variable física \bar{q} en \mathcal{M} será diferente a la de (3.16), pero debido a que estas representaciones están en el espacio de fondo concluimos que “esta diferencia de representaciones es no física debido a que esta representación no tiene nada que ver con la naturaleza del espacio tiempo físico \mathcal{M} ”.

También podemos considerar la regla de transformación de una escogencia gauge χ en otra \mathcal{Y} , el cual es llamada “transformación gauge”. La transformación gauge $\chi \rightarrow \mathcal{Y}$ es inducida por el siguiente mapeo:

$$(3.17) \quad \Phi : (\chi^{-1}) \circ \mathcal{Y}$$

Donde el mapeo Φ cambia la representación $\chi^*(\bar{q})$ de la variable física \bar{q} en la otra representación $\mathcal{Y}^*(\bar{q})$:

$$\mathcal{Y}^*(\bar{q}) = \mathcal{Y}^*(\chi \circ \chi^{-1})^*(\bar{q}) = \mathcal{Y}^*(\chi^{-1})^* \chi^*(\bar{q}) = ((\chi^{-1}) \circ \mathcal{Y})^* \chi^*(\bar{q}) = \Phi^* \chi^*(\bar{q})$$

Donde vemos que Φ^* esta situado sobre el espacio de fondo \mathcal{M}_0 ³.

Ahora para continuar con el formalismo debemos estudiar la expansión de Taylor para campos tensoriales. En funciones sobre \mathbb{R}^n , una expansión de Taylor es esencialmente una manera de expresar el valor de una función en algun punto en términos de este valor y del valor de todas sus derivadas en otros puntos:

³interpretación activa definida más adelante.

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n (x^k - a^k) H_k(x) \quad \text{con : } H_k(a) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=a}$$

Pero para un campo tensorial cualquiera \mathbb{T} sobre \mathcal{M} no es posible hacer esta expansión debido a que $\mathbb{T}(p)$ y $\mathbb{T}(q)$ en diferentes puntos p y q (con $p, q \in \mathcal{M}$) pertenecen a espacios tangentes diferentes y no pueden por lo tanto ser comparados directamente. Ahora si encontramos una manera de comparar estos dos espacios tangentes podemos hacer una expansión de Taylor; esto se logra por medio de una familia uniparamétrica de difeomorfismos sobre \mathcal{M} de tal manera que genera un mapeo entre tensores que están en diferentes puntos. Para esto comenzaremos con lo que se entiende por un difeomorfismo [128, 129].

Sea φ un difeomorfismo entre dos variedades \mathcal{M} y \mathcal{N} :

$$(3.18) \quad \varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ p & & \varphi(p) \end{array}$$

Donde se entiende por difeomorfismo un C^r -mapeo uno a uno que se hace entre variedades de la misma dimensión (lo que la hace biyectiva) de tal forma que φ tenga inversa que sea también un C^r -mapeo y dado que en la variedad tiene una estructura topológica donde los elementos vienen dados por abiertos (topología inducida), cualquier mapeo que tenga una inversa tiene una imagen la cual es abierto, por lo que en general se define que el mapeo es continuo (donde utilizamos el teorema de la función implícita [128]). Ahora dado (3.18) podemos definir un mapeo φ_* “[push-forward](#)” entre los espacios tangentes $T(p)$ de p en \mathcal{M} y $T(\varphi(p))$ de $\varphi(p)$ en \mathcal{N} de la siguiente forma:

$$(3.19) \quad \varphi_*|_p : T_p \mathcal{M} \longrightarrow T_{\varphi(p)} \mathcal{N}$$

Y otro mapeo φ^* “[pull-back](#)” entre los espacios cotangentes $T^* \varphi(p)$ de $\varphi(p)$ en \mathcal{N} y $T^*(p)$ de p en \mathcal{M} dado por:

$$(3.20) \quad \varphi^*|_{\varphi(p)} : T_{\varphi(p)}^* \mathcal{N} \longrightarrow T_p^* \mathcal{M}$$

Y dado la inversa de (3.18) φ^{-1} , podemos definir un push-forward y un pull-back dado por:

$$(\varphi^*)^{-1}|_p : T_p^* \mathcal{M} \longrightarrow T_{\varphi(p)}^* \mathcal{N}$$

$$(\varphi_*)^{-1}|_{\varphi(p)} : T_{\varphi(p)}\mathcal{N} \longrightarrow T_p\mathcal{M}$$

Y donde podemos generalizarlo para un campo tensorial cualquiera \mathbb{T} simplemente requiriendo que $\forall p \in \mathcal{M}$:

$$(3.21) \quad (\varphi_* \mathbb{T})(\varphi(p)) \equiv \varphi_*|_p(\mathbb{T}(p))$$

$$(3.22) \quad (\varphi^* \mathbb{T})(p) \equiv \varphi^*|_{\varphi(p)}(\mathbb{T}(\varphi(p)))$$

Donde al utilizar las condiciones anteriormente dichas, y tener que ϕ_* y $(\phi^{-1})^*$ son isomorfos, podemos definir la transformación (3.21),(3.22).

Ahora si consideramos una variedad diferenciable \mathcal{M} , y sea ξ un campo vectorial sobre \mathcal{M} el cual genera un flujo ϕ definido por:

$$(3.23) \quad \begin{array}{ccc} \phi : & \mathcal{M} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & (p, \lambda) & & \phi(p, \lambda) = \phi_\lambda(p) \end{array}$$

Con $\lambda \in \mathbb{R}$ y donde $\phi_\lambda(p)$ es la curva integral del campo ξ , lo cual significa que existe una curva que pasa sobre p , $\forall p \in \mathcal{M}$ tal que $\phi_{\lambda=0}(p) = p$ y cuyo vector tangente en el punto $\phi_\lambda(p)$ es el vector $X|_{\phi_\lambda(p)}$ para p fijo. Dada una carta (U, ψ) con $p \subset U$ donde $\phi_\lambda(p)$ tiene coordenadas $x^i(\lambda)$ y $X|_{\phi_\lambda(p)} \doteq X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, entonces $\phi_\lambda(p)$ es solución del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$(3.24) \quad \frac{dx^i}{d\lambda} = X^i(x^i(\lambda))$$

Por lo que la solución de la anterior ecuación diferencial conduce a la curva integral $\phi_\lambda(p)$ donde el teorema de unicidad y existencia de las ecuaciones diferenciales garantiza una única solución a dicha ecuación al menos localmente con las condiciones iniciales dadas anteriormente. Ahora si tenemos p fijo, tenemos que $\phi_\lambda(p)$ es exactamente la curva integral donde $\phi_{\lambda=0}(p) = p$ es una condición inicial de (3.24), pero si mantenemos el parámetro fijo $\lambda = cte$ obtenemos una transformación ó lo que es lo mismo, un difeomorfismo entre variedades o entre una variedad:

$$\begin{array}{ccc} \phi_\lambda : & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & p & & \phi_\lambda(p) \end{array}$$

El cual manda un punto p al punto $\phi_\lambda(p)$ el cual esta localizado a una distancia paramétrica λ sobre la curva $\phi_\lambda(p)$. Este difeomorfismo se dice que es grupo local uniparamétrico si satisface las siguientes condiciones:

- ϕ_0 es la identidad la cual manda $p \in \mathcal{M}$ al mismo punto.
- $\phi_\lambda \circ \phi_\sigma = \phi_{\lambda+\sigma}$
- $\phi_\lambda^{-1} = \phi_{-\lambda}$

Ahora dado (3.20),(3.22) podemos definir la derivada de Lie de un campo tensorial \mathbb{T} , a lo largo de un campo vectorial ξ dado por:

$$(3.25) \quad L_\xi \mathbb{T}|_p \equiv \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} (\phi_\lambda^* \mathbb{T} - \mathbb{T})$$

Donde cumple las siguientes condiciones con $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{T}_{1,2} \in T_s^r(\mathcal{M})$, ξ, ς campos vectoriales y $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$:

Propiedades.

- Lineal: $L_\xi(\mathbb{T}_1 + a\mathbb{T}_2) = L_\xi \mathbb{T}_1 + aL_\xi \mathbb{T}_2$
- Leibniz $L_\xi(\mathbb{T}_1 \otimes a\mathbb{T}_2) = (L_\xi \mathbb{T}_1) \otimes \mathbb{T}_2 + \mathbb{T}_1 \otimes (L_\xi \mathbb{T}_2)$
- $L_\xi f = \mathbf{X}f$ con $\mathbf{X} = X^i \partial_i \implies L_\xi f = f_{,\mu} \xi^\mu$
- $L_\xi Z^\mu = Z^\mu_{,\nu} \xi^\nu - \xi^\mu_{,\nu} Z^\nu$
- $L_\xi \mathbb{T}_{\mu\nu} = \mathbb{T}_{\mu\nu,\sigma} \xi^\sigma + \mathbb{T}_{\sigma\nu} \xi^\sigma_{,\mu} + \mathbb{T}_{\mu\sigma} \xi^\sigma_{,\nu}$
- $L_\xi \varsigma = [\xi, \varsigma]$
- $L_{\xi+a\varsigma} \mathbb{T} = L_\xi \mathbb{T} + aL_\varsigma \mathbb{T}$
- $L_{[\xi,\varsigma]} = L_\xi \circ L_\varsigma - L_\varsigma \circ L_\xi$
- $[\xi, \varsigma] = 0 \iff L_\xi \circ L_\varsigma = L_\varsigma \circ L_\xi \iff \psi_\lambda \circ \varphi_\sigma = \varphi_\sigma \circ \psi_\lambda$

Donde $\psi_\lambda, \varphi_\sigma$ son los flujos generados por ς, ξ [129, 128].

Por lo tanto el mapeo ϕ_λ^* define un nuevo campo $\phi_\lambda^* \mathbb{T}$ sobre \mathcal{M} , el pull-back de \mathbb{T} , el cual es función de λ .

Ahora dado que por la curva integral puedo comparar campos tensoriales definidos en cada punto de la variedad por medio de una familia uniparamétrica de difeomorfismos, se puede entonces, hacer una expansión de Taylor a lo largo de la curva integral alrededor de $\lambda = 0$, de la siguiente forma:

$$(3.26) \quad \phi_\lambda^* \mathbb{T} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} L_\xi^k \mathbb{T} = e^{(\lambda L_\xi)} \mathbb{T} \Big|_0$$

Donde ϕ es el flujo generado por el campo vectorial ξ . Para demostrar esto empezamos, utilizando la propiedad de analiticidad de $\phi_\lambda^* \mathcal{T}$ a lo largo de la curva integral $\phi_\lambda^*(p)$ [130] y por lo tanto podemos hacer una expansión de Taylor alrededor de $\lambda = 0$:

$$(3.27) \quad \phi_\lambda^* \mathcal{T} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left. \frac{d^k}{d\lambda^k} \right|_0 \phi_\lambda^* \mathcal{T}$$

Donde:

$$(3.28) \quad \left. \frac{d^k}{d\lambda^k} \right|_\tau (F) = \left[\frac{d^k(F)}{d\lambda^k} \right]_{\lambda=\tau}$$

Ahora para encontrar (3.26) vamos a comparar término por término y lo hacemos por medio de inducción, para esto vamos a demostrar que es valido para $k = 1$, entonces:

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \right|_0 \phi_\lambda^* \mathcal{T} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} (\phi_\lambda^* \mathcal{T} - \mathcal{T}) = L_\xi \mathcal{T}$$

Donde usamos (3.25). Ahora suponemos que para el término $k = n$ es válido que:

$$\left. \frac{d^n}{d\lambda^n} \right|_0 \phi_\lambda^* \mathcal{T} = L_\xi^n \mathcal{T}$$

Entonces para $k = n + 1$ tenemos que:

$$\left. \frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}} \right|_0 \phi_\lambda^* \mathcal{T} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\left. \frac{d^n}{d\lambda^n} \right|_\epsilon \phi_\lambda^* \mathcal{T} - \left. \frac{d^n}{d\lambda^n} \right|_0 \mathcal{T} \right)$$

Ahora si hacemos la siguiente parametrización $\tau = \lambda - \epsilon$, y sustituimos en el primer término, se observa que la parametrización hace que nos traslademos una distancia $-\epsilon$ lo cual hace que la derivada sea evaluada en el origen, por lo tanto se tiene:

$$\left. \frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}} \right|_0 \phi_\lambda^* \mathcal{T} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\left. \frac{d^n}{d\tau^n} \right|_0 \phi_{\tau+\epsilon}^* \mathcal{T} - \left. \frac{d^n}{d\lambda^n} \right|_0 \mathcal{T} \right)$$

Ahora dado que la familia uniparamétrica de difeomorfismos forman un grupo utilizamos las propiedades del mismo:

$$\left. \frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}} \right|_0 \phi_\lambda^* \mathcal{T} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\left. \frac{d^n}{d\tau^n} \right|_0 \phi_\epsilon^* \circ \phi_\tau^* \mathcal{T} - \left. \frac{d^n}{d\lambda^n} \right|_0 \mathcal{T} \right)$$

Y dado que la derivada sólo afecta la curva integral con parámetro τ podemos sacar en el primer término el flujo con respecto a ϵ y usando la suposición dada para $k = n$

tenemos que:

$$\left. \frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}} \right|_0 \phi_\lambda^* \mathbb{T} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\phi_\epsilon^* L_\xi^n \mathbb{T} - L_\xi^n \mathbb{T}) = L_\xi^{n+1} \mathbb{T}$$

Demostremos que si es válido para n entonces lo es para un $n + 1$, por lo que queda demostrado (3.26).

Ahora si $\mathbb{T} = \mathbb{T}(x^\mu)$, es decir que el campo tensorial solo es función de las coordenadas dada una carta sobre \mathcal{M} , y dado que $\phi_\lambda^* x^\mu(p) = x^\mu(\phi_\lambda(p))$ con $x^\mu(p) \equiv x^\mu$, $x^\mu(\phi_\lambda(p)) \equiv \tilde{x}^\mu$, tenemos que dado las propiedades de la derivada de Lie y (3.26):

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \lambda L_\xi x^\mu + \frac{\lambda^2}{2} L_\xi^2 x^\mu + \dots$$

$$(3.29) \quad \tilde{x}^\mu = x^\mu + \lambda \xi^\mu + \frac{\lambda^2}{2} \xi^\mu_{,\nu} \xi^\nu + \dots$$

Donde hemos utilizado (3.2).

3.3. Difeomorfismos Knight (Knight diffeomorphisms)

Supongamos ahora que hay dos campos vectoriales ξ_1, ξ_2 sobre \mathcal{M} , los cuales generan los flujos $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$ respectivamente, ahora si combinamos estos dos flujos en uno solo podemos definir una nueva familia de difeomorfismos dado por:

$$\Psi : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \quad \Psi_\lambda = \phi_{\frac{\lambda^2}{2}}^{(2)} \circ \phi_\lambda^{(1)}$$

$$(\lambda, p) \longrightarrow \Psi_{\lambda p}$$

Y como se observa por la definición de Ψ_λ vemos que este difeomorfismo compara un punto p de la variedad con un punto que esta a una distancia paramétrica λ a lo largo del flujo $\phi^{(1)}$ y a una distancia paramétrica $\frac{\lambda^2}{2}$ a lo largo del flujo $\phi^{(2)}$.

Este concepto de difeomorfismo puede ser generalizado a n campos vectoriales $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ definidos sobre \mathcal{M} que generan n flujos $\phi^1, \phi^2, \phi^3, \dots, \phi^n$ y al definir una familia uniparamétrica de difeomorfismos $\Psi : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ llamados [difeomorfismos knight de rango n](#) dado por:

$$\Psi_\lambda = \phi_{\frac{\lambda^n}{n!}}^{(n)} \circ \dots \circ \phi_{\frac{\lambda^2}{2}}^{(2)} \circ \phi_\lambda^{(1)}$$

Y donde $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ son llamados los generadores de Ψ_λ . Claramente vemos que los campos vectoriales pueden no conmutar por lo que $\Psi_{\sigma+\lambda} \neq \Psi_\sigma \circ \Psi_\lambda$ y tenemos que estos

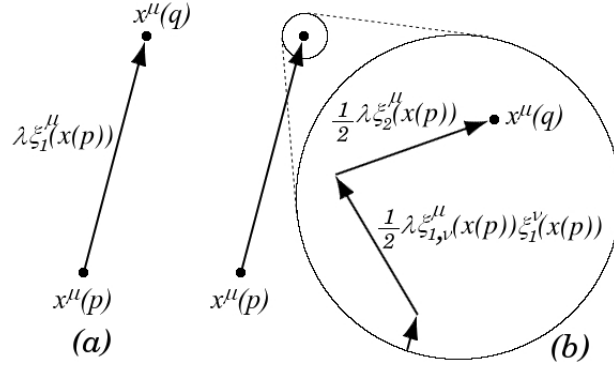


FIGURA 3.2. En el lado izquierdo se muestra la contribución que hace el campo vectorial a primer orden para relacionar dos puntos. En el lado derecho se muestra la corrección a segundo orden tanto del campo vectorial a segundo orden como del acople de campos vectoriales a primer orden, esta es una corrección de la transformación desde \tilde{x}^μ a x^μ .

difeomorfismos no forman un grupo, ahora para hacer una expansión en series de Taylor alrededor de $\lambda = 0$ de este difeomorfismo:

$$\Psi_\lambda^* \Upsilon = \phi_\lambda^{(1)*} \phi_{\frac{\lambda^2}{2}}^{(2)*} \dots \phi_{\frac{\lambda^n}{n!}}^{(n)*} \Upsilon$$

Ahora al usar n veces la propiedad (3.26):

$$\begin{aligned} \Psi_\lambda^* \Upsilon &= \sum_{l_1=0}^{\infty} \frac{\lambda^{l_1}}{l_1!} L_{\xi_1}^{l_1} \left(\phi_{\frac{\lambda^2}{2}}^{(2)*} \dots \phi_{\frac{\lambda^n}{n!}}^{(n)*} \Upsilon \right) \\ \Psi_\lambda^* \Upsilon &= \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} \frac{\lambda^{l_1}}{l_1!} \frac{\lambda^{2l_2}}{2^{l_2} l_2!} L_{\xi_1}^{l_1} L_{\xi_2}^{l_2} \left(\phi_{\frac{\lambda^3}{3!}}^{(3)*} \dots \phi_{\frac{\lambda^n}{n!}}^{(n)*} \Upsilon \right) \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \end{aligned}$$

$$(3.30) \quad \Psi_\lambda^* \Upsilon = \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} \dots \sum_{l_k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{l_1+2l_2+\dots+kl_k}}{l_1! 2^{l_2} l_2! \dots (k!)^{l_k} l_k!} L_{\xi_1}^{l_1} L_{\xi_2}^{l_2} \dots L_{\xi_k}^{l_k} (\Upsilon)$$

Por ejemplo a segundo orden vemos que:

$$(3.31) \quad \Psi_\lambda^* \Upsilon = \Upsilon + \lambda L_{\xi_1} \Upsilon + \frac{\lambda^2}{2} (L_{\xi_1}^2 + L_{\xi_2}) \Upsilon + \dots$$

Ahora dada una carta, las coordenadas de p son escritas como x^μ y las de $\Psi_\lambda(p)$ son escritas como \tilde{x}^μ , tenemos que a segundo orden en λ y nuevamente usando las propiedades de la derivada de Lie:

$$(3.32) \quad \tilde{x}^\mu = x^\mu + \lambda \xi_1^\mu + \frac{\lambda^2}{2} (\xi_{1,\nu}^\mu \xi_1^\nu + \xi_2^\mu) + \dots$$

Por lo tanto podemos observar que ξ_1 y ξ_2 son los generadores de una familia uniparamétrica de difeomorfismos Ψ_λ y representan la dirección en la cual la expansión se lleva a cabo[131]. El generador ξ_1 es la aproximación a primer orden del flujo del difeomorfismo Ψ_λ , y el segundo generador ξ_2 es la corrección de este flujo fig.(3.2). Cuando estos generadores son dependientes, la expansión se reduce a el mapeo exponencial (3.26).

3.4. Definición de perturbación y escogencia gauge (What is perturbations of spacetime and gauge choices)

La perturbación $\Delta \mathfrak{T}$ de cualquier cantidad, digamos un campo tensorial \mathfrak{T} , es definida con la diferencia entre el valor \mathfrak{T} que tiene el campo en el espacio-tiempo real y el valor que esta toma en el espacio del background \mathfrak{T}_0 :

$$(3.33) \quad \Delta \mathfrak{T} = \mathfrak{T} - \mathfrak{T}_0$$

Ahora como es la diferencia de dos campos tensoriales, entonces tal relación debe ser hecha en el mismo punto y para relacionar ambos campos lo hacemos mediante un difeomorfismo “[escogencia gauge](#)”; y un cambio de este difeomorfismo es llamado “[transformación gauge](#)” la cual genera en el espacio físico una transformación de coordenadas, y la libertad que uno tiene para escoger este difeomorfismo corresponde a la arbitrariedad en el valor de la perturbación de \mathfrak{T} . Consideremos ahora una familia de modelos $\{(\mathcal{M}, g_\lambda, \tau_\lambda)\}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y sobre la variedad la métrica g_λ y el tensor momento energía τ_λ cumple la ecuación de campo de Einstein:

$$(3.34) \quad \mathcal{E}[g_\lambda, \tau_\lambda] = 0$$

Ahora el parámetro λ mide la diferencia del espacio-tiempo físico $(\mathcal{M}, g_\lambda, \tau_\lambda)$ respecto al espacio-tiempo del background $(\mathcal{M}_0, g_0, \tau_0)$, ver fig.(3.3). Para interpretar este resultado vamos a introducir una variedad \mathcal{N} de dimension $m+1$ la cual es foliada por subvariedades difeomorfas⁴ a \mathcal{M} dado por $\mathcal{N} = \mathcal{M} \times \mathbb{R}$ y cada una de las copia de \mathcal{M} viene dada por

⁴Misma estructura diferenciable

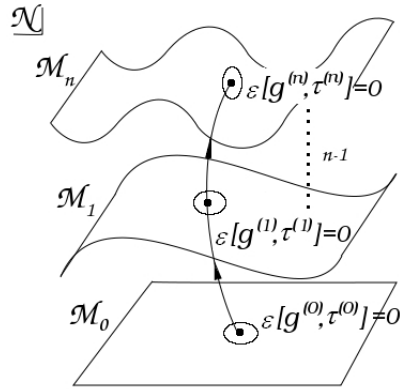


FIGURA 3.3. Se debe exigir que en cada subvariedad \mathcal{M}_λ se satisfaga las ecuaciones de campo de Einstein

el correspondiente valor de λ^5 . Podemos escoger cartas en las cuales $x^\mu (\mu = 0, 1, \dots, m - 1)$ son las coordenadas sobre cada \mathcal{M}_λ y $x^m = \lambda^6$.

Ahora si un campo tensorial \mathfrak{T}_λ es dado sobre cada \mathcal{M}_λ entonces se define un campo \mathfrak{T} sobre \mathcal{N} por la relación $\mathfrak{T}(p, \lambda) = \mathfrak{T}_\lambda(p)$ para cada $p \in \mathcal{M}_\lambda$. Ahora sobre cada \mathcal{M}_λ uno tiene una métrica g_λ y un conjunto de campos de materia τ_λ que satisface (3.34), y también una métrica g y un campo de materia τ sobre \mathcal{N} . Ahora para definir la perturbación de un tensor \mathfrak{T} , debemos encontrar una manera de comparar \mathfrak{T}_λ con \mathfrak{T}_0 . Para hacer esta comparacion en el mismo punto lo hacemos mediante el difeomorfismo dado por $\varphi_\lambda : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ donde se debe satisfacer que:

$$\varphi_\lambda|_{\mathcal{M}_0} : \mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathcal{M}_\lambda$$

Donde φ_λ es visto como un miembro del flujo φ el cual esta situado sobre \mathcal{N} correspondiente al valor de λ del grupo uniparamétrico. Ahora a este flujo φ es generado por un campo vectorial \mathfrak{X} “gauge” el cual esta sobre \mathcal{N} y dado como fué construida esta variedad, imponemos que $X^m = 1^7$. Ahora podemos definir la perturbación de alguna cantidad \mathfrak{T} como:

$$(3.35) \quad \Delta \mathfrak{T}_\lambda \equiv \varphi_\lambda^* \mathfrak{T}|_{\mathcal{M}_0} - \mathfrak{T}_0$$

⁵una foliación \mathfrak{S} de dimensión n de una variedad \mathcal{M} es un recubrimiento topológico, formado por conjuntos \mathcal{U}_i y con funciones $\varphi : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^n$

⁶Vemos que las coordenadas sobre la variedad de dimension $m + 1$ son diferentes de cero solo para sus primeras $m - coordenadas$ y el último valor solo da la rotulación de la subvariedad λ , por lo tanto las cantidades sobre la variedad \mathcal{N} son construidas siendo transversales.

⁷Nuevamente hacemos énfasis en que este campo es arbitrario y sólo existe esta condición para \mathfrak{X} .

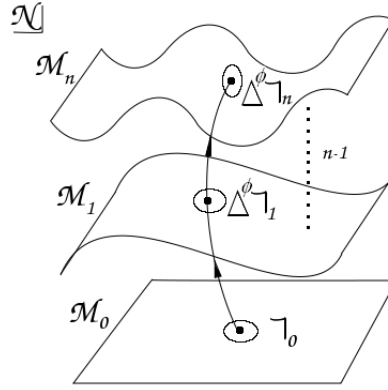


FIGURA 3.4. Expansión de un campo tensorial.

Ahora usando (3.27) escribimos la última ecuación como:

$$\Delta \Upsilon_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \delta^k \Upsilon - \Upsilon_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \delta^k \Upsilon$$

Donde:

$$(3.36) \quad \delta^k \Upsilon = \left[\frac{d^k \varphi_\lambda^* \Upsilon}{d\lambda^k} \right]_{\lambda=0, \mathcal{M}_0}$$

Donde (3.36) define el k -ésimo orden de la perturbación de Υ , también nos damos cuenta de algo muy importante y es que “ $\Delta \Upsilon_\lambda, \delta^k \Upsilon$ son campos los cuales están situados sobre \mathcal{M}_0 ” también hay que recalcar que dado (3.35), vemos que el parámetro λ el cual nos da el rótulo para cada espacio-tiempo, sirve también para hacer la expansión de la perturbación ver fig.(3.4). Sin embargo, hay que tener cuidado en que hay casos en los cuales λ es muy grande haciendo que la expansión perturbativa no pueda realizarse ya que al hacer una reparametrización de λ empiezan a mezclarse modos⁸ y no podemos hablar de expansiones a primer o segundo orden en Υ . Por último $\Delta \Upsilon_\lambda$ es la cantidad la cual puede ser definida como invariante, mientras que $\delta^k \Upsilon$ tiene un significado físico sólo cuando fijamos el valor de λ .

3.5. Transformaciones Gauge (Gauge transformations)

Se debe tener cuidado en lo que se va a denominar gauge en lo que sigue. En física la palabra gauge tiene muchos significados en el área que se está tratando. Se mencionó ante-

⁸Haciendo referencia que pueden haber mezclas de términos que son de ordenes diferentes en la expansión pero tienen ordenes de magnitud similares.

riormente que una correspondencia entre puntos de dos variedades es lo que se denomina escogencia gauge y un cambio en esta correspondencia induce una transformación el cual es llamado transformación gauge. La escogencia entre el mapeo de puntos de la variedad de background \mathcal{M}_0 con la variedad real \mathcal{M}_λ , es una escogencia gauge (escogencia de un campo vectorial). Consideremos un punto p sobre \mathcal{M}_0 y dos escogencias gauge:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_\lambda & \mathcal{Y} : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_\lambda \\ p & q & p & u \end{array}$$

Esta escogencia \mathcal{X} asignará al punto p de \mathcal{M}_0 el punto q de \mathcal{M}_λ y le dará a este punto las mismas coordenadas x^μ que el punto p , lo mismo para \mathcal{Y} , este mapea el punto p de \mathcal{M}_0 al punto u de \mathcal{M}_λ y le asignará las mismas coordenadas del punto q . Dicha escogencia genera una transformación gauge sobre \mathcal{M}_λ . Esto es lo que se llama interpretación pasiva[132]. Para la interpretación activa, escogeremos un punto u sobre \mathcal{M}_λ y encontraremos un punto p sobre \mathcal{M}_0 de tal manera que el generador \mathcal{X} mapee p en u , lo mismo para \mathcal{Y} :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_\lambda & \mathcal{Y} : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_\lambda \\ p & u & q & u \end{array}$$

Ahora la transformación gauge esta en \mathcal{M}_0 y transforma las coordenadas del punto p a las coordenadas del punto q (ver (3.17)). En otras palabras la transformación de la perturbación de una cantidad física es evaluada en el mismo punto de \mathcal{M}_λ (punto coordenado) en la interpretación activa, mientras que para la interpretación pasiva la transformación es evaluada en el mismo punto de \mathcal{M}_0 , ver fig.(3.5).

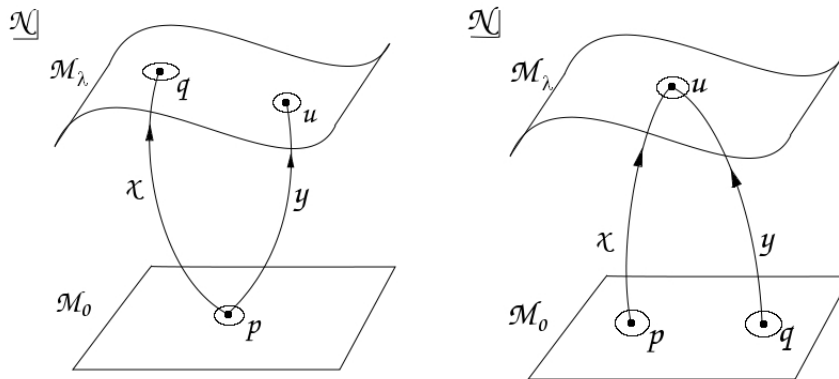


FIGURA 3.5. En el lado izquierdo se muestra la interpretación pasiva, como se observa, la transformación se genera en \mathcal{M}_λ . En el lado derecho se muestra la interpretación activa, en general vemos que el campo vectorial genera una escogencia gauge y el cambio en la escogencia genera una transformación de coordenadas en \mathcal{M}_0 .

3.6. Invarianza Gauge (Gauge invariance)

Supongamos que hay dos campos vectoriales \mathfrak{X} y \mathfrak{Y} definidos sobre la variedad \mathcal{N} , tal que $\mathfrak{X}^m = \mathfrak{Y}^m = 1$ en todo punto de \mathcal{N} . Ahora sus curvas integrales definen para cada una dos flujos ϕ, φ para cada campo respectivamente sobre \mathcal{N} , dado esto los flujos ϕ, φ son transformaciones y por lo tanto son dos escogencias gauge distintas. Ahora dado los campos \mathfrak{X} y \mathfrak{Y} podemos generar un pull-back sobre un campo tensorial \mathbb{T} y construir otros campos tensoriales $\varphi_\lambda^* \mathbb{T}$ y $\phi_\lambda^* \mathbb{T}$ para cualquier valor de λ . Por lo tanto tenemos tres campos tensoriales sobre \mathcal{M}_0 :

$$\mathbb{T}_0, \quad \mathbb{T}_\lambda^{\mathfrak{X}} \equiv \phi_\lambda^* \mathbb{T} \Big|_0, \quad \mathbb{T}_\lambda^{\mathfrak{Y}} \equiv \varphi_\lambda^* \mathbb{T} \Big|_0$$

Ahora usando (3.35),(3.26), tenemos que:

$$(3.37) \quad \mathbb{T}_\lambda^{\mathfrak{X}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \delta^k \mathbb{T}^{\mathfrak{X}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} L_{\mathfrak{X}}^k \mathbb{T} \Big|_0 = \mathbb{T}_0 + \Delta^\phi \mathbb{T}_\lambda$$

$$(3.38) \quad \mathbb{T}_\lambda^{\mathfrak{Y}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \delta^k \mathbb{T}^{\mathfrak{Y}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} L_{\mathfrak{Y}}^k \mathbb{T} \Big|_0 = \mathbb{T}_0 + \Delta^\varphi \mathbb{T}_\lambda$$

Si $\mathbb{T}_\lambda^{\mathfrak{X}} = \mathbb{T}_\lambda^{\mathfrak{Y}}$ para cualquier par de campos vectoriales \mathfrak{X} y \mathfrak{Y} , decimos que \mathbb{T} es totalmente invariante gauge.

Esta es una condición muy fuerte ya que (3.37),(3.38) implican que $\delta^k \mathbb{T}^{\mathfrak{X}} = \delta^k \mathbb{T}^{\mathfrak{Y}}$ $\forall \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$, y $\forall k$, ver fig.(3.6). Pero debido a que nosotros vamos a trabajar una teoría en alguna aproximación a orden n , podemos requerir una condición mas débil, “ \mathbb{T} es invariante gauge a orden n si y sólo si $\delta^k \mathbb{T}^{\mathfrak{X}} = \delta^k \mathbb{T}^{\mathfrak{Y}}$ $\forall \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ y $\forall k \leq n$ ”.

De aquí podemos sacar una proposición importante:

“*Un campo tensorial \mathbb{T} es un invariante gauge a orden $n \geq 1$ si y solo si $L_\xi \delta^k \mathbb{T} = 0$, para cualquier campo vectorial ξ sobre \mathcal{M} y $\forall k < n$.*”

Para demostrar esto lo hacemos por inducción, para esto empezemos con $n = 1$, si $\delta \mathbb{T}^{\mathfrak{X}} = \delta \mathbb{T}^{\mathfrak{Y}}$, entonces tenemos que:

$$\mathbb{T}_\lambda^{\mathfrak{X}} - \mathbb{T}_\lambda^{\mathfrak{Y}} = \delta \mathbb{T}^{\mathfrak{X}} - \delta \mathbb{T}^{\mathfrak{Y}} = L_{\mathfrak{X}} \mathbb{T} \Big|_0 - L_{\mathfrak{Y}} \mathbb{T} \Big|_0 = L_{\mathfrak{X}-\mathfrak{Y}} \mathbb{T} \Big|_0 = L_\xi \mathbb{T} \Big|_0 = 0$$

Donde usamos (3.37),(3.38) y el hecho que \mathfrak{X} y \mathfrak{Y} son cualquierera campos vectoriales,

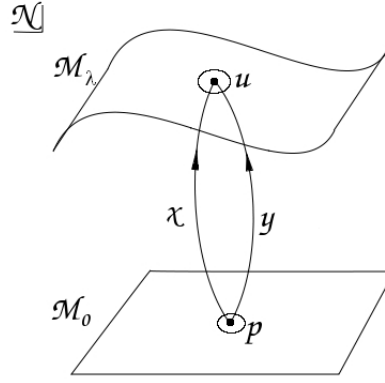


FIGURA 3.6. Cantidades Invariantes Gauge no deben depender de la escogencia en cualquier campo ξ .

podemos definir su diferencia como otro campo vectorial $\xi = X - Y$ ⁹. Ahora si $\delta^n \Upsilon^x = \delta^n \Upsilon^y$ y suponemos que para algún orden n se cumple que $L_\xi \delta^{n-1} \Upsilon = 0$ (ordenes menores a $n - 1$), entonces tenemos que para $n + 1$:

$$\begin{aligned} \Upsilon_\lambda^x - \Upsilon_\lambda^y &= \delta^{n+1} \Upsilon^x - \delta^{n+1} \Upsilon^y = \delta (\delta^n \Upsilon^x - \delta^n \Upsilon^y) \\ &= L_x \delta^n \Upsilon \Big|_0 - L_y \delta^n \Upsilon \Big|_0 = L_{x-y} \delta^n \Upsilon \Big|_0 = L_\xi \delta^n \Upsilon \Big|_0 = 0 \end{aligned}$$

Por lo que para un $n + 1$ el resultado es válida la proposición.

