Retículos residuados y algunas conexiones con topología y lógica

Sandra Marleny Perilla Monroy

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2012

Reticulos residuados y algunas conexiones con topología y lógica

Sandra Marleny Perilla Monroy

Trabajo final de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias Matemáticas

Director:
Ph.D. Rodrigo de Castro Korgi

Línea de Investigación:
Álgebra y lógica.

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2012

Dedicatoria

A Dios.

Agradecimientos

Quiero agradecer a Dios por acompañarme, fortalecerme y abrir las puertas de este camino. A mi maestro Lorenzo Acosta por todo su apoyo incondicional, por sus consejos y palabras de aliento. A mi director Rodrigo de Castro por confiar en mi y acompañarme en este proceso. A mi esposo, padres y hermanos por todo su apoyo, y a todos los amigos que se alegraron conmigo por este nuevo triunfo.

Reticulos residuados y algunas conexiones con topología y lógica

Resumen

Este trabajo tiene por objetivo mostrar un enlace más entre álgebra, topología y lógica, tomando como base fundamental la teoría de retículos. Se estudian en el primer capítulos los retículos residuados, que son retículos a los que se les agrega una operación de monoide residuada. Se obtienen para ellos un gran número de propiedades a partir de la noción de adjunción entre conjuntos ordenados. En el segundo capítulo, se estudian los retículos residuados completos, que son caracterizados como cuantales unitarios, los cuales resultan estar relacionados con la categoría de pretopologías mediante una adjunción. Y en el tercer capítulo se estudian las lógicas subestructurales que se formalizan en sistemas de secuentes de Gentzen y cuyas semánticas asociadas resultan ser los retículos residuados.

Palabras clave: retículos residuados, cuantales, operadores de clausura, pretopologías, lógicas subestructurales.

Abstract

This paper aims to show link between algebra, topology and logic, based on fundamental lattice theory. Studied in the first chapter residuated lattices, which are lattices to which is added residuated monoid operation. Are obtained for them a large list of properties from the notion of adjunction between ordered sets. In the second chapter, we study the complete residuated lattices, which are characterized as unit quantales, which happen to be related to the category of pretopologies by adjunction. And in the third chapter we study the substructural logics which are formalized in Gentzen sequent systems whose associated semantic happen to be the residuated lattices.

Palabras clave: residuated lattices, quantales, closure operators, pretopologies, substructural logics.

Índice general

Introducción

Una característica sobresaliente de la matemática contemporánea es buscar enlaces entre sus diferentes sub-ramas. En particular, unas estructuras especialmente propensas a revelar ese tipo de enlaces son los retículos, con sus conexiones con el álgebra, la topología y la lógica, entre otras ramas. Por ejemplo, los retículos conforman semánticas naturales asociadas a lógicas. En topología el conjunto de los abiertos de un espacio topológico forma un retículo completo. Y viceversa, dado un retículo distributivo completo a éste se le puede asignar un espacio topológico que se denomina su espectro, en el cual las propiedades del retículo son traducidas en propiedades topológicas. "En teoría de anillos el primer paso para dar una representación de un anillo consiste en construir un retículo de ideales."(Tomado de [26]). En análisis funcional las C^*-álgebras modelan el comportamiento de las partículas elementales en la mecánica cuántica, y las propiedades reticulares de las C^*-álgebras codifican ciertos aspectos de una lógica cuántica subyacente . Para mayor información puede ver [10], [13] y [26].

Este trabajo tiene por objetivo mostrar un enlace más entre álgebra, topología y lógica, tomando como base fundamental la teoría de retículos.

En el primer capítulo se estudian los retículos residuados, que son retículos a los que se les agrega una operación de monoide residuada, es decir una operación $\cdot$ para la que existen operaciones binarias $\backslash$ y $/$ de tal forma que para todo x, y, z en el retículo:

$$x \cdot y \leq z \quad \Leftrightarrow \quad x \leq z/y \quad \Leftrightarrow \quad y \leq x\backslash z.$$

Lo anterior se traduce en términos de adjunción a que dado un retículo residuado P, las funciones

$${}_x f : P \to P : y \to x \cdot y \quad y \quad f_x : P \to P : y \to y \cdot x$$

tienen adjunta a derecha y sus adjuntas son justamente:

$$_xg : P \to P : y \to_x g(y) = x\backslash y \quad y \quad g_x : P \to P : y \to g_x(y) = y/x$$

respectivamente. Por eso este primer capítulo inicia con un estudio general de conjuntos ordenados y de la noción de adjunción entre conjuntos ordenados, lo que resulta ser bastante útil en el desarrollo de la deducción de múltiples propiedades para los retículos residuados.