Como consecuencia tenemos que Υ es invariante gauge a orden n si y sólo si Υ_0 y todas sus perturbaciones a orden menor que n son, en cualquier gauge (ξ): nulos, constantes escalares, o una combinación de deltas de Kronecker con coeficientes constantes, esta es la “*generalización del lema de Stewart-Walker*”.

3.7. Transformaciones gauge para cantidades no invariantes (Gauge transformations in non gauge invariance quantities)

Si un tensor Υ es no invariante gauge, es bueno saber como cambia su representación sobre \mathcal{M} bajo una transformación gauge. Para este propósito se define para cada valor de $\lambda \in \mathbb{R}$, el difeomorfismo $\Phi_\lambda : \mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathcal{M}_0$ ver fig.(3.5) dado por:

$$\Phi_\lambda \equiv \varphi_{-\lambda} \circ \psi_\lambda$$

⁹Donde $\xi^m = 1$ es decir tangente a \mathcal{M} .

Ahora dado que los campos vectoriales que generan estos flujos pueden que no conmuten, Φ no forma un grupo uniparamétrico de difeomorfismos. Ahora los campos tensoriales $\Upsilon_\lambda^{\mathfrak{x}}$ y $\Upsilon_\lambda^{\mathfrak{y}}$ definidos por los gauges φ, ψ están conectados por el mapeo lineal Φ_λ^* :

$$\Upsilon_\lambda^{\mathfrak{y}} = \psi_\lambda^* \Upsilon|_0 = (\psi_\lambda^* \varphi_{-\lambda}^* \varphi_\lambda^* \Upsilon) |_0 = \Phi_\lambda^* \Upsilon_\lambda^{\mathfrak{x}}$$

Ahora dado (3.30),(3.31), la última ecuación queda escrita de la siguiente forma:

$$(3.39) \quad \Upsilon_\lambda^{\mathfrak{y}} = \Upsilon_\lambda^{\mathfrak{x}} + \lambda L_{\xi_1} \Upsilon_\lambda^{\mathfrak{x}} + \frac{\lambda^2}{2} (L_{\xi_1}^2 + L_{\xi_2}) \Upsilon_\lambda^{\mathfrak{x}} + \frac{\lambda^3}{3!} (L_{\xi_1}^3 + 3L_{\xi_2} L_{\xi_1} + L_{\xi_3}) \Upsilon_\lambda^{\mathfrak{x}} + \dots$$

Donde $\xi_{1,2}$ son los generadores de Φ ; dada la última relación, y dado un campo tensorial Υ , la relación entre las perturbaciones a primer y segundo en la perturbación de Υ en dos diferentes gauges vienen dadas por:

$$\lambda \delta \Upsilon^{\mathfrak{y}} = \lambda L_{\xi_1} (\Upsilon_0 + \lambda \delta \Upsilon^{\mathfrak{x}}) + \lambda \delta \Upsilon^{\mathfrak{x}}$$

$$(3.40) \quad \delta \Upsilon^{\mathfrak{y}} - \delta \Upsilon^{\mathfrak{x}} = L_{\xi_1} \Upsilon_0$$

$$\frac{\lambda^2}{2} \delta^2 \Upsilon^{\mathfrak{y}} = \frac{\lambda^2}{2} \delta^2 \Upsilon^{\mathfrak{x}} + \lambda L_{\xi_1} (\lambda \delta \Upsilon^{\mathfrak{x}}) + \frac{\lambda^2}{2} (L_{\xi_1}^2 + L_{\xi_2}) \Upsilon_0$$

$$(3.41) \quad \delta^2 \Upsilon^{\mathfrak{y}} - \delta^2 \Upsilon^{\mathfrak{x}} = 2L_{\xi_1} (\delta \Upsilon^{\mathfrak{x}}) + (L_{\xi_1}^2 + L_{\xi_2}) \Upsilon_0$$

Donde observamos que el resultado es consistente con la proposición de invarianza gauge a orden n .

Ahora es interesante mostrar la forma de los generadores de Φ , para esto sustituimos (3.26) en (3.39):

$$L_{\mathfrak{y}} \Upsilon_0 - L_{\mathfrak{x}} \Upsilon_0 = L_{\xi_1} \Upsilon_0 \implies L_{\mathfrak{y}-\mathfrak{x}} \Upsilon_0 = L_{\xi_1} \Upsilon_0$$

$$(3.42) \quad \xi_1 = \mathfrak{y} - \mathfrak{x}$$

$$\frac{\lambda^2}{2} (L_{\mathfrak{y}}^2 \Upsilon_0 - L_{\mathfrak{x}}^2 \Upsilon_0) = \lambda^2 L_{\xi_1} L_{\mathfrak{x}} \Upsilon_0 + \frac{\lambda^2}{2} (L_{\xi_1}^2 \Upsilon_0 + L_{\xi_2} \Upsilon_0)$$

$$L_{\xi_2} \Upsilon_0 = L_{\mathfrak{y}}^2 \Upsilon_0 - L_{\mathfrak{x}}^2 \Upsilon_0 - 2L_{\mathfrak{y}\mathfrak{x}} L_{\mathfrak{x}} \Upsilon_0 - L_{\mathfrak{y}\mathfrak{x}}^2 \Upsilon_0$$

$$L_{\xi_2} \Upsilon_0 = (L_{\mathfrak{x}} L_{\mathfrak{y}} - L_{\mathfrak{y}} L_{\mathfrak{x}}) \Upsilon_0 = L_{[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}]} \Upsilon_0$$

$$(3.43) \quad \xi_2 = [\mathfrak{x}, \mathfrak{y}]$$

Como una aplicación de lo anterior, en el siguiente capítulo encontraremos las transformaciones de las variables tratadas en un universo de (R-W). Este tratamiento es muy útil en el sentido de que se trabajó con cualquier campo tensorial Υ , este campo puede ser referido al tensor métrico ó tensor momento energética, cantidades escalares como la densidad ó presión y vectores como el campo magnético o la 4-velocidad. En lo que sigue veremos que ξ tiene una interpretación física asociada a la escogencia de coordenadas, así que durante el próximo capítulo se podrá entender más claramente la importancia de esta teoría en la cosmología.

CAPÍTULO 4

Espacio Magnetizado(The Magnetized Universe)

4.1. Tensor Momento Energía (Energy Momentum Tensor)

Primero vamos a hacer una descripción de la formulación covariante 1+3 de la Relatividad General la cual ha sido desarrollada en espacios-tiempos en los cuales hay una dirección como de tiempo dada por la velocidad de los observadores fundamentales $u^\alpha = (-1, 0, 0, 0)$. La descomposición 1+3 se refiere al hecho que se hace una descomposición tiempo+espacio respecto a u al proyectar tensores y ecuaciones tensoriales paralelas y ortogonales a u^α .

Antes de escribir las ecuaciones de movimiento vamos a definir la velocidad de los observadores que miden cantidades físicas como la densidad, presión o velocidad del fluido inmerso en el espacio-tiempo, para esto debemos empezar hacer una analogía entre lo clásico y lo relativista en cuanto a lo que es la deformación o “strain”.

El strain se origina debido al desplazamiento relativo de partículas que constituyen el medio. Sea $u(x, y, z)$ el desplazamiento de un punto del cuerpo rotulado por las coordenadas (x, y, z) , el aumento del volumen de una región acotada por una superficie viene dada por[133]:

$$\oint u \cdot ds = \int (\nabla \cdot u) dV$$

Ahora si el coeficiente de expansión viene dado por:

$$\theta \equiv \frac{\delta(dV)}{\delta V}$$

Después de tomar el límite cuando el volumen se hace muy pequeño, tenemos que:

$$\theta = \nabla \cdot u$$

Ahora como $\nabla \times u$ representa la circulación, podemos descomponer la primera derivada de u , como sigue:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \theta \delta_{ik} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{3} \theta \delta_{ik}$$

Donde el primer término de la parte derecha es simétrico y observamos que se le resta el valor de expansión, por lo que este término da cuenta en la variación de la forma del cuerpo pero no en su volumen, este término es llamado [shear](#).

El segundo término es antisimétrico y se identifica como un rotor, por lo que este término da cuenta de los movimientos rotacionales del sistema, sin cambio en su volumen, este término es llamado [vorticidad](#). El último término da cuenta de un cambio isotrópico en el volumen.

Ahora al hacer la analogía en relatividad, tenemos en cuenta lo siguiente:

- u , ahora es el vector velocidad.
- shear y vorticidad son parámetros tensoriales tipo espacio, es decir sobre la hipersuperficie.

Consideremos ahora $h^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + u^\mu u_\nu$ con $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ la 4-velocidad (vector como de tiempo) que cumple la siguiente relación:

$$u^\alpha u_\alpha = -1$$

Y el intervalo espacio-temporal dado por:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Con $g_{\alpha\beta}$ el tensor métrico.

Donde se ha introducido una familia de observadores con líneas de mundo tangentes a la 4-velocidad $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$, el parámetro afín s es un invariante que puede ser asociado con el tiempo propio de los observadores. Este campo de velocidades introduce la división entre una parte temporal y una parte espacial. El vector u^μ determina la dirección temporal, mientras que h^μ_ν proyecta las cantidades tensoriales sobre la hipersuperficie.

Si A es un 4-vector, la componente de A en la dirección de u^μ viene dada por:

$$A^\mu = (A^\nu u_\nu) u^\mu$$

Y su componente sobre la hipersuperficie viene dada por:

$$A^\mu_{spacial} = A^\mu + (A^\nu u_\nu) u^\mu = A^\nu (\delta^\mu_\nu + u^\mu u_\nu) = A^\nu h^\mu_\nu$$

Donde h^μ_ν es conocido como el proyector. Ahora si queremos proyectar en la hipersuperficie la 4-aceleración $u_{\mu;\nu}$:

$$(4.44) \quad u_{\mu;\nu} h^\mu_\alpha = u_{\mu;\nu} (\delta^\mu_\alpha + u^\mu u_\alpha) = u_{\mu;\alpha} + \dot{u}_\mu u_\alpha$$

Donde en un sistema comóvil $u = (-1, 0, 0, 0)$ y por lo tanto se tiene que:

$$u_{\mu;\nu} u^\nu = u_{\mu;0} = \dot{u}_\mu$$

Esta proyección puede ser escrita de la siguiente forma:

$$(4.45) \quad u_{\mu;\alpha} = \sigma_{\mu\alpha} + \omega_{\mu\alpha} - \dot{u}_\mu u_\alpha + \frac{1}{3}\theta h_{\mu\alpha}$$

Donde (dado nuestro sistema $(-+++)$ vamos a manejar el signo $(-)$ en la anterior ecuación):

$$\sigma_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} (u_{\mu;\alpha} + u_{\alpha;\mu}) + \frac{1}{2} (\dot{u}_\mu u_\alpha + \dot{u}_\alpha u_\mu) - \frac{1}{3}\theta h_{\mu\alpha}$$

$$\omega_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} (u_{\mu;\alpha} - u_{\alpha;\mu}) - \frac{1}{2} (\dot{u}_\mu u_\alpha - \dot{u}_\alpha u_\mu)$$

$$\theta = u^\alpha_{;\alpha}$$

La ecuación (4.45) describe la derivada covariante de la 4-velocidad de los observadores, dicha ecuación es muy importante porque describe las cantidades cinemáticas del modelo, además que nos dice que efecto produce la geometría del universo en la dinámica de los observadores.

El tensor momento energía $T^{\mu\nu}$ es un tensor simétrico que especifica el contenido total de energía de un modelo cosmológico. Con respecto a los observadores fundamentales, el tensor momento energía de un fluido general se descompone como:

$$(4.46) \quad T^{\mu\nu} = \mu u^\mu u^\nu + P h^{\mu\nu} + 2q^{(\mu} u^{\nu)} + \pi^{\mu\nu}$$

Donde $\mu = T^{\mu\nu} u_\mu u_\nu$ es la densidad de energía, $P = \frac{1}{3} T^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ es la presión isotrópica efectiva del fluido, $q^\mu = -h^\mu_\nu T^{\nu\lambda} u_\lambda$ es el vector de flujo de energía, y $\pi^{\mu\nu} = -h^\mu_\alpha h^\nu_\beta T^{\alpha\beta}$ es el tensor anisotrópico de traza nula y simétrico.

4.1.1. Tensor Momento Energía Electromagnético (Electromagnetic Momentum Tensor). La acción para la electrodinámica en espacios curvos viene dada por[99]:

$$S = - \int \sqrt{-g} d^4x \left(\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu \right)$$

Con $F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}$ el tensor electromagnético, A_μ el 4-potencial vectorial, y j^μ la 4-densidad de corriente. $c = 1$ y tomamos la convención $(-+++)$. A partir de las variaciones del 4-potencial vectorial llegamos a las ecuaciones de Maxwell con fuentes:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 4\pi j^\nu$$

Ahora dada la definición del tensor electromagnético, podemos a partir de condiciones que cumple dicho tensor (identidad de Bianchi), llegar a las otras ecuaciones de Maxwell homogéneas:

$$F_{(\mu\nu;\gamma)} = 0$$

Se define el dual del tensor electromagnético como:

$$*F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

Con $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ el 4-tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita.

Ahora vamos a escribir el tensor electromagnético en términos de los campos E y B , para esto se empieza con la ecuación del campo eléctrico en términos de los potenciales escalar y vectorial:

$$E_i = -\nabla_i \phi + \frac{\partial A_i}{\partial t}$$

$$E_i = -\nabla_i A_0 + \frac{\partial A_i}{\partial t} = -\nabla_i A_0 + \nabla_0 A_i = F_{i0}$$

$$E_\mu = F_{\mu\nu} u^\nu$$

Si se hace la proyección a lo largo de la 4-velocidad tenemos lo siguiente:

$$E_\mu u^\mu = F_{\mu\nu} u^\nu u^\mu = 0$$

Debido a que F es antisimétrico y $u^\nu u^\mu$ es simétrico. Ahora si contraemos con $u^{\nu 1}$:

$$E_\mu u_\alpha = F_{\mu\nu} u^\nu u_\alpha = F_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = F_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{dx^\alpha} = -F_{\mu\nu} \delta^\nu_\alpha = -F_{\mu\alpha}$$

¹Podemos tomar también $E_\mu = F_{\mu\nu} u^\nu$ y al multiplicar ambos lados por u_ν se tiene que $E_\mu u_\nu = -F_{\mu\nu}$

Para el campo magnético escribimos como:

$$B = \nabla \times A \rightarrow B_\mu = \epsilon_{\mu\nu\beta} \partial^\nu A^\beta = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\beta} F^{\nu\beta} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\alpha\nu\beta} u^\alpha F^{\nu\beta} = {}^* F_{\mu\alpha} u^\alpha$$

Dado que $\epsilon_{kij} = \epsilon_{klj} u^l$. Al hacer nuevamente la contracción y debido a que $\epsilon_{\mu\alpha\nu\beta}$ es totalmente antisimétrico, tenemos que:

$$B_\mu u^\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\alpha\nu\beta} u^\alpha u^\mu F^{\nu\beta} = 0$$

Ahora al hacer la contracción con u_β y usando el mismo razonamiento del campo eléctrico, tenemos que:

$$B_\mu u_\beta = -{}^* F_{\mu\beta} = -\frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\nu\mu\beta} F^{\alpha\nu} \rightarrow B^\mu u^\beta = -\frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\nu\mu\beta} F_{\alpha\nu}$$

$$B^\mu u^\beta \epsilon_{\gamma\delta\mu\beta} = -\frac{1}{2} \epsilon_{\gamma\delta\mu\beta} \epsilon^{\alpha\nu\mu\beta} F_{\alpha\nu} = -\frac{1}{2} 2\delta_{\gamma\delta}^{\alpha\nu} F_{\alpha\nu} = -F_{\gamma\delta}$$

Por lo tanto el tensor electromagnético viene dado por:

$$(4.47) \quad F_{\mu\nu} = (u_\mu E_\nu - u_\nu E_\mu) - \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} u^\alpha B^\beta$$

Ahora el tensor momento energía para el campo electromagnético viene dado por[134]:

$$(4.48) \quad T_{(em)}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left[F^{\alpha\mu} F^{\beta\nu} g_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} (F^{\delta\omega} F^{\sigma\epsilon} g_{\delta\sigma} g_{\omega\epsilon}) \right]$$

Sabemos que el segundo término viene dado por $-\frac{1}{4} F_{\beta\gamma} F^{\beta\gamma} = \frac{1}{2} (B^2 + E^2)$, para el primer término tenemos que:

$$g_{\alpha\delta} [(u^\alpha E^\mu - u^\mu E^\alpha) - \epsilon^{\alpha\mu\eta} u_\eta B_\eta] [(u^\delta E^\nu - u^\nu E^\delta) - \epsilon^{\delta\nu\lambda\pi} u_\lambda B_\pi] =$$

$$g_{\alpha\delta} [u^\alpha E^\mu u^\delta E^\nu - u^\alpha E^\mu u^\nu E^\delta - u^\alpha E^\mu \epsilon^{\delta\nu\lambda\pi} u_\lambda B_\pi - u^\mu E^\delta u^\delta E^\nu + u^\mu E^\alpha u^\nu E^\delta + u^\mu E^\alpha \epsilon^{\delta\nu\lambda\pi} u_\lambda B_\pi]$$

$$+ g_{\alpha\delta} [-\epsilon^{\alpha\mu\eta} u_\eta B_\eta u^\delta E^\nu + \epsilon^{\alpha\mu\eta} u_\eta B_\eta u^\nu E^\delta + \epsilon^{\alpha\mu\eta} u_\eta B_\eta \epsilon^{\delta\nu\lambda\pi} u_\lambda B_\pi]$$

Usando las propiedades encontradas anteriormente tenemos que:

$$g_{\alpha\delta} [(u^\alpha E^\mu - u^\mu E^\alpha) - \epsilon^{\alpha\mu\eta} u_\eta B_\eta] [(u^\delta E^\nu - u^\nu E^\delta) - \epsilon^{\delta\nu\lambda\pi} u_\lambda B_\pi]$$

$$= -E^\mu E^\nu + E^2 u^\mu u^\nu + 2u_\iota E_\delta B_\eta u^{(\mu} \epsilon^{\nu)\iota\delta\eta} - B^\mu B^\nu + B^2 u^\mu u^\nu$$

Donde $\epsilon^{\alpha\mu\eta}\epsilon_\alpha^{\nu\lambda\pi}u_\iota B_\eta u_\lambda B_\pi = -B^\mu B^\nu + B^2 u^\mu u^\nu$ dado que los índices μ, ν son fijos y los otros índices pueden tomar dichos valores. Ahora al combinar estos resultados tenemos lo siguiente:

$$T_{em}^{\mu\nu} = -E^\mu E^\nu + E^2 u^\mu u^\nu + 2u_\iota E_\delta B_\eta u^{(\mu} \epsilon^{\nu)\iota\delta\eta} - B^\mu B^\nu + B^2 u^\mu u^\nu + \frac{1}{2} (B^2 + E^2) (h^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu)$$

Donde se resume de la siguiente manera:

$$(4.49) \quad T_{em}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (B^2 + E^2) u^\mu u^\nu + \frac{1}{6} (B^2 + E^2) h^{\mu\nu} + 2u_\iota E_\delta B_\eta u^{(\mu} \epsilon^{\nu)\iota\delta\eta} + M^{\mu\nu}$$

Con:

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{3} (B^2 + E^2) h^{\mu\nu} - E^\mu E^\nu - B^\mu B^\nu$$

Ahora el tensor de momento energía general para un fluido real viene dada por (4.46), con la densidad de energía μ , P presión isotrópica, q flujo de energía con $q_\mu u^\mu = 0$, y presión anisotrópica con $M_{\mu\nu} u^\mu = 0$, $M_{\mu\nu} = M_{\nu\mu}$, $M_\mu^\mu = 0$.

Por lo que tenemos que:

$$\mu = \frac{1}{2} (B^2 + E^2), \quad P = \frac{1}{6} (B^2 + E^2), \quad q = u_\iota E_\delta B_\eta u^{(\mu} \epsilon^{\nu)\iota\delta\eta}, \quad \pi^{\mu\nu} = M^{\mu\nu}$$

Como se observa el tensor momento energía electromagnético cumple con las propiedades de un fluido general, donde se observa una componente de densidad de energía μ que es igual al cuadrado de los campos como se esperaba, un vector de flujo de energía que viene asociado al vector de Poynting, una presión tal que es igual a $P = \frac{1}{3}\mu$, y una componente de presión anisotrópica.

4.2. Ecuaciones de Maxwell en Espacios Curvos (Maxwell equations in Curves space-times)

Ahora, la idea es usar un formalismo de teoría de perturbaciones para encontrar las ecuaciones de Maxwell en espacios curvos, para esto se sigue la idea de [100], por medio de la aproximación covariante dada por [111]. Dada la definición del dual del tensor electromagnético, tenemos lo siguiente:

$$*F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}u_\mu E_\nu + (u^\alpha B^\beta - u^\beta B^\alpha)$$

Lo que se hace es descomponer las ecuaciones de Maxwell en partes como de tiempo y como de espacio, entonces de la ecuación homogénea de Maxwell se tiene que:

$$u_\alpha \left(*F^{\alpha\beta} \right)_{;\beta} = (u_\alpha *F^{\alpha\beta})_{;\beta} - u_{\alpha;\beta} *F^{\alpha\beta} = 0$$

Y sustituyendo el valor de $*F^{\alpha\beta}$ en la anterior ecuación se tiene que:

$$(u_\alpha \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\mu E_\nu + u_\alpha u^\alpha B^\beta - u_\alpha u^\beta B^\alpha)_{;\beta} - u_{\alpha;\beta} (\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\mu E_\nu + (u^\alpha B^\beta - u^\beta B^\alpha)) = 0$$

Dado que $u_\alpha \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\mu = u_\alpha B^\alpha = u_{\alpha;\beta} u^\alpha = 0$, tenemos lo siguiente:

$$B^\beta_{;\beta} - B^\beta \dot{u}_\beta + u_{\alpha;\beta} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\mu E_\nu = 0$$

Ahora como tenemos $u_{\alpha;\beta}$, colocamos la definición vista anteriormente, pero como esta contraída con el tensor antisimétrico solo la parte antisimétrica es diferente de cero es decir, la vorticidad que la vamos a definir ahora como:

$$\omega^\nu = -\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}u_\mu$$

Y donde de nuevo utilizamos que $u_\alpha \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\mu = 0$, ahora dada la proyección de la derivada covariante de B , $\nabla_\beta B^\alpha = h^\mu_\beta h^\alpha_\nu B^\nu_{;\mu}$:

$$\nabla_\beta B^\beta = h^\mu_\beta h^\beta_\nu B^\nu_{;\mu} = h^\mu_\nu B^\nu_{;\mu} = (\delta^\mu_\nu + u^\mu u_\nu) B^\nu_{;\mu} = B^\mu_{;\mu} - \dot{u}_\mu B^\mu$$

Donde $u^\mu u_\nu B^\nu_{;\mu} = u^\mu (u_\nu B^\nu)_{;\mu} - u^\mu u_{\nu;\mu} B^\nu = -\dot{u}_\mu B^\mu$.

Por lo tanto la ecuación queda de la siguiente forma:

$$(4.50) \quad \nabla_\beta B^\beta = 2\omega^\beta E_\beta$$

La cual es la generalización de $\nabla \cdot B = 0$, la fuente es vista como una carga magnética, pero es debida al movimiento relativo de los observadores que miden el campo magnético el cual produce una vorticidad[135].

Ahora volvemos a contraer, pero esta vez con el proyector:

$$h^\gamma_\alpha (\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\mu E_\nu + (u^\alpha B^\beta - u^\beta B^\alpha))_{;\beta} = 0$$

$$h_\alpha^\gamma \left(\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (u_{\mu;\beta} E_\nu + u_\mu E_{\nu;\beta}) + \left(u_{;\beta}^\alpha B^\beta + u^\alpha B_{;\beta}^\beta - u^\beta B_{;\beta}^\alpha - u_{;\beta}^\beta B^\alpha \right) \right) = 0$$

$$h_\alpha^\gamma \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_{\mu;\beta} E_\nu + \epsilon^{\mu\nu\gamma\beta} u_\mu E_{\nu;\beta} + u_{;\beta}^\gamma B^\beta - u_{;\beta}^\beta B^\gamma - h_\alpha^\gamma \dot{B}^\alpha = 0$$

Donde de nuevo utilizamos las condiciones que se han usado además de $h_\alpha^\gamma u^\alpha = 0$.

Nuevamente el primer término debido a la antisimetría, solo sobrevive la vorticidad además del otro término que incluye $\dot{u}_\mu u_\beta$:

$$h_\alpha^\gamma \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_{\mu;\beta} E_\nu = h_\alpha^\gamma \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \omega_{\mu\beta} E_\nu - h_\alpha^\gamma \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \dot{u}_\mu u_\beta E_\nu$$

Ahora el primer término es cero debido a que E, ω están sobre la hipersuperficie por lo que el único índice como de tiempo es α así que $\nabla^\alpha = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \omega_{\mu\beta} E_\nu$ es como de tiempo por lo que $h_\alpha^\gamma \nabla^\alpha = 0$. también podemos escribir los otros términos como sigue:

$$(\nabla \times E)^\gamma = \epsilon^{\gamma\beta\nu} E_{\nu;\beta} \rightarrow \epsilon^{\gamma\nu\mu\beta} u_\mu E_{\nu;\beta} = -(\nabla \times E)^\gamma$$

$$u_{;\beta}^\gamma B^\beta - u_{;\beta}^\beta B^\gamma = (u_{;\beta}^\gamma - \theta \delta_\beta^\gamma) B^\beta = \left(\sigma_\beta^\gamma + \omega_\beta^\gamma - \frac{2}{3} \theta \delta_\beta^\gamma \right) B^\beta$$

En esta última tenemos en cuenta que $u_\beta B^\beta = 0$. Ahora al colocar todo en la ecuación general obtenemos que [100]:

$$(4.51) \quad h_\alpha^\gamma \dot{B}^\alpha = \left(\sigma_\beta^\gamma + \omega_\beta^\gamma - \frac{2}{3} \theta \delta_\beta^\gamma \right) B^\beta - \epsilon^{\gamma\nu\mu\beta} u_\mu E_{\nu;\beta} - \epsilon^{\mu\gamma} \dot{u}_\mu E^\nu$$

Donde la última ecuación es la generalización de la ley de Faraday. Ahora para los términos con fuentes podemos utilizar las ecuaciones que encontramos pero con un signo $(-)$ debido a que en las anteriores ecuaciones les cambiamos el signo y además dado la transformación de $*F^{\alpha\beta} \rightarrow F^{\alpha\beta}$ cuando hacemos $E \rightarrow -B$ y $B \rightarrow E$ [99], se llega a:

$$(4.52) \quad \nabla_\beta E^\beta = 4\pi \varrho - 2\omega^\beta B_\beta$$

$$h_\alpha^\gamma \dot{E}^\alpha = \left(\sigma_\beta^\gamma + \omega_\beta^\gamma - \frac{2}{3} \theta \delta_\beta^\gamma \right) E^\beta$$

$$(4.53) \quad +\epsilon^{\gamma\nu\mu\beta}u_{\mu}B_{\nu;\beta} + \epsilon^{\mu\gamma}{}_{\nu}i_{\mu}B^{\nu} - 4\pi J^{\gamma}$$

Las cuales son la ley de Gauss y la ley de Ampere generalizadas. Donde se utilizó que $j^{\nu} = (\varrho, J^i)$ “4-corriente”, siendo ϱ la densidad de carga y J^i la 3-corriente.

Perturbaciones Cosmológicas en Robertson-Walker (RW)(Cosmological Perturbations in RW)

5.1. Ecuaciones de Campo de Einstein (Einstein Field Equations)

La geometría del espacio-tiempo viene descrita por un tensor de segundo rango simétrico $g_{\mu\nu}$. La evolución de la métrica viene gobernada por las ecuaciones de campo que relaciona $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas con el contenido de materia-energía. Las ecuaciones de campo vienen dadas por¹:

$$(5.54) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

La cual se deriva de la acción de Einstein-Hilbert[136]. La parte izquierda de la ecuación es interpretada como la evolución en la geometría del espacio-tiempo que depende a su vez del contenido de materia que se encuentra en la parte derecha de la ecuación. $R_{\mu\nu}$ es conocido como el tensor de Ricci y su contracción $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R$ es el escalar de Ricci, Λ es la constante cosmológica, G es la constante de gravitación y $T_{\mu\nu}$ es el tensor momento energía que cumple con $T_{\mu;\nu}^{\nu} = 0$, lo cual significa que la energía y el momento son localmente conservados[3, 137, 138].

5.2. Métrica de Robertson-Walker (RW) (Robertson-Walker metric)

Uno de los principios básicos del modelo estándar de la cosmología es que el universo es homogéneo e isotrópico estadísticamente a grandes escalas. Una evidencia de este principio la encontramos en las observaciones de la radiación cósmica de fondo que nos revela una anisotropía del universo en una parte en 10^{-5} [139, 140]. Si además se acepta el principio copernicano que nos dice que no existe un lugar privilegiado del universo, entonces se llega a la conclusión de que el universo es también homogéneo. Por lo que isotropía alrededor de cada punto (que significa un universo similar en cualquier dirección estadísticamente) junto con la hipótesis de que la densidad de materia es una función uniforme respecto a la posición, implica la homogeneidad del universo[139, 140, 141].

¹Donde $c = 1$, y la convención es: $(-, +, +, +)$

El universo puede ser descrito por un espacio-tiempo en 4 dimensiones (\mathcal{M}, g) dada por una variedad pseudo-Riemanniana \mathcal{M} , con una métrica Lorentziana g . El espacio-tiempo R-W admite que las superficies de tiempo constante sean homogéneas e isotrópicas y además es maximalmente simétrico[142]. Hay un tiempo coordenado t llamado tiempo cósmico tal que las superficies de $t = cte$, $\sum_t = \{x | (x, t) \in \mathcal{M}\}$ son subespacios maximalmente simétricos[143, 137, 136].

Para obtener una métrica con estas propiedades, debemos escoger el tiempo coordenado tal que las superficies como de espacio sean homogéneas e isotrópicas en un tiempo fijo. Así que cualquier condición inicial debe ser la misma en cada punto espacial y en cualquier dirección. Para esto escogemos un sistema donde el tiempo coordenado sea ortogonal al espacio y dicha condición se cumple con $g_{i0} = 0$. Isotropía requiere que un observador que se mueva a lo largo del tiempo debe medir una velocidad igual a cero del fluido². Por lo que los observadores deben ser comóviles (viajan con el fluido). Homogeneidad requiere que el intervalo de tiempo propio entre las superficies debe ser independiente de la posición por lo que $g_{00} = -1$, debe ser independiente de las coordenadas espaciales. Homogeneidad e isotropía requieren además que la distancia entre dos observadores cercanos sea proporcional a un factor de escala universal $a(t)$. Al exigir las anteriores condiciones, se tiene una métrica de la siguiente forma:

$$(5.55) \quad ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^j$$

Siendo γ_{ij} la métrica de la superficie espacial de curvatura constante K . Dependiendo del valor de K , el espacio es cerrado ($K > 0$), plano ($K = 0$), o puede ser abierto ($K < 0$)³. También se define el tiempo conforme τ como $d\tau = \frac{dt}{a}$, por lo que la métrica RW viene dada por:

$$(5.56) \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2(\tau) (-d\tau^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j)$$

La 3-métrica γ_{ij} puede tomar las siguientes formas de acuerdo a la geometría que se quiere estudiar:

$$(5.57) \quad \gamma_{ij} dx^i dx^j = \frac{\delta_{ij} dx^i dx^j}{(1 + \frac{1}{4} K \zeta^2)^2}$$

Donde:

²Es decir, ausencia de velocidades peculiares.

³Uno puede normalizar el valor de K tal que $K = 0, \pm 1$.

$$\zeta^2 = \delta_{ij} x^i x^j, \quad \delta_{ij} \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Y por otro lado se tiene:

$$(5.58) \quad \gamma_{ij} dx^i dx^j = dr^2 + \chi^2(r) (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2)$$

Donde:

$$\chi(r) = \begin{cases} r & \text{plano } K = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K} r & \text{cerrado } K > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh \sqrt{|K|} r & \text{abierto } K < 0 \end{cases}$$

5.3. Evolución del Backgroud (RW) (Evolution of RW metric)

Debido a la homogeneidad e isotropía [142, 144], el tensor momento energía solo puede tomar la siguiente forma:

$$(5.59) \quad T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\mu g^{00} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P g^{ij} \end{pmatrix}$$

De tal manera que en un universo homogéneo e isotrópico tenemos el contenido de materia comportándose como un fluido perfecto, donde $\mu(\tau)$ es la densidad de energía y $P(\tau)$ la presión. Debido a que no hay direcciones espaciales preferenciales en R.W, las cantidades cinemáticas (4.45), son cero excepto $\theta = 3\frac{a'}{a^2} = 3H$ el parámetro de expansión y H es el parámetro de Hubble. Usando las ecuaciones de campo (5.54) con la métrica de RW, y con el tensor de momento energía de fluido perfecto se llega a las ecuaciones de evolución del factor de escala, estas ecuaciones son conocidas como las ecuaciones de Friedmann:

$$(5.60) \quad \begin{aligned} H^2 + K &= \frac{8\pi G}{3} a^2 \mu + a^2 \frac{\Lambda}{3} \\ H' &= -\frac{4\pi G}{3} a^2 (\mu + 3P) + a^2 \frac{\Lambda}{3} \end{aligned}$$

La conservación de la energía dada por $T_{;\mu}^{\mu\nu} = 0$ conduce a:

$$(5.61) \quad \mu' + 3H(\mu + P) = 0$$

La cantidad $H = \frac{a'}{a^2}$ conocida como parámetro de Hubble es una cantidad positiva $H > 0$ dado que las observaciones demuestran que el universo se está expandiendo⁴[92]. Si se desprecia la curvatura y la densidad de energía es dominada por una componente con $w = \frac{P}{\mu} = cte$, al insertarla en las ecuaciones de Friedmann se obtiene que:

$$\begin{aligned} a &\sim \tau^{\frac{2}{1+3w}} & w = cte \neq 1 \\ a &\sim \tau^2 & w = 0 \text{ polvo} \\ a &\sim \tau & w = \frac{1}{3} \text{ radiación} \\ a &\sim \exp(H\tau) & w = -1 \Lambda \end{aligned}$$

La velocidad de sonido adiabático viene dada por:

$$(5.62) \quad c_s^2 = \frac{P'}{\mu'}$$

Y junto con la ecuación de conservación, se obtiene:

$$w' = 3H(1+w)(w - c_s^2)$$

Donde $w = cte$, si $w = c_s^2$ o $w = -1$.