En el segundo capítulo se hace la conexión de los retículos residuados completos (cuantales unitarios) con pretopologías. Los cuantales pueden ser representados a través de pretopologías, que tienen sus raíces en la topología formal según Sambín y cuyo propósito es describir las propiedades de un espacio topológico a través de sus abiertos básicos sin hablar de los puntos del espacio. (Vea [29]). Para este estudio se introducen primero la categoría de sup-retículos **SL**, que resulta ser la misma categoría de los retículos completos con funciones adjuntas a izquierda, y la categoría de los operadores de clausura **OC** (ver la sub-sección 2.1.2 de la página 33). Se definen dos funtores entre estas categorías: el funtor **Sat** que envía operadores de clausura a sup-retículos mediante la consideración de los puntos fijos del operador, y **Transl** que toma sup-retículos y le asigna el operador de clausura $C_\vee U =\downarrow \bigvee U$. Se demuestra en este capítulo que el funtor **Sat** resulta ser adjunto a izquierda del funtor **Transl** y se da un contraejemplo que muestra que estos dos funtores no son una equivalencia entre estas dos categorías, (no siempre que se tome un operador de clausura (X, C), $Transl(SatC)$ es isomorfo a (X, C)). Luego se restringen estos funtores a las categorías de cuantales y de pretopologías. Los cuantales se pueden caracterizar como sup-retículos con una operación de semigrupo que resulta ser distributiva con respecto a la operación de sup y las pretopologías se pueden ver como operadores de clausura estables. Similarmente se tiene una adjunción y no se tiene la equivalencia mediante estos funtores de estas dos categorías, así que una futura investigación será buscar condiciones sobre los operadores de clausura y después sobre las pretopologías, para que estos funtores restringidos a tales operadores de clausura o a tales pretopologías sí formen equivalencias con la categoría de sup-retículos y la categoría de cuantales respectivamente.

En el tercer capítulo se estudian las lógicas subestructurales que se originan ante la necesaria expansión de la lógica a otras facultades del conocimiento como son la lingüística, la filosofía y la teoría de la computación, expansión que las lógicas clásica e intuicionista no alcanzan a abarcar completamente entre otras cosas por no tener control sobre el uso y la combinación de las premisas o los recursos. Lo fundamental para estas lógicas subestructurales es que ellas se formalizan en sistemas de secuentes de Gentzen y se definen mediante restricciones de reglas estructurales como debilitamiento, intercambio y contracción entre otras, que son las que gobiernan el comportamiento de las premisas. Tenemos entre estas lógicas por ejemplo la lógica lineal utilizada en teoría de la computación, la lógica relevante utilizada en filosofía y la lógica del cálculo completo de Lambek utilizada en lingüística. Se muestra además la correspondencia entre las lógicas subestructurales básicas, que son lógicas que extienden al cálculo de Lambek, y los retículos residuados, más aún los retículos residuados completos (cuantales unitarios). Los retículos residuados resultan ser las semánticas asociadas a estas lógicas.

Capítulo 1

Retículos Residuados

El objetivo de este capítulo es estudiar los retículos residuados que son básicamente retículos dotados con una operación de monoide residuada $\cdot$, es decir una operación para la que existen operaciones operaciones binarias $\backslash$ y $/$ tal que para todo x, y, z en el retículo

$$x \cdot y \leq z \quad \Leftrightarrow \quad x \leq z/y \quad \Leftrightarrow \quad y \leq x \backslash z.$$

Se empezará entonces por una introducción a conjuntos ordenados y al concepto de adjunción entre conjuntos ordenados, lo que nos dará herramientas para la deducción de múltiples propiedades de los retículos residuados.

1.1. Conjuntos ordenados

Definición 1. *Dado un conjunto A diferente de vacío, diremos que una relación binaria R sobre A es un conjunto de parejas de la forma (a, b) donde a y b son elementos de A, es decir, una relación binaria sobre A, es un subconjunto de $A \times A$. Cuando una pareja (a, b) pertenezca a la relación, diremos también que a se relaciona con b y lo denotaremos aRb.*

A continuación se dan algunas propiedades que puede cumplir una relación sobre un conjunto A, ellas nos ayudarán a definir conjuntos ordenados.

Definición 2. *Dada una relación R sobre un conjunto A diferente de vacío diremos que R es:*

- ***Reflexiva.*** *Si para todo* $a \in A$*, se tiene que* $(a, a) \in R$*, esto es cada elemento en* A *se relaciona consigo mismo.*

- ***Simétrica.*** *Si para todo* $a, b \in A$*, si* $(a, b) \in R$*, entonces* $(b, a) \in R$*.*

- ***Antisimétrica.*** *Si para todo* $a, b \in A$ *siempre que* $(a, b) \in R$ *y* $(b, a) \in R$ *entonces se debe tener que* $a = b$*.*

- ***Transitiva.*** *Si satisface que para todo* $a, b, c \in A$*, si* $(a, b) \in R$ *y* $(b, c) \in R$*, entonces* $(a, c) \in R$*.*

Definición 3. *Si una relación* R *sobre un conjunto* A *es reflexiva, antisimétrica y transitiva, entonces diremos que* R ***es una relación de orden****, y que* (A, R) *es un* ***conjunto ordenado****. Cuando* R *es una relación de orden se acostumbra a denotar* R *por* $\leq$*.*

Definición 4. *(****Cotas superiores e inferiores, máximo, mínimo, supremo e ínfimo****). Dado* $(A, \leq)$ *un conjunto ordenado y* $B \subseteq A$*, se definen las* ***cotas superiores*** *de* B*, como el conjunto de todos los elementos de* A *que son mayores o iguales a todos los elementos de* B*. Esto es:*

$$CotasSupB = \{a \in A : b \leq a, \quad para \quad todo \quad b \in B\}.$$

Similarmente se definen las ***cotas inferiores*** *de* B*, así:*

$$CotasInfB = \{a \in A : a \leq b, \quad para \quad todo \quad b \in B\}.$$

Diremos que un conjunto ordenado A *tiene* ***máximo*** *si existe un elemento* x *en* A *tal que* $a \leq x$ *para todo* a *en* A*. Y diremos que* A *tiene* ***mínimo*** *si existe* $x \in A$*, tal que:* $x \leq a$ *para todo* a *en* A*. Denotaremos al máximo de* A *como 1 y al mínimo como 0, pero más adelante veremos que la notación correcta debería ser* $\top$ *para el máximo y* $\perp$ *para el mínimo . Cuando un conjunto ordenado tiene máximo y mínimo diremos que él es* ***acotado****.*

El ***supremo*** *de* B *o sup de* B *se define, (si existe) como la mínima de las cotas superiores de* B*, y el* ***ínfimo*** *de* B *o inf de* B *como la máxima de las cotas superiores de* B *(si existe). Denotaremos* $\bigvee B$ *y* $\bigwedge B$ *al sup y al inf de* B *respectivamente.*

Ejemplos

1. Consideremos $\mathbb{N}$ el conjunto de los naturales, definimos sobre $\mathbb{N}$ la siguiente relación: mRn si y sólo si m divide a n, esto es, si existe k un número natural tal que $n = mk$. Veamos que R es una relación de orden.
   Primero R es reflexiva, pues todo número natural n satisface que n se relaciona con n, pues n divide a n, $n = 1.n$. R es antisimétrica pues si nRm y mRn, entonces n divide a m y m divide a n, esto es existen k_1 y k_2 números naturales tal que $m = k_1.n$ y $n = k_2.m$, entonces $m = k_1.k_2.m$, luego $k_1.k_2 = 1$, así $k_1 = k_2 = 1$, y por consiguiente $n = m$. R es transitiva, pues si mRn, y nRp, entonces, existen k_1 y k_2 números naturales tal que $n = k_1.m$, y $p = k_2.n$, luego, $p = k_2.n = k_2.k_1.m$, así m divide a p, esto es mRp. El mínimo para este conjunto ordenado sería el 1, y el máximo sería el 0. Dado B un subconjunto finito de los naturales el ínfimo de B es el máximo común divisor de los elementos de B y el supremo de B el mínimo común múltiplo de los elementos de B.