Se encuentra también una densidad en la cual el universo tiene curvatura cero $K = 0$, $\Lambda = 0$, dado (5.60) se define la densidad crítica:

$$\mu_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G a^2}$$

El parámetro de energía Ω_I es una cantidad importante en cosmología y se define como fracción de energía de un componente del universo I , respecto a μ_{cr} :

$$\Omega_I(a) \equiv \frac{\mu_I}{\mu_{cr}} = \frac{8\pi G a^2}{3H^2} \mu_I$$

Por lo que al sustituir en la ecuación de Friedmann obtenemos una condición:

$$\sum_I \Omega_I(a) - 1 = \frac{K}{H^2}$$

Sus valores hoy son usados como parámetros cosmológicos:

⁴ $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ con $h \simeq 0,72 \pm 0,1$

$$\Omega_I^0(a=1) = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \mu_I^0$$

5.4. Perturbaciones en la métrica (R-W) (Perturbations in RW metric)

Ahora se aplicará la teoría de perturbaciones cosmológicas a un problema específico. Nuestra variedad de background es el espacio de Robertson Walker (R-W) plano, el cual es un espacio homogéneo e isotrópico, lo cual hace que este sea maximalmente simétrico. También vamos a trabajar con dimension $n = 4$. Este espacio lo podemos perturbar de la siguiente forma:

$$g = \mathbf{g} + \delta\mathbf{g}$$

Donde \mathbf{g} es la métrica de R.W dada por:

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = a(\tau)^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \delta_{ij} \end{pmatrix}$$

Y $\delta\mathbf{g}$ viene dada por las perturbaciones del espacio de R-W. Ahora en componentes el tensor métrico g viene dado por:

$$(5.63) \quad g_{00} = -a(\tau)^2 \left(1 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \psi^{(r)} \right)$$

$$(5.64) \quad g_{0i} = a(\tau)^2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \omega_i^{(r)}$$

$$(5.65) \quad g_{ij} = a(\tau)^2 \left[\left(1 - 2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \phi^{(r)} \right) \delta_{ij} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \chi_{ij}^{(r)} \right]$$

Donde τ es el tiempo conforme, $\chi_i^{(r)i} = 0^5$, las funciones $\psi^{(r)}$, $\omega_i^{(r)}$, $\phi^{(r)}$, $\chi_{ij}^{(r)}$ representan el r -ésimo orden de la perturbación de la métrica.

El tensor métrico contravariante se obtiene al imponer que $g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$. A segundo orden, tenemos:

⁵Los índices en esta notación son subidos y bajados con δ_{ij} y δ^{ij}

$$(5.66) \quad g^{00} = -a(\tau)^{-2} \left(1 - 2\psi^{(1)} - \psi^{(2)} + 4(\psi^{(1)})^2 - \omega^{(1)i}\omega_i^{(1)} \right)$$

$$(5.67) \quad g^{0i} = a(\tau)^{-2} \left(\omega^{(1)i} + \frac{1}{2}\omega^{(2)i} + 2(\phi^{(1)} - \psi^{(1)})\omega^{(1)i} - \omega^{(1)k}\chi_k^{(1)i} \right)$$

$$(5.68) \quad g^{ij} = a(\tau)^{-2} \left(\left(1 + 2\phi^{(1)} + \phi^{(2)} + 4(\phi^{(1)})^2 \right) \delta^{ij} - \chi^{(1)ij} \right) \\ - a(\tau)^{-2} \left(\frac{1}{2}\chi^{ij(2)} + \omega^{(1)i}\omega^{(1)j} + 4\phi^{(1)}\chi^{(1)ij} - \chi^{(1)ik}\chi_k^{(1)j} \right)$$

Ahora si utilizamos el teorema de Helmholtz el cual dice que si dado un vector que satisface:

$$\nabla \cdot \vec{V} = s \quad \nabla \times \vec{V} = \vec{c}$$

Donde las fuentes se cancelan en el infinito, se puede escribir \vec{V} como la suma de una parte irrotacional y la otra solenoidal. Entonces vamos a descomponer las funciones de la siguiente forma:

$$(5.69) \quad \omega_i^{(r)} = \partial_i \omega^{(r)\parallel} + \omega_i^{(r)\perp}$$

Donde $\omega_i^{(r)\perp}$ es un vector solenoidal ($\partial^i \omega_i^{(r)\perp} = 0$). Lo mismo para la parte espacial:

$$(5.70) \quad \chi_{ij}^{(r)} = D_{ij}\chi^{(r)\parallel} + \partial_i \chi_j^{(r)\perp} + \partial_j \chi_i^{(r)\perp} + \chi_{ij}^{(r)\top}$$

Donde $\chi^{(r)\parallel}$ es una función escalar, $\chi_j^{(r)\perp}$ es un vector solenoidal, $\partial^i \chi_{ij}^{(r)\top} = 0$ transversal, y $D_{ij} \equiv \partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \Delta$, además de que sea simétrico⁶. Los índices latinos van de 1 a 3. También consideremos las perturbaciones en la densidad, presión, velocidad y campo electromagnético:

$$(5.71) \quad \mu = \mu_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \delta^{(r)} \mu$$

⁶ ∂' es la derivada respecto a τ , ∂_i son derivadas en el 3-espacio y Δ es el laplaciano en la hipersuperficie.

$$(5.72) \quad p = p_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \delta^{(r)} p$$

$$(5.73) \quad u^\mu = \frac{1}{a} \left(\delta_0^\mu + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} v_{(r)}^\mu \right)$$

$$(5.74) \quad B^\mu = \frac{1}{a(\tau)^2} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} B_{(r)}^\mu \right), \quad E^\mu = \frac{1}{a(\tau)^2} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} E_{(r)}^\mu \right)$$

$$(5.75) \quad j^\mu = \frac{1}{a(\tau)} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} j_{(r)}^\mu \right), \quad j^\mu = (\varrho, J^i)$$

Donde la 4-velocidad esta sujeta a la condición de normalización $u^\mu u_\mu = -1$, también se tiene que $B^\mu = (0, B^i)$, $E^\mu = (0, E^i)$. La velocidad v^μ es la velocidad peculiar y podemos dividirla de la siguiente forma:

$$(5.76) \quad v_{(r)}^i = \partial^i v_{(r)}^\parallel + v_{(r)\perp}^i$$

Donde v^0 viene dada por:

$$u^\mu u_\mu = u^\mu u^\alpha g_{\alpha\mu} = -1 = \frac{1}{a^2} \left(\delta_0^\mu + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} v_{(r)}^\mu \right) g_{\alpha\mu} \left(\delta_0^\alpha + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} v_{(r)}^\alpha \right)$$

Usando entonces (5.63),(5.73) tenemos que a primer orden en r :

$$(5.77) \quad -1 = -1 - 2\psi^{(1)} - 2v_{(1)}^0 \Rightarrow v_{(1)}^0 = -\psi^{(1)}$$

Y a segundo orden:

$$(5.78) \quad v_{(2)}^0 = -\psi_{(2)} + 3\psi_{(1)}^2 + 2\omega_i^{(1)} v_{(1)}^i + v_i^{(1)} v_{(1)}^i$$

Por lo que a segundo orden tenemos:

$$(5.79) \quad u^\mu = [u^0, u^i] = \frac{1}{a} \left[1 - \psi^{(1)} - \frac{\psi^{(2)}}{2} + \frac{3\psi_{(1)}^2}{2} + \omega_i^{(1)} v_{(1)}^i + \frac{v_i^{(1)} v_{(1)}^i}{2}, v_{(1)}^i + \frac{v_{(2)}^i}{2} \right]$$

Ahora bajando los índices con el tensor métrico, obtenemos:

$$(5.80) \quad u_\mu = [u_0, u_i] = a \left[-1 - \psi^{(1)} - \frac{\psi^{(2)}}{2} + \frac{\psi_{(1)}^2}{2} - \frac{v_i^{(1)} v_{(1)}^i}{2}, \right. \\ \left. \omega_i^{(1)} - \omega_i^{(1)} \psi^{(1)} + \frac{\omega_i^{(2)}}{2} + v_i^{(1)} + \frac{v_i^{(2)}}{2} - 2v_i^{(1)} \phi^{(1)} + v_{(1)}^j \chi_{ij}^{(1)} \right]$$

Como se observó en los capítulos anteriores, las transformaciones gauge estaban determinadas por el campo vectorial ξ (3.42)(3.43), entonces escribamos nuevamente este vector como:

$$(5.81) \quad \xi_{(r)}^0 = \alpha^{(r)} \\ \xi_{(r)}^i = \partial^i \beta^{(r)} + d^{(r)i}$$

Con $\partial_i d^{(r)i} = 0$. A partir de esta escogencia podemos ver la interpretación de este vector (a primer orden): la función $\alpha^{(1)}$ determina la escogencias de la hipersuperficie de tiempo τ constante “[time-slicing](#)” y β , $d^{(1)i}$ seleccionan las coordenadas espaciales dentro de estas hipersuperficies.

5.4.1. Primer orden (First Order). De (3.40) se sigue que a primer orden la perturbación del tensor métrico transforma como⁷:

$$\delta \tilde{g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} + L_{\xi_1} g_{\mu\nu}^{(0)}$$

Donde $g^{(0)}$ es la métrica del background. Ahora al usar (3.2) y (5.63),(5.64),(5.65), tenemos que:

$$\tilde{\psi}_{(1)} = \psi_{(1)} + \frac{1}{a} (a\alpha_{(1)})' \\ \tilde{\omega}_i^{(1)} = \omega_i^{(1)} - \partial_i \alpha^{(1)} + \left(\partial_i \beta^{(1)} + d_i^{(1)} \right)' \\ \tilde{\phi}_{(1)} = \phi_{(1)} - \frac{1}{3} \Delta \beta_{(1)} - H \alpha_{(1)}$$

⁷Donde aquí empezamos a denotar las cantidades en el nuevo gauge con $\tilde{\alpha}$

$$\tilde{\chi}_{ij}^{(1)} = \chi_{ij}^{(1)} + 2D_{ij}\beta^{(1)} + \partial_j d_i^{(1)} + \partial_i d_j^{(1)}$$

Donde las podemos dividir como:

- Parte escalar:

$$\tilde{\psi}_{(1)} = \psi_{(1)} + \frac{1}{a} (a\alpha_{(1)})'$$

$$\tilde{\omega}^{(1)\parallel} = \omega^{(1)\parallel} - \alpha^{(1)} + \beta^{(1)'}$$

$$\tilde{\phi}_{(1)} = \phi_{(1)} - \frac{1}{3}\Delta\beta_{(1)} - H\alpha_{(1)}$$

$$\tilde{\chi}^{(1)\parallel} = \chi^{(1)\parallel} + 2\beta^{(1)}$$

- Parte vectorial:

$$\tilde{\chi}_i^{(1)\perp} = \chi_i^{(1)\perp} + d_i^{(1)}$$

$$\tilde{\omega}_i^{(1)\perp} = \omega_i^{(1)\perp} + d_i^{(1)'}$$

- Parte tensorial:

$$\tilde{\chi}_{ij}^{(1)\top} = \chi_{ij}^{(1)\top}$$

En donde podemos encontrar los invariantes gauge llamados potenciales de Bardeen:

$$(5.82) \quad \Psi^{(1)} = \psi^{(1)} + \frac{1}{a} \left(\mathcal{S}_{(1)}^{\parallel} a \right)'$$

$$(5.83) \quad \Phi^{(1)} = \phi^{(1)} + \frac{1}{6} \nabla^2 \chi^{(1)} - H \mathcal{S}_{(1)}^{\parallel}$$

Con $\mathcal{S}_{(1)}^{\parallel} \equiv \left(\omega^{\parallel(1)} - \frac{(\chi^{\parallel(1)})'}{2} \right)$ y $H = \frac{a'}{a}$. Para las cantidades escalares (5.71),(3.40),(3.2), y la velocidad (3.2),(3.40),(5.73):

$$(5.84) \quad \delta\tilde{\mu} = \delta\mu + \mu'_{(0)}\alpha_{(1)}$$

$$(5.85) \quad \delta\tilde{p} = \delta p + p'_{(0)}\alpha_{(1)}$$

$$(5.86) \quad \tilde{v}_{(1)}^0 = v_{(1)}^0 - \frac{1}{a} (a\alpha_{(1)})'$$

$$(5.87) \quad \tilde{v}_i^{(1)} = v_i^{(1)} - \left(\partial_i \beta^{(1)} + d_i^{(1)} \right)'$$

Parte escalar:

$$\delta\tilde{\mu} = \delta\mu + \mu'_{(0)}\alpha_{(1)}$$

$$\delta\tilde{p} = \delta p + p'_{(0)}\alpha_{(1)}$$

$$\tilde{v}_{(1)}^0 = v_{(1)}^0 - \frac{1}{a} (a\alpha_{(1)})'$$

$$\tilde{v}^{(1)\parallel} = v^{(1)\parallel} - \beta^{(1)'}'$$

Parte vectorial:

$$\tilde{v}_i^{(1)\perp} = v_i^{(1)\perp} - \left(d_i^{(1)} \right)'$$

$$(5.88) \quad \tilde{B}_{(1)}^i = B_{(1)}^i + \alpha^{(1)} \left((B_{(0)}^i)' - 2B_{(0)}^i H \right) - B_{(0)}^l \partial_l (\partial^i \beta_{(1)} + d_{(1)}^i)$$

$$(5.89) \quad \tilde{E}_{(1)}^i = E_{(1)}^i + \alpha^{(1)} \left((E_{(0)}^i)' - 2E_{(0)}^i H \right) - E_{(0)}^l \partial_l (\partial^i \beta_{(1)} + d_{(1)}^i)$$

Y obtenemos los invariantes gauge:

$$(5.90) \quad \Delta_{\mu}^{(1)} = \delta\mu + \mu'_{(0)}\mathcal{S}_{(1)}^{\parallel}$$

$$(5.91) \quad \Delta_P^{(1)} = \delta P + P'\mathcal{S}_{(1)}^{\parallel}$$

$$(5.92) \quad \Delta^{(1)} = \Delta_{\mu,P}^{(1)} + \frac{\mu'_{(0)}}{H}\Phi^{(1)}$$

$$(5.93) \quad v^{(1)} \equiv v^{(1)} + \left(\frac{1}{2} \chi^{\parallel(1)} \right)'$$

Para cantidades vectoriales:

$$(5.94) \quad v_{(1)}^i \equiv v_{(1)}^i + \left(\chi_{\perp(1)}^i \right)'$$

$$(5.95) \quad \vartheta_i^{(1)} = \omega_i^{(1)\perp} - \left(\chi_i^{(1)\perp} \right)'$$

$$(5.96) \quad \mathcal{V}_{(1)}^i \equiv \omega_{(1)}^i + v_{(1)}^i$$

Las cantidades tensoriales son invariantes gauge por definición:

$$(5.97) \quad \tilde{\Pi}_{ij}^{(1)} = \Pi_{ij}^{(1)}$$

El tensor de Einstein a primer orden en términos de cantidades invariantes gauge es de la forma:

$$(5.98) \quad \delta G_0^0 = \frac{2}{a^2} \left(3H \left(H\Psi_{(1)} + \Phi'_{(1)} \right) - \partial_k \partial^k \Phi^{(1)} - 3H \left(H^2 - H' \right) \mathcal{S}_{(1)}^{\parallel} \right)$$

$$\delta G_0^i = \frac{2}{a^2} \left(\partial^i \left(H\Psi_{(1)} + \Phi'_{(1)} + (H^2 - H') \frac{1}{2} \chi_{(1)}^{\parallel'} \right) \right)$$

$$(5.99) \quad - \left(H^2 - H' - \frac{1}{4} \partial_k \partial^k \right) \vartheta_{(1)}^i - (H^2 - H') \chi_{(1)}^{i'}$$

$$(5.100) \quad \delta G_i^0 = \frac{2}{a^2} \left(\partial_i \left(-H\Psi_{(1)} - \Phi'_{(1)} + (H^2 - H') \mathcal{S}_{(1)}^{\parallel} \right) + \frac{1}{4} \partial_k \partial^k \vartheta_i^{(1)} \right)$$

$$\delta G_j^i = \frac{2}{a^2} \left[\left[(H^2 + 2H') \Psi_{(1)} + H \left(\Psi'_{(1)} + 2\Phi'_{(1)} \right) - \frac{1}{2} \partial_k \partial^k \left(\Phi_{(1)} - \Psi_{(1)} \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. + \Phi''_{(1)} + (H'' - HH' - H^3) \mathcal{S}_{(1)}^{\parallel} \right] \delta_j^i + \frac{1}{2} \partial_j \partial^i \left(\Phi_{(1)} - \Psi_{(1)} \right) - \frac{H}{2} \left(\partial^i \vartheta_j^{(1)} + \partial_j \vartheta_i^{(1)} \right)$$

$$(5.101) \quad -\frac{1}{4} \left(\partial^i \vartheta_j^{(1)} + \partial_j \vartheta_{(1)}^i \right)' + \frac{H}{2} \left(\chi_{j(1)}^{i\top} \right)' + \frac{1}{4} \left(\chi_{j(1)}^{i\top} \right)'' - \frac{1}{4} \partial^k \partial_k \chi_{j(1)}^{i\top} \Big]$$

Las ecuaciones de consevación vienen dadas por:

$$(5.102) \quad \mathcal{T}_{\beta;\alpha}^\alpha = T_{\beta;\alpha}^{\alpha(f)} + T_{\beta;\alpha}^{\alpha(E.M)} = 0$$

(Ver siguiente capítulo la forma explícita del tensor electromagnético). Donde:

$$(5.103) \quad T_{\beta;\alpha}^{\alpha(E.M)} = F_{\beta\alpha} j^\alpha$$

La ecuación de continuidad viene dada por: $\mathcal{T}_{0;\alpha}^\alpha = 0$:

$$(5.104) \quad \begin{aligned} & \left(\Delta^{(1)} \right)' + 3H \left(\Delta_P^{(1)} + \Delta^{(1)} \right) - 3 \left(\Phi^{(1)} \right)' (P_0 + \mu_0) + (P_0 + \mu_0) \nabla^2 v^{(1)} \\ & - \left((\mu_{(0)})' \mathcal{S}_{(1)}^{\parallel} \right)' - 3H (P_{(0)} + \mu_{(0)})' \mathcal{S}_{(1)}^{\parallel} + (P_0 + \mu_0) \left(-\frac{1}{2} \nabla^2 \chi^{(1)} + 3H \mathcal{S}_{(1)}^{\parallel} \right)' \\ & - (P_0 + \mu_0) \nabla^2 \left(\frac{1}{2} \chi^{\parallel(1)} \right)' = -a^4 \left(E_i^{(1)} J_{(0)}^i + E_i^{(0)} J_{(1)}^i \right) \end{aligned}$$

Y la ecuación de Navier-Stokes $\mathcal{T}_{i;\alpha}^\alpha = 0$:

$$(5.105) \quad \begin{aligned} & \left(\mathcal{V}_i^{(1)} \right)' + \frac{(\mu_{(0)} + P_{(0)})'}{(\mu_{(0)} + P_{(0)})} \mathcal{V}_i^{(1)} - 4H \mathcal{V}_i^{(1)} + \partial_i \Psi^{(1)} - \frac{\partial_i (\Delta_P^{(1)} - (P_{(0)})' \mathcal{S}_{(1)}^{\parallel}) + \partial_i \Pi_i^{(1)\mu}}{(\mu_{(0)} + P_{(0)})} \\ & - \partial_i \frac{1}{a} \left(\mathcal{S}_{(1)}^{\parallel} a \right)' = \frac{-a^4}{(\mu_{(0)} + P_{(0)})} \left(E_i^{(1)} \varrho_{(0)} + \epsilon_{ijk} J_{(0)}^j B_k^{(1)} + E_i^{(0)} \varrho_{(1)} + \epsilon_{ijk} J_{(1)}^j B_k^{(0)} \right) \end{aligned}$$

Hasta aquí hemos escrito el tensor de Einstein y las ecuaciones de conservación a primer orden en términos de invariantes gauge, sin embargo $\mathcal{S}_{(1)}^{\parallel}$ es la parte que depende del gauge por lo tanto al estudiar un problema específico debemos escoger un gauge en particular. Esto se debe a que el sistema de ecuaciones no es cerrado y por lo tanto debemos fijar algunas cantidades geométricas [83].

5.4.2. Introducción a Segundo orden. (Second Order. Introduction). Ahora dado que en la mayoría de casos (3.34) es difícil de resolver exactamente, debemos buscar aproximaciones a la solución en algún orden k . Si hacemos una variación de (3.34) a primer orden en λ obtenemos que la ecuación viene dada en términos de δg_λ y $\delta \tau_\lambda$, pero

si hacemos la variación dos veces obtenemos que a primer orden λ queda en términos de $\delta^2 g_\lambda$ y $\delta^2 \tau_\lambda$, pero a segundo orden λ^2 queda en términos de δg_λ y $\delta \tau_\lambda$:

$$(5.106) \quad L [\delta^2 g_\lambda] = L [\delta^2 \tau_\lambda] + S [\delta g_\lambda, \delta \tau_\lambda]$$

Donde los términos a segundo orden son conocidos como “término de fuente”. Como veremos en la siguiente sección, en un espacio maximalmente simétrico podemos encontrar una generalización de las ecuaciones de campo a segundo orden. Al encontrar las ecuaciones perturbadas a segundo orden, podemos encontrar una situación similar a la última ecuación donde el lado izquierdo tenemos las variables geométricas a segundo orden y a la derecha la parte de materia a segundo orden mas términos acoplados a primer orden geométricos y de materia tal que su producto sea a segundo orden (ej. $\delta g_\lambda \delta g_\lambda$ ó $\delta \tau_\lambda \delta \tau_\lambda$). Para demostrar esto podemos empezar definiendo una cantidad $\delta^2 T$ [145]:

$$(5.107) \quad \delta^2 T \doteq \delta^2 \Upsilon - 2L_{\mathfrak{X}} (\delta \Upsilon) + L_{\mathfrak{X}}^2 \Upsilon_0$$

Donde Υ_0 es una variable en el background (ya sea la densidad o el tensor métrico), $\delta \Upsilon$ es la misma variable a primer orden y $\delta^2 \Upsilon$ es la misma variable a segundo orden. Esta cantidad se encuentra observando la ley de transformación de las cantidades a segundo orden Eq.(3.41), Ahora si hacemos la diferencia de $\delta^2 T$ en dos campos vectoriales \mathfrak{X} y \mathfrak{Y} , utilizando la ultima ecuacion, se encuentra:

$$(5.108) \quad \delta^2 T^{\mathfrak{Y}} - \delta^2 T^{\mathfrak{X}} = \delta^2 \Upsilon^{\mathfrak{Y}} - \delta^2 \Upsilon^{\mathfrak{X}} - 2L_{\mathfrak{Y}} (\delta \Upsilon^{\mathfrak{Y}}) + 2L_{\mathfrak{X}} (\delta \Upsilon^{\mathfrak{X}}) + L_{\mathfrak{X}}^2 \Upsilon_0 - L_{\mathfrak{X}}^2 \Upsilon_0$$

Y ahora reemplazamos Ec.(3.41) para sustituir el valor de $\delta^2 \Upsilon^{\mathfrak{Y}} - \delta^2 \Upsilon^{\mathfrak{X}}$, asi que se obtiene:

$$(5.109) \quad \begin{aligned} \delta^2 \Upsilon^{\mathfrak{Y}} - \delta^2 \Upsilon^{\mathfrak{X}} &= 2L_{\xi_1} (\delta \Upsilon^{\mathfrak{X}}) + (L_{\xi_1}^2 + L_{\xi_2}) \Upsilon_0 \\ -2L_{\mathfrak{X}+\xi_1} (\delta \Upsilon^{\mathfrak{X}} + L_{\xi_1} \Upsilon_0) + 2L_{\mathfrak{X}} (\delta \Upsilon^{\mathfrak{X}}) + L_{\mathfrak{X}+\xi_1}^2 \Upsilon_0 - L_{\mathfrak{X}}^2 \Upsilon_0 \end{aligned}$$

Donde se utilizo Ec.(3.40) y Ec.(3.42). Ahora utilizando el hecho que:

$$L_{\mathfrak{X}+\xi_1}^2 \Upsilon_0 = (L_{\mathfrak{X}} \Upsilon_0 + L_{\xi_1} \Upsilon_0)^2 = L_{\mathfrak{X}}^2 \Upsilon_0 + L_{\xi_1}^2 \Upsilon_0 + L_{\mathfrak{X}\xi_1} \Upsilon_0 + L_{\xi_1 \mathfrak{X}} \Upsilon_0$$

Se tiene que:

$$(5.110) \quad \delta^2 T^{\mathfrak{y}} - \delta^2 T^{\mathfrak{x}} = L_{\sigma} \Upsilon_0$$

Con:

$$(5.111) \quad \sigma \doteq \xi_2 + [\xi_1, \mathfrak{X}]$$

Si comparamos Ec.(5.110) con Ec.(3.40), encontramos que son similares pero en este caso se tiene que $\xi_1 \rightarrow \sigma$, aqui observamos que σ tiene una parte que depende del campo vectorial a segundo orden ξ_2 (parte invariante) y otra que depende del gauge \mathfrak{X} ⁸. Por lo tanto podemos hacer la generalización de perturbaciones de primer a segundo orden, solamente que en este último aparecen acoples de variables perturbadas a primer orden [146, 147].

5.4.2.1. *Ecuaciones a segundo orden (Second order equations)*. A segundo orden tenemos dado (3.41) que:

$$(5.112) \quad \delta^2 \tilde{g}_{\mu\nu} = \delta^2 g_{\mu\nu} + 2L_{\xi_1} \delta g_{\mu\nu} + L_{\xi_1}^2 g_{\mu\nu}^{(0)} + L_{\xi_2} g_{\mu\nu}^{(0)}$$

Se obtiene la transformación de las variables de perturbación:

$$(5.113) \quad \begin{aligned} \tilde{\psi}^{(2)} = & \psi^{(2)} + \alpha'_{(2)} + H\alpha_{(2)} + \{2\alpha^{(1)'} (2\psi_{(1)} + \alpha'_{(1)}) \\ & + \alpha^{(1)} \left[2(\psi'_{(1)} + 2H\psi_{(1)}) + \alpha''_{(1)} + 5H\alpha'_{(1)} + \left(\frac{a''}{a} + H^2\right) \alpha_{(1)} \right] \\ & + \xi_{(1)}^i (2\partial_i \psi^{(1)} + \partial_i \alpha^{(1)'} + H\partial_i \alpha^{(1)}) + \xi_{(1)}^{i'} \left(\partial_i \alpha^{(1)} - \xi_i^{(1)'} - 2\omega_i^{(1)} \right) \} \end{aligned}$$

El cual lo podemos descomponer como [147]:

$$(5.114) \quad \tilde{\psi}^{(2)} = \psi^{(2)} + \alpha'_{(2)} + H\alpha_{(2)} + \mathcal{T}_{\psi}$$

Donde \mathcal{T}_{ψ} es la parte dentro de los corchetes de (5.113). Se observa por lo tanto que las cantidades a segundo orden pueden ser divididas como una parte a segundo orden que

⁸Este tratamiento es válido si estos campos vectoriales están definidos en la variedad y probar además la existencia de funciones de Green definidas en el espacio para poder garantizar la correspondencia uno a uno del conjunto de variables geométricas, es decir este tratamiento es elaborado en un espacio maximalmente simétrico[145].

tiene la misma forma funcional que las transformaciones a primer orden, mas otra parte que depende de acoples a primer orden[146]. Así que hacemos lo mismo para las otras variables:

$$\begin{aligned}
& \tilde{\omega}_i^{(2)} = \omega_i^{(2)} - \partial_i \alpha^{(2)} + \xi_i^{(2)'} + \{-4\psi^{(1)} \partial_i \alpha^{(1)} \\
& + \alpha^{(1)} [2(\omega_i^{(1)'} + 2H\omega_i^{(1)}) - \partial_i \alpha^{(1)'} + \xi_i^{(1)''} - 4H(\partial_i \alpha^{(1)'} - \xi_i^{(1)'})] \\
& + \xi_{(1)}^j (2\partial_j \omega_i^{(1)} - \partial_i \partial_j \alpha^{(1)} + \partial_j \xi_i^{(1)'}) + \alpha'_{(1)} (2\omega_i^{(1)} - 3\partial_i \alpha^{(1)} + \xi_i^{(1)'}) \\
(5.115) \quad & + \partial_i \xi_{(1)}^j (2\omega_j^{(1)} - \partial_j \alpha^{(1)}) + \xi_{(1)}^{j'} (-4\phi^{(1)} \delta_{ij} + 2\chi_{ij}^{(1)} + 2\partial_i \xi_j^{(1)} + \partial_j \xi_i^{(1)}) \}
\end{aligned}$$

Haciendo la descomposición anterior:

$$(5.116) \quad \tilde{\omega}_i^{(2)} = \omega_i^{(2)} - \partial_i \alpha^{(2)} + \xi_i^{(2)'} + \mathcal{T}_\omega$$

Donde \mathcal{T}_ω son los términos que se encuentran dentro del corchete de (5.115).

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}^{(2)} = & \phi^{(2)} - H\alpha_{(2)} - \frac{1}{3} \nabla^2 \beta_{(2)} + \left\{ \alpha^{(1)} \left[2(\phi'_{(1)} + 2H\phi_{(1)}) - \left(\frac{a''}{a} + H^2 \right) \alpha_{(1)} - H\alpha'_{(1)} \right] \right. \\
& - \frac{1}{3} (-4\phi_{(1)} + \alpha_{(1)} \partial_0 + \xi_{(1)}^i \partial_i + 4H\alpha_{(1)}) \nabla^2 \beta_{(1)} - \frac{1}{3} (2\omega_{(1)}^i - \alpha_{(1)}^i + \xi_{(1)}^{i'}) \partial_i \alpha^{(1)} \\
(5.117) \quad & \left. + \xi_{(1)}^i (2\partial_i \phi^{(1)} - H\partial_i \alpha^{(1)}) - \frac{1}{3} (2\chi_{ij}^{(1)} + \partial_j \xi_i^{(1)} + \partial_i \xi_j^{(1)}) \right\}
\end{aligned}$$

Nuevamente tenemos que:

$$(5.118) \quad \tilde{\phi}^{(2)} = \phi^{(2)} - H\alpha_{(2)} - \frac{1}{3} \nabla^2 \beta_{(2)} + \mathcal{T}_\phi$$

Donde \mathcal{T}_ϕ son términos dentro del corchete de (5.117).

$$\tilde{\chi}_{ij}^{(2)} = \chi_{ij}^{(2)} + 2 \left(\partial_{(j} d_{i)}^{(2)} + D_{ij} \beta_{(2)} \right) + \left\{ 2 \left(\chi_{ij}^{(1)'} + 2H\chi_{ij}^{(1)} \right) \alpha_{(1)} + 2\partial_k \chi_{ij}^{(1)} \xi_{(1)}^k \right\}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \left(4H\alpha_{(1)} + \xi_{(1)}^k \partial_k + \alpha_{(1)} \partial_0 - 4\phi_{(1)} \right) \left(\partial_{(j} d_{i)}^{(1)} + D_{ij} \beta_{(1)} \right) \\
& +2 \left(\left(2\omega_{(i)}^{(1)} - \partial_{(i} \alpha^{(1)} + \xi_{(i)}^{(1)'} \right) \partial_{j)} \alpha^{(1)} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \left(2\omega_{(1)}^k - \partial^k \alpha_{(1)} + \xi_{(1)}^{k'} \right) \partial_k \alpha^{(1)} \right) \\
(5.119) \quad & +2 \left(\left(2\chi_{(ik)}^{(1)} + \xi_{k,(i)}^{(1)} + \partial_k \xi_{(i)}^{(1)} \right) \partial_{j)} \xi^{(1)k} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \left(2\chi_{lk}^{(1)} + \partial_l \xi_k^{(1)} + \partial_k \xi_l^{(1)} \right) \partial^l \xi_{(1)}^k \right) \Big\}
\end{aligned}$$

Teniendo que:

$$(5.120) \quad \tilde{\chi}_{ij}^{(2)} = \chi_{ij}^{(2)} + 2 \left(\partial_{(j} d_{i)}^{(2)} + D_{ij} \beta_{(2)} \right) + \mathcal{T}_\chi$$

Donde \mathcal{T}_χ son términos dentro del corchete de (5.119).

Ahora para la densidad de energía tenemos lo siguiente:

$$\delta^{(2)} \tilde{\mu} = \delta^{(2)} \mu + \left(L_{\xi(2)} + L_{\xi(1)}^2 \right) \mu_{(0)} + 2L_{\xi(1)} \delta \mu$$

Por lo tanto se obtiene:

$$\begin{aligned}
(5.121) \quad \delta^{(2)} \tilde{\mu} = & \delta^{(2)} \mu + \mu'_{(0)} \alpha_{(2)} + \left\{ \alpha_{(1)} \left(\mu''_{(0)} \alpha_{(1)} + \mu'_{(0)} \alpha'_{(1)} + 2\delta \mu' \right) \right. \\
& \left. + \xi_{(1)}^i \left(\mu'_{(0)} \partial_i \alpha^{(1)} + 2\partial_i \delta \mu \right) \right\}
\end{aligned}$$

Quedando como:

$$(5.122) \quad \delta^{(2)} \tilde{\mu} = \delta^{(2)} \mu + \mu'_{(0)} \alpha_{(2)} + \mathcal{T}_\mu$$

Donde \mathcal{T}_μ es el término en el corchete de la (5.121).

$$\begin{aligned}
(5.123) \quad \delta^{(2)} \tilde{p} = & \delta^{(2)} p + p'_{(0)} \alpha_{(2)} + \left\{ \alpha_{(1)} \left(p''_{(0)} \alpha_{(1)} + p'_{(0)} \alpha'_{(1)} + 2\delta p' \right) \right. \\
& \left. + \xi_{(1)}^i \left(p'_{(0)} \partial_i \alpha^{(1)} + 2\partial_i \delta p \right) \right\}
\end{aligned}$$

Quedando:

$$(5.124) \quad \delta^{(2)}\tilde{p} = \delta^{(2)}p + p'_{(0)}\alpha_{(2)} + \mathcal{T}_P$$

Donde \mathcal{T}_P son los términos ubicados dentro del corchete de (5.123).

Para la 4-velocidad se tiene nuevamente con la condición $u^\alpha u_\alpha = -1$:

$$\delta^{(2)}\tilde{u}^\alpha = \delta^{(2)}u^\alpha + \left(L_{\xi_{(2)}} + L_{\xi_{(1)}}^2 \right) u_{(0)}^\alpha + 2L_{\xi_{(1)}}\delta u^\alpha$$

En este caso para cualquier campo vectorial podemos encontrar dicha transformación como:

$$(5.125) \quad \begin{aligned} \delta^{(2)}\tilde{\Xi}^\mu &= \delta^{(2)}\Xi^\mu + \partial_\nu\Xi^\mu\xi_{(2)}^\nu - \Xi^\nu\partial_\nu\xi_{(2)}^\mu \\ &- 2\partial_\nu\Xi^\lambda\partial_\lambda\xi_{(1)}^\mu\xi_{(1)}^\nu - \Xi^\nu\partial_\nu\partial_\lambda\xi_{(1)}^\mu\xi_{(1)}^\lambda + \Xi^\nu\partial_\nu\xi_{(1)}^\lambda\partial_\lambda\xi_{(1)}^\mu + 2\partial_\nu\delta^{(1)}\Xi^\mu\xi^\nu \\ &+ \xi_{(1)}^\lambda \left(\partial_\nu\partial_\lambda\Xi^\mu\xi_{(1)}^\nu + \partial_\nu\Xi^\mu\partial_\lambda\xi_{(1)}^\nu \right) - 2\delta^{(1)}\Xi^\nu\partial_\nu\xi^\mu \end{aligned}$$

Por lo tanto se obtiene:

$$(5.126) \quad \begin{aligned} \tilde{v}_{(2)}^0 &= v_{(2)}^0 - H\alpha_{(2)} - \alpha'_{(2)} + \left\{ \alpha_{(1)} \left(2(v_{(1)}^0 - Hv_{(1)}^0) + \left(2H^2 - \frac{a''}{a} \right) \alpha_{(1)} + H\alpha'_{(1)} - \alpha''_{(1)} \right) \right. \\ &\left. + \xi_{(1)}^i \left(2\partial_i v_{(1)}^0 - H\partial_i\alpha^{(1)} - \partial_i\alpha^{(1)'} \right) + \alpha'_{(1)} \left(\alpha'_{(1)} - 2v_{(1)}^0 \right) - 2\partial_i\alpha^{(1)}v_{(1)}^i + \partial_i\alpha^{(1)}\xi_{(1)}^{i'} \right\} \end{aligned}$$

Quedando:

$$(5.127) \quad \tilde{v}_{(2)}^0 = v_{(2)}^0 - H\alpha_{(2)} - \alpha'_{(2)} + \mathcal{T}_{v^0}$$

Donde \mathcal{T}_{v^0} son los términos dentro del corchete de la (5.126).

$$(5.128) \quad \begin{aligned} \tilde{v}_{(2)}^i &= v_{(2)}^i - \partial^i\beta'_{(2)} - d_{(2)}^{i'} + \left\{ \alpha_{(1)} \left(2(v_{(1)}^i - Hv_{(1)}^i) - (\xi_{(1)}^{i''} - 2H\xi_{(1)}^{i'}) \right) \right. \\ &\left. + \xi_{(1)}^j \left(2\partial_j v_{(1)}^i - \partial_j\xi_{(1)}^{i'} \right) - \partial_j\xi_{(1)}^i \left(2v_{(1)}^j - \xi_{(1)}^{j'} \right) + (2\psi_{(1)} + \alpha'_{(1)}) \right\} \end{aligned}$$

Con:

$$(5.129) \quad \tilde{v}_{(2)}^i = v_{(2)}^i - \partial^i \beta'_{(2)} - d_{(2)}^{i'} + \mathcal{T}_{v^i}$$

Donde \mathcal{T}_{v^i} son los términos dentro del corchete de (5.128).

Por último:

$$(5.130) \quad \tilde{\Pi}_{ij}^{(2)} = \Pi_{ij}^{(2)} + \mathcal{T}_{\Pi}$$

Con:

$$\mathcal{T}_{\Pi} = 2\Pi_{ij}^{(1)'} \alpha_{(1)} + 2\partial_l \Pi_{ij}^{(1)} (\partial^i \beta_{(1)} + d_{(1)}^i) - 2\Pi_{lj}^{(1)} (\partial^l \partial^i \beta_{(1)} + \partial^i d_{(1)}^l) - 2\Pi_{il}^{(1)} (\partial^l \partial^j \beta_{(1)} + \partial^j d_{(1)}^l)$$

Donde $\Pi_{ij}^{(1)} \equiv \Pi_{ij}^{(1)fl} + \Pi_{ij}^{(1)EM}$. Para el campo magnético, se tiene a segundo orden lo siguiente:

$$(5.131) \quad \begin{aligned} \tilde{B}_{(2)}^i &= B_{(2)}^i + \alpha^{(2)} \left((B_{(0)}^i)' - 2B_{(0)}^i H \right) - B_{(0)}^l \partial_l (\partial^i \beta_{(2)} + d_{(2)}^i) \\ &+ \left\{ (\alpha^{(1)})' \alpha^{(1)} \left((B_{(0)}^i)' - 2B_{(0)}^i H \right) + (\alpha^{(1)})^2 \left((B_{(0)}^i)'' + 2B_{(0)}^i \left(3H^2 - \frac{a''}{a} \right) \right) \right. \\ &+ \partial_l \alpha^{(1)} (\partial^l \beta_{(1)} + d_{(1)}^l) \left((B_{(0)}^i)' - 2B_{(0)}^i H \right) - 2\alpha^{(1)} \partial_j (\partial^l \beta_{(1)} + d_{(1)}^l) \left((B_{(0)}^j)' - 2B_{(0)}^j H \right) \\ &- \alpha^{(1)} \frac{B_{(0)}^j}{a^2} \partial_j (\partial^i \beta_{(1)} + d_{(1)}^i)' - \frac{B_{(0)}^j}{a^2} (\partial^l \beta_{(1)} + d_{(1)}^l) \partial_j \partial_l (\partial^i \beta_{(1)} + d_{(1)}^i) \\ &+ \partial_j \alpha^{(1)} (\partial^i \beta_{(1)} + d_{(1)}^i)' \frac{B_{(0)}^j}{a^2} + \frac{B_{(0)}^j}{a^2} \partial_l (\partial^i \beta_{(1)} + d_{(1)}^i) \partial_j (\partial^l \beta_{(1)} + d_{(1)}^l) \\ &\left. + 2\alpha^{(1)} \left((B_{(1)}^i)' - 2B_{(1)}^i H \right) - 2\frac{B_{(1)}^j}{a^2} \partial_j (\partial^i \beta_{(1)} + d_{(1)}^i) + 2\frac{\partial_l B_{(1)}^i}{a^2} (\partial^l \beta_{(1)} + d_{(1)}^l) \right\} \end{aligned}$$

Donde podemos escribirlo de la siguiente forma:

$$(5.132) \quad \tilde{B}_{(2)}^i = B_{(2)}^i + \alpha^{(2)} \left((B_{(0)}^i)' - 2B_{(0)}^i H \right) - B_{(0)}^l \partial_l (\partial^i \beta_{(2)} + d_{(2)}^i) + \mathcal{T}_B$$

Donde \mathcal{T}_B son los terminos dentro de los corchetes de (5.131).

Similar se tiene para el campo eléctrico:

$$(5.133) \quad \tilde{E}_{(2)}^i = E_{(2)}^i + \alpha^{(2)} \left((E_{(0)}^i)' - 2E_{(0)}^i H \right) - E_{(0)}^l \partial_l (\partial^i \beta_{(2)} + d_{(2)}^i) + \mathcal{T}_E$$

Los invariantes gauge se encuentran de la misma forma que a primer orden pero esta vez se observa términos que dependen de acoples o productos de variables a primer orden. Por lo tanto se encuentra:

$$(5.134) \quad \Psi^{(2)} \equiv \psi^{(2)} + \frac{1}{a} \left(\mathcal{S}_{(2)}^{\parallel} a \right)' + \mathcal{T}(\Psi^{(1)}) \mathcal{O}^{(1)}$$

$$(5.135) \quad \Phi^{(2)} \equiv \phi^{(2)} + \frac{1}{6} \nabla^2 \chi^{(2)} - H \mathcal{S}_{(2)}^{\parallel} + \mathcal{T}(\Phi^{(1)}) \mathcal{O}^{(1)}$$

$$(5.136) \quad \Delta^{(2)} \equiv \mu_{(2)} + (\mu_{(0)})' \mathcal{S}_{(2)}^{\parallel} + \mathcal{T}(\Delta^{(1)}) \mathcal{O}^{(1)}$$

$$(5.137) \quad v^{(2)} \equiv v^{(2)} + \left(\frac{1}{2} \chi^{\parallel(2)} \right)' + \mathcal{T}(v^{(2)}) \mathcal{O}^{(1)}$$

Donde $\mathcal{T}(\Psi^{(1)}) \mathcal{O}^{(1)}$ son términos que surgen debido a las fuentes o a los acoples que aparecen en las transformaciones de las variables a segundo orden. Para modos escalares con $\mathcal{S}_{(2)}^{\parallel} \equiv \left(\omega^{\parallel(2)} - \frac{(\chi^{\parallel(2)})'}{2} \right) + \mathcal{T}(\mathcal{S}_{(1)}^{\parallel}) \mathcal{O}^{(1)}$. Y para los modos vectoriales:

$$(5.138) \quad v_{(2)}^i \equiv v_{(2)}^i + \left(\chi_{\perp(2)}^i \right)' + \mathcal{T}(v_{(1)}^i) \mathcal{O}^{(1)}$$

$$(5.139) \quad \vartheta_i^{(2)} \equiv \omega_i^{(2)} - \left(\chi_i^{\perp(2)} \right)' + \mathcal{T}(\vartheta_i^{(1)}) \mathcal{O}^{(1)}$$

$$(5.140) \quad \mathcal{V}_{(2)}^i \equiv \omega_{(2)}^i + v_{(2)}^i + \mathcal{T}(\mathcal{V}_{(1)}^i) \mathcal{O}^{(1)}$$

$$(5.141) \quad \mathcal{B}_{(2)}^i \equiv B_{(2)}^i + \frac{2}{a^2} B_{(1)}^j \partial_j \chi_{(1)\perp}^i - \frac{2}{a^2} \partial_l B_{(1)}^i \chi_{(1)\perp}^l$$

$$(5.142) \quad \mathcal{E}_{(2)}^i \equiv E_{(2)}^i + \frac{2}{a^2} E_{(1)}^j \partial_j \chi_{(1)\perp}^i - \frac{2}{a^2} \partial_l E_{(1)}^i \chi_{(1)\perp}^l$$

$$(5.143) \quad \Delta_{\varrho}^{(2)} \equiv \varrho^{(2)} + \mathcal{T}(\varrho^{(1)}\mathcal{O}^{(1)})$$

$$(5.144) \quad \mathcal{J}_{(2)}^i \equiv J_{(2)}^i + \mathcal{T}(J_{(1)}^i\mathcal{O}^{(1)})$$

$$(5.145) \quad \Pi_{ij}^{(2)t*} \equiv \Pi_{ij}^{(2)f} + \Pi_{ij}^{(2)EM} + \mathcal{T}(\Pi_{ij}^{(1)t}\mathcal{O}^{(1)})$$

El tensor de Einstein es escrito entonces en términos de invariantes gauge a segundo orden de la siguiente forma:

$$(5.146) \quad \delta^{(2)}G_0^0 = \frac{2}{a^2} \left(3H \left(H\Psi_{(2)} + \Phi'_{(2)} \right) - \partial_k \partial^k \Phi^{(2)} - 3H \left(H^2 - H' \right) \mathcal{S}_{(2)}^{\parallel} + S \left(\delta G_0^0 \right) \right)$$

$$(5.147) \quad \delta^{(2)}G_0^i = \frac{2}{a^2} \left(\partial^i \left(H\Psi_{(2)} + \Phi'_{(2)} + (H^2 - H') \frac{1}{2} \chi_{(2)}^{\parallel'} \right) - \left(H^2 - H' - \frac{1}{4} \partial_k \partial^k \right) \vartheta_{(2)}^i - (H^2 - H') \chi_{(2)}^{i'} + S \left(\delta G_0^i \right) \right)$$

$$(5.148) \quad \delta^{(2)}G_i^0 = \frac{2}{a^2} \left(\partial_i \left(-H\Psi_{(2)} - \Phi'_{(2)} + (H^2 - H') \mathcal{S}_{(2)}^{\parallel} \right) + \frac{1}{4} \partial_k \partial^k \vartheta_{(2)}^i + S \left(\delta G_i^0 \right) \right)$$

$$(5.149) \quad \delta^{(2)}G_j^i = \frac{2}{a^2} \left[\left[(H^2 + 2H') \Psi_{(2)} + H \left(\Psi'_{(2)} + 2\Phi'_{(2)} \right) - \frac{1}{2} \partial_k \partial^k \left(\Phi_{(2)} - \Psi_{(2)} \right) + \Phi''_{(2)} + (H'' - HH' - H^3) \mathcal{S}_{(2)}^{\parallel} + S \left(\delta G \cdot \delta_j^i \right) \right] \delta_j^i + \frac{1}{2} \partial_j \partial^i \left(\Phi_{(2)} - \Psi_{(2)} \right) - \frac{H}{2} \left(\partial^i \vartheta_{(2)}^j + \partial_j \vartheta_{(2)}^i \right) - \frac{1}{4} \left(\partial^i \vartheta_{(2)}^j + \partial_j \vartheta_{(2)}^i \right)' + \frac{H}{2} \left(\chi_{j(2)}^{i\top} \right)' + \frac{1}{4} \left(\chi_{j(2)}^{i\top} \right)'' - \frac{1}{4} \partial^k \partial_k \chi_{j(2)}^{i\top} + S \left(\delta G_j^i \right) \right]$$

Para las ecuaciones de conservación tenemos lo siguiente, para la ecuación de continuidad $\mathcal{T}_{0;\alpha}^\alpha = 0$:

$$(5.150) \quad \left(\Delta^{(2)} \right)' + 3H \left(\Delta_P^{(2)} + \Delta^{(2)} \right) - 3 \left(\Phi^{(2)} \right)' \left(P_0 + \mu_0 \right) + \left(P_0 + \mu_0 \right) \nabla^2 v^{(2)} - S_C \left(\mathcal{S}_{(1)}^{\parallel}, \nabla^2 \chi^{(1)}, \mathcal{T} \left(\Delta^{(1)}, \vartheta_l^{(1)}, v_{(1)}^l \right) \right) = -a^4 \left(\frac{1}{2} E_i^{(2)} J_{(0)}^i + \frac{1}{2} E_i^{(0)} J_{(2)}^i + 2E_i^{(1)} J_{(1)}^i \right)$$

La ecuación Navier-Stokes $\mathcal{T}_{i;\alpha}^\alpha = 0$:

$$(5.151) \quad \begin{aligned} & \left(\mathcal{V}_i^{(2)}\right)' + \frac{(\mu_{(0)} + P_{(0)})'}{(\mu_{(0)} + P_{(0)})} \mathcal{V}_i^{(2)} - 4H\mathcal{V}_i^{(2)} + \partial_i \Psi^{(2)} - \frac{\partial_i \Delta_P^{(2)} + \partial_i \Pi_i^{(2)l*}}{(\mu_{(0)} + P_{(0)})} - S_{N.S} \left(\mathcal{S}_{(1)}^\parallel, \nabla^2 \chi^{(1)}, \mathcal{T}(\Delta^{(1)}, \vartheta_l^{(1)}, v_{(1)}^l) \right) \\ & = \frac{a^4}{(\mu_{(0)} + P_{(0)})} \left(2E_i^{(1)} \varrho_{(1)} + 2\epsilon_{ijk} J_{(1)}^j B_k^{(1)} + E_i^{(2)} \varrho_{(0)} + \epsilon_{ijk} J_{(0)}^j B_k^{(2)} + E_i^{(0)} \varrho_{(2)} + \epsilon_{ijk} J_{(2)}^j B_k^{(0)} \right) \end{aligned}$$

En este procedimiento a segundo orden encontramos que las ecuaciones vienen escritas en términos de cantidades invariantes gauge y términos que dependen del mismo. Términos tales como \mathcal{T}_B en las ecuaciones de transformación, términos encontrados en las cantidades invariantes gauge como son $\mathcal{T}(\Psi^{(1)}\mathcal{O}^{(1)})$, y términos que son combinaciones de estos últimos encontrados en las ecuaciones de campo expresados como $S(\delta G_j^i)$ y $\mathcal{S}_{(2)}^\parallel$ y leyes de conservación $S_{N.S} \left(\mathcal{S}_{(1)}^\parallel, \nabla^2 \chi^{(1)}, \mathcal{T}(\Delta^{(1)}, \vartheta_l^{(1)}, v_{(1)}^l) \right)$, son términos los cuales debemos fijar, así que debemos escoger gauges de tal manera que el sistema no quede sobredeterminado, de la misma manera como ocurre a primer orden [147].

5.5. Shear y Vorticidad a Segundo Orden (Shear and Vorticity to Second Order)

Ahora la vorticidad y el shear vienen dados por⁹:

$$(5.152) \quad \varpi_{\mu\nu} = h_{[\mu}^\alpha h_{\nu]}^\beta u_{\alpha;\beta}$$

$$(5.153) \quad \sigma_{\mu\nu} = \left(h_{(\mu}^\alpha h_{\nu)}^\beta - \frac{1}{3} h_{\mu\nu} h^{\alpha\beta} \right) u_{\alpha;\beta}$$

Donde $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$, es el proyector en el espacio del fluido en reposo, y $\varpi_{\alpha\beta} u^\beta = 0 = \sigma_{\alpha\beta} u^\beta$.

Ahora vamos a calcular cada uno de los términos espaciales, entonces tenemos que el primer término es:

$$h_i^\alpha h_j^\beta u_{\alpha;\beta} = \left(\delta_i^\alpha \delta_j^\beta + u^\alpha u_i \delta_j^\beta + u^\beta u_j \delta_i^\alpha + u^\alpha u_i u_j u^\beta \right) u_{\alpha;\beta}$$

$$h_j^\alpha h_i^\beta u_{\alpha;\beta} = \left(\delta_j^\alpha \delta_i^\beta + u^\alpha u_j \delta_i^\beta + u^\beta u_i \delta_j^\alpha + u^\alpha u_j u_i u^\beta \right) u_{\alpha;\beta}$$

Por lo tanto la vorticidad es calculada de la siguiente forma:

⁹[.] indica antisimétrico y (.) indica simétrico

$$\varpi_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i;j} - u_{j;i} + u^\alpha u_i u_{\alpha;j} - u^\alpha u_j u_{\alpha;i} + u^\beta u_j u_{i;\beta} - u^\beta u_i u_{j;\beta})$$

Los dos primeros términos de la anterior expresion viene dada por:

$$(5.154) \quad u_{i;j} - u_{j;i} = \partial_j u_i - \Gamma_{ij}^0 u_0 - \Gamma_{ij}^k u_k - \partial_i u_j + \Gamma_{ji}^0 u_0 + \Gamma_{ji}^k u_k = u_{i,j} - u_{j,i}$$

El término: $u^\beta u_j u_{i;\beta} = u^0 u_j u_{i;0} + u^k u_j u_{i;k}$, viene dado por:

$$\begin{aligned} & \left[\omega_j^{(1)} - 2\omega_j^{(1)}\psi^{(1)} + \frac{\omega_j^{(2)}}{2} + v_j^{(1)} + \frac{v_j^{(2)}}{2} - 2v_j^{(1)}\phi^{(1)} + v_{(1)}^l \chi_{lj}^{(1)} - \psi^{(1)}v_j^{(1)} \right] [\partial_0 u_i - \delta\Gamma_{0i}^0 u_0 - \Gamma_{0i}^k u_k] \\ & + \left[\omega_j^{(1)}v_{(1)}^k + v_j^{(1)}v_{(1)}^k \right] [-\Gamma_{ik}^0 u_0] \end{aligned}$$

Obteniendo:

$$(5.155) \quad \left[\omega_j^{(1)} + v_j^{(1)} \right] \left[a\dot{\omega}_i^{(1)} + av_i^{(1)} + \dot{a}\omega_i^{(1)} + a\partial_i\psi^{(1)} \right] + \left[\omega_j^{(1)}v_i^{(1)} + v_j^{(1)}v_i^{(1)} \right] \dot{a}$$

El término que le sigue a la ecuación de vorticidad $u^\alpha u_i u_{\alpha;j} = u^0 u_i u_{0;j} + u^k u_i u_{k;j}$, es nulo debido a:

$$\begin{aligned} & \left[\omega_i^{(1)} - 2\omega_i^{(1)}\psi^{(1)} + \frac{\omega_i^{(2)}}{2} + v_i^{(1)} + \frac{v_i^{(2)}}{2} - 2v_i^{(1)}\phi^{(1)} + v_{(1)}^j \chi_{ij}^{(1)} - \psi^{(1)}v_i^{(1)} \right] [\partial_j u_0 - \delta\Gamma_{0j}^0 u_0 - \Gamma_{0j}^k u_k] \\ & + \left[\omega_i^{(1)}v_{(1)}^k + v_i^{(1)}v_{(1)}^k \right] [-\Gamma_{kj}^0 u_0] \\ (5.156) \quad & = -\dot{a}v_j^{(1)}v_i^{(1)} - \dot{a}\omega_i^{(1)}v_j^{(1)} + \dot{a}v_j^{(1)}v_i^{(1)} + \dot{a}\omega_i^{(1)}v_j^{(1)} = 0 \end{aligned}$$

El último término viene dado por:

$$\begin{aligned} u^\alpha u_i u_j u_{\alpha;\beta} &= u^0 u_i u_j u_{0;\beta} + u^0 u_i u_j u_{0;k} + u^l u_i u_j u_{l;k} + u^l u_i u_j u_{l;0} \\ &= \left[\omega_i^{(1)} + v_i^{(1)} \right] \left[\omega_j^{(1)} + v_j^{(1)} \right] [-\Gamma_{00}^0 u_0] \end{aligned}$$

Obteniendo lo siguiente:

$$(5.157) \quad = \dot{a} \left(\omega_j^{(1)} \omega_i^{(1)} + v_j^{(1)} \omega_i^{(1)} + v_i^{(1)} \omega_j^{(1)} + v_i^{(1)} v_j^{(1)} \right)$$

Por lo tanto se tiene que la vorticidad viene dada por:

$$(5.158) \quad \begin{aligned} \varpi_{ij} = \frac{a}{2} & \left[2\partial_{[j} \omega_{i]}^{(1)} + 2\partial_{[j} v_{i]}^{(1)} + \partial_{[j} \omega_{i]}^{(2)} + 2\psi^{(1)} \partial_{[i} \omega_{j]}^{(1)} + 2\omega_{[j} \partial_{i]}^{(1)} \psi^{(1)} \right. \\ & + \partial_{[j} v_{i]}^{(2)} + 4\phi^{(1)} \partial_{[i} v_{j]}^{(1)} + 4v_{[j}^{(1)} \partial_{i]} \phi^{(1)} + 2v_{(1)}^l \partial_{[j} \chi_{i]l}^{(1)} + 2\chi_{[i}^{(1)} \partial_{j]} v_{(1)}^l \\ & + 2\partial_{[i} \psi^{(1)} \omega_{j]}^{(1)} + 2\omega_{[j}^{(1)} \omega_{i]}^{(1)'} + 2v_{[j}^{(1)} \omega_{i]}^{(1)'} + 2v_{[i}^{(1)'} \omega_{j]}^{(1)} + 2v_{[i}^{(1)'} v_{j]}^{(1)} \\ & \left. + 2\partial_{[i} \psi^{(1)} v_{j]}^{(1)} + 2H\omega_{[i}^{(1)} \omega_{j]}^{(1)} + 2Hv_{[i}^{(1)} v_{j]}^{(1)} \right] \end{aligned}$$

Para el shear obtenemos lo siguiente:

$$(5.159) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij} = \frac{1}{2} & \left(u_{i;j} + u_{j;i} + u^\alpha u_i u_{\alpha;j} + u^\alpha u_j u_{\alpha;i} + u^\beta u_j u_{i;\beta} + u^\beta u_i u_{j;\beta} \right) \\ & - \frac{1}{3} \left((g_{ij} + u_i u_j) g^{\alpha\beta} u_{\alpha;\beta} + g_{ij} u^\alpha u^\beta u_{\alpha;\beta} \right) + \frac{2}{3} u^\alpha u_i u_j u^\beta u_{\alpha;\beta} \end{aligned}$$

Para el primer término se tiene lo siguiente:

$$(5.160) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij}^{\#1} = \frac{a}{2} & \left[2\partial_{(j} \omega_{i)}^{(1)} + 2\partial_{(j} v_{i)}^{(1)} + \partial_{(j} \omega_{i)}^{(2)} + 2\psi^{(1)} \partial_{(i} \omega_{j)}^{(1)} + 2\omega_{(j} \partial_{i)}^{(1)} \psi^{(1)} \right. \\ & + \partial_{(j} v_{i)}^{(2)} + 4\phi^{(1)} \partial_{(i} v_{j)}^{(1)} + 4v_{(j}^{(1)} \partial_{i)} \phi^{(1)} + 2v_{(1)}^l \partial_{(j} \chi_{i)l}^{(1)} + 2\chi_{l(i}^{(1)} \partial_{j)} v_{(1)}^l \\ & + 2\partial_{(i} \psi^{(1)} \omega_{j)}^{(1)} + 2\omega_{(j}^{(1)} \omega_{i)}^{(1)'} + 2v_{(j}^{(1)} \omega_{i)}^{(1)'} + 2v_{(i}^{(1)'} \omega_{j)}^{(1)} + 2v_{(i}^{(1)'} v_{j)}^{(1)} \\ & \left. + 2\partial_{(i} \psi^{(1)} v_{j)}^{(1)} + 2H\omega_{(i}^{(1)} \omega_{j)}^{(1)} + 2Hv_{(i}^{(1)} v_{j)}^{(1)} + 4Hv_{(i}^{(1)} \omega_{j)}^{(1)} \right] \end{aligned}$$

Para el tercer término se tiene lo siguiente:

$$(5.161) \quad \sigma_{ij}^{\#3} = \frac{2a}{3} H \left(\omega_j^{(1)} \omega_i^{(1)} + v_j^{(1)} \omega_i^{(1)} + v_i^{(1)} \omega_j^{(1)} + v_i^{(1)} v_j^{(1)} \right)$$

Para el segundo término se tiene lo siguiente:

$$(5.162) \quad \sigma_{ij}^{\#2} = -\frac{1}{3} \left((g_{ij} + u_i u_j) g^{\alpha\beta} u_{\alpha;\beta} + g_{ij} u^\alpha u^\beta u_{\alpha;\beta} \right)$$

Así que el término (5.162) es de la forma:

$$(5.163) \quad -\frac{1}{3} (g_{ij} + u_i u_j) u_{;\beta}^\beta =$$

$$-\frac{a^2}{3} \left(\delta_{ij} - 2\phi^{(1)} \delta_{ij} + \chi_{ij}^{(1)} - \phi^{(2)} \delta_{ij} + \frac{\chi_{ij}^{(2)}}{2} + \omega_i^{(1)} \omega_j^{(1)} + v_j^{(1)} \omega_i^{(1)} + v_i^{(1)} \omega_j^{(1)} + v_j^{(1)} v_i^{(1)} \right) u_{;\beta}^\beta$$

Donde la expansión del fluido $u_{;\beta}^\beta$ viene dada por:

$$(5.164) \quad u_{;\beta}^\beta = \frac{1}{a} \left[\frac{\left(v_l^{(1)} v_{(1)}^l \right)'}{2} + \omega_k^{(1)} \left(\omega_{(1)}^k \right)' + \left(v_k^{(1)} \omega_{(1)}^k \right)' + v_k^{(1)} \partial_{(1)}^k \psi + v_{,k}^{(1)k} \right.$$

$$+ \frac{v_{,k}^{(2)k}}{2} - 3v_{(1)}^k \partial_k \phi^{(1)} + 3 \left(H (1 - \psi^{(1)}) - (\phi^{(1)})' + \frac{3}{2} H \psi_{(1)}^2 - \frac{\psi^{(2)}}{2} - \frac{1}{2} \phi^{(2)} \right)$$

$$\left. + H v_l^{(1)} v_{(1)}^l - \frac{\chi_{(1)}^{km} \left(\chi_{km}^{(1)} \right)'}{2} - \omega_{(1)}^i \partial_i (\phi^{(1)} - \psi^{(1)}) + 2H \omega_{(1)}^i v_i^{(1)} \right]$$

Esta última ecuación es muy importante, en el background vemos que $u_{;\beta}^\beta = \frac{3H}{a}$ el cual es muy conocido en la literatura, sin embargo en un universo perturbado, el factor de expansión depende no sólo de los potenciales sino también de la vorticidad y de las velocidades peculiares de la materia. Y el otro término es de la forma:

$$-\frac{1}{3} g_{ij} u^\alpha u^\beta u_{\alpha;\beta} =$$

$$-\frac{a}{3} \left[\delta_{ij} \left(- \left(\frac{v_l^{(1)} v_{(1)}^l}{2} \right)' + \omega_{(1)}^k \left(\omega_{(1)}^k \right)' - \omega_k^{(1)} \left(\omega_{(1)}^k \right)' - v_k^{(1)} \left(\omega_{(1)}^k \right)' - H \omega_{(1)}^k v_k^{(1)} \right) \right]$$

$$(5.165) \quad \left. -v_k^{(1)} \partial_{(1)}^k \psi + v_{(1)}^k \partial_k^{(1)} \psi + v_{(1)}^k \left(\omega_k^{(1)} \right)' + v_{(1)}^k \left(v_k^{(1)} \right)' - H v_{(1)}^k \left(v_k^{(1)} - \omega_k^{(1)} \right) \right]$$

Por lo tanto el shear lo obtenemos como la suma de las ecuaciones (5.160),(5.161),(5.162).

La vorticidad y el shear nos dan cuenta que tanto afecta las perturbaciones a la evolución del flujo de materia que esta contenida en el universo, también nos da un grado de la anisotropía que produce las variaciones del campo de materia a la evolución misma del universo (por ejemplo en la expansión), dichas expresiones son muy importantes para deducir ecuaciones de evolución de la materia y de la expansión y fueron deducidas teniendo en cuenta todas las perturbaciones de la métrica, en general se pueden trabajar con solo perturbaciones métricas o perturbaciones a segundo orden en campos vectoriales. Si hacemos estas suposiciones podemos encontrar un resultado análogo con los autores de[148].

CAPÍTULO 6

Tensor electromagnético (Electromagnetic Tensor)

En este capítulo se deduce el tensor momento energía total de nuestro modelo el cual incluye el tensor momento energía para un fluido perfecto $T_{(fl)}^{\alpha\beta}$, y el tensor momento energía electromagnético $T_{(em)}^{\alpha\beta}$.

El tensor momento energía electromagnético viene dado por:

$$(6.166) \quad T_{(em)}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left[F^{\alpha\mu} F^{\beta\nu} g_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} (F^{\delta\omega} F^{\sigma\epsilon} g_{\delta\sigma} g_{\omega\epsilon}) \right]$$

Con el tensor electromagnético contravariante definido por:

$$(6.167) \quad F^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2(\eta)} \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & B^z & -B^y \\ -E^y & -B^z & 0 & B^x \\ -E^z & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix}$$

Y el tensor electromagnético covariante definido por:

$$(6.168) \quad F_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & B^z & -B^y \\ E^y & -B^z & 0 & B^x \\ E^z & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix}$$

Donde observamos que:

$$(6.169) \quad F^{0i} = \frac{1}{a^2} E^i, \quad F^{ij} = \frac{1}{a^2} \epsilon^{ijk} B^k$$

$$(6.170) \quad F_{i0} = a^2 E_i, \quad F_{ij} = a^2 \epsilon_{ijk} B_k$$

En el espacio plano podemos encontrar un invariante relativista \mathfrak{F}^2 dado por:

$$(6.171) \quad \mathfrak{F}^2 \equiv F^{\delta\omega} F^{\sigma\epsilon} g_{\delta\sigma} g_{\omega\epsilon}$$

Y en el caso de un espacio general podemos encontrar \mathfrak{F}^2 como:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^2 = & F^{0l} F^{0i} g_{00} g_{li} + F^{0l} F^{i0} g_{0i} g_{l0} + F^{0l} F^{ij} g_{0i} g_{lj} \\ & + F^{l0} F^{0i} g_{l0} g_{0i} + F^{l0} F^{i0} g_{li} g_{00} + F^{l0} F^{ij} g_{li} g_{0j} \\ & + F^{lm} F^{0i} g_{l0} g_{mi} + F^{lm} F^{i0} g_{li} g_{m0} + F^{lm} F^{ij} g_{li} g_{mj} \end{aligned} \quad (6.172)$$

Al sustituir el tensor métrico en la anterior ecuación se encuentra lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^2 = & \frac{1}{a^4} \left(E^l E^i g_{00} g_{li} - E^l E^i g_{0i} g_{l0} + E^l \epsilon^{ijk} B^k g_{0i} g_{lj} - E^l E^i g_{l0} g_{0i} + E^l E^i g_{li} g_{00} \right. \\ & \left. - E^l \epsilon^{ijk} B^k g_{li} g_{0j} + B^k \epsilon^{lmk} E^i g_{l0} g_{mi} - B^k E^i \epsilon^{lmk} g_{li} g_{m0} + \epsilon^{lmk} \epsilon^{ijs} B^k B^s g_{li} g_{mj} \right) \end{aligned} \quad (6.173)$$

Por propiedades de simetría encontramos que:

$$\mathfrak{F}^2 = \frac{1}{a^4} \left(2E^l E^i g_{00} g_{li} - 2E^l E^i g_{0i} g_{l0} + 4E^l \epsilon^{ijk} B^k g_{0i} g_{lj} + \epsilon^{lmk} \epsilon^{ijs} B^k B^s g_{li} g_{mj} \right) \quad (6.174)$$

Ahora haciendo una teoría de perturbaciones en el campo eléctrico y magnético obtenemos:

$$E^i = \frac{1}{a(\tau)^2} \left(E_{(0)}^i + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} E_{(r)}^i \right) \quad B^i = \frac{1}{a(\tau)^2} \left(B_{(0)}^i + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} B_{(r)}^i \right) \quad (6.175)$$

$$E_i = a(\tau)^2 \left(E_i^{(0)} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} E_i^{(r)} \right) \quad B_i = a(\tau)^2 \left(B_i^{(0)} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} B_i^{(r)} \right) \quad (6.176)$$

El producto de los campos a segundo orden queda de la siguiente manera:

$$E^i E^l = \left(E_{(0)}^i E_{(0)}^l + \delta E^i E_{(0)}^l + \frac{\delta^2 E^i}{2} E_{(0)}^l + E_{(0)}^i \delta E^l + \delta E^i \delta E^l + E_{(0)}^i \frac{\delta^2 E^l}{2} \right)$$

Por lo tanto sustituyendo en (6.300), tenemos que \mathfrak{F}^2 a orden cero, uno y dos vienen dados por:

- Para orden cero:

$$\mathfrak{F}^2 = -2 \left(E_{(0)}^i E_i^{(0)} - B_{(0)}^i B_i^{(0)} \right) \quad (6.177)$$

- A primer orden:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_{(1)}^2 &= -2 \left[E_{(0)}^i E_{(0)}^l \left(-2\phi_{(1)} \delta_{li} + \chi_{li}^{(1)} + 2\psi_{(1)} \delta_{li} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} B_{(0)}^k B_{(0)}^s \epsilon^{lmk} \epsilon^{ijs} \left(-4\phi^{(1)} \delta_{li} \delta_{mj} + \delta_{mj} \chi_{li}^{(1)} + \delta_{li} \chi_{mj}^{(1)} \right) \right. \\
(6.178) \quad &\quad \left. + 2E_{(0)}^i E_i^{(1)} - 2B_{(0)}^s B_s^{(1)} - 2\epsilon^{ijk} E_j^{(0)} B_{(0)}^k \omega_i^{(1)} \right] \\
&\quad \blacksquare \text{ A segundo orden:} \\
\mathfrak{F}_{(2)}^2 &= -2 \left[E_{(0)}^i E_{(0)}^l \left(-\phi_{(2)} \delta_{li} + \frac{\chi_{li}^{(2)}}{2} - 4\psi_{(1)} \phi_{(1)} \delta_{li} + 2\psi_{(1)} \chi_{li}^{(1)} + \psi_{(2)} \delta_{li} + \omega_i^{(1)} \omega_l^{(1)} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} B_{(0)}^k B_{(0)}^s \epsilon^{lmk} \epsilon^{ijs} \left(\left(4 \left(\phi^{(1)} \right)^2 - 2\phi^{(2)} \right) \delta_{li} \delta_{mj} - 2\phi^{(1)} \delta_{mj} \chi_{li}^{(1)} + \delta_{mj} \frac{\chi_{li}^{(2)}}{2} - 2\phi^{(1)} \delta_{li} \chi_{mj}^{(1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \chi_{li}^{(1)} \chi_{mj}^{(1)} + \frac{\chi_{mj}^{(2)}}{2} \delta_{li} \right) + \left(E_{(0)}^i \delta E^l + E_{(0)}^l \delta E^i \right) \left(-2\phi^{(1)} \delta_{li} + \chi_{li}^{(1)} + 2\psi_{(1)} \delta_{li} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \epsilon^{lmk} \epsilon^{ijs} \left(B_{(0)}^s \delta B^k + B_{(0)}^k \delta B^s \right) \left(-4\phi^{(1)} \delta_{li} \delta_{mj} + \chi_{li}^{(1)} \delta_{mj} + \chi_{mj}^{(1)} \delta_{li} \right) \right. \\
&\quad \left. + \delta_{li} \left(\delta E^l \delta E^i + \frac{\delta^2 E^i}{2} E_{(0)}^l + \frac{\delta^2 E^l}{2} E_{(0)}^i \right) - \frac{1}{2} \epsilon^{lmk} \epsilon^{ijs} \delta_{li} \delta_{mj} \left(\delta B^s \delta B^k + \frac{\delta^2 B^s}{2} B_{(0)}^k + \frac{\delta^2 B^k}{2} B_{(0)}^s \right) \right. \\
(6.179) \quad &\quad \left. - 2\epsilon^{ijk} E_{(0)}^l B_{(0)}^k \left(-2\phi^{(1)} \delta_{lj} \omega_i^{(1)} + \chi_{lj}^{(1)} \omega_i^{(1)} + \frac{\omega_i^{(2)}}{2} \delta_{lj} \right) - 2\epsilon^{ijk} \omega_i^{(1)} \delta_{lj} \left(B_{(0)}^k \delta E^l + E_{(0)}^l \delta B^k \right) \right]
\end{aligned}$$

Ahora vamos a escribir las componentes que encontramos en términos del tensor momento energía T_{β}^{α} , para esto sabemos que:

$$\begin{aligned}
T_0^0 &= T^{0\beta} g_{\beta 0} = T^{00} g_{00} + T^{0i} g_{i0} \\
T_i^0 &= T^{0\beta} g_{\beta i} = T^{00} g_{0i} + T^{0l} g_{li} \\
T_0^i &= T^{i\beta} g_{\beta 0} = T^{i0} g_{00} + T^{il} g_{l0} \\
(6.180) \quad T_k^i &= T^{i\beta} g_{\beta k} = T^{i0} g_{0k} + T^{il} g_{lk}
\end{aligned}$$

Utilizando lo encontrado en el apéndice para $T^{\alpha\beta}$, entonces tenemos lo siguiente para la componente $T_{(em)0}^0$.