2. Consideremos ahora el conjunto de los números reales con la relación: aRb sí y sólo si $b - a$ es no negativo. Veamos que R es una relación de orden: R es reflexiva: aRa pues $a - a = 0$ es no negativo. R es antisimétrica: si aRb y bRa, entonces $b - a$ es no negativo y $a - b$ es no negativo, pero $b - a = -(a - b)$, luego se tendría que un número no negativo es igual a un número negativo, así que la única opción es que $b - a = 0$, esto es $a = b$. Y por último R es transitiva: si a, b, y c son números reales, y aRb y bRc, entonces $b - a$ es no negativo y $c - b$ es no negativo, la pregunta es: ¿$c - a$ es no negativo?, veamos: $c - a = (c - b) + (b - a)$, ambos por hipótesis son no negativos luego su suma es no negativa. Así R es una relación de orden sobre los reales, y es la relación usual de orden.

3. También los Naturales, los Enteros, los Racionales y los Irracionales con el orden usual son conjuntos ordenados.

4. Dado un conjunto X, $\wp(X)$ con la relación de inclusión o contenencia es un conjunto ordenado. El mínimo es el conjunto vacío y el máximo es el

conjunto X. Además dado un subconjunto $\mathcal{S}$ de $\wp(X)$, $\bigvee \mathcal{S} = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$ y el $\bigwedge \mathcal{S} = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A$.

5. Sea X un conjunto, y sea $Top(X)$ el conjunto de todas las topologías sobre X, $(Top(X), \subseteq)$ es un conjunto ordenado. El mínimo es la topología grosera $\{\emptyset, X\}$ y el máximo la topología discreta $\wp(X)$. Y dado $\mathcal{S}$ un subconjunto de $Top(X)$, $\bigvee \mathcal{S} = \langle \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \rangle$ y el $\bigwedge \mathcal{S} = \bigcap_{U \in \mathcal{S}} U$.

1.2. Adjunción entre conjuntos ordenados

Definición 5. *Sean $(X, \leq)$ y $(Y, \leq)$ conjuntos ordenados y sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ dos funciones. Diremos que f es adjunta a izquierda de g si se cumple que:*

$$(\forall x \in X)(\forall y \in Y)(f(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq g(y)).$$

También se dice en este caso que f y g forman un par residuado, y que cada función es residuada.

Proposición 6. *Si $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ es adjunta a izquierda de $g : (Y, \leq) \to (X, \leq)$ entonces:*

1. *$f(g(y)) \leq y$ y $x \leq g(f(x))$ $\forall x \in X$ y $\forall y \in Y$.*
2. *f y g son monótonas.*
3. *$f \circ g \circ f = f$ y $g \circ f \circ g = g$.*
4. *f preserva extremos superiores y g preserva extremos inferiores.*
5. *Si X tiene mínimo 0_X entonces Y tiene mínimo 0_Y y $f(0_X) = 0_Y$.*
6. *Si Y tiene máximo 1_Y entonces X tiene máximo 1_X y $g(1_Y) = 1_X$.*
7. *Para cada $y \in Y$ el conjunto $A_y = \{x \in X : f(x) \leq y\}$ tiene máximo.*
8. *Para cada $x \in X$ el conjunto $B_x = \{y \in Y : x \leq g(y)\}$ tiene mínimo.*
9. *f es uno a uno si y sólo si g es sobre.*

10. *f es sobre si y sólo si g es uno a uno.*

Demostración.

1. Como $g(y) \leq g(y)$ entonces $f(g(y)) \leq y$, y como $f(x) \leq f(x)$ entonces $x \leq g(f(x))$.

2. Si $x_1 \leq x_2 \leq g(f(x_2))$ entonces $x_1 \leq g(f(x_2))$, luego $f(x_1) \leq f(x_2)$.
   Y si $y_1 \leq y_2$ como $f(g(y_1)) \leq y_1 \leq y_2$, entonces $f(g(y_1)) \leq y_2$ y así $g(y_1) \leq g(y_2)$.

3. $f \circ g \circ f = f$ y $g \circ f \circ g = g$.
   Sea $x \in X$, $f(g(f(x))) \leq f(x)$ por 1. y como $x \leq g(f(x))$ y f es monótona entonces $f(x) \leq f(g(f(x)))$ así $f \circ g \circ f = f$.
   Sea $y \in Y$, $g(y) \leq g(f(g(y)))$ por 1., y también $f(g(y)) \leq y$ como g es monótona $g(f(g(y))) \leq g(y)$ así, $g \circ f \circ g = g$.