- En el límite cuando no hay perturbaciones, tenemos lo siguiente:

$$(6.181) \quad T_0^0 = -\frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2)$$

$$(6.182) \quad T_0^i = \frac{1}{4\pi} (E \times B)^i, \quad T_i^0 = \frac{1}{4\pi} (E \times B)_i$$

$$(6.183) \quad T_l^i = \frac{1}{3} \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \delta_l^i + \frac{1}{4\pi} \left(-B^i B_l - E^i E_l + \frac{1}{3} (E^2 + B^2) \delta_l^i \right)$$

- A primer orden obtenemos lo siguiente, para $T_{(1em)\beta}^\alpha$ se obtiene:

$$(6.184) \quad T_{(1em)0}^0 = -\frac{1}{4\pi} \left[E_{(0)}^i E_{(0)}^l \left(\chi_{li}^{(1)} + 2 \left(\psi^{(1)} - \phi_{(1)} \right) \delta_{li} \right) \right. \\ \left. + 2E_{(1)}^i E_i^{(0)} - \epsilon^{ikm} E_k^{(0)} B_{(0)}^m \omega_i^{(1)} + \frac{1}{4} \mathfrak{F}_{(1)}^2 \right]$$

Para la componente $T_{(1em)0}^i$:

$$(6.185) \quad T_{(1em)0}^i = \frac{1}{4\pi} \left[-E_{(0)}^l B_{(0)}^s \epsilon^{iks} \left(-2\phi_{(1)} \delta_{lk} + \chi_{lk}^{(1)} + 2\psi^{(1)} \delta_{lk} \right) \right. \\ \left. + B_{(0)}^n B_{(0)}^m \epsilon^{ijn} \epsilon^{lsm} \delta_{js} \omega_l^{(1)} - \epsilon^{ikm} \left(\delta E^l B_{(0)}^m + E_{(0)}^l \delta B^m \right) \delta_{lk} \right]$$

Para la componente $T_{(1em)i}^0$:

$$(6.186) \quad T_{(1em)i}^0 = \frac{1}{4\pi} \left[2E_{(0)}^s E_{(0)}^l \left(\delta_{s[l} \omega_{i]}^{(1)} \right) + E_{(0)}^l B_{(0)}^m \epsilon^{skm} \left(-4\phi^{(1)} \delta_{lk} \delta_{si} + \chi_{lk}^{(1)} \delta_{si} + \delta_{lk} \chi_{si}^{(1)} \right) \right. \\ \left. + \epsilon^{skm} \left(\delta E^l B_{(0)}^m + E_{(0)}^l \delta B^m \right) \delta_{lk} \delta_{si} \right]$$

Para la componente $T_{(1em)l}^i$:

$$T_{(1em)l}^i = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{3} \left[\left(-4B_{(0)}^n B_{(0)}^m \phi^{(1)} + \left(\delta B^n B_{(0)}^m + B_{(0)}^n \delta B^m \right) \right) \delta_{nm} - \frac{1}{4} \mathfrak{F}_{(1)}^2 \right] \delta_l^i \right. \\ \left. - \left(-4\phi^{(1)} B_{(0)}^n B_{(0)}^m + \left(\delta B^n B_{(0)}^m + B_{(0)}^n \delta B^m \right) \right) \delta_m^i \delta_{nl} \right]$$

$$\begin{aligned}
& -E_{(0)}^i E_{(0)}^k \left(2\psi_{(1)} \delta_{lk} - 2\phi_{(1)} \delta_{lk} + \chi_{lk}^{(1)} \right) + B_{(0)}^n B_{(0)}^m \epsilon^{ijn} \epsilon^{ksm} \left(\delta_{js} \chi_{lk}^{(1)} + \delta_{lk} \chi_{js}^{(1)} \right) \\
& - \left(\delta E^i E_{(0)}^k + E_{(0)}^i \delta E^k \right) \delta_{lk} - \left(E_{(0)}^i B_{(0)}^s \epsilon^{kjs} + E_{(0)}^k B_{(0)}^s \epsilon^{ijs} \right) \omega_j^{(1)} \delta_{lk}
\end{aligned}$$

(6.187)

$$+ \frac{2}{3} \left[\left(-4B_{(0)}^n B_{(0)}^m \phi^{(1)} + \left(\delta B^n B_{(0)}^m + B_{(0)}^n \delta B^m \right) \right) \delta_{nm} - \frac{1}{4} \mathfrak{F}_{(1)}^2 \right] \delta_l^i + E_{(0)}^s B_{(0)}^m \epsilon^{ikm} \delta_{sk} \omega_l^{(1)}$$

■ Para segundo orden $T_{(2em)\beta}^\alpha$ se obtuvo lo siguiente:

$$T_{(2em)0}^0 = -\frac{1}{4\pi} \left[E_{(0)}^i E_{(0)}^l \left(-\phi_{(2)} \delta_{li} + \frac{\chi_{li}^{(2)}}{2} - 4\psi^{(1)} \phi_{(1)} \delta_{li} + 2\psi^{(1)} \chi_{li}^{(1)} + \psi^{(2)} \delta_{li} + \omega_l^{(1)} \omega_i^{(1)} \right) \right.$$

$$\left. + \left(\delta E^i E_{(0)}^l + E_{(0)}^i \delta E^l \right) \left(-2\phi_{(1)} \delta_{li} + \chi_{li}^{(1)} + 2\psi^{(1)} \delta_{li} \right) + \left(\delta E^i \delta E^l + \frac{\delta^2 E^i}{2} E_{(0)}^l + E_{(0)}^i \frac{\delta^2 E^l}{2} \right) \delta_{li} \right.$$

(6.188)

$$\left. - \left(\delta B^m E_{(0)}^l + B_{(0)}^m \delta E^l \right) \epsilon^{ikm} \omega_i^{(1)} \delta_{lk} - E_{(0)}^l B_{(0)}^m \epsilon^{ikm} \left(-2\phi_{(1)} \omega_i^{(1)} \delta_{lk} + \chi_{lk}^{(1)} \omega_i^{(1)} + \frac{\omega_i^{(2)}}{2} \delta_{lk} \right) + \frac{1}{4} \mathfrak{F}_{(2)}^2 \right]$$

Para la componente $T_{(2em)0}^i$:

$$T_{(2em)0}^i = \frac{1}{4\pi} \left[-E_{(0)}^l B_{(0)}^s \epsilon^{iks} \left(\left(\psi^{(2)} - \phi_{(2)} \right) \delta_{lk} + \frac{\chi_{lk}^{(2)}}{2} - 4\psi^{(1)} \phi_{(1)} \delta_{lk} + 2\psi^{(1)} \chi_{lk}^{(1)} \right) \right.$$

$$\left. - \left(E_{(0)}^i B_{(0)}^s \epsilon^{ljs} + B_{(0)}^s E_{(0)}^l \epsilon^{ijs} \right) \omega_j^{(1)} \omega_l^{(1)} + B_{(0)}^n B_{(0)}^m \epsilon^{ijn} \epsilon^{lsm} \left(-2\phi_{(1)} \delta_{js} \omega_l^{(1)} + \chi_{js}^{(1)} \omega_l^{(1)} + \frac{\omega_l^{(2)}}{2} \delta_{js} \right) \right.$$

(6.189)

$$\left. + \epsilon^{ijn} \epsilon^{lsm} \left(\delta B^n B_{(0)}^m + B_{(0)}^n \delta B^m \right) \delta_{sj} \omega_l^{(1)} - \epsilon^{ikm} \left(\delta E^l B_{(0)}^m + E_{(0)}^l \delta B^m \right) \left(\left(-2\phi_{(1)} + 2\psi^{(1)} \right) \delta_{lk} + \chi_{lk}^{(1)} \right) \right]$$

Para la componente $T_{(2em)i}^0$:

$$T_{(2em)i}^0 = \frac{1}{4\pi} \left[2E_{(0)}^s E_{(0)}^l \left(-2\phi_{(1)} \delta_{s[l} \omega_{i]}^{(1)} + \frac{1}{2} \delta_{s[l} \omega_{i]}^{(2)} + \chi_{s[l}^{(1)} \omega_{i]}^{(1)} \right) + 2 \left(\delta E^s E_{(0)}^l + E_{(0)}^s \delta E^l \right) \left(\delta_{s[l} \omega_{i]}^{(1)} \right) \right.$$

$$\left. + E_{(0)}^l B_{(0)}^m \epsilon^{skm} \left(\left(4 \left(\phi^{(1)} \right)^2 - 2\phi^{(2)} \right) \delta_{lk} \delta_{si} - 2\chi_{lk}^{(1)} \phi_{(1)} \delta_{si} + \frac{\chi_{lk}^{(2)}}{2} \delta_{si} - 2\phi_{(1)} \delta_{lk} \chi_{si}^{(1)} + \chi_{si}^{(1)} \chi_{lk}^{(1)} + \frac{\chi_{si}^{(2)}}{2} \delta_{lk} \right) \right.$$

$$(6.190) \quad \begin{aligned} & +\epsilon^{skm} \left(\delta E^l B_{(0)}^m + E_{(0)}^l \delta B^m \right) \left(-4\phi_{(1)} \delta_{lk} \delta_{si} + \chi_{lk}^{(1)} \delta_{si} + \chi_{si}^{(1)} \delta_{lk} \right) \\ & + \left(\delta B^m \delta E^l + \frac{\delta^2 E^l}{2} B_{(0)}^m + E_{(0)}^l \frac{\delta^2 B^m}{2} \right) \epsilon^{skm} \delta_{lk} \delta_{si} \end{aligned}$$

Para la componente $T_{(2em)l}^i$:

$$\begin{aligned} T_{(2em)l}^i &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{3} \left[\left(B_{(0)}^n B_{(0)}^m \left(4 \left(\phi^{(1)} \right)^2 - 2\phi^{(2)} \right) + \left(\delta B^n B_{(0)}^m + B_{(0)}^n \delta B^m \right) (-4\phi_{(1)}) \right. \right. \right. \\ & + \left. \left. \left(\delta B^m \delta B^n + \frac{\delta^2 B^n}{2} B_{(0)}^m + B_{(0)}^n \frac{\delta^2 B^m}{2} \right) \right] \delta_{nm} - \frac{1}{4} \mathfrak{F}_{(2)}^2 \right] \delta_l^i - \left(B_{(0)}^n B_{(0)}^m \left(4 \left(\phi^{(1)} \right)^2 - 2\phi^{(2)} \right) \right. \\ & + \left. \left(\delta B^n B_{(0)}^m + B_{(0)}^n \delta B^m \right) (-4\phi_{(1)}) + \left(\delta B^m \delta B^n + \frac{\delta^2 B^n}{2} B_{(0)}^m + B_{(0)}^n \frac{\delta^2 B^m}{2} \right) \right] \delta_m^i \delta_{nl} \\ & - E_{(0)}^i E_{(0)}^k \left(\psi_{(2)} \delta_{lk} - 4\phi_{(1)} \psi_{(1)} \delta_{lk} - \phi_{(2)} \delta_{lk} + 2\psi_{(1)} \chi_{lk}^{(1)} + \frac{\chi_{lk}^{(2)}}{2} + \omega_l^{(1)} \omega_k^{(1)} \right) \\ & - \left(\delta E^i E_{(0)}^k + E_{(0)}^i \delta E^k \right) \left(2\psi_{(1)} \delta_{lk} - 2\phi_{(1)} \delta_{lk} + \chi_{lk}^{(1)} \right) \\ & - \left(E_{(0)}^i B_{(0)}^s \epsilon^{kjs} + E_{(0)}^k B_{(0)}^s \epsilon^{ijs} \right) \left(\frac{\omega_j^{(2)}}{2} \delta_{lk} - 2\phi_{(1)} \omega_j^{(1)} \delta_{lk} + \chi_{lk}^{(1)} \omega_j^{(1)} \right) \\ & - \left(\delta E^i \delta E^k + \frac{\delta^2 E^i}{2} E_{(0)}^k + E_{(0)}^i \frac{\delta^2 E^k}{2} \right) \delta_{lk} + \epsilon^{ijn} \epsilon^{ksm} \left(\delta B^n B_{(0)}^m + B_{(0)}^n \delta B^m \right) \left(\delta_{sj} \chi_{lk}^{(1)} + \delta_{lk} \chi_{sj}^{(1)} \right) \\ & - \left(\epsilon^{ijs} \delta E^k B_{(0)}^s + \epsilon^{ijs} E_{(0)}^k \delta B^s + \epsilon^{kjs} \delta E^i B_{(0)}^s + \epsilon^{kjs} E_{(0)}^i \delta B^s \right) \omega_j^{(1)} \delta_{lk} \\ & + B_{(0)}^n B_{(0)}^m \epsilon^{ijn} \epsilon^{ksm} \left(-2\phi_{(1)} \delta_{js} \chi_{lk}^{(1)} + \delta_{js} \frac{\chi_{lk}^{(2)}}{2} - 2\phi_{(1)} \delta_{lk} \chi_{js}^{(1)} + \chi_{lk}^{(1)} \chi_{js}^{(1)} + \delta_{lk} \frac{\chi_{js}^{(2)}}{2} \right) \\ & + \frac{2}{3} \left[\left(B_{(0)}^n B_{(0)}^m \left(4 \left(\phi^{(1)} \right)^2 - 2\phi^{(2)} \right) - 8\phi_{(1)} \left(\delta B^n B_{(0)}^m \right) + \left(\delta B^n \delta B_m + \frac{\delta^2 B^n}{2} B_{(0)}^m + B_{(0)}^m \frac{\delta^2 B^n}{2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{4} \mathfrak{F}_{(2)}^2 \right] \delta_l^i + E_{(0)}^s B_{(0)}^m \epsilon^{ikm} \left(-2\phi_{(1)} \delta_{sk} \omega_l^{(1)} + \delta_{sk} \frac{\omega_l^{(2)}}{2} + \chi_{sk}^{(1)} \omega_l^{(1)} \right) \end{aligned}$$

$$(6.191) \quad +\epsilon^{ikm} \left(\delta E^s B_{(0)}^m + E_{(0)}^s \delta B^m \right) \delta_{ks} \omega_l^{(1)} \Big]$$

Ahora el tensor momento energía para un fluido perfecto viene dado por:

$$(6.192) \quad T_\nu^\mu = (\rho + P) u^\mu u_\nu + P \delta_\nu^\mu$$

Al perturbar estas ecuaciones encontramos lo siguiente:

■ Orden cero:

$$(6.193) \quad T_0^0 = -\rho_0$$

$$(6.194) \quad T_0^i = 0, \quad T_i^0 = 0$$

$$(6.195) \quad T_j^i = P_0 \delta_j^i$$

■ A primer orden:

$$(6.196) \quad T_{(1)0}^0 = -\rho_{(1)}$$

$$(6.197) \quad T_{(1)0}^i = -(\rho_0 + P_0) v_{(1)}^i$$

$$(6.198) \quad T_{(1)i}^0 = -(\rho_0 + P_0) \left(v_i^{(1)} + \omega_i^{(1)} \right)$$

$$(6.199) \quad T_{(1)j}^i = P_{(1)} \delta_j^i + \Pi_{j(1)}^i$$

■ A segundo orden:

$$(6.200) \quad T_{(2)0}^0 = -\frac{\rho^{(2)}}{2} - (\rho_0 + P_0) \left(v_l^{(1)} v_{(1)}^l + \omega_l^{(1)} v_{(1)}^l \right)$$

$$(6.201) \quad T_{(2)0}^i = -(\rho_0 + P_0) \psi^{(1)} v_{(1)}^i - (\rho_0 + P_0) \frac{v_{(2)}^i}{2} - (\rho_{(1)} + P_{(1)}) v_{(1)}^i$$

$$(6.202) \quad T_{(2)i}^0 = -(\rho_0 + P_0) \left(\frac{v_i^{(2)}}{2} - 2\omega_i^{(1)}\psi^{(1)} + \frac{\omega_i^{(2)}}{2} - 2v_i^{(1)}\phi^{(1)} + v_{(1)}^j \chi_{ij}^{(1)} - v_i^{(1)}\psi^{(1)} \right) - (\rho_{(1)} + P_{(1)}) (v_i^{(1)} + \omega_i^{(1)})$$

$$(6.203) \quad T_{(2)j}^i = (\rho_0 + P_0) (v_j^{(1)}v_{(1)}^i + \omega_j^{(1)}v_{(1)}^i) + \frac{P_{(2)}}{2}\delta_j^i + \frac{1}{2}\Pi_{j(2)}^i$$

Ahora definimos la 4-corriente como:

$$(6.204) \quad j^\mu = \frac{1}{a} (\varrho, J^i)$$

Con ϱ la densidad de carga y J la 3-corriente. También podemos hacer una expansion perturbativa de esta cantidad:

$$(6.205) \quad j^\mu = \frac{1}{a} \left(j_{(0)}^\mu + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \delta^r j_{(r)}^\mu \right)$$

Donde implica que:

$$(6.206) \quad j^0 = \varrho = \frac{1}{a} \left(\varrho_{(0)} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \delta^r \varrho_{(r)} \right), \quad j^i = J^i = \frac{1}{a} \left(J_{(0)}^i + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \delta^r J_{(r)}^i \right)$$

Ahora la conservación de la carga se obtiene a partir de la siguiente relación:

$$(6.207) \quad j_{;\mu}^\mu = 0$$

Obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \varrho' + \left(3H + (\psi_{(1)})' - 3(\phi_{(1)})' + \frac{1}{2}(\psi_{(2)})' - \frac{3}{2}(\phi_{(2)})' - 2\psi_{(1)}(\psi_{(1)})' - 3\phi_{(1)}(\phi_{(1)})' \right. \\ & \quad \left. + \partial^k \psi^{(1)} \omega_k^{(1)} - \omega^{i(1)} \partial_i \psi^{(1)} + \omega_k^{(1)} \omega_{(1)}^k - \frac{1}{2} \chi_{(1)}^{ik} (\chi_{ik}^{(1)})' \right) \varrho + \partial_i J^i \\ & \quad + \left(\partial_i \psi^{(1)} + H\omega_i^{(1)} + \delta^{(1)} \Gamma_{il}^i + \frac{1}{2} \partial_i \psi^{(2)} + \frac{1}{2} H\omega_i^{(2)} + \delta^{(2)} \Gamma_{il}^i - 2\partial_i \psi^{(1)} \psi^{(1)} \right) \end{aligned}$$

$$(6.208) \quad -2H\psi^{(1)}\omega_i^{(1)} - \omega_i^{(1)} (\phi_{(1)})' + \frac{1}{2}\omega_{(1)}^k (\chi_{ik}^{(1)})' J^i = 0$$

Donde $\delta^{(1)}\Gamma_{il}^i$, $\delta^{(2)}\Gamma_{il}^i$ son los simbolos de Cristoffer. Al separarlo de acuerdo al orden se tiene lo siguiente:

- A orden cero:

$$(6.209) \quad \varrho'_{(0)} + 3H\varrho_{(0)} + \partial_i J_{(0)}^i = 0$$

- A primer orden:

$$(6.210) \quad \varrho'_{(1)} + 3H\varrho_{(1)} + \left((\psi_{(1)})' - 3(\phi_{(1)})' \right) \varrho_{(0)} + \partial_i J_{(1)}^i + \left(\partial_i \psi^{(1)} + H\omega_i^{(1)} + \delta^{(1)}\Gamma_{il}^i \right) J_{(0)}^i = 0$$

- A segundo orden:

$$(6.211) \quad \begin{aligned} & \varrho'_{(2)} + 3H\varrho_{(2)} + \left((\psi_{(1)})' - 3(\phi_{(1)})' \right) \varrho_{(1)} + \left(\frac{1}{2}(\psi_{(2)})' - \frac{3}{2}(\phi_{(2)})' - 2\psi_{(1)}(\psi_{(1)})' - 3\phi_{(1)}(\phi_{(1)})' \right. \\ & \left. + \partial^k \psi^{(1)} \omega_k^{(1)} - \omega^{i(1)} \partial_i \psi^{(1)} + \omega_k^{(1)} \omega_{(1)}^k - \frac{1}{2} \chi_{(1)}^{ik} (\chi_{ik}^{(1)})' \right) \varrho_{(0)} + \partial_i J_{(2)}^i + \left(\partial_i \psi^{(1)} + H\omega_i^{(1)} + \delta^{(1)}\Gamma_{il}^i \right) J_{(1)}^i \\ & + \left(\frac{1}{2} \partial_i \psi^{(2)} + \frac{1}{2} H\omega_i^{(2)} + \delta^{(2)}\Gamma_{il}^i - 2\partial_i \psi^{(1)} \psi^{(1)} - 2H\psi^{(1)} \omega_i^{(1)} - \omega_i^{(1)} (\phi_{(1)})' + \frac{1}{2} \omega_{(1)}^k (\chi_{ik}^{(1)})' \right) J_{(0)}^i = 0 \end{aligned}$$

También podemos encontrar la ley de Ohm que relaciona la 3-corriente proyectada sobre la hipersuperficie de tiempo constante proporcional al campo eléctrico:

$$(6.212) \quad (g_{\mu i} + u_\mu u_i) j^\mu = \sigma g_{\lambda i} g_{\alpha \mu} F^{\lambda \alpha} u^\mu$$

- A orden cero se obtiene:

$$(6.213) \quad J_i^{(0)} = \sigma E_i^{(0)}$$

- A primer orden:

$$(6.214) \quad \begin{aligned} & J_i^{(1)} + \left(J_{(0)}^j \chi_{ij}^{(1)} - 2\phi^{(1)} J_i^{(0)} \right) - \varrho^{(0)} v_i^{(1)} \\ & = \sigma \left(-2E_i^{(0)} \left(\phi^{(1)} - \frac{1}{2}\psi^{(1)} \right) + E_{(0)}^j \chi_{ij}^{(1)} + E_i^{(1)} + \left((\omega^{(1)} + v^{(1)}) \times B^{(0)} \right)_i \right) \end{aligned}$$

- A segundo orden obtenemos:

$$J_i^{(2)} - 4J_i^{(1)} \phi^{(1)} + 2J_{(0)}^j \left(\omega_i^{(1)} \omega_j^{(1)} + v_i^{(1)} v_j^{(1)} + 2\omega_{(i}^{(1)} \omega_{j)}^{(1)} - \phi^{(2)} \delta_{ij} \right)$$

$$\begin{aligned}
& +2\chi_{ij}^{(2)} J_{(0)}^j + 2J_{(1)}^j \chi_{ij}^{(1)} - \varrho^{(1)} v_i^{(1)} - 2\varrho^{(0)} \left(\frac{v_i^{(2)}}{2} + v_i^{(1)} \left(2\phi^{(1)} - \psi^{(1)} \right) - v_{(1)}^j \chi_{ij}^{(1)} \right) \\
& = 2\sigma \left(E_i^{(0)} \left(\frac{1}{2}\psi^{(2)} - \phi^{(2)} \right) + \frac{1}{2} E_{(0)}^j \chi_{ij}^{(2)} + E_{(1)}^j \chi_{ij}^{(1)} - 2\phi^{(1)} \psi^{(1)} E_i^{(0)} + E_{(0)}^j \chi_{ij}^{(1)} \psi^{(1)} \right. \\
& \quad - 2E_i^{(1)} \left(\phi^{(1)} - \frac{1}{2}\psi^{(1)} \right) - \frac{1}{2} \left(\psi^{(1)} \right)^2 E_i^{(0)} + E_i^{(0)} \frac{1}{2} v_k^{(1)} v_{(1)}^k + E_j^{(0)} v_{(1)}^j \omega_i^{(1)} + \frac{1}{2} E_i^{(2)} \\
& \quad + \frac{1}{2} \left(v^{(2)} \times B^{(0)} \right)_i + \frac{1}{2} \left(\omega^{(2)} \times B^{(0)} \right)_i + \left(v^{(1)} \times B^{(1)} \right)_i + \left(\omega^{(1)} \times B^{(1)} \right)_i \\
& \quad + \epsilon^{ljk} \omega_j^{(1)} B_{(1)}^k \chi_{li}^{(1)} + \epsilon^{mlk} v_l^{(1)} B_{(1)}^k \chi_{mi}^{(1)} + \epsilon_i^{lk} v_{(1)}^j B_{(1)}^k \chi_{lj}^{(1)} \\
(6.215) \quad & \left. - 2\phi^{(1)} \left(\omega^{(1)} \times B^{(0)} \right)_i - 4\phi^{(1)} \left(v^{(1)} \times B^{(0)} \right)_i - \psi^{(1)} \left(\omega^{(1)} \times B^{(0)} \right)_i \right)
\end{aligned}$$

6.1. Ecuaciones de Maxwell (Maxwell Equations)

En esta sección encontraremos una ecuación que nos de razon de la evolución del campo magnético a lo largo de la historia cosmológica. Se habia encontrado capítulos anteriores una ecuación que nos daba la evolución del campo magnético a través de las ecuaciones de Maxwell “Ecuación de Dinamo”, esta ecuación estaba descrita bajo el modelo magnetohidrodinámico. La idea es deducir una ecuación similar pero en este caso en un universo perturbado de R.W, para esto primero debemos encontrar las ecuaciones de Maxwell perturbadas y por medio de estar, poder hacer una combinación para llegar a la ecuación de “Dinamo Cosmológico”.

Primero vamos a encontrar la expresion para la ecuación de Gauss en un universo perturbado:

- A cero orden:

$$(6.216) \quad \partial_i E_{(0)}^i = a\varrho_{(0)}$$

- A primer orden:

$$(6.217) \quad \partial_i E_{(1)}^i + E_{(0)}^i \left(\partial_i \psi^{(1)} - 3\partial_i \phi^{(1)} \right) = a\varrho_{(1)}$$

- A segundo orden:

$$\begin{aligned}
& \partial_i E_{(2)}^i + E_{(0)}^i \left(\partial_i \psi^{(2)} - 3\partial_i \phi^{(2)} - 4\psi^{(1)} \partial_i \psi^{(1)} - 12\phi^{(1)} \partial_i \phi^{(1)} + 2\omega_{(1)}^l \partial_l \omega_i^{(1)} - \chi_{(1)}^{lm} \partial_i \chi_{lm}^{(1)} \right) \\
(6.218) \quad & + E_{(1)}^i \left(4\partial_i \psi^{(1)} - 12\partial_i \phi^{(1)} \right) = a\varrho_{(2)}
\end{aligned}$$

La siguiente ecuación es la generalización de la ecuación de la ley de Ampere:

- A cero orden:

$$(6.219) \quad \epsilon^{ilk} \partial_l B_{(0)}^k - \left(E_{(0)}^i \right)' - 2HE_{(0)}^i = aJ_{(0)}^i$$

- A primer orden:

$$(6.220) \quad \epsilon^{ilk} \partial_l B_{(1)}^k - \left(E_{(1)}^i \right)' - 2HE_{(1)}^i - E_{(0)}^i \left(\left(\psi^{(1)} \right)' - 3 \left(\phi^{(1)} \right)' \right) + \epsilon^{ilk} B_{(0)}^k \partial_l \left(\psi^{(1)} - 3\phi^{(1)} \right) = aJ_{(1)}^i$$

- A segundo orden:

$$\begin{aligned}
(6.221) \quad & \epsilon^{ilk} \partial_l B_{(2)}^k - \left(E_{(2)}^i \right)' - 2HE_{(2)}^i - 2E_{(0)}^i \left[\frac{1}{2} \left(\psi^{(2)} \right)' - \frac{3}{2} \left(\phi^{(2)} \right)' - 2\psi^{(1)} \left(\psi^{(1)} \right)' - 6\phi^{(1)} \left(\phi^{(1)} \right)' + \omega_{(1)}^k \left(\omega_k^{(1)} \right)' \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \chi_{(1)}^{lk} \left(\chi_{lk}^{(1)} \right)' \right] + 2\epsilon^{ilk} B_{(0)}^k \left(\frac{1}{2} \partial_l \psi^{(2)} - \frac{3}{2} \partial_l \phi^{(2)} - 2\psi^{(1)} \partial_l \psi^{(1)} - 6\phi^{(1)} \partial_l \phi^{(1)} + \omega_{(1)}^m \partial_m \omega_l^{(1)} - \frac{1}{2} \chi_{(1)}^{lm} \partial_i \chi_{lm}^{(1)} \right) \\
& - 2E_{(1)}^i \left(2 \left(\psi^{(1)} \right)' - 6 \left(\phi^{(1)} \right)' \right) + 2\epsilon^{ilk} B_{(1)}^k \partial_l \left(2\psi^{(1)} - 6\phi^{(1)} \right) = aJ_{(2)}^i
\end{aligned}$$

Ahora para la generalización de la ecuación de Gauss magnética, tenemos que $F_{0i} \rightarrow -a^2 E_i$ $F_{ij} \rightarrow a^2 \epsilon_{ijk} B_k$, por lo tanto se tiene lo siguiente:

- A cero orden:

$$(6.222) \quad \partial_i B_i^{(0)} + \partial_j B_j^{(0)} + \partial_k B_k^{(0)} = 0$$

- A primer orden:

$$(6.223) \quad \partial_i B_i^{(1)} + \partial_j B_j^{(1)} + \partial_k B_k^{(1)} = 0$$

- A segundo orden:

$$(6.224) \quad \partial_i B_i^{(2)} + \partial_j B_j^{(2)} + \partial_k B_k^{(2)} = 0$$

Por último tenemos para la generalización de la ley de Faraday:

- A orden cero:

$$(6.225) \quad B_{k(0)}' + 2HB_k^{(0)} + \epsilon_k^{ij} \partial_i E_j^{(0)} = 0$$

- A primer orden:

$$(6.226) \quad B'_{k(1)} + 2HB_k^{(1)} + \epsilon_k^{ij} \partial_i E_j^{(1)} = 0$$

- A segundo orden:

$$(6.227) \quad B'_{k(2)} + 2HB_k^{(2)} + \epsilon_k^{ij} \partial_i E_j^{(2)} = 0$$

Hasta aquí podemos observar algo, las ecuaciones anteriormente deducidas están escritas en términos de cantidades que dependen del gauge así que se hace necesario expresarlas en términos de cantidades invariantes gauge.