4. Si $A \subseteq X$ y $\bigvee A$ existe entonces $f(\bigvee A) = \bigvee(f(A))$.
   $f(\bigvee A)$ es cota superior de $f(A)$ pues para todo $a \in A$ como $a \leq \bigvee A$, entonces $f(a) \leq f(\bigvee A)$ y además es la mínima cota superior pues para $y \in Y$ si $f(a) \leq y$ para todo $a \in A$ entonces $a \leq g(y)$ para todo $a \in A$ luego $\bigvee A \leq g(y)$ y $f(\bigvee A) \leq y$.
   Por dualidad g preserva extremos inferiores.

5. f envía mínimo en mínimo.
   Sea 0_X el mínimo de X entonces $0_X \leq x$ para todo $x \in X$, en particular $0_X \leq g(y)$ para todo $y \in Y$, de donde $f(0_X) \leq y$ para todo $y \in Y$. Concluimos que $f(0_X)$ es el mínimo de Y.

6. Por dualidad g envía máximo en máximo.

7. Para cada $y \in Y$ el conjunto $A_y = \{x \in X : f(x) \leq y\}$ tiene máximo.
   Veamos que el máximo de A_y es $g(y)$.
   $g(y) \in A_y$, pues $f(g(y)) \leq y$ y además si $x \in A_y$ entonces $f(x) \leq y$ lo que equivale a que $x \leq g(y)$.

8. Para cada $x \in X$ el conjunto $B_x = \{y \in Y : x \leq g(y)\}$ tiene mínimo.
   El mínimo de B_x, es $f(x)$.

   $f(x) \in B_x$ pues $x \leq g(f(x))$, y si $y \in B_X$ entonces $x \leq g(y)$ y así $f(x) \leq y$.

9. f es uno a uno si y sólo si g es sobre.
   $\Rightarrow$) Sea $x \in X$, debemos ver que existe $y \in Y$ tal que $g(y) = x$, sea $y = f(x)$, como $f(g(f(x))) = f(x)$ es decir $f(g(y)) = f(x)$ y por ser f uno a uno entonces $x = g(y)$.

   $\Leftarrow$) Sean $x_1, x_2 \in X$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ pero como g es sobre $g(f(x_i)) = g(f(x_i))$ y así $x_1 = x_2$, f es uno a uno.

10. f es sobre si y sólo si g es uno a uno.
    $\Rightarrow$) Sean $y_1, y_2 \in Y$ tal que $g(y_1) = g(y_2)$, como $g(y_1)$ y $g(y_2) \in Img$ entonces $f(g(y_1)) = y_1$ y $f(g(y_2)) = y_2$, así: $y_1 = f(g(y_1)) \leq f(g(y_2)) = y_2$ por ser f monótona y $y_1 \leq y_2$, análogamente $y_2 \leq y_1$, luego g es 1-1.

    $\Leftarrow$) Sea $y \in Y$, y sea $x = g(y)$ como $x \in Img$ entonces $g(f(x)) = x$, pero como g es uno a uno entonces $f(x) = y$, así f es sobre.

Proposición 7. *(recíproca de la noción de adjunción)*
Si $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ y $g : (Y, \leq) \to (X, \leq)$ son monótonas y $x \leq g(f(x))$ y $f(g(y)) \leq y$ para todo $x \in X$ y para todo $y \in Y$ entonces f es adjunta a izquierda de g.

Demostración.

$$f(x) \leq y \Rightarrow x \leq g(f(x)) \leq g(y) \Rightarrow x \leq g(y)$$

y,

$$x \leq g(y) \Rightarrow f(x) \leq f(g(y)) \leq y \Rightarrow f(x) \leq y.$$

Corolario 8. *Si $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ es monótona y para cada $y \in Y$, el conjunto $A_y = \{x \in X : f(x) \leq y\}$ tiene máximo, entonces f es adjunta a izquierda y si $g : (Y, \leq) \to (X, \leq)$ es monótona y para todo $x \in X$ el conjunto $B_x = \{y \in Y : x \leq g(y)\}$ tiene mínimo, entonces g es adjunta a derecha.*

Ejemplos.

1. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to [x] + 1$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \to [y]$ donde $[x]$ es parte entera de x. f y g forman un par residuado. La

función parte entera es una función monótona y además el conjunto $B_x = \{y \in Y : x \leq [y]\}$ tiene mínimo y su mínimo es justamente $1 + [x]$.

2. Tomado de [8] pg. 144. Sean A y B conjuntos cualesquiera y $R \subseteq A \times B$ una relación entre A y B. Sea $X \in \wp(A)$, se define:

   $R_\exists[X] = \{b \in B \mid xRb \ \ para \ \ algún \ \ x \in X\}$, esto es $R_\exists[X]$ es el conjunto de los elemento de B que se relacionan con algún elemento de X.
   $R_\forall[X] = \{b \in B \mid (\forall a \in A)(aRb \Rightarrow a \in X)\}$, esto es $R_\forall[X]$ es el conjunto de los elementos de B que se relacionan sólo con elementos de X.
   Y dado $Y \subseteq B$ $R_\exists^{-1}[Y]$ y $R_\forall^{-1}[Y]$ se definen de manera similar pero ahora bajo la relación R^{-1} que es la inversa de la relación R.

   Las funciones $\Diamond_{R^{-1}} : \wp(A) \to \wp(B) : \Diamond_{R^{-1}}[X] = R_\exists[X]$ y
   $\Box_R : \wp(B) \to \wp(A) : \Box_R[Y] = R_\forall^{-1}[Y]$ forman un par residuado,
   y también las funciones $\Diamond_R : \wp(B) \to \wp(A) : \Diamond_R[Y] = R_\exists^{-1}[Y]$ y
   $\Box_{R^{-1}} : \wp(A) \to \wp(B) : \Box_{R^{-1}}[X] = R_\forall[X]$.

   Veamos por ejemplo que $\Diamond_{R^{-1}}$ y $\Box_R$ son un par residuado:

   Sean $X \subseteq A$ y $Y \subseteq B$, supongamos que $\Diamond_{R^{-1}}[X] \subseteq Y$, esto es $R_\exists[X] \subseteq Y$, debemos ver que $X \subseteq R_\forall^{-1}[Y]$. Sea $x \in X$, $x \in R_\forall^{-1}[Y]$, es decir x sólo se relaciona con elementos de Y, pues si xRb y $b \notin Y$ entonces $b \in R_\exists[X]$ pero $b \notin Y$ lo que contradice la hipótesis.
   Ahora si $X \subseteq R_\forall^{-1}[Y]$ entonces quiere decir que los elementos de X sólo se relacionan con elementos de Y y en consecuencia $R_\exists[X] \subseteq Y$ esto es $\Diamond_{R^{-1}}[X] \subseteq Y$.

Definición 9. ***(Operadores de Clausura)****. Un operador de clausura C sobre un conjunto ordenado P es una función $C : P \to P$ que cumple para todo $x, y \in P$:*

i) $x \leq C(x)$.

ii) Si $x \leq y$ *entonces* $C(x) \leq C(y)$.

iii) $C(C(x)) = C(x)$.

Proposición 10. *Dado* $(P, \leq)$ *un conjunto ordenado y* $C : P \to P$ *un operador de clausura entonces* $C : P \to C(P)$ *es una función residuada y su residual es la función de inclusión* $i : C(P) \to P$. *Además si* $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ *es una función residuada entonces* $f^* \circ f$ *es un operador de clausura (aquí* f^* *denota el residual a derecha de* f*).*

Demostración. Sea $(P, \leq)$ un conjunto ordenado. Veamos que

$$C : P \to C(P)$$

es una función residuada. Supongamos que: $i(x) \leq y$ entonces $x \leq y$ y $C(x) \leq C(y)$, pero como $x \leq C(x)$, entonces $x \leq C(y)$. Y si $x \leq C(y)$, como $y \in C(P)$ entonces $y = C(x_1)$, para algún $x_1 \in P$ y $x \leq C(C(x_1)) = C(x_1) = y$ luego $x \leq y$.