6.2. Ecuación de Dinamo

Hasta aquí tenemos las ecuaciones de campo de Einstein, las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de conservación a segundo orden. La idea es encontrar una ecuación que nos de cuenta de la evolución de los campos magnéticos generados en el universo temprano. Como se ha mencionado en los capítulos anteriores, hay varias etapas para el estudio de este tópico, desde la generación de los campos magnéticos, siguiendo con la evolución, hasta llegar a su amplificación en etapas de formación de estructura. En la mayoría de los casos el campo magnético se toma como una perturbación del background, es decir, después de inflación el universo es descrito por la perturbación de R-W debido a que la expansión amplificó perturbaciones en las componentes geométricas del tensor métrico de R-W[64]. Ahora, después de las transiciones de fase quedó un remanente de campos magnéticos, por lo que dicho campo entra como una perturbación de las componentes de materia del universo descrito antes por la métrica de R-W perturbada. En el caso de trabajar con perturbaciones a primer orden del tensor electromagnético, implica que $\delta^{(1)}T_0^0 = B^2$ es un término a primer orden así que B^i es de orden $[\frac{1}{2}]$ [102, 96, 64]. Lo mismo sucede con términos del campo eléctrico $\delta^{(1)}T_0^i = E^i \times B^i$, así que E^i es del orden de $[\frac{1}{2}]$. Esto implica que términos en la fuerza de Lorentz tales como $J^i \times v^i$ sean del orden $[\frac{3}{2}]$. Generalmente son órdenes que aparecen debido al modelo que se este trabajando, en este caso $T_\beta^{\alpha(E.M)}$ al entrar como una perturbación, genera que los campos tengan estos ordenes[149, 102, 96]. En nuestro trabajo, se encontró el $T_\beta^{\alpha(E.M)}$ a todos los ordenes y usamos el hecho que después de las transiciones de fase, se tiene un universo con una métrica perturbada de R-W y con un contenido modelado por un fluido perfecto y un campo electromagnético perturbado, así que todos los campos no sólo geométricos sino de materia pueden ser divididos como valores del background, mas valores a primer orden, mas valores a segundo orden y así sucesivamente. En este sentido nuestro trabajo no se encuentran términos con ordenes fraccionarios. Ahora a orden cero se debe tener un universo el cual respete homogeneidad e isotropía así que tendremos que hacer algunas suposiciones para que $T_\beta^{\alpha(E.M)}$ entre a orden cero en la teoría. Se observa en los datos de la radiación cósmica de fondo que la homogeneidad e isotropía se respeta a un orden $10^{-5} \left(\frac{\delta\mu}{\mu_{(0)}} \right)$. Además la anisotropía en CMB debida a los campos magnéticos es del orden del 10^{-9} ($B_{(0)}^2 \ll \mu_{(0)}$)[135, 150, 151]. Por lo tanto el efecto anisotrópico dado por $B_{(0)}^i$ es muy pequeño, aunque su densidad $\langle B_{(0)}^2 \rangle$ no lo es, por lo que en este caso suponemos el campo de background $B_{(0)}$ homogéneo o suficientemente aleatorio tal que $\langle B_i^{(0)} \rangle = 0$, $\langle B_i^{(0)} B_{(0)}^i \rangle \neq 0^1$, esto implica que los únicos términos diferentes de

¹El $\langle \cdot \rangle$ implica el valor esperado del campo magnético primordial generado antes de recombinación.

cero son $B_{(0)}^2$, $E_{(0)}^2$ y $E_{(0)}^i$. Ahora se encontró en la sección anterior la ley de Ohm en el background (6.213), en gran parte de la historia cosmológica el universo a grandes escalas es conductor dado que esta compuesto en gran parte por partículas cargadas que están acopladas por interacciones (Coulomb, Thomson,..)[150], si tenemos en cuenta esta suposición, encontramos que:

$$(6.228) \quad \frac{j_{(0)}^i}{\sigma} \rightarrow 0 \implies E_{(0)}^i \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \sigma \rightarrow \infty$$

Esto no implica que la corriente $j_{(0)}^i$ sea nula[152], pero si la corriente es diferente de cero esto supone separación de cargas lo cual rompe homogeneidad en el background, lo cual concluye que $j_{(0)}^i = 0^2$. Por lo tanto el único término diferente de cero en el tensor electromagnético viene dado por $B_{(0)}^2$, por lo tanto el tensor electromagnético es diagonal como se ve en (6.183) y respeta las condiciones del background. Dado esto, las ecuaciones anteriormente encontradas son simplificadas, es decir hacemos que³:

$$(6.229) \quad B_{(0)}^i = E_{(0)}^2 = E_{(0)}^i = j_{(0)}^i = \varrho_{(0)} = 0$$

En el capítulo anterior se encontró la ley de Ohm a primer orden (6.214), ahora al colocar la Ley de Ohm en términos de cantidades invariantes invariantes de gauge:

$$J_i^{(1)} + J_{(0)}^j \chi_{ij}^{(1)} - 2\Phi^{(1)} J_i^{(0)} + 2 \left(\frac{1}{6} \nabla^2 \chi^{(1)} + H S_{(1)}^{\parallel} \right) J_i^{(0)} - \varrho^{(0)} \left(v_i^{(1)} - \left(\chi_i^{\perp(1)} \right)' \right)$$

$$(6.230) \quad = \sigma \left[E_i^{(1)} + \left(\mathcal{V}^{(1)} \times B^{(0)} \right)_i - 2E_i^{(0)} \left(\Phi^{(1)} - \frac{1}{2} \Psi^{(1)} - \frac{1}{6} \nabla^2 \chi^{(1)} - \frac{H}{2} S_{(1)}^{\parallel} + \frac{1}{2} \left(S_{(1)}^{\parallel} \right)' \right) + E_{(0)}^j \chi_{ij}^{(1)} \right]$$

Donde al usar las condiciones anteriormente mencionadas, encontramos que:

$$(6.231) \quad J_i^{(1)} = \sigma \left(E_i^{(1)} + \left(\mathcal{V}^{(1)} \times B^{(0)} \right)_i \right)$$

Las ecuaciones de Maxwell a primer orden no homogéneas en términos de cantidades invariantes gauge vienen dadas por:

$$(6.232) \quad \partial_i E_{(1)}^i + E_{(0)}^i \partial_i \left(\Psi^{(1)} - \frac{1}{a} \left(S_{(1)}^{\parallel} \right)' \right) - 3 \left(\Phi^{(1)} - \frac{1}{6} \nabla^2 \chi^{(1)} + H S_{(1)}^{\parallel} \right) = a \varrho_{(1)}$$

²También se observa por medio de la ley de Gauss que $\varrho^{(0)} = 0$.

³Nuevamente se hace aclaración de que $E_{(0)}^i$ no es cero, es su valor esperado $\langle E_{(0)}^i \rangle = 0$.

$$(6.233) \quad \epsilon^{ilk} \partial_l B_{(1)}^k - \left(E_{(1)}^i \right)' - E_{(0)}^i \left(\Psi^{(1)} - \frac{1}{a} \left(\mathcal{S}_{(1)}^{\parallel} a \right)' - 3 \left(\Phi^{(1)} - \frac{1}{6} \nabla^2 \chi^{(1)} + H \mathcal{S}_{(1)}^{\parallel} \right) \right)' - 2HE_{(1)}^i + \epsilon^{ilk} B_{(0)}^k \partial_l \left(\Psi^{(1)} - \frac{1}{a} \left(\mathcal{S}_{(1)}^{\parallel} a \right)' - 3 \left(\Phi^{(1)} - \frac{1}{6} \nabla^2 \chi^{(1)} + H \mathcal{S}_{(1)}^{\parallel} \right) \right) = aJ_{(1)}^i$$

Donde al imponer las condiciones anteriormente dadas, se encuentra que:

$$(6.234) \quad \partial_i E_{(1)}^i = a\varrho_{(1)}$$

$$(6.235) \quad \epsilon^{ilk} \partial_l B_{(1)}^k - \left(E_{(1)}^i \right)' - 2HE_{(1)}^i = aJ_{(1)}^i$$

Las otras ecuaciones de Maxwell a primer orden homogeneas vienen dadas por:

$$(6.236) \quad B'_{k(1)} + 2HB_k^{(1)} + \epsilon_k^{ij} \partial_i E_j^{(1)} = 0$$

La divergencia nula del campo magnético viene dada por:

$$(6.237) \quad \partial_i B_i^{(1)} + \partial_j B_j^{(1)} + \partial_k B_k^{(1)} = 0$$

En este caso se puede observar que los campos electromagnéticos son invariantes gauge debido a que son nulos en el background(3.40). Al despejar el campo eléctrico en la ley de Ohm y usar las ecuaciones (6.233)(6.235)(6.236) , llegamos a la ecuación de dinamo a primer orden viene dada por:

$$(6.238) \quad \left(B_k^{(1)} \right)' + 2HB_k^{(1)} + \eta \left[\nabla \times \left(\nabla \times B^{(1)} - \left(E^{(1)} \right)' - 2HE^{(1)} \right) \right]_k + \left(\nabla \times \left(B_{(0)} \times \mathcal{V}_{(1)} \right) \right)_k + O^{(1)} = 0$$

Con:

$$O^{(1)} = \eta \epsilon_k^{lj} \partial_l \left(-E_j^{(0)} \left(\Psi^{(1)} - 3\Phi^{(1)} \right)' + \epsilon_{jlm} \partial_l B_{(0)}^m \left(\Psi^{(1)} - 3\Phi^{(1)} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& +\epsilon^{ilm}\partial_l B_{(0)}^m \chi_{ij}^{(1)} + \chi_{ij}^{(1)} \left(E_{(0)}^i \right)' - 2HE_{(0)}^i \chi_{ij}^{(1)} - 2HS_{(1)}^{ll} \left(\epsilon^{ilm}\partial_l B_{(0)}^m + \left(E_{(0)}^i \right)' - 2HE_{(0)}^i \right) \\
& - E_j^{(0)} \left(-2\Phi^{(1)} + \frac{1}{3}\nabla^2 \chi^{(1)} \right) + \epsilon_k^{lj} \partial_l \left(2E_j^{(0)} \left(\Psi^{(1)} - \frac{1}{2}\Phi^{(1)} \right) - \chi_{ij}^{(1)} E_{(0)}^i \right)
\end{aligned}$$

Donde $O^{(1)}$ es despreciable cuando tenemos la conductividad en el background infinita. En la ecuación de dinamo (6.238) se observa que la evolución del campo magnético depende de tres términos los cuales dan cuenta de la expansión, un término de difusión⁴ y un término de dinamo medio. En el caso de conductividad infinita en el background se observa que la evolución del campo es similar a lo encontrado en los capítulos anteriores, salvo que el término de velocidad es el término de velocidad peculiar invariante gauge, definida en el capítulo de perturbaciones. Cuando no se impone la condición de conductividad infinita, se observa que la evolución depende también de cantidades geométricas, es decir de las perturbaciones del espacio-tiempo. A segundo orden se procede de la misma manera, teniendo nuevamente en cuenta que aparecen términos fuente ó acoples de términos a primer orden.

La ley de Ohm a segundo orden en forma invariante viene dada por:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{J}_i^{(2)} - 4J_i^{(1)}\Phi^{(1)} - \varrho^{(1)}v_i^{(1)} + S_i^1(J_i^{(1)}, \chi_{ij}^{(1)}, \varrho^{(1)}) \\
& = 2\sigma \left(\frac{1}{2} \left(\mathcal{V}_{(2)} \times B^{(0)} \right)_i + \left(\mathcal{V}_{(1)} \times B^{(1)} \right)_i - 2E_i^{(1)} \left(\Phi^{(1)} - \frac{1}{2}\Psi^{(1)} \right) \right) \\
(6.239) \quad & + \frac{1}{2}E_i^{(2)} - \left(2\Phi^{(1)} + \Psi^{(1)} \right) \left(\mathcal{V}_{(1)} \times B^{(0)} \right)_i + S_i^2(E_{(1)}^j, J_i^{(1)}, B_i^{(1)}, \chi_{ij}^{(1)}, \varrho^{(1)})
\end{aligned}$$

La primera ecuación de Maxwell no homogénea viene dada por:

$$\begin{aligned}
& \partial_i E_{(2)}^i + E_{(0)}^i \left(\partial_i \psi^{(2)} - 3\partial_i \phi^{(2)} - 4\psi^{(1)} \partial_i \psi^{(1)} - 12\phi^{(1)} \partial_i \phi^{(1)} + 2\omega_{(1)}^l \partial_l \omega_i^{(1)} \right. \\
(6.240) \quad & \left. - \chi_{(1)}^{lm} \partial_i \chi_{lm}^{(1)} \right) + E_{(1)}^i \left(4\partial_i \psi^{(1)} - 12\partial_i \phi^{(1)} \right) = a\varrho_{(2)}
\end{aligned}$$

En términos de invariantes gauge se tiene que:

$$(6.241) \quad \partial_i \mathcal{E}_{(2)}^i + 4E_{(1)}^i \partial_i \left(\Psi^{(1)} - 3\Phi^{(1)} \right) + \mathcal{T}_{G1} = a\Delta_\varrho^{(2)}$$

⁴Este término es diferente de cero debido a que $\frac{J_{(0)}^i}{\sigma} \neq 0$, porque es a primer orden.

Con:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{G1} = & -\partial_i \left(\chi_{\perp(2)}^i \right)' - E_{(0)}^i \left(\partial_i \left(\frac{1}{a} \left(\mathcal{S}_{(2)}^{\parallel} a \right)' + \left(-\frac{1}{2} \nabla^2 \chi^{(2)} + 3H \mathcal{S}_{(2)}^{\parallel} \right) \right) \right) \\ & - 4 \left(\frac{1}{a} \left(\mathcal{S}_{(1)}^{\parallel} a \right)' \right) \partial_i \left(\frac{1}{a} \left(\mathcal{S}_{(1)}^{\parallel} a \right)' \right) - 12 \left(-\frac{1}{6} \nabla^2 \chi^{(1)} + H \mathcal{S}_{(1)}^{\parallel} \right) \partial_i \left(-\frac{1}{6} \nabla^2 \chi^{(1)} + H \mathcal{S}_{(1)}^{\parallel} \right) \\ & + 2 \left(\chi_{\perp(1)}^l \right)' \partial_i \left(\chi_i^{\perp(1)} \right)' + a \left(\varrho_{(0)} \right)' \mathcal{S}_{(2)}^{\parallel} - \chi_{(1)}^{lm} \partial_i \chi_{lm}^{(1)} \\ & - 4 E_{(1)}^i \partial_i \left(\frac{1}{a} \left(\mathcal{S}_{(1)}^{\parallel} a \right)' + \left(-\frac{1}{2} \nabla^2 \chi^{(1)} + 3H \mathcal{S}_{(1)}^{\parallel} \right) \right) \end{aligned}$$

Los términos \mathcal{T}_{G1} , $\mathcal{S}_i^2(E_{(1)}^j, J_i^{(1)}, B_i^{(1)}, \chi_{ij}^{(1)}, \varrho^{(1)})$, son los acoples a primer orden. La otra ecuación de Maxwell no homogénea viene dado por:

$$\begin{aligned} & \epsilon^{ilk} \partial_l B_{(2)}^k - \left(E_{(2)}^i \right)' - 2H E_{(2)}^i - 2E_{(0)}^i \left(\frac{1}{2} \left(\psi^{(2)} \right)' - \frac{3}{2} \left(\phi^{(2)} \right)' - 2\psi^{(1)} \left(\psi^{(1)} \right)' \right. \\ & \quad \left. - 6\phi^{(1)} \left(\phi^{(1)} \right)' + \omega_{(1)}^k \left(\omega_k^{(1)} \right)' - \frac{1}{2} \chi_{(1)}^{lk} \left(\chi_{lk}^{(1)} \right)' \right) + 2\epsilon^{ilk} B_{(0)}^k \left(\frac{1}{2} \partial_l \psi^{(2)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{3}{2} \partial_l \phi^{(2)} - 2\psi^{(1)} \partial_l \psi^{(1)} - 6\phi^{(1)} \partial_l \phi^{(1)} + \omega_{(1)}^m \partial_m \omega_l^{(1)} - \frac{1}{2} \chi_{(1)}^{lm} \partial_i \chi_{lm}^{(1)} \right) \\ (6.242) \quad & - 2E_{(1)}^i \left(2 \left(\psi^{(1)} \right)' - 6 \left(\phi^{(1)} \right)' \right) + 2\epsilon^{ilk} B_{(1)}^k \partial_l \left(2\psi^{(1)} - 6\phi^{(1)} \right) = a j_{(2)}^i \end{aligned}$$

En términos invariantes gauge viene descrita por:

$$\begin{aligned} & \left(\nabla \times \mathcal{B}_k^{(2)} \right)^i - \left(\mathcal{E}_{(2)}^i \right)' - 2H \mathcal{E}_{(2)}^i - 2E_{(1)}^i \left(2 \left(\Psi^{(1)} \right)' - 6 \left(\Phi^{(1)} \right)' \right) \\ (6.243) \quad & - 2 \left(\nabla \times B_{(1)} \left(2\Psi^{(1)} - 6\Phi^{(1)} \right) \right)^i = a \mathcal{J}_{(2)}^i + S^{i3} \left(\mathcal{S}_{(2)}^{\parallel}, J_{(1)}^i, \mathcal{S}_{(1)}^{\parallel}, E_{(1)}^i, B_{(1)}^i \right) \end{aligned}$$

Donde $S^{i3}(\mathcal{S}_{(2)}^{\parallel}, J_{(1)}^i, \mathcal{S}_{(1)}^{\parallel}, E_{(1)}^i, B_{(1)}^i)$ son términos fuente ó acoples a primer orden. Las siguientes son las ecuaciones homogéneas a segundo orden:

$$(6.244) \quad \partial_i B_i^{(2)} + \partial_j B_j^{(2)} + \partial_k B_k^{(2)} = 0$$

En forma invariante:

$$(6.245) \quad \partial_i \mathcal{B}_i^{(2)} + \partial_j \mathcal{B}_j^{(2)} + \partial_k \mathcal{B}_k^{(2)} = -S \left(\left(\chi_{\perp(2)}^i \right)', B_j^{(1)} \right)$$

La otra ecuación viene dada por:

$$B'_{k(2)} + 2HB_k^{(2)} + \epsilon^{ij} \partial_i E_j^{(2)} = 0$$

En forma invariante:

$$(6.246) \quad (\mathcal{B}_k^{(2)})' + 2H (\mathcal{B}_k^{(2)}) + (\nabla \times \mathcal{E}_{j(2)})_k = -S_k^4 ((\chi_{k\perp(2)})', E_k^{(1)}, B_k^{(1)})$$

La ecuación de dinamo a segundo orden viene dada al usar (6.239)(6.243)(6.245)(6.246), y se obtuvo lo siguiente:

$$(6.247) \quad \begin{aligned} & (\mathcal{B}_k^{(2)})' + 2H (\mathcal{B}_k^{(2)}) + \eta \left[\nabla \times \left(\frac{1}{a} \left((\nabla \times \mathcal{B}^{(2)}) - 2E_{(1)} \left(2(\Psi^{(1)})' - 6(\Phi^{(1)})' \right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - (\mathcal{E}_{(2)})' - 2H\mathcal{E}_{(2)} - 2 \left(\nabla \times B_{(1)} \left(2\Psi^{(1)} - 6\Phi^{(1)} \right) \right) - S^3(\mathcal{S}_{(2)}^{\parallel}, J_{(1)}^i, \mathcal{S}_{(1)}^{\parallel}, E_{(1)}^i, B_{(1)}^i) \right) \right. \\ & \left. \left. - \varrho^{(1)} v^{(1)} + S^1 \left(J_i^{(1)}, \chi_{ij}^{(1)}, \varrho^{(1)} \right) \right]_k + \left(\nabla \times \left[-4 \left(E^{(1)} + \mathcal{V}_{(1)} \times B^{(0)} \right) \Phi^{(1)} - \left(\mathcal{V}_{(2)} \times B^{(0)} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \left(\mathcal{V}_{(1)} \times B^{(1)} \right) + \left(2\Phi^{(1)} + \Psi^{(1)} \right) \left(\mathcal{V}_{(1)} \times B^{(0)} \right) + 4E^{(1)} \left(\Phi^{(1)} - \frac{1}{2}\Psi^{(1)} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - 2S^2(E_{(1)}^j, J_i^{(1)}, B_i^{(1)}, \chi_{ij}^{(1)}, \varrho^{(1)}) \right]_k \right) = -S_k^4 \left((\chi_{\perp(2)}^i)' , E_j^{(1)}, B_j^{(1)} \right) \end{aligned}$$

Este es el segundo resultado importante de nuestro trabajo, en esta ecuación (6.247) se observa como la evolución del campo magnético a segundo orden depende de los invariantes de Bardeen a segundo orden y de cantidades vectoriales invariantes gauge a segundo orden. Nuevamente esta ecuación de dinamo depende del factor de expansión, de un término de difusión que es muy importante debido a la escala en la cual se está trabajando y un término de dinamo que no solo depende del factor de Lorentz, sino también de otros términos que pueden amplificar el campo magnético, en otras palabras las perturbaciones del espacio-tiempo juegan un papel importante en la evolución de los campos magnéticos y además pueden ser fuente debido al término del lado izquierdo $S_k^4 \left((\chi_{\perp(2)}^i)' , E_j^{(1)}, B_j^{(1)} \right)$ de (6.247). Se observa también que a segundo orden los campos no son invariantes gauge por lo que debemos definir cantidades invariantes gauge que tengan una interpretación física de estos campos(5.145), este fué otro resultado importante de la tesis. En conclusión se encontró que las perturbaciones en la geometría del espacio-tiempo junto con

las perturbaciones en la materia juegan un papel importante en la evolución del campo electromagnético, la solución de (5.145) depende de la evolución de estas cantidades las cuales vienen dadas por la solución de las ecuaciones de campo de Einstein y de las ecuaciones de conservación, por lo que la solución de la ecuación de dinamo tiene que ir de la mano con la solución de las ecuaciones de campo. Este sistema ha sido discutido en la literatura[153] y es llamado sistema de Einstein-Maxwell, en este caso encontramos dicho problema para entender la evolución del campo electromagnético a lo largo de la historia cosmológica.

Conclusiones y Discusión

El origen y la evolución de los campos magnéticos es actualmente un tema de debate. A lo largo de esta tesis se ha hecho un resumen acerca de la investigación elaborada alrededor de este tópico de investigación en la cosmología. Como parte de las conclusiones del trabajo se llegó a la expresión de las transformaciones de los campos electromagnéticos a primer y segundo orden (5.145)(5.131) además de utilizar estas para encontrar cantidades invariantes gauge que describan la física de estos campos, estas expresiones son originales y no hay referencia encontrada alrededor de esto. Se encontró una generalización de la ecuación de shear y vorticidad a segundo orden (5.165)(5.115) teniendo en cuenta todas las perturbaciones de la métrica, y concordando con los resultados obtenidos en la literatura cuando solo se tienen modos escalares (tratamiento muy útil en inflación).

Un resultado importante en esta tesis fué la deducción del tensor momento energía electromagnético hasta segundo orden (6.2.4), resultado original de la tesis y que sirvió de base para escribir el tensor momento energía total en términos de cantidades invariantes gauge. Un objetivo cumplido en esta tesis fué encontrar una ecuación de evolución del campo electromagnético. Con la teoría explicada en el capítulo 2 fué importante e interesante preguntarnos como sería una ecuación de dinamo en un espacio perturbado de R-W, siguiendo esta idea se encontró las ecuaciones de dinamo a primer y segundo orden (6.238),(6.247). Estas ecuaciones sugieren que la evolución de los campos dependen en gran parte de las perturbaciones en el potencial gravitacional y de curvatura además de las perturbaciones generadas por las perturbaciones en la materia. Es interesante notar que al resolver estas ecuaciones debemos también resolver simultáneamente las ecuaciones de campo de Einstein y las ecuaciones de conservación. Dado esto, el problema de encontrar la evolución del campo electromagnético desde su origen es un problema complicado que incluye métodos numéricos de alto nivel.

También se utilizó formalmente y de primeros principios la teoría de perturbaciones cosmológicas[124], para encontrar estas ecuaciones de evolución sin tener órdenes de perturbación fraccional que generaría conflictos no sólo con la razón física que implica tener estos ordenes fraccionales sino también la idea de encontrar el campo magnético B_i como un modo no físico.

Apéndice

6.2.0.2. *Deducción de las ecuaciones de campo a primer y segundo orden.* El número de dimensiones espaciales es 3. Los índices griegos van de 0 a 3 y los latinos de 1 a 3. Para encontrar la forma funcional de las ecuaciones que se deducirán en este apéndice se usa el paquete *mathematica* 3.0 concordando con [154]. La signatura de la métrica es $(-, +, +, +)$, y para llegar a las ecuaciones de campo se utilizan las siguientes ecuaciones:

Los símbolos de Cristoffer vienen dados por:

$$(6.248) \quad \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}(g_{\delta\gamma,\beta} + g_{\delta\beta,\gamma} - g_{\beta\gamma,\delta})$$

El tensor de Riemann se define como:

$$(6.249) \quad R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\nu,\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\delta\mu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\nu}^{\delta} - \Gamma_{\delta\nu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\mu}^{\delta}$$

Su contracción se le denomina el tensor de Ricci:

$$(6.250) \quad R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}$$

$$(6.251) \quad R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\nu,\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\delta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\delta} - \Gamma_{\delta\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\delta}$$

Su contracción es llamado el escalar de Ricci:

$$(6.252) \quad R = R_{\alpha}^{\alpha}$$

El tensor de Einstein vienen dado por:

$$(6.253) \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

Por tanto las ecuaciones de campo vienen descritas como:

$$(6.254) \quad G_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}$$

Con G_N la constante gravitacional y $T_{\mu\nu}$ el tensor momento energía.

6.2.0.3. *Simbolos de Cristoffer.* Los simbolos de Cristoffel para el background de R-W vienen dados por:

$$(6.255) \quad \Gamma_{00}^0 = H, \quad \Gamma_{0j}^i = H\delta_j^i$$

$$(6.256) \quad \Gamma_{ij}^0 = H\delta_{ij} \quad \Gamma_{00}^i = \Gamma_{0j}^i = \Gamma_{kj}^i = 0$$

A primer orden los simbolos de Cristoffer se encuentran por:

$$(6.257) \quad \delta\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}\delta g^{\alpha\delta} (g_{\delta\gamma,\beta} + g_{\delta\beta,\gamma} - g_{\beta\gamma,\delta}) + \frac{1}{2}g^{\alpha\delta} (\delta g_{\delta\gamma,\beta} + \delta g_{\delta\beta,\gamma} - \delta g_{\beta\gamma,\delta})$$

a primer orden se tiene lo siguiente:

$$(6.258) \quad \delta^{(1)}\Gamma_{00}^0 = \left(\psi^{(1)}\right)'$$

$$(6.259) \quad \delta^{(1)}\Gamma_{0i}^0 = \partial_i\psi^{(1)} + H\omega_i^{(1)}$$

$$(6.260) \quad \delta^{(1)}\Gamma_{00}^i = \partial^i\psi^{(1)} + H\omega_{(1)}^i + \left(\omega_{(1)}^i\right)'$$

$$(6.261) \quad \delta^{(1)}\Gamma_{ij}^0 = -2H\psi^{(1)}\delta_{ij} - \partial_i\omega_j^{(1)} - 2H\phi^{(1)}\delta_{ij} - \left(\phi^{(1)}\right)'\delta_{ij} - H\chi_{ij}^{(1)} + \frac{1}{2}\left(\chi_{ij}^{(1)}\right)'$$

$$(6.262) \quad \delta^{(1)}\Gamma_{0j}^i = -\left(\phi^{(1)}\right)'\delta_j^i + \frac{1}{2}\left(\chi_j^{i(1)}\right)'$$

$$(6.263) \quad \delta^{(1)}\Gamma_{jk}^i = -\partial_j\phi^{(1)}\delta_k^i - \partial_k\phi^{(1)}\delta_j^i + \partial^i\phi^{(1)}\delta_{jk} - H\omega_{(1)}^i\delta_{jk} + \frac{1}{2}\partial_j\chi_{(1)k}^i + \frac{1}{2}\partial_k\chi_{(1)j}^i - \frac{1}{2}\partial^i\chi_{jk}^{(1)}$$

Para segundo orden se calculan por:

$$\delta^2\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}\delta^2 g^{\alpha\delta} (g_{\delta\gamma,\beta} + g_{\delta\beta,\gamma} - g_{\beta\gamma,\delta}) + \delta g^{\alpha\delta} (\delta g_{\delta\gamma,\beta} + \delta g_{\delta\beta,\gamma} - \delta g_{\beta\gamma,\delta})$$

$$(6.264) \quad +\frac{1}{2}g^{\alpha\delta} (\delta^2 g_{\delta\gamma,\beta} + \delta^2 g_{\delta\beta,\gamma} - \delta^2 g_{\beta\gamma,\delta})$$

A segundo orden:

$$(6.265) \quad \delta^{(2)}\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} \left(\psi^{(2)} \right)' - 2\psi^{(2)} \left(\psi^{(2)} \right)' + \partial^l \psi^{(1)} \omega_l^{(1)} + H \omega_{(1)}^l \omega_l^{(1)} + \omega_{(1)}^l \left(\omega_l^{(1)} \right)'$$

$$(6.266) \quad \delta^{(2)}\Gamma_{0i}^0 = \frac{1}{2} \partial_i \psi^{(2)} + \frac{1}{2} H \omega_i^{(2)} - 2\psi^{(1)} \partial_i \psi - 2H \psi^{(1)} \omega_i^{(1)} - \left(\phi^{(1)} \right)' \omega_i^{(1)} + \frac{1}{2} \omega_{(1)}^l \left(\chi_{il}^{(1)} \right)'$$

$$\delta^{(2)}\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \partial^i \psi^{(2)} + \frac{1}{2} H \omega_{(2)}^i + \frac{1}{2} \left(\omega_{(2)}^i \right)' + 2\phi^{(1)} \partial^i \psi - \left(\psi^{(1)} \right)' \omega_{(1)}^i$$

$$(6.267) \quad +2H \phi^{(1)} \omega_{(1)}^i + 2\phi^{(1)} \left(\omega_{(1)}^i \right)' - \partial_k \psi^{(1)} \chi_{(1)}^{ki} - H \omega_k^{(1)} \chi_{(1)}^{ki} - \chi_{(1)}^{ki} \left(\omega_{(1)}^k \right)'$$

$$\delta^{(2)}\Gamma_{ij}^0 = -H \psi^{(2)} \delta_{ij} - \frac{1}{4} \left(\partial_i \omega_j^{(2)} + \partial_j \omega_i^{(2)} \right) - H \phi^{(2)} \delta_{ij} - \frac{1}{2} \left(\phi^{(2)} \right)' \delta_{ij} + \frac{1}{2} H \chi_{ij}^{(2)} + \frac{1}{4} \left(\chi_{ij}^{(2)} \right)' + 4H \left(\psi^{(1)} \right)^2 \delta_{ij}$$

$$+2\psi^{(1)} \left(\phi^{(1)} \right)' \delta_{ij} + 4H \psi^{(1)} \phi^{(1)} \delta_{ij} + \omega_{(1)}^l \phi_l^{(1)} \delta_{ij} - H \omega_{(1)}^l \omega_l^{(1)} \delta_{ij} + 2\psi^{(1)} \partial_i \omega_j^{(1)} - \partial_i \phi^{(1)} \omega_j^{(1)} - \partial_j \phi^{(1)} \omega_i^{(1)}$$

$$(6.268) \quad -\psi^{(1)} \left(\chi_{ij}^{(1)} \right)' + \frac{1}{2} \omega_{(1)}^k \partial_i \chi_{kj}^{(1)} + \frac{1}{2} \omega_{(1)}^k \partial_j \chi_{ik}^{(1)} - \frac{1}{2} \omega_{(1)}^k \partial_k \chi_{ij}^{(1)}$$

$$\delta^{(2)}\Gamma_{0j}^i = -\frac{1}{2} \left(\phi^{(2)} \right)' \delta_j^i - 2\phi^{(1)} \left(\phi^{(1)} \right)' \delta_j^i + \frac{1}{4} \left(\chi_j^{i(2)} \right)' + \frac{1}{4} \left(\partial_j \omega_{(2)}^i - \partial_i \omega_{(2)}^j \right) - \omega_{(1)}^i \partial_j \psi^{(1)}$$

$$(6.269) \quad -H \omega_{(1)}^i \omega_j^{(1)} + \phi^{(1)} \left(\chi_j^{i(1)} \right)' + \chi_j^{i(1)} \left(\phi^{(1)} \right)' - \frac{1}{2} \chi_{(1)}^{ik} \left(\chi_{kj}^{(1)} \right)'$$

$$\delta^{(2)}\Gamma_{jk}^i = -\frac{1}{2} \partial_j \phi^{(2)} \delta_k^i - \frac{1}{2} \partial_k \phi^{(2)} \delta_j^i + \frac{1}{2} \partial^i \phi^{(2)} \delta_{jk} - \frac{1}{2} H \omega_{(2)}^i \delta_{jk} + \frac{1}{4} \partial_j \chi_{(2)k}^i + \frac{1}{4} \partial_k \chi_{(2)j}^i - \frac{1}{4} \partial^i \chi_{jk}^{(2)}$$

$$+2H \psi^{(1)} \omega_{(1)}^i \delta_{jk} + \omega_{(1)}^i \partial_j \omega_k^{(1)} + \left(\phi^{(1)} \right)' \omega_{(1)}^i \delta_{jk} + 2\phi^{(1)} \left(-\partial_j \phi^{(1)} \delta_k^i - \partial_k \phi^{(1)} \delta_j^i - \partial^i \phi^{(1)} \delta_{jk} \right)$$

$$+ \phi^{(1)} \left(\partial_j \chi_k^{i(1)} + \partial_k \chi_j^{i(1)} - \partial^i \chi_{jk}^{(1)} \right) + \partial_j \phi^{(1)} \chi_k^{i(1)} + \partial_k \phi^{(1)} \chi_j^{i(1)} - \partial_m \phi^{(1)} \chi_{(1)}^{im} \delta_{jk} - H \omega_{(1)}^i \chi_{jk}^{(1)}$$

$$(6.270) \quad +H\omega_{(1)}^l \chi_l^{i(1)} \delta_{jk} - \frac{1}{2}\omega_{(1)}^i \left(\chi_{jk}^{(1)}\right)' - \frac{1}{2}\chi_{(1)}^{il} \partial_j \chi_{lk}^{(1)} - \frac{1}{2}\chi_{(1)}^{il} \partial_k \chi_{lj}^{(1)} + \frac{1}{2}\chi_{(1)}^{il} \partial_l \chi_{jk}^{(1)}$$

6.2.1. Tensor de Ricci. A orden cero vienen dados por:

$$(6.271) \quad R_{00} = -3\frac{a''}{a} + 3H^2$$

$$(6.272) \quad R_{0i} = 0 \quad R_{ij} = \left(\frac{a''}{a} + H^2\right) \delta_{ij}$$

A primer orden el tensor de Ricci se calcula por medio de:

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \delta\Gamma_{\alpha\nu,\mu}^\alpha + \delta\Gamma_{\delta\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\delta + \Gamma_{\delta\alpha}^\alpha \delta\Gamma_{\mu\nu}^\delta - \delta\Gamma_{\delta\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\delta - \Gamma_{\delta\nu}^\alpha \delta\Gamma_{\alpha\mu}^\delta$$

A primer orden se tiene:

$$(6.273) \quad \delta R_{00} = H\partial_i \omega_{(1)}^i + \partial_i \left(\omega_{(1)}^i\right)' + \Delta\psi^{(1)} + 3\left(\phi^{(1)}\right)'' + 3H\left(\phi^{(1)}\right)' + 3H\left(\psi^{(1)}\right)'$$

$$(6.274) \quad \delta R_{0i} = \frac{a''}{a}\omega_i^{(1)} + H^2\omega_i^{(1)} + 2\partial_i \left(\phi^{(1)}\right)' + 2H\partial_i \psi^{(1)} + \frac{1}{2}\partial_k \left(\chi_i^{k(1)}\right)'$$

$$\delta R_{ij} = \left[-H\left(\psi^{(1)}\right)' - 5H\left(\phi^{(1)}\right)' - 2\frac{a''}{a}\psi^{(1)} - 2H^2\psi^{(1)} - 2\frac{a''}{a}\phi^{(1)}\right.$$

$$\left.- 2H^2\phi^{(1)} - \left(\phi^{(1)}\right)'' + \Delta\phi^{(1)} - H\partial_l \omega_{(1)}^l\right] \delta_{ij} - \partial_i \left(\omega_j^{(1)}\right)' - 2H\partial_i \omega_j^{(1)} + H\left(\chi_{ij}^{(1)}\right)' + \frac{a''}{a}\chi_{ij}^{(1)}$$

$$(6.275) \quad +H^2\chi_{ij}^{(1)} + \frac{1}{2}\left(\chi_{ij}^{(1)}\right)'' + \partial_i \partial_j \left(\phi^{(1)} - \psi^{(1)}\right) + \frac{1}{2}\partial_l \left(\partial_i \chi_j^{l(1)} + \partial_j \chi_i^{l(1)}\right) - \frac{1}{2}\Delta\chi_{ij}^{(1)}$$

A segundo orden se calculan por:

$$\delta^2 R_{\mu\nu} = \delta^2\Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \delta^2\Gamma_{\alpha\nu,\mu}^\alpha + \delta^2\Gamma_{\delta\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\delta + \delta\Gamma_{\delta\alpha}^\alpha \delta\Gamma_{\mu\nu}^\delta + \delta\Gamma_{\delta\alpha}^\alpha \delta\Gamma_{\mu\nu}^\delta$$

$$(6.276) \quad +\Gamma_{\delta\alpha}^\alpha \delta^2\Gamma_{\mu\nu}^\delta - \delta^2\Gamma_{\delta\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\delta - \delta\Gamma_{\delta\nu}^\alpha \delta\Gamma_{\alpha\mu}^\delta - \delta\Gamma_{\delta\nu}^\alpha \delta\Gamma_{\alpha\mu}^\delta - \Gamma_{\delta\nu}^\alpha \delta^2\Gamma_{\alpha\mu}^\delta$$

A segundo orden

$$\begin{aligned}
 \delta^{(2)} R_{00} &= \frac{3}{2} H \left(\psi^{(2)} + \phi^{(2)} \right)' + \frac{1}{2} \partial_i \left(\omega_{(2)}^i \right)' + \frac{1}{2} \Delta \psi^{(2)} + \frac{3}{2} \left(\phi^{(2)} \right)'' + \frac{1}{2} H \partial_i \omega_{(2)}^i - 6 H \psi^{(1)} \left(\psi^{(1)} \right)' - \partial^l \psi^{(1)} \partial_l \psi^{(1)} \\
 &- 3 \left(\phi^{(1)} \right)' \left(\psi^{(1)} \right)' + 2 \phi^{(1)} \Delta \psi^{(1)} - \partial^l \psi^{(1)} \partial_l \phi^{(1)} + 6 H \phi^{(1)} \left(\phi^{(1)} \right)' + 6 \phi^{(1)} \left(\phi^{(1)} \right)'' + 3 \left(\psi^{(1)'} \right)^2 - \left(\psi^{(1)} \right)' \partial_i \omega_{(1)}^i \\
 &+ H \omega_{(1)}^k \partial_k \psi^{(1)} + \frac{a''}{a} \omega_{(1)}^k \omega_{(1)}^k + H^2 \omega_{(1)}^k \omega_{(1)}^k - H \omega_{(1)}^k \partial_k \phi^{(1)} + 2 H \phi^{(1)} \partial_k \omega_{(1)}^k - \partial_k \phi^{(1)} \left(\omega_{(1)}^k \right)' + 2 \phi^{(1)} \partial_k \left(\omega_{(1)}^k \right)' \\
 &+ 3 H \omega_{(1)}^k \left(\omega_{(1)}^k \right)' - \partial_k \psi^{(1)} \partial_l \chi_{(1)}^{lk} - \partial_k \partial_l \psi^{(1)} \chi_{(1)}^{lk} - H \partial_k \omega_{(1)}^l \chi_{(1)}^{lk} - H \omega_{(1)}^l \partial_k \chi_{(1)}^{lk} - \left(\omega_{(1)}^l \right)' \partial_k \chi_{(1)}^{lk} - \partial_k \left(\omega_{(1)}^l \right)' \chi_{(1)}^{lk} \\
 (6.277) \quad &+ \frac{1}{2} \chi_{(1)}^{lk} \left(\chi_{(1)}^{lk} \right)'' + \frac{1}{4} \left(\chi_{(1)}^{lk} \right)' \left(\chi_{(1)}^{lk} \right)' + \frac{1}{2} H \left(\chi_{(1)}^{lk} \right)' \chi_{(1)}^{lk}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta^{(2)} R_{0i} &= H \partial_i \psi^{(2)} + \partial_i \left(\phi^{(2)} \right)' + \frac{1}{4} \partial_k \left(\chi_{(1)}^{(1)k} \right)' - \frac{1}{4} \Delta \omega_{(1)}^{(2)\perp} + \frac{1}{2} \frac{a''}{a} \left(\omega_{(1)}^{(2)} \right)' + \frac{1}{2} H^2 \left(\omega_{(1)}^{(2)} \right)' - 4 H \psi^{(1)} \partial_i \psi^{(1)} \\
 &- 2 \left(\phi^{(1)} \right)' \partial_i \psi^{(1)} + 4 \left(\phi^{(1)} \right)' \partial_i \phi^{(1)} + 4 \phi^{(1)} \partial_i \left(\phi^{(1)} \right)' - 2 \frac{a''}{a} \psi^{(1)} \omega_{(1)}^i - 2 H^2 \psi^{(1)} \omega_{(1)}^i - H \left(\psi^{(1)} \right)' \omega_{(1)}^i - \Delta \omega_{(1)}^{\parallel} \partial \psi^{(1)} \\
 &- \omega_{(1)}^k \partial_i \partial_k \psi^{(1)} + \partial^k \psi^{(1)} \partial_i \omega_{(1)}^k - \omega_{(1)}^k \partial_i \left(\omega_{(1)}^k \right)' - H \Delta \omega_{(1)}^{\parallel} \omega_{(1)}^i - \left(\phi^{(1)} \right)'' \omega_{(1)}^i - 5 H \left(\phi^{(1)} \right)' \omega_{(1)}^i - \frac{1}{2} \partial^k \psi^{(1)} \left(\chi_{(1)}^{ik} \right)' \\
 &+ \phi^{(1)} \partial_k \left(\chi_{(1)}^k \right)' + \left(\phi^{(1)} \right)' \partial_k \chi_{(1)}^k - \frac{1}{2} \partial_k \phi^{(1)} \left(\chi_{(1)}^k \right)' + \partial_k \left(\phi^{(1)} \right)' \chi_{(1)}^k + H \omega_{(1)}^k \left(\chi_{(1)}^k \right)' + \frac{1}{2} \omega_{(1)}^k \left(\chi_{(1)}^k \right)'' \\
 (6.278) \quad &- \frac{1}{2} \partial_k \chi_{(1)}^{kl} \left(\chi_{(1)}^i \right)' - \frac{1}{2} \chi_{(1)}^{kl} \partial_k \left(\chi_{(1)}^i \right)' + \frac{1}{2} \left(\chi_{(1)}^{kl} \right)' \partial_i \chi_{(1)}^i + \frac{1}{4} \chi_{(1)}^{kl} \partial_i \left(\chi_{(1)}^i \right)'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta^{(2)} R_{ij}^{diag} &= \left(-H^2 \psi^{(2)} - \frac{1}{2} H \left(\psi^{(2)} \right)' - \frac{a''}{a} \psi^{(2)} - \frac{5}{2} H \left(\phi^{(2)} \right)' - H^2 \phi^{(2)} - \frac{1}{2} \left(\phi^{(2)} \right)'' - \frac{a''}{a} \phi^{(2)} + \frac{1}{2} \Delta \phi^{(2)} \right. \\
 &- \frac{1}{2} H \Delta \omega^{(2)} + 4 \left(H^2 + \frac{a''}{a} \right) \left(\left(\psi^{(1)} \right)^2 + \phi^{(1)} \psi^{(1)} \right) + 4 H \psi^{(1)} \left(\psi^{(1)} \right)' + 10 H \psi^{(1)} \left(\phi^{(1)} \right)' + \left(\psi^{(1)} \right)' \phi^{(1)} (2H + 1) \\
 &\left. + 2 \psi^{(1)} \left(\phi^{(1)} \right)'' + \partial_k \phi^{(1)} \partial^k \psi^{(1)} + \left(\phi_{(2)}' \right)^2 + \partial_k \phi^{(1)} \partial^k \phi^{(1)} + 2 \phi^{(1)} \Delta \phi^{(1)} + H \partial_k \psi^{(1)} \omega_{(1)}^k + 2 H \psi^{(1)} \Delta \omega_{(1)}^{\parallel} \right)
 \end{aligned}$$

$$-H^2\omega_k^{(1)}\omega_{(1)}^k - \frac{a''}{a}\omega_k^{(1)}\omega_{(1)}^k - H\omega_k^{(1)}\left(\omega_{(1)}^k\right)' + 3H\omega_k^{(1)}\partial^k\phi^{(1)} + 2\omega_{(1)}^k\left(\partial_k\phi^{(1)}\right)' + \left(\phi^{(1)}\right)'\Delta\omega_{(1)}^{\parallel}$$

(6.279)

$$+\partial_k\phi^{(1)}\left(\omega_{(1)}^k\right)' - \partial_k\phi^{(1)}\partial_l\chi_{(1)}^{kl} - \partial_k\partial_l\phi^{(1)}\chi_{(1)}^{kl} + H\partial_k\omega_{(1)}^l\chi_{(1)l}^k + H\omega_{(1)}^l\partial_k\chi_{(1)l}^k - \frac{1}{2}H\chi_{(1)}^{lk}\left(\chi_{kl}^{(1)}\right)'\delta_{ij}$$

$$\delta^{(2)}R_{ij}^{nodiag} = -\frac{1}{2}\partial_i\partial_j\psi^{(2)} + \frac{1}{2}\partial_i\partial_j\phi^{(2)} - H\partial_i\partial_j\omega^{\parallel(2)} - \frac{1}{2}\partial_i\partial_j\left(\omega^{\parallel(2)}\right)' - \frac{1}{2}H\left(\partial_j\omega_i^{\perp(2)} + \partial_i\omega_j^{\perp(2)}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\left(\partial_j\left(\omega_i^{\perp(2)}\right)' + \partial_i\left(\omega_j^{\perp(2)}\right)'\right) + \frac{1}{2}\left(H^2 + \frac{a''}{a}\right)\chi_{ij}^{(2)} + \frac{1}{2}H\left(\chi_{ij}^{(2)}\right)' + \frac{1}{2}\partial_l\partial_i\chi_j^{\parallel(2)l}$$

$$-\frac{1}{4}\partial^k\partial_k\chi_{ij}^{\parallel(2)} - \frac{1}{4}\partial^k\partial_k\chi_{ij}^{\top(2)} + \frac{1}{4}\left(\chi_{ij}^{(2)}\right)'' + \partial_i\psi^{(1)}\partial_j\psi^{(1)} + 2\psi^{(1)}\partial_i\partial_j\psi^{(1)} - \partial_j\psi^{(1)}\partial_i\phi^{(1)}$$

$$-\partial_i\psi^{(1)}\partial_j\phi^{(1)} + 3\partial_i\phi^{(1)}\partial_j\phi^{(1)} + 2\phi^{(1)}\partial_i\partial_j\phi^{(1)} + 4H\psi^{(1)}\partial_i\omega_j^{(1)} + \left(\psi^{(1)}\right)'\partial_i\omega_j^{(1)}$$

$$+2\psi^{(1)}\partial_i\left(\omega_j^{(1)}\right)' + \partial_l\omega_{(1)}^l\partial_i\omega_j^{(1)} - \partial_j\omega_{(1)}^l\partial_i\omega_l^{(1)} - 2H\partial_i\phi^{(1)}\omega_j^{(1)} - 2H\omega_i^{(1)}\partial_j\phi^{(1)} - \omega_j^{(1)}\partial_i\left(\phi^{(1)}\right)'$$

$$-\omega_i^{(1)}\partial_j\left(\phi^{(1)}\right)' - \partial_i\phi^{(1)}\left(\omega_j^{(1)}\right)' - \partial_j\phi^{(1)}\left(\omega_i^{(1)}\right)' + \partial_i\omega_j^{(1)}\left(\phi^{(1)}\right)' - 2H^2\psi^{(1)}\chi_{ij}^{(1)}$$

$$-2\frac{a''}{a}\psi^{(1)}\chi_{ij}^{(1)} - 2H\psi^{(1)}\left(\chi_{ij}^{(1)}\right)' - H\left(\psi^{(1)}\right)'\chi_{ij}^{(1)} - \frac{1}{2}\left(\psi^{(1)}\right)'\left(\chi_{ij}^{(1)}\right)' - \psi^{(1)}\left(\chi_{ij}^{(1)}\right)''$$

$$+\frac{1}{2}\partial_l\psi^{(1)}\partial_i\chi_j^{l(1)} + \frac{1}{2}\partial_l\psi^{(1)}\partial_j\chi_i^{l(1)} - \frac{1}{2}\partial_l\psi^{(1)}\partial^l\chi_{ij}^{(1)} - 3H\left(\phi^{(1)}\right)'\chi_{ij}^{(1)} + \frac{1}{2}\left(\phi^{(1)}\right)'\left(\chi_{ij}^{(1)}\right)'$$

$$+\frac{1}{2}\partial_l\phi^{(1)}\partial_i\chi_j^{l(1)} + \frac{1}{2}\partial_l\phi^{(1)}\partial_j\chi_i^{l(1)} - \frac{3}{2}\partial_l\phi^{(1)}\partial^l\chi_{ij}^{(1)} + \phi^{(1)}\partial_l\partial_i\chi_j^{l(1)} + \phi^{(1)}\partial_l\partial_j\chi_i^{l(1)}$$

$$-\phi^{(1)}\partial_l\partial^l\chi_{ij}^{(1)} + \partial_i\phi^{(1)}\partial_l\chi_j^{l(1)} + \partial_j\phi^{(1)}\partial_l\chi_i^{l(1)} + \partial_l\partial_i\phi^{(1)}\chi_j^{l(1)} + \partial_l\partial_j\phi^{(1)}\chi_i^{l(1)}$$

$$+\frac{1}{2}\partial_l\omega_j^{(1)}\left(\chi_i^{l(1)}\right)' - \frac{1}{2}\partial_l\omega_{(1)}^l\left(\chi_{ij}^{(1)}\right)' + \frac{1}{2}\omega_{(1)}^l\partial_i\left(\chi_{lj}^{(1)}\right)' + \frac{1}{2}\omega_{(1)}^l\partial_j\left(\chi_{li}^{(1)}\right)' + \frac{1}{2}\partial_l\omega_i^{(1)}\left(\chi_j^{l(1)}\right)'$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{2} \left(\omega_{(1)}^l\right)' \partial_i \chi_{lj}^{(1)} + \frac{1}{2} \left(\omega_{(1)}^l\right)' \partial_j \chi_{li}^{(1)} - \frac{1}{2} \left(\omega_{(1)}^l\right)' \partial_l \chi_{ij}^{(1)} + H \omega_{(1)}^l \partial_i \chi_{lj}^{(1)} - \omega_{(1)}^l \partial_l \left(\chi_{ij}^{(1)}\right)' \\
& - H \omega_{(1)}^l \partial_l \chi_{ij}^{(1)} - H \partial_l \omega_{(1)}^l \chi_{ij}^{(1)} + H \omega_{(1)}^l \partial_j \chi_{li}^{(1)} - \frac{1}{2} \left(\chi_i^{l(1)}\right)' \left(\chi_{lj}^{(1)}\right)' - \frac{1}{2} \partial_i \chi_{lj}^{(1)} \partial_k \chi_{(1)}^{kl} \\
& + \frac{1}{2} \partial_k \chi_{ij}^{(1)} \partial_l \chi_{(1)}^{kl} - \frac{1}{2} \partial_i \partial_l \chi_{kj}^{(1)} \chi_{(1)}^{kl} - \frac{1}{2} \partial_j \partial_l \chi_{ki}^{(1)} \chi_{(1)}^{kl} + \frac{1}{2} \partial_k \partial_l \chi_{ij}^{(1)} \chi_{(1)}^{kl} \\
(6.280) \quad & + \frac{1}{2} \chi_{(1)}^{kl} \partial_i \partial_j \chi_{kl}^{(1)} + \frac{1}{4} \partial_i \chi_{(1)}^{kl} \partial_j \chi_{kl}^{(1)}
\end{aligned}$$

6.2.2. Escalar de Ricci. A orden cero el escalar de Ricci tiene la forma:

$$(6.281) \quad R = \frac{6}{a^2} \frac{a''}{a}$$

A primer orden se tiene:

$$\begin{aligned}
(6.282) \quad \delta^{(1)} R = & \frac{1}{a^2} \left(-6H \partial_i \omega_{(1)}^i - 2 \partial_i \left(\omega_{(1)}^i\right)' - 2 \partial_i \partial^i \psi^{(1)} - 6 \left(\phi^{(1)}\right)'' - 6H \left(\psi^{(1)}\right)' \right. \\
& \left. - 18H \left(\phi^{(1)}\right)' - 12 \frac{a''}{a} \psi^{(1)} + 4 \partial_i \partial^i \phi^{(1)} + \partial_l \partial^i \chi_i^{l(1)} \right)
\end{aligned}$$

A segundo orden se encuentra lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\delta^{(2)} R = & -\partial_k \partial^k \psi^{(2)} - 3H \left(\psi^{(2)}\right)' - 6 \frac{a''}{a} \psi^{(2)} + 2 \partial_k \partial^k \phi^{(2)} - 9H \left(\phi^{(2)}\right)' - 3 \left(\phi^{(2)}\right)'' - \partial_i \partial^i \left(\omega_{(2)}^{\parallel}\right)' \\
& - 3H \partial_i \partial^i \omega_{(2)}^{\parallel} + \frac{1}{2} \partial_l \partial_m \chi_{(2)}^{lm} + 24 \frac{a''}{a} \left(\psi^{(1)}\right)^2 + 2 \partial_k \psi^{(1)} \partial^k \psi^{(1)} + 4 \psi^{(1)} \partial_k \partial^k \psi^{(1)} \\
& + 24H \psi^{(1)} \left(\psi^{(1)}\right)' + 6 \left(\psi^{(1)}\right)' \left(\phi^{(1)}\right)' + 36H \psi^{(1)} \left(\phi^{(1)}\right)' + 2 \partial_k \phi^{(1)} \partial^k \psi^{(1)} - 4 \phi^{(1)} \partial^k \partial_k \psi^{(1)} \\
& 12 \psi^{(1)} \left(\phi^{(1)}\right)'' - 12 \phi^{(1)} \left(\phi^{(1)}\right)'' - 36H \phi^{(1)} \left(\phi^{(1)}\right)' + 6 \partial_k \phi^{(1)} \partial^k \phi^{(1)} + 16 \phi^{(1)} \partial^k \partial_k \phi^{(1)} \\
& + 6H \omega_{(1)}^i \partial_i \psi^{(1)} + 12H \psi^{(1)} \partial^k \omega_k^{(1)} + 4 \psi^{(1)} \partial^k \left(\omega_k^{(1)}\right)' + 2 \left(\psi^{(1)}\right)' \partial^k \omega_k^{(1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -5\frac{a''}{a}\omega_k^{(1)}\omega_{(1)}^k - 6H\omega_k^{(1)}\left(\omega_{(1)}^k\right)' + \partial^k\omega_k^{(1)}\partial^l\omega_l^{(1)} - \partial^i\omega_{(1)}^k\partial_i\omega_k^{(1)} + 8\omega_k^{(1)}\partial^k\left(\phi^{(1)}\right)' \\
& + 2\left(\omega_k^{(1)}\right)'\partial^k\phi^{(1)} - 4\phi^{(1)}\partial^k\left(\omega_k^{(1)}\right)' - 12H\phi^{(1)}\partial^k\omega_k^{(1)} + 4\left(\phi^{(1)}\right)'\partial^k\omega_k^{(1)} + 2\partial_k\psi^{(1)}\partial_l\chi_{(1)}^{kl} \\
& + 2\partial_k\partial_l\psi^{(1)}\chi_{(1)}^{kl} + 4\phi^{(1)}\partial_k\partial_l\chi_{(1)}^{kl} - 2\partial_k\partial_l\phi^{(1)}\chi_{(1)}^{kl} + 3\omega_k^{(1)}\partial^i\left(\chi_i^{k(1)}\right)' + 6H\omega_{(1)}^k\partial_i\chi_k^{i(1)} \\
& + 2\left(\omega_i^{(1)}\right)'\partial_k\chi_{(1)}^{ki} + 2\partial_k\left(\omega_i^{(1)}\right)'\chi_{(1)}^{ki} + 6H\partial_k\omega_i^{(1)}\chi_{(1)}^{ki} - \chi_{(1)}^{ki}\left(\chi_{ki}^{(1)}\right)'' - \frac{3}{4}\left(\chi_{(1)}^{ki}\right)'\left(\chi_{ki}^{(1)}\right)' \\
(6.283) \quad & - 3H\chi_{(1)}^{ki}\left(\chi_{ki}^{(1)}\right)' - 2\partial_k\partial^i\chi_{li}^{(1)}\chi_{(1)}^{kl} + \partial_k\partial^k\chi_{li}^{(1)}\chi_{(1)}^{il} - \partial_k\chi_{(1)}^{kl}\partial^i\chi_{il}^{(1)} + \frac{1}{4}\partial_i\chi_{kl}^{(1)}\partial^i\chi_{(1)}^{kl}
\end{aligned}$$

6.2.3. Tensor de Einstein. A orden cero se tiene:

$$(6.284) \quad G_0^0 = -\frac{3}{a^2}H^2, \quad G^i_j = -\frac{1}{a^2}\left(2\frac{a''}{a} - H^2\right)\delta_j^i, \quad G_j^0 = G_0^i = 0$$

A primer orden se calcula por medio de:

$$(6.285) \quad \delta G_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu}R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta R$$

$$(6.286) \quad \delta^{(1)}G_0^0 = \frac{1}{a^2}\left(6H^2\psi^{(1)} + 6H\phi^{(1)'} + 2H\partial_i\omega^{(1)i} - 2\partial_i\partial^i\phi^{(1)} - \frac{1}{2}\partial_k\partial^i\chi_i^{(1)k}\right)$$

$$(6.287) \quad \delta^{(1)}G_i^0 = \frac{1}{a^2}\left(-2\partial_i\left(H\psi^{(1)} + \phi^{(1)'}\right) - \frac{1}{2}\partial_k\chi_i^{(1)k'} + \frac{1}{2}\Delta\omega_i^{(1)}\right)$$

$$\delta^{(1)d}G_j^i = \frac{1}{a^2}\left[\left(2H\psi^{(1)'} + 4\frac{a''}{a}\psi^{(1)} - 2H^2\psi^{(1)} + \partial_l\partial^l\psi^{(1)} + 4H\phi^{(1)'} + 2\phi^{(1)''}\right)\right]$$

$$(6.288) \quad \left(-\partial_l\partial^l\phi^{(1)} + 2H\partial_l\omega^{(1)l} + \partial_l\omega^{(1)l'} + \frac{1}{2}\partial_k\partial^l\chi_l^{(1)k}\right)\delta_j^i$$

$$\delta^{(1)nd}G_j^i = \frac{1}{a^2}\left[\partial^i\partial_j\left(\phi^{(1)} - \psi^{(1)}\right) - \partial^i\left(2H\omega_j^{(1)} + \omega_j^{(1)'}\right) + \left(H\chi_j^{(1)l} + \frac{1}{2}\chi_j^{(1)l'}\right)\right]$$

$$(6.289) \quad \left[\frac{1}{2} \partial_l \partial^i \chi_j^{(1)l} + \frac{1}{2} \partial_l \partial_j \chi^{(1)il} - \frac{1}{2} \partial_l \partial^l \chi_j^{(1)i} \right]$$

A segundo orden encontramos que:

$$\delta^{(2)} G_{\mu\nu} = \delta^{(2)} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta^{(2)} g_{\mu\nu} R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta^{(2)} R - \delta g_{\mu\nu} \delta R$$

$$\delta G_{\nu}^{\mu} = \delta \left(g^{\mu\lambda} G_{\lambda\nu} \right) = \delta g^{\mu\lambda} G_{\lambda\nu} + g^{\mu\lambda} \delta G_{\lambda\nu}$$

$$(6.290) \quad \delta^2 G_{\nu}^{\mu} = \delta \left(\delta g^{\mu\lambda} G_{\lambda\nu} + g^{\mu\lambda} \delta G_{\lambda\nu} \right) = \delta^2 g^{\mu\lambda} G_{\lambda\nu} + 2\delta g^{\mu\lambda} \delta G_{\lambda\nu} + g^{\mu\lambda} \delta^2 G_{\lambda\nu}$$

A segundo orden se tiene:

$$(6.291) \quad \begin{aligned} \delta^{(2)} G_0^0 = & \frac{1}{a^2} \left(3H^2 \psi^{(2)} + 3H \phi^{(2)'} + H \partial_l \partial^l \omega^{(2)\parallel} - \partial_i \partial^i \phi^{(2)} - \frac{1}{4} \partial_k \partial_l D^{kl} \chi^{(2)\parallel} \right. \\ & - 12H^2 \left(\psi^{(1)} \right)^2 - 12H \psi^{(1)} \phi^{(1)'} - 3\partial_l \phi^{(1)} \partial^l \phi^{(1)} - 8\phi^{(1)} \partial_l \partial^l \phi^{(1)} + 12H \phi^{(1)} \phi^{(1)'} \\ & - 3 \left(\phi^{(1)'} \right)^2 + 4H \psi^{(1)} \partial_l \omega^{(1)l} - 2H \omega_l^{(1)} \partial^l \psi^{(1)} - \frac{1}{2} \frac{a''}{a} \omega_l^{(1)} \omega^{(1)l} \\ & + \frac{1}{2} \partial_i \omega_l^{(1)} \partial^i \omega^{(1)l} - \frac{1}{2} \partial_l \omega^{(1)l} \partial_m \omega^{(1)m} - 2H \partial_l \phi^{(1)} \omega^{(1)l} + 4H \phi^{(1)} \partial_l \omega^{(1)l} \\ & - 2\omega_l^{(1)} \partial^l \phi^{(1)'} - 2\phi^{(1)'} \partial_l \omega^{(1)l} - \psi^{(1)} \partial_l \partial^m \chi_m^{(1)l} - 2\phi^{(1)} \partial_l \partial^m \chi_m^{(1)l} \\ & \partial_l \partial_m \phi^{(1)} \chi^{(1)lm} - 2H \partial_l \omega_m^{(1)} \chi^{(1)lm} - 2H \omega_l^{(1)} \partial_m \chi^{(1)lm} - \omega_l^{(1)} \partial^m \chi_m^{(1)l} \\ & - \frac{1}{2} \partial_l \partial^l \chi_{lm}^{(1)} \chi^{(1)ml} + \partial_l \partial^m \chi_{im}^{(1)} \chi^{(1)il} + \frac{1}{2} \partial_l \chi^{(1)lm} \partial^k \chi_{km}^{(1)} \\ & \left. - \frac{1}{8} \partial^k \chi^{(1)lm} \partial_k \chi_{lm}^{(1)} + \frac{1}{8} \chi^{(1)ikl} \chi_{ki}^{(1)'} + H \chi^{(1)ml} \chi_{lm}^{(1)'} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^{(2)} G_i^0 = & \frac{1}{a^2} \left(-H \partial_i \psi^{(2)} - \partial_i \phi^{(2)'} - \frac{1}{4} \partial_l D^l \chi_i^{(2)\parallel} - \frac{1}{4} \partial_k \partial^k \chi_i^{(2)\perp} + \frac{1}{4} \partial_k \partial^k \omega_i^{(2)\perp} + 8H \psi^{(1)} \partial_i \psi^{(1)} \right. \\ & \left. + 4\psi^{(1)} \partial_i \phi^{(1)'} + 2\phi^{(1)'} \partial_i \psi^{(1)} - 4\phi^{(1)'} \partial_i \phi^{(1)} - 4\phi^{(1)} \partial_i \phi^{(1)'} + \partial_i \psi^{(1)} \partial_l \omega^{(1)l} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\partial_i \omega_i^{(1)} \partial^l \psi^{(1)} + 8 \frac{a''}{a} \psi^{(1)} \omega_i^{(1)} - 4H^2 \psi^{(1)} \omega_i^{(1)} - 2H \omega^{(1)l} \partial_i \omega_l^{(1)} + \partial_l \partial^l \phi^{(1)} \omega_i^{(1)} \\
& + \omega^{(1)l} \partial_i \partial_l \phi^{(1)} - \partial_l \psi^{(1)} \chi_i^{(1)l'} + \frac{1}{2} \partial^l \psi^{(1)} \chi_{il}^{(1)'} - \phi^{(1)} \partial_l \chi_i^{(1)l'} \\
& + \frac{1}{2} \partial_l \phi^{(1)} \chi_i^{(1)k'} - \phi^{(1)'} \partial_k \chi_i^{(1)k} - \partial_k \phi^{(1)'} \chi_i^{(1)k} + \omega_i^{(1)} \partial_l \partial^m \chi_m^{(1)l} \\
& - 2 \frac{a''}{a} \omega^{(1)k} \chi_{ik}^{(1)} + H^2 \omega^{(1)l} \chi_{il}^{(1)} + \omega^{(1)l} \partial_m \partial_i \chi_l^{(1)m} \\
& - \frac{1}{2} \omega^{(1)l} \partial_m \partial^m \chi_{li}^{(1)} + \frac{1}{2} \partial_l \chi^{(1)lm} \chi_{im}^{(1)'} + \frac{1}{2} \partial_l \chi_{im}^{(1)'} \chi^{(1)lm} \\
& - \frac{1}{4} \partial_i \chi_{lm}^{(1)} \chi^{(1)ml'} - \frac{1}{2} \partial_i \chi_{lm}^{(1)'} \chi^{(1)ml}
\end{aligned}
\tag{6.292}$$

$$\begin{aligned}
\delta^{(2)} G_0^i &= \frac{1}{a^2} \left(H \partial^i \psi^{(2)} + \partial^i \phi^{(2)'} + \frac{1}{4} \partial_k D^{ki} \chi^{(2)\parallel'} + \frac{1}{4} \partial_l \partial^l \chi_{\perp}^{i(2)'} - \frac{1}{4} \partial_l \partial^l \omega_{\perp}^{i(2)} - \frac{a''}{a} \partial^i \omega_{\parallel}^{(2)} \right. \\
& - \frac{a''}{a} \omega_{\perp}^{i(2)} + 2H^2 \partial^i \omega_{\parallel}^{(2)} + 2H^2 \omega_{\perp}^{i(2)} - 4H \psi^{(1)} \partial^i \psi^{(1)} + 4H \phi^{(1)} \partial^i \psi^{(1)} \\
& - 2\phi^{(1)'} \partial^i \psi^{(1)} + 4\phi^{(1)'} \partial^i \phi^{(1)} + 8\phi^{(1)} \partial^i \phi^{(1)'} - \partial^i \psi^{(1)} \partial_l \omega^{(1)l} - \omega^{(1)l} \partial^i \partial_l \psi^{(1)} \\
& + \partial_l \partial^l \psi^{(1)} \omega^{(1)i} + \partial^i \omega_l^{(1)} \partial^l \psi^{(1)} + 4 \frac{a''}{a} \psi^{(1)} \omega^{(1)i} - 8H^2 \psi^{(1)} \omega^{(1)i} \\
& + 2H \psi^{(1)'} \omega^{(1)i} + \partial_l \omega^{(1)l'} \omega^{(1)i} - \omega^{(1)l} \partial^i \omega_l^{(1)'} + 2\phi^{(1)''} \omega^{(1)i} \\
& + 8H^2 \phi^{(1)} \omega^{(1)i} - 4 \frac{a''}{a} \phi^{(1)} \omega^{(1)i} - 2H \phi^{(1)'} \omega^{(1)i} - \frac{1}{2} \partial^l \phi^{(1)} \chi_l^{(1)i'} \\
& - 2H \partial_l \psi^{(1)} \chi^{(1)li} - \frac{1}{2} \partial_l \phi^{(1)} \chi^{(1)li'} + 2\phi^{(1)} \partial_l \chi^{(1)li'} + \phi^{(1)'} \partial_l \chi^{(1)li} \\
& - \partial_l \phi^{(1)'} \chi^{(1)li} + \frac{1}{2} \omega^{(1)l} \chi_l^{(1)i''} + H \omega^{(1)l} \chi_l^{(1)i'} - 4H^2 \omega_l^{(1)} \chi^{(1)il} \\
& \left. 2 \frac{a''}{a} \omega_l^{(1)} \chi^{(1)il} - \frac{1}{2} \partial_l \chi^{(1)lm} \chi_m^{(1)i'} - \frac{1}{2} \partial_l \chi_m^{(1)i'} \chi^{(1)lm} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(6.293) \quad & +\frac{1}{4}\partial^i\chi_{lm}\chi^{(1)ml'} + \frac{1}{2}\partial^i\chi_{lm}'\chi^{(1)ml} - \frac{1}{2}\chi^{(1)il}\partial_m\chi_l^{(1)m'l} \\
& \delta^{(2)d}G_j^i = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\partial_l\partial^l\psi^{(2)} + H\psi^{(2)'} + 2\frac{a''}{a}\psi^{(2)} - H^2\psi^{(2)} - \frac{1}{2}\partial_l\partial^l\phi^{(2)} + \phi^{(2)''}\right. \\
& \quad + 2H\phi^{(2)'} + H\partial_l\partial^l\omega_{\parallel}^{(2)} + \frac{1}{2}\partial_l\partial^l\omega_{\parallel}^{(2)'} - \frac{1}{4}\partial_l\partial_k D^{lk}\chi_{\parallel}^{(2)} + 4H^2\left(\psi^{(1)}\right)^2 \\
& \quad - 8\frac{a''}{a}\left(\psi^{(1)}\right)^2 - 8H\psi^{(1)}\psi^{(1)'} - \partial_l\psi^{(1)}\partial^l\psi^{(1)} - 2\psi^{(1)}\partial_l\partial^l\psi^{(1)} - 4\psi^{(1)}\phi^{(1)''} \\
& \quad - 2\psi^{(1)'}\phi^{(1)'} - 8H\psi^{(1)}\phi^{(1)'} - 2\partial_l\phi^{(1)}\partial^l\phi^{(1)} - 4\phi^{(1)}\partial_l\partial^l\phi^{(1)} + \left(\phi^{(1)'}\right)^2 + 8H\phi^{(1)}\phi^{(1)'} \\
& \quad + 4\phi^{(1)}\phi^{(1)''} + 2\phi^{(1)}\partial_l\partial^l\psi^{(1)} - \psi^{(1)'}\partial_l\omega^{(1)l} - 2\psi^{(1)}\partial_l\omega^{(1)l'} - 2H\omega_l^{(1)}\partial^l\psi^{(1)} \\
& \quad - 4H\psi^{(1)}\partial_l\omega^{(1)l} + \frac{3}{2}\frac{a''}{a}\omega_l^{(1)}\omega^{(1)l} - H^2\omega_l^{(1)}\omega^{(1)l} + 2H\omega_l^{(1)}\omega^{(1)l'} \\
& \quad - \frac{1}{2}\partial_l\omega^{(1)l}\partial_m\omega^{(1)m} + \frac{1}{2}\partial^m\omega^{(1)l}\partial_m\omega_l^{(1)} + 4H\phi^{(1)}\partial_l\omega^{(1)l} + 2\phi^{(1)}\partial_l\omega^{(1)l'} \\
& \quad - 2\omega_l^{(1)}\partial^l\phi^{(1)'} - \phi^{(1)'}\partial_l\omega^{(1)l} - \partial_l\partial_m\psi^{(1)}\chi^{(1)lm} - \partial_l\psi^{(1)}\partial_m\chi^{(1)lm} \\
& \quad - \partial_l\phi^{(1)}\partial_m\chi^{(1)lm} - \frac{3}{2}\omega_l^{(1)}\partial^m\chi_m^{(1)l'} - \omega_l^{(1)'}\partial_m\chi^{(1)lm} \\
& \quad - \partial_l\omega_m^{(1)'}\chi^{(1)lm} - 2H\omega^{(1)l}\partial_m\chi_l^{(1)m} - 2H\partial_l\omega^{(1)m}\chi_m^{(1)l} \\
& \quad + \frac{3}{4}\partial_l\partial^m\chi_{mk}^{(1)}\chi^{(1)kl} - \frac{1}{2}\partial_l\partial^l\chi_{mk}^{(1)}\chi^{(1)km} + \frac{1}{4}\partial_k\partial^l\chi_{ml}\chi^{(1)mk} \\
& \quad + \frac{1}{2}\partial^l\chi_{lm}\partial_k\chi^{(1)km} - \frac{1}{8}\partial^l\chi_{km}\partial_l\chi^{(1)km} + \frac{1}{2}\chi^{(1)ml}\chi_{lm}'' \\
(6.294) \quad & \left. + \frac{3}{8}\chi^{(1)lm'}\chi_{ml}^{(1)'} + H\chi^{(1)lm}\chi_{ml}^{(1)'}\right)\delta_j^i
\end{aligned}$$