Para la segunda parte de la proposición, sea $f : X \to Y$ una función residuada (que tiene adjunta a derecha) entonces existe $f^* : Y \to X$ tal que para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$ $f(x) \leq y$ sí y sólo sí $x \leq f^*(y)$. Veamos que $f^* \circ f$ es un operador de clausura.

i) Si $f(x) \leq f(x)$, entonces $x \leq (f^* \circ f)(x)$.

ii) Supongamos que $x_1 \leq x_2$, entonces $x_1 \leq x_2 \leq (f^* \circ f)(x_2)$, luego $f(x_1) \leq f(x_2)$.

iii) Sea $x \in X$, $(f^* \circ f)((f^* \circ f)(x)) = (f^* \circ f)(x)$.

1.3. Retículos

Definición 11. *Un conjunto ordenado* $(P, \leq)$ *es un retículo si para cada par de elementos* $x, y \in P$ *existe el sup y el inf. Denotaremos el* $inf\{x, y\}$ *como* $x \wedge y$ *y el* $sup\{x, y\}$ *como* $x \vee y$.

Los retículos son una clase ecuacional. Un retículo se puede ver como un álgebra $(L, \vee, \wedge)$ en donde $\vee, \wedge$ son operaciones binarias que satisface: para $x, y, z \in L$:

i) **Idempotencia.** $x \vee x = x$ y $x \wedge x = x$.

ii) **Conmutatividad.** $x \vee y = y \vee x$ y $x \wedge y = y \wedge x$.

iii) **Asociatividad.** $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ y $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$.

iv) **Leyes de Absorción.** $x \vee (x \wedge y) = x$ y $x \wedge (x \vee y) = x$.

Definición 12. *Diremos que un retículo L es* ***distributivo*** *si para todo $x, y, z \in L$ se tiene que $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ o dualmente si se tiene que $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.*

Definición 13. *Diremos que un retículo L acotado (con máximo y mínimo) es* ***complementado*** *si para todo $x \in L$ existe $y \in L$ tal que $x \wedge y = 0$ y $x \vee y = 1$, en este caso y se conoce como el complemento de x y se denotará $\acute{x}$.*

Definición 14. ***Retículos de Boole.*** *Un retículo de Boole es un retículo que es distributivo, acotado y complementado.*

Definición 15. *Un retículo L se dice* ***completo*** *si dado cualquier $X \subseteq L$ existe el $\bigvee X$ y el $\bigwedge X$.*

Proposición 16. *Si $(X, \leq)$ y $(Y, \leq)$ son retículos completos y f es una función de X en Y, entonces, f es residuada (es adjunta a izquierda) si y sólo si f preserva sups. Y dualmente $f^* : Y \to X$ es el residual de una función $f : X \to Y$ si y sólo si f^* preserva infs.*

Retículos seudocomplementados. Un retículo L, con mínimo 0, se dice seudocomplementado si para cada elemento $x \in L$ existe el máximo del anulador de x, esto es existe el máximo de $Ann(x) = \{y \in L \mid x \wedge y = 0\}$. Denotaremos al seudocomplemento de x como x^*.
Los retículos seudocomplementados son acotados, tienen también elemento máximo y es justamente el seudocomplemento del elemento mínimo, $0^* = 1$. Entre los retículos distributivos seudocomplementados están los **Retículos de Stone** que se caracterizan por cumplir la identidad $x^* \vee x^{**} = 1$.

Definición 17. ***Álgebras o retículos de Heyting.*** *(Tomado de [8]). Un álgebra de Heyting $(A, \vee, \wedge, \to, 0)$ es un retículo con elemento mínimo que además satisface que para todo $x \in A$ la función $x \wedge \_ : A \to A : y \mapsto x \wedge y$ es adjunta a izquierda de la función $x \to \_ : A \to A : z \mapsto x \to z$, esto es:*

$$(\forall x, y, z \in A)(x \wedge y \leq z \iff y \leq x \to z).$$

$x \to z = max\{y : x \wedge y \leq z\}$ y se denomina el $\wedge - residual$ de z por x o el seudocomplemento de x relativo a z.
Nótese que en particular las álgebras de Heyting son retículos seudocomplementados donde $x^* = x \to 0$.
Las álgebras de Heyting son también una clase ecuacional, las identidades que capturan la propiedad de residuación en las álgebras de Heyting son:

i) $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$.

ii) $x \wedge (y \to z) = x \wedge (x \wedge y \to x \wedge z)$.

iii) $z \wedge (x \wedge y \to x) = z$.

Veamos algunos ejemplos concretos de álgebras de Heyting.