$$\delta^{(2)nd}G_j^i = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\partial^i\partial_j\left(\phi^{(2)} - \psi^{(2)}\right) - \partial^i\partial_j\left(H\omega_{\parallel}^{(2)} + \frac{1}{2}\omega_{\parallel}^{(2)'}\right) - \frac{1}{2}H\left(\partial^i\omega_j^{(2)\perp} + \partial_j\omega_{\perp}^{(2)i}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \left(\partial^i \omega_j^{(2)\prime\perp} + \partial_j \omega_{\perp}^{(2)i\prime} \right) + \frac{1}{2} H \chi_j^{(2)i\prime} + \frac{1}{2} \partial_l \partial^i D_j^l \chi_{\parallel}^{(2)} - \frac{1}{4} \partial_l \partial^l D_j^i \chi_{\parallel}^{(2)} \\
& - \frac{1}{4} \partial_l \partial^l \chi_{j\perp}^{(2)i} + \frac{1}{4} \chi_j^{(2)i\prime\prime} + \partial_j \psi^{(1)} \partial^i \psi^{(1)} + 2 \partial^i \partial_j \psi^{(1)} \left(\psi^{(1)} - \phi^{(1)} \right) \\
& - \partial_j \psi^{(1)} \partial^i \phi^{(1)} - \partial^i \psi^{(1)} \partial_j \phi^{(1)} + 3 \partial_j \phi^{(1)} \partial^i \phi^{(1)} + 4 \phi^{(1)} \partial^i \partial_j \phi^{(1)} \\
& + 2H \omega^{(1)i} \partial_j \psi^{(1)} + 4H \psi^{(1)} \partial^i \omega_j^{(1)} + \psi^{(1)\prime} \partial^i \omega_j^{(1)} + 2\psi^{(1)} \partial^i \omega_j^{(1)\prime} + \partial^i \omega_j^{(1)} \partial_l \omega^{(1)l} \\
& - \partial_j \omega^{(1)l} \partial^i \omega_l^{(1)} - 2H \partial^i \phi^{(1)} \omega_j^{(1)} - 2H \omega^{(1)i} \partial_j \phi^{(1)} - \partial^i \phi^{(1)\prime} \omega_j^{(1)} + \partial_j \phi^{(1)\prime} \omega^{(1)i} \\
& \partial^i \phi^{(1)} \omega_j^{(1)\prime} - \partial_j \phi^{(1)} \omega^{(1)i\prime} - 2\phi^{(1)} \partial^i \omega_j^{(1)\prime} + \phi^{(1)\prime} \partial^i \omega_j^{(1)} - 4H \phi^{(1)} \partial^i \omega_j^{(1)} \\
& - 2H \psi^{(1)} \chi_j^{(1)i\prime} - \frac{1}{2} \psi^{(1)\prime} \chi_j^{(1)i\prime} + \frac{1}{2} \partial_l \psi^{(1)} \partial^i \chi_j^{(1)l} + \frac{1}{2} \partial_l \psi^{(1)} \partial_j \chi^{(1)li} \\
& - \frac{1}{2} \partial_l \psi^{(1)} \partial^l \chi_j^{(1)i} + \partial_j \partial_l \psi^{(1)} \chi^{(1)li} + \frac{1}{2} \phi^{(1)\prime} \chi_j^{(1)i\prime} + \phi^{(1)\prime\prime} \chi_j^{(1)i} + 2H \phi^{(1)\prime} \chi_j^{(1)i} \\
& + \frac{1}{2} \partial_l \phi^{(1)} \partial^i \chi_j^{(1)l} + 2H \phi^{(1)} \chi_j^{(1)i\prime} + \phi^{(1)} + \frac{1}{2} \partial_l \phi^{(1)} \partial_j \chi^{(1)li} - \frac{3}{2} \partial_l \phi^{(1)} \partial^l \chi_j^{(1)i} \\
& + 2\phi^{(1)} \partial_l \partial^i \chi_j^{(1)l} + 2\phi^{(1)} \partial_l \partial_j \chi^{(1)li} - 2\phi^{(1)} \partial_l \partial^l \chi_j^{(1)i} - \partial_l \partial^l \phi^{(1)} \chi_j^{(1)i} + \partial^i \phi^{(1)} \partial_l \chi_j^{(1)l} \\
& + \partial_j \phi^{(1)} \partial_l \chi_{(1)}^{li} + \partial_l \partial^i \phi^{(1)} \chi_j^{(1)l} + \frac{1}{2} \omega_{(1)}^i \partial_l \left(\chi_j^{(1)l} \right)' + \frac{1}{2} \partial_l \omega_{(1)}^i \left(\chi_j^{(1)l} \right)' + \frac{1}{2} \partial_l \omega_j^{(1)} \left(\chi_{(1)}^{il} \right)' \\
& - \frac{1}{2} \partial_l \omega_{(1)}^l \left(\chi_j^{(1)i} \right)' + \frac{1}{2} \omega_{(1)}^k \partial^i \left(\chi_{lj}^{(1)} \right)' + \frac{1}{2} \omega_{(1)}^l \partial_j \left(\chi_l^{(1)i} \right)' - \omega_{(1)}^l \partial_l \left(\chi_j^{(1)i} \right)' + \frac{1}{2} \left(\omega_{(1)}^l \right)' \partial^i \chi_{lj}^{(1)} \\
& + \frac{1}{2} \left(\omega_{(1)}^l \right)' \partial_j \chi_l^{i(1)} - \frac{1}{2} \left(\omega_{(1)}^l \right)' \partial_l \chi_j^{i(1)} + \partial_l \left(\omega_j^{(1)} \right)' \chi_{(1)}^{il} + H \omega_{(1)}^l \partial^i \chi_{lj}^{(1)} + H \omega_{(1)}^l \partial_j \chi_l^{i(1)} \\
& - H \omega_{(1)}^l \partial_l \chi_j^{i(1)} + 2H \partial_l \omega_j^{(1)} \chi_{(1)}^{il} - \frac{1}{2} \left(\chi_{(1)}^{li} \right)' \left(\chi_{lj}^{(1)} \right)' - \frac{1}{2} \partial^i \chi_{lj}^{(1)} \partial_k \chi_{(1)}^{kl} - \frac{1}{2} \partial_j \chi_l^{i(1)} \partial_k \chi_{(1)}^{kl} \\
& + \frac{1}{2} \partial_l \chi_j^{i(1)} \partial_k \chi_{(1)}^{kl} - \frac{1}{2} \partial_l \partial^i \chi_{kj}^{(1)} \chi_{(1)}^{kl} - \frac{1}{2} \partial_l \partial_j \chi_k^{i(1)} \chi_{(1)}^{kl} + \frac{1}{2} \partial_l \partial_k \chi_j^{i(1)} \chi_{(1)}^{kl} + \frac{1}{2} \chi_{(1)}^{kl} \partial_j \partial^i \chi_{kl}^{(1)} + \frac{1}{4} \partial^i \chi_{(1)}^{kl} \partial_j \chi_{kl}^{(1)}
\end{aligned}$$

$$(6.295) \quad -\partial_k \partial^l \chi_{l(1)}^k \chi_j^{i(1)} - H \left(\chi_{lj}^{(1)} \right)' \chi_{(1)}^{il} - \frac{1}{2} \left(\chi_{lj}^{(1)} \right)'' \chi_{(1)}^{il} - \partial_k \partial_l \chi_j^{k(1)} \chi_{(1)}^{il} + \frac{1}{2} \partial_k \partial^k \chi_{lj}^{(1)} \chi_{(1)}^{li} \Big)$$

6.2.4. Deducción del tensor momento energía electromagnético covariante. El tensor momento energía electromagnético viene dado por (4), con el tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$ dado por (6.167), (6.168).

Sabemos que:

$$(6.296) \quad F^{0i} = \frac{1}{a^2} E^i, \quad F^{ij} = \frac{1}{a^2} \epsilon^{ijk} B^k$$

Si definimos la cantidad:

$$(6.297) \quad \mathfrak{F}^2 \equiv F^{\delta\omega} F^{\sigma\epsilon} g_{\delta\sigma} g_{\omega\epsilon}$$

Haciendo explícita la última ecuación, tenemos lo siguiente:

$$(6.298) \quad \begin{aligned} \mathfrak{F}^2 = & F^{0l} F^{0i} g_{00} g_{li} + F^{0l} F^{i0} g_{0i} g_{l0} + F^{0l} F^{ij} g_{0i} g_{lj} \\ & + F^{l0} F^{0i} g_{l0} g_{0i} + F^{l0} F^{i0} g_{li} g_{00} + F^{l0} F^{ij} g_{li} g_{0j} \\ & + F^{lm} F^{0i} g_{l0} g_{mi} + F^{lm} F^{i0} g_{li} g_{m0} + F^{lm} F^{ij} g_{li} g_{mj} \end{aligned}$$

Sustituyendo en términos de los campos:

$$(6.299) \quad \begin{aligned} \mathfrak{F}^2 = & \frac{1}{a^4} \left(E^l E^i g_{00} g_{li} - E^l E^i g_{0i} g_{l0} + E^l \epsilon^{ijk} B^k g_{0i} g_{lj} - E^l E^i g_{l0} g_{0i} + E^l E^i g_{li} g_{00} \right. \\ & \left. - E^l \epsilon^{ijk} B^k g_{li} g_{0j} + B^k \epsilon^{lmk} E^i g_{l0} g_{mi} - B^k E^i \epsilon^{lmk} g_{li} g_{m0} + \epsilon^{lmk} \epsilon^{ijs} B^k B^s g_{li} g_{mj} \right) \end{aligned}$$

Por las propiedades de simetría, se tiene:

$$(6.300) \quad \mathfrak{F}^2 = \frac{1}{a^4} \left(2E^l E^i g_{00} g_{li} - 2E^l E^i g_{0i} g_{l0} + 4E^l \epsilon^{ijk} B^k g_{0i} g_{lj} + \epsilon^{lmk} \epsilon^{ijs} B^k B^s g_{li} g_{mj} \right)$$

Haciendo una expansión de los campos:

$$(6.301) \quad E^i = \frac{1}{a(\tau)^2} \left(E_{(0)}^i + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} E_{(r)}^i \right) \quad B^i = \frac{1}{a(\tau)^2} \left(B_{(0)}^i + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} B_{(r)}^i \right)$$

$$(6.302) \quad E_i = a(\tau)^2 \left(E_i^{(0)} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} E_i^{(r)} \right) \quad B_i = a(\tau)^2 \left(B_i^{(0)} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} B_i^{(r)} \right)$$

El producto de los campos a segundo orden queda de la siguiente manera:

$$E^i E^l = \left(E_{(0)}^i E_{(0)}^l + \delta E^i E_{(0)}^l + \frac{\delta^2 E^i}{2} E_{(0)}^l + E_{(0)}^i \delta E^l + \delta E^i \delta E^l + E_{(0)}^i \frac{\delta^2 E^l}{2} \right)$$

Por lo tanto sustituyendo en (6.300):

$$(6.303) \quad \begin{aligned} \mathfrak{F}^2 = & -2 \left[E_{(0)}^i E_{(0)}^l \left((1 - 2\phi_{(1)} - \phi_{(2)}) \delta_{li} + \chi_{li}^{(1)} + \frac{\chi_{li}^{(2)}}{2} + 2\psi_{(1)} (1 - 2\phi_{(1)}) \delta_{li} \right. \right. \\ & + 2\psi_{(1)} \chi_{li}^{(1)} + \psi_{(2)} \delta_{li} + \omega_i^{(1)} \omega_l^{(1)} \left. \right) - \frac{1}{2} B_{(0)}^k B_{(0)}^s \epsilon^{lmk} \epsilon^{ijs} \left((1 - 2\phi_{(1)} - \phi_{(2)})^2 \delta_{li} \delta_{mj} \right. \\ & + \left. \left. (1 - 2\phi_{(1)}) \delta_{mj} \chi_{li}^{(1)} + \delta_{mj} \frac{\chi_{li}^{(2)}}{2} + (1 - 2\phi_{(1)}) \delta_{li} \chi_{mj}^{(1)} + \chi_{li}^{(1)} \chi_{mj}^{(1)} + \frac{\chi_{mj}^{(2)}}{2} \delta_{li} \right) \right. \\ & + \left. \left. (E_{(0)}^i \delta E^l + E_{(0)}^l \delta E^i) \left((1 - 2\phi_{(1)}) \delta_{li} + \chi_{li}^{(1)} + 2\psi_{(1)} \delta_{li} \right) \right. \right. \\ & - \left. \frac{1}{2} \epsilon^{lmk} \epsilon^{ijs} (B_{(0)}^s \delta B^k + B_{(0)}^k \delta B^s) \left(\delta_{li} \delta_{mj} - 4\phi_{(1)} \delta_{li} \delta_{mj} + \chi_{li}^{(1)} \delta_{mj} + \chi_{mj}^{(1)} \delta_{li} \right) \right. \\ & + \left. \delta_{li} \left(\delta E^l \delta E^i + \frac{\delta^2 E^i}{2} E_{(0)}^l + \frac{\delta^2 E^l}{2} E_{(0)}^i \right) - \frac{1}{2} \epsilon^{lmk} \epsilon^{ijs} \delta_{li} \delta_{mj} \left(\delta B^s \delta B^k + \frac{\delta^2 B^s}{2} B_{(0)}^k + \frac{\delta^2 B^k}{2} B_{(0)}^s \right) \right] \\ & - 2\epsilon^{ijk} E_{(0)}^l B_{(0)}^k \left[\left((1 - 2\phi_{(1)}) \delta_{lj} \omega_i^{(1)} + \chi_{lj}^{(1)} \omega_i^{(1)} + \frac{\omega_i^{(2)}}{2} \delta_{lj} \right) - 2\epsilon^{ijk} \omega_i^{(1)} \delta_{lj} \left(B_{(0)}^k \delta E^l + E_{(0)}^l \delta B^k \right) \right] \end{aligned}$$

La componente $T_{(em)}^{00}$ queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} T_{(em)}^{00} &= \frac{1}{4\pi} \left[F^{0\mu} F^{0\nu} g_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{00} \mathfrak{F}^2 \right] = \frac{1}{4\pi} \left[E^i E^l g_{il} - \frac{1}{4} g^{00} \mathfrak{F}^2 \right] \\ T_{(em)}^{00} &= \frac{1}{4\pi a^2} \left[E_{(0)}^i E_{(0)}^l \left((1 - 2\phi_{(1)} - \phi_{(2)}) \delta_{li} + \chi_{li}^{(1)} + \frac{\chi_{li}^{(2)}}{2} \right) \right. \\ & \quad \left. + (\delta E^i E_{(0)}^l + E_{(0)}^i \delta E^l) \left((1 - 2\phi_{(1)}) \delta_{li} + \chi_{li}^{(1)} \right) \right] \end{aligned}$$

$$(6.304) \quad + \left(\delta E^i \delta E^l + \frac{\delta^2 E^i}{2} E_{(0)}^l + E_{(0)}^i \frac{\delta^2 E^l}{2} \right) \delta_{li} + \frac{1}{4} \left(1 - 2\psi^{(1)} - \psi^{(2)} + 4 \left(\psi^{(1)} \right)^2 - \omega^{(1)i} \omega_i^{(1)} \right) \mathfrak{F}^2 \Big]$$

La componente $T_{(em)}^{0i}$ queda de la siguiente forma:

$$(6.305) \quad \begin{aligned} T_{(em)}^{0i} &= \frac{1}{4\pi} \left[F^{0\mu} F^{i\nu} g_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{0i} \mathfrak{F}^2 \right] = \frac{1}{4\pi} \left[-E^l E^i g_{l0} + E^l \epsilon^{ikm} B^m g_{lk} - \frac{1}{4} g^{0i} \mathfrak{F}^2 \right] \\ T_{(em)}^{0i} &= \frac{1}{4\pi a^2} \left[-E_{(0)}^i E_{(0)}^l \left(\omega_l^{(1)} + \frac{\omega_l^{(2)}}{2} \right) - \left(\delta E^i E_{(0)}^l + E_{(0)}^i \delta E^l \right) \omega_l^{(1)} \right. \\ &\quad + E_{(0)}^l B_{(0)}^m \epsilon^{ikm} \left((1 - 2\phi_{(1)} - \phi_{(2)}) \delta_{lk} + \chi_{lk}^{(1)} + \frac{\chi_{lk}^{(2)}}{2} \right) \\ &\quad + \epsilon^{ikm} \left(\delta E^l B_{(0)}^m + E_{(0)}^l \delta B^m \right) \left((1 - 2\phi_{(1)}) \delta_{lk} + \chi_{lk}^{(1)} \right) \\ &\quad + \left(\delta B^m \delta E^l + \frac{\delta^2 E^l}{2} B_{(0)}^m + E_{(0)}^l \frac{\delta^2 B^m}{2} \right) \epsilon^{ikm} \delta_{lk} \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \left(\omega^{(1)i} + \frac{1}{2} \omega^{(2)i} + 2 \left(\phi^{(1)} - \psi^{(1)} \right) \omega^{(1)i} - \omega^{(1)k} \chi_k^{(1)i} \right) \mathfrak{F}^2 \right] \end{aligned}$$

La componente $T_{(em)}^{ik}$ queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} T_{(em)}^{ik} &= \frac{1}{4\pi} \left[F^{i\mu} F^{k\nu} g_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{ik} \mathfrak{F}^2 \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[E^i E^k g_{00} - E^k \epsilon^{ijl} B^l g_{j0} - E^i \epsilon^{kjl} B^l g_{0j} + \epsilon^{ijn} B^n g_{il} \epsilon^{klm} B^m - \frac{1}{4} g^{ik} \mathfrak{F}^2 \right] \\ T_{(em)}^{ik} &= \frac{1}{4\pi a^2} \left[-E_{(0)}^i E_{(0)}^k (1 + 2\psi_{(1)} + \psi_{(2)}) - \left(\delta E^i E_{(0)}^k + E_{(0)}^i \delta E^k \right) (1 + 2\psi_{(1)}) \right. \\ &\quad - \left(\delta E^i \delta E^k + \frac{\delta^2 E^i}{2} E_{(0)}^k + E_{(0)}^i \frac{\delta^2 E^k}{2} \right) - \left(E_{(0)}^i B_{(0)}^l \epsilon^{kjl} + E_{(0)}^k B_{(0)}^l \epsilon^{ijl} \right) \left(\omega_j^{(1)} + \frac{\omega_j^{(2)}}{2} \right) \\ &\quad \left. - \left(\epsilon^{ijl} \delta E^k B_{(0)}^l + \epsilon^{ijl} E_{(0)}^k \delta B^l + \epsilon^{kjl} \delta E^i B_{(0)}^l + \epsilon^{kjl} E_{(0)}^i \delta B^l \right) \omega_j^{(1)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +B_{(0)}^n B_{(0)}^m \epsilon^{ijn} \epsilon^{klm} \left((1 - 2\phi_{(1)} - \phi_{(2)}) \delta_{jl} + \chi_{jl}^{(1)} + \frac{\chi_{jl}^{(2)}}{2} \right) \\
& + \epsilon^{ijn} \epsilon^{klm} (\delta B^n B_{(0)}^m + B_{(0)}^n \delta B^m) \left((1 - 2\phi_{(1)}) \delta_{lj} + \chi_{lj}^{(1)} \right) \\
& + \left(\delta B^m \delta B^n + \frac{\delta^2 B^n}{2} B_{(0)}^m + B_{(0)}^n \frac{\delta^2 B^m}{2} \right) \epsilon^{ijn} \epsilon^{klm} \delta_{lj}
\end{aligned}$$

(6.306)

$$-\frac{1}{4} \left(\left((1 + 2\phi^{(1)} + \phi^{(2)}) + 4(\phi^{(1)})^2 \right) \delta^{ik} - \chi^{(1)ik} - \left(\frac{1}{2} \chi^{ik(2)} + \omega^{(1)i} \omega^{(1)k} + 4\phi^{(1)} \chi^{(1)ik} - \chi^{(1)il} \chi_l^{(1)k} \right) \mathfrak{F}^2 \right]$$

ahora usamos unas propiedades de los simbolos de Levi-Civita:

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} = \det \begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix} = \delta_{il} (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) - \delta_{im} (\delta_{jl} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{kl}) - \delta_{in} (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl})$$

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{imn} = (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km})$$

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{ijn} = 2\delta_{kn}$$

Bibliografia

- [1] T. Kobayashi S. Maeda, S. Kitagawa and T. Shiromizu. (2009), arxiv:astro-ph/0805.0169v3.
- [2] M. Giovannini. (2005), arxiv:astro-ph/080544v2.
- [3] L. Hollenstein. Phd thesis: Applications of cosmological perturbation theory to dynamical dark energy and primordial magnetogenesis, university of portsmouth, dr: R. crittenden, 2009.
- [4] L. M. Widrow. Rev. mod. phys. 74, 775 (2002).
- [5] I. Brown. (2008), arxiv:astro-ph/0812.1781v1.
- [6] C. Vogt and T. A. Ensslin. (2005), arxiv:astro-ph/0501211.
- [7] T. Kolatt. (1997), arxiv:astro-ph/9704243.
- [8] A. Neronov A. Elyiv and D. Semikoz. (2009), arxiv:astro-ph/0903.3649.
- [9] R. Taylor J. M. Stil J. Lee, U. L. Pen and C. Sunstrum. (2009), arxiv:astro-ph/0906.1631.
- [10] R. Banerjee and K. Jedamzik. (2004), arxiv:astro-ph/0410032v1.
- [11] M. R. Merrifield. (2003), arxiv:astro-ph/0310497.
- [12] K. Kojima and K. Ichiki. (2009), arxiv:astro-ph/0902.1367v2.
- [13] L. Biermann and A. Schluter. Phys. rev 82, 863(1951).
- [14] A. Ferrara N. Y. Gnedin and E. G. Zweibel. (2000), arxiv:astro-ph/0001066.
- [15] K. Kotake M. Oguri K. Ichiki H. Hanayama, K. Takahashi and H. Ohno. (2005), arxiv:astro-ph/050138.
- [16] R. Wielebinski and R. Beck. Cosmic magnetic fields, (2005, springer).
- [17] A. notari S. Matarrese, S. Mollerach and A. Riotto. (2004), arxiv:astro-ph/0410687v1.
- [18] S. I. Vainshtein and Y. B. Zeldovich. (1972), sov. phys. usp. 15, 159.
- [19] R. Opher M. Opher and O. Miranda. Proceedings of a workshop held in santos, brazil 8-12 april 1996, p.129.
- [20] K. ichiki K. Takahashi and N. Sugiyama. (2008), arxiv:astro-ph/0710.4620v2.
- [21] R. Crittenden L. Hollenstein, C. Caprini and R. Maaterns. (2008), arxiv:astro-ph/0712.1667v2.
- [22] K. Dimopoulos. (2008), arxiv:astro-ph/0806.4680v1.

- [23] J. Soda S. Kanno and M. Watanabe. (2009), arxiv:astro-ph/0908.3509v2.
- [24] R. Durrer C. Caprini and G. Servant. (2009), arxiv:astro-ph/0909.0622v2.
- [25] M. Das and S. Mohanty. (2010), arxiv:astro-ph/1004.1927v1.
- [26] L. Hollenstein R. Durrer and R. K. Jain. (2010), arxiv:astro-ph/1005.5322v1.
- [27] J. R. Shaw and A. Lewis. (2009), arxiv:astro-ph/0911.2714v2.
- [28] S. Wang. (2009), arxiv:astro-ph/0912.1994v1.
- [29] V. B. Semikoz P. M. Akhmet'ev and D. D. Sokoloff. (2010), arxiv:astro-ph/1002.4969v1.
- [30] F. R. Urban and A. Zhitnitsky. (2009), arxiv:astro-ph/0912.3248v1.
- [31] J. R. Shaw and A. Lewis. (2010), arxiv:astro-ph/0911.2714v3.
- [32] L. Kisslinger T. Kahniashvili and T. Stevens. Phys. rev d. 81, 023004(2010).
- [33] K. E. Kunze. (2005), arxiv:astro-ph/0506212v1.
- [34] G. Lambiase and A. R. Prasanna. (2004), arxiv:astro-ph/040707v1.
- [35] N. Ohta K. Bamba and S. Tsujikawa. Phys. rev d. 78, 043524(2008).
- [36] T. Shiromizu T. Kobayashi, R. Maartens and K. Takahashi. (2007), arxiv:astro-ph/0701596v2.
- [37] M. Giovannini. Phys. rev d 70, 123507(2004).
- [38] K. Takahashi. (2008), arxiv:astro-ph/0804.3578v1.
- [39] C. J. Hogan. (2000), arxiv:astro-ph/0005380v2.
- [40] T. Gebbie R. Maartens and G. F. R. Ellis. Phys. rev d 59, 083506(1999).
- [41] S. Sethi R. Gopal. (2005), arxiv:astro-ph/0411170v1.
- [42] A. Dolgov and J. Silk. Phys. rev d 47, 3144(1993).
- [43] D. Grasso and H. Rubinstein. (2001), arxiv:astro-ph/0009061v1.
- [44] M. M. Forbes and A. Zhitnitsky. (2000), arxiv:astro-ph/0008318v1.
- [45] M. M. Forbes and A. Zhitnitsky. Phys. rev. Lett. 85(2000) 5268-5271.
- [46] D. Grasso. (2000), arxiv:astro-ph/0002197v1.
- [47] O. Tornkvist. (1998), arxiv:astro-ph/9801286v1.
- [48] T. W. Kephart A. Berera and S. D. Wick. (1998), arxiv:astro-ph/9809404v2.
- [49] A. Rajantie. (2003), arxiv:astro-ph/0311262v1.
- [50] M. Donaire. (2006), arxiv:astro-ph/0605208v2.
- [51] H. J. de Vega D. Boyanovsky and M. Simionato. (2003), arxiv:astro-ph/0305131v1.
- [52] H. J. de Vega D. Boyanovsky. (2005), arxiv:astro-ph/0502212v1.
- [53] S. P. Kim. (2004), arxiv:astro-ph/0401095v2.
- [54] H. Tashiro S. Kuroyanagi and N. Sugiyama. Phys. rev d 81, 023510(2010).
- [55] H. Firouzjahi R. Emami and M. S. Movahed. Phys. rev d 81, 083526(2010).
- [56] V. Mukhanov V. Demozzi and H. Rubinstein. Jcap 0908:025, 2009.
- [57] C. Geng K. Bamba and S. H. Ho. Jcap0811:013, 2008.

- [58] L. Campanelli. *J. mod. phys.*d18:1395-1411, 2009.
- [59] K. Bamba and S. Odintsov. *Jcap* 0804:024, 2008.
- [60] G. L. Flogli L. Campanelli, P. cea and L. Tedesco. *Phys. rev d* 77, 043001(2008).
- [61] A. Olinto. (1998), arxiv:astro-ph/9807051v1.
- [62] A. Bernui and W. S. Ricaldi. (2008), arxiv:astro-ph/0807.1076v1.
- [63] M. Giovannini. (2009), arxiv:astro-ph/0907.3235v1.
- [64] C. Caprini C. Bonvin. (2010), arxiv:astro-ph/1004.1405v2.
- [65] R. Maartens C. A. Clarkson, A. A. Coley and C. Tsagas. (2003), arxiv:astro-ph/0208364v2.
- [66] G. Starkman P. Kernan and T. Vachaspati. *Phys. rev d* 54, 7207(1996).
- [67] H. Tashiro and N. Sugiyama. (2006), arxiv:astro-ph/0607169v2.
- [68] R. Durrer. (2006), arxiv:astro-ph/0402129v2.
- [69] J. Bardeen. *Phys. rev d* 22, 1882(1980).
- [70] P. J. E. Peebles. *Principles of physical cosmology*, (princeton univerisity press, 1993).
- [71] R. Durrer. (1993), arxiv:astro-ph/9311041v1.
- [72] E. Bertschinger. (1995), arxiv:astro-ph/9503125v1.
- [73] R. Durrer and M. Sakellariadou. *Phys. rev d* 56, 4480(1997).
- [74] W. Hu. (2004), arxiv:astro-ph/0402060v1.
- [75] H. Tashiro and N. Sugiyama. (2006), arxiv:astro-ph/0607169v2.
- [76] K. A. Malik and D. Matravers. *Class. quantum grav.* 25 (2008)193001.
- [77] S. Matarrese N. Bartolo and A. Riotto. (2007), arxiv:astro-ph/0703496v2.
- [78] S. Matarrese N. Bartolo and A. Riotto. (2007), arxiv:astro-ph/0610110v2.
- [79] S. Matarrese N. Bartolo and A. Riotto. (2006), arxiv:astro-ph/0604416v4.
- [80] S. Matarrese N. Bartolo and A. Riotto. (2005), arxiv:astro-ph/0512481v1.
- [81] S. Tassev L. Senatore and M. Zaldarriaga. (2006), arxiv:astro-ph/0812.3652v1.
- [82] V. Mukhanov. *Physical foundations in cosmology* (cambrige, 2005).
- [83] H. J. Hortua. *Tesis pregrado, perturbaciones e invariantes gauge*, u. nacional de colombia, dr: J. m. tejeiro, 2008.
- [84] L. Gualtieri A. Passamonti, M. Bruni and C. Sopena. (2005), arxiv:astro-ph/0407108v2.
- [85] A. Maroto. (2001), arxiv:astro-ph/0111268v1.
- [86] A. Maroto. (2005), arxiv:astro-ph/0008288v3.
- [87] A. Notari S. Matarrese, S. Mollerach and A. Riotto. (2004), arxiv:astro-ph/0410687v1.
- [88] T. E. Clarke. *J.k.astronomical society*, 37, 337-342(2004).
- [89] G. Rudiger and R. Hollerbach. *The magnetic universe* (wiley-vch, 2004).

- [90] A. D. Dolgov. (2005)arxiv:astro-ph/0503447v2.
- [91] M. Giovannini. (2002), arxiv:astro-ph/0208152v1.
- [92] M. Giovannini. A primer on the physics of the cosmic microwave background, (word scientific, 2008).
- [93] E. G. Blackman. *Astron. nachr.* /99, 88, 789(2010).
- [94] M. Marklund and C. A. Clarkson. (2005), arxiv:astro-ph/0411140v2.
- [95] M. Giovannini. (2006), arxiv:astro-ph/0612378v1.
- [96] T. Kahniashvili C. Caprini, R. Durrer. *Phys.rev.* d69 (2004) 063006.
- [97] A. Loeb J. Quashnock and D. Spergel. *The astrophysical journal* 344:149-151,1989.
- [98] R. de Souza and R. Opher. (2006), arxiv:hep-ph/0607181v1.
- [99] K. Subramanian. (2010), arxiv:astro-ph/0911.4771v2.
- [100] Tsagas and J. D. Barrow. (1997), arxiv:astro-ph/9704015v1.
- [101] R. Durrer. (2006), arxiv:hep-ph/0609216v1.
- [102] T. Kahniashvili R. Durrer, P.G. Ferreira. *Phys.rev.*d61:043001,2000.
- [103] G. Lavrelashvili A. Kosowsky, T. Kahniashvili and B. Ratra. (2005), arxiv:hep-ph/0409767v2.
- [104] P. Ferreira J. R. Kristiansen. (2008), arxiv:hep-ph/0803.3210v2.
- [105] E. P. Shellard D. M. Regan. (2009), arxiv:hep-ph/0911.249v1.
- [106] A. Heavens M. Kamionkowski, L. Tristan. (2010), arxiv:hep-ph/1010.0251v1.
- [107] J. Macias-Perez L. Fauvet. (2010), arxiv:hep-ph/1002.0457v1.
- [108] G. Mangano J. Hamann, J. Lesgourgues. (2008), arxiv:hep-ph/0712.2826v1.
- [109] M. Langer M. Douspis S. Zaroubi V. Jelic H. Tashiro, N. Aghanim. (2010), arxiv:hep-ph/0908.1632v2.
- [110] S. W. Hawking. *American astron. society* 544-555 (1966).
- [111] G.F.R Ellis and M. Bruni. *Phys. revd* 40, 1804 (1990).
- [112] P.K.S Dunsby M. Bruni and G.F.R Ellis. *The astrophysical journal*, 395(1992).
- [113] K. A. Malik and D. Wands. (2009), arxiv:hep-ph/08094944v2.
- [114] R. Durrer. (1993), arxiv:hep-ph/9311041v1.
- [115] J. Hwang. *The astrophysical journal*, 380(1991).
- [116] J. Hwang and E. Vishniac. *The astrophysical journal*, 353(1990).
- [117] S. Sonogo and M. Bruni. (1997), arxiv:hep-ph/9708068v1.
- [118] U. Gerlach. *Phys. rev* d18, 1773(1978).
- [119] J. M. Bardeen. *Phys. rev* d22, 1882(1980).
- [120] H. Kodama and M. Sasaki. *Progr. theor. phys. suppl* 78,1(1984).
- [121] M. Kasai and K. Tomita. *Phys. rev* d33, 1576(1986).
- [122] R. Durrer. (2004), arxiv:hep-ph/0402129v2.

- [123] V. Mukhanov. Physical foundations of cosmology, (cambridge university press, 2005).
- [124] S. Mollerach M. Bruni, S. Matarrese and S. Sonego. (1996), arxiv:hep-ph/9611048v1.
- [125] K. Nakamura. Prog. theor. phys. 110 (2003), 723; ibid. 113 (2005), 481.
- [126] S. Mollerach M. Bruni, S. Matarrese and S. Sonego. 1997 class. quantum grav. 14 2585.
- [127] K. A. Malik and D. Wands. Class. quantum grav. 21, 2004 165-171.
- [128] J. M. Tejeiro. Notas de clase: Principios de relatividad general, (publicaciones facultad ciencias, u. nacional de colombia, 2008).
- [129] M. Nakahara. Geometry, topology and physics, (published by institute physics of london, 2003).
- [130] M. Bruni S. Sonego. (1997), arxiv:hep-ph/9708068v1.
- [131] K. Nakamura. (2009), arxiv:hep-ph/1001.2621v1.
- [132] D. Matravers K. Malik. Class.quant.grav.25:193001,2008.
- [133] N. Mukunda B. R. Iyer and C. V. Vishveshwara. Gravitation, gauge theories and the early universe (kluwer academic publishers, 1989).
- [134] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. The classical theory of fields vol.2 (elsevier, 1975).
- [135] R. Maartens J. D. Barrow and C. Tsagas. (2007), arxiv:astro-ph/0611537v4.
- [136] T. Padmanabhan. Gravitation, (cambridge, 2010).
- [137] R. M. Wald. General relativity, (chicago press, 1984).
- [138] W. Rindler. Relativity, (oxford press,2006).
- [139] S. Weinberg. Cosmology, (oxford press, 2008).
- [140] S. Dodelson. Modern cosmology, (academic press, 2003).
- [141] P. J. E. Peebles. Principles of physical cosmology , (princeton press, 1993).
- [142] R. Durrer. The cosmic microwave background, (cambridge press, 2008).
- [143] D. Lyth. The primordial density perturbation, (cambridge press, 2009).
- [144] D. I. Novikov P. D. Naselsky and I. D. Novikov. The physics of the cosmic microwave background, (cambridge press, 2006).
- [145] K. Nakamura. Prog.theor.phys.117:17-74,2007.
- [146] C. Pitrou. (2007), arxiv:hep-ph/0706.4383v2.
- [147] C. Pitrou. (1996), arxiv:hep-ph/0809.3036v3.
- [148] C. Clarkson R. Maartens T. Lu, K. Ananda. (2009), arxiv:hep-ph/0812.1349v2.
- [149] A. Kosowsky A. Mack, T. Kahniashvili. Phys.rev.d65:123004,2002.
- [150] Tsagas and J. D. Barrow. (1998), arxiv:astro-ph/9803032v2.
- [151] R. Maartens C. G. Tsagas C. A. Clarkson, A. Coley. (2003), arxiv:hep-ph/0208364v2.
- [152] J. D. Jackson. Classical electrodynamics iii ed., (john wiley and sons inc, (1999)).

- [153] P. T. Chruciel Y.C. Bruhat and J. Loizelet. (2006), arxiv:hep-ph/0608108v2.
- [154] S. Matarrese V. Acquaviva, N. Bartolo and A. Riotto. (2002)arxiv:astro-ph/0209.156v3.