1. Toda álgebra booleana es un álgebra de Heyting. En este caso $a \to b = a\acute{} \vee b$. Así las álgebras de Heyting son una generalización de las álgebras booleanas.

2. (Tomado de [19]). Un conjunto A ordenado linealmente con máximo y mínimo es un álgebra de Heyting. En este caso:

$$a \to b = \begin{cases} 1, & a \leq b \\ b, & b < a \end{cases}$$

   $a \to b = max\{x \in A : a \wedge x \leq b\}$, como A tiene un orden lineal entonces o $a \leq b$ o $b \leq a$; si $a \leq b$ entonces $a \wedge x \leq b \wedge x \leq b$ para todo $x \in A$ y así $a \to b = \top$. Y si $b < a$ veamos que $b = max\{x \in A : a \wedge x \leq b\}$, $b \in \{x \in A : a \wedge x \leq b\}$ porque $a \wedge b = b$ y si $c \in \{x \in A : a \wedge x \leq b\}$ entonces $c \wedge a \leq b$, y $c \leq b$ pues si $b < c$ entonces $b < a \wedge c$ lo que sería una contradicción.

3. (Tomado de [19]). Dado un espacio topológico X, el conjunto $Ab(X)$ de abiertos de X ordenado por inclusión es un álgebra de Heyting.

   $X, \emptyset$ son abiertos, unión e intersección de abiertos es abierto y para U y V abiertos : $U \to V := Ext(U - V)$ en donde $Ext(U - V)$ es el mayor abierto disjunto con $U - V$.

   Para W abierto,

$$W \cap U \subseteq V \Leftrightarrow \emptyset = (W \cap U) \cap V^C = W \cap (U - V) \Leftrightarrow W \subseteq U \to V.$$

4. (Tomado de [3]). Dado un retículo distributivo con 0, sea $\mathcal{I}(L)$ el conjunto de todos los ideales de L ($I \subseteq L$ es un ideal de L si satisface: i) si $x \leq y$ y $y \in I$ entonces $x \in I$ y, ii) si $x, y \in I$ entonces $x \vee y \in I$). Dotamos $\mathcal{I}(L)$ con las siguientes operaciones binarias:

   $I \wedge J = I \cap J$, $\quad I \vee J = (I \cup J]$ el ideal generado por la unión y $I \to J := \{x \in L : x \wedge i \in J \ \ \forall i \in I\}$.

   $\langle \mathcal{I}(L), \wedge, \vee, \to, 0 \rangle$ es un álgebra de Heyting. En efecto, $I \to J$ es efectivamente un ideal, si $x, y \in I \to J$ entonces $(x \vee y) \wedge i = (x \wedge i) \vee (y \wedge i) \in J \ \ \forall i \in I$ y si $x \in I \to J$ y $y \in L$ entonces si $i \in I$ $(x \wedge y) \wedge i = (x \wedge i) \wedge y \in J$.
   También si K es un ideal de L y $I \cap K \subseteq J$ entonces para $k \in K$ e $i \in I \ \ k \wedge i \in I \cap K \subseteq J$, así $k \in I \to J$, y si $K \subseteq I \to J$, sea $x \in I \cap K$, entonces $x \wedge i \in J \ \ \forall i \in I$, en particular $x \wedge x = x \in J$.

1.4. Completamiento de MacNeille

Para esta parte he seguido las ideas de [6].
Dado un conjunto ordenado $(P, \leq)$ se puede encontrar el retículo completo más pequeño $\mathbf{C(P)}$ que contiene una copia isomorfa de P, este retículo $\mathbf{C(P)}$ se denomina el completamiento de MacNeille de P y fue presentado por el matemático norteamericano H.M MacNeille en 1935, como consecuencia de la generalización a los conjuntos ordenados del trabajo hecho por Dedekind al construir los reales a partir de los racionales.
Dado $(P, \leq)$ la construcción del tal retículo completo $\mathbf{C(P)}$ en el que $(P, \leq)$ pueda ser inmerso se hace de la siguiente manera: primero para cada $U \subseteq P$ se denotan $U \downarrow$ y $U \uparrow$ el conjunto de todas las cotas inferiores y el de las cotas superiores de U respectivamente y así el retículo $\mathbf{C(P)}$ es aquel cuyos elementos son todos los $U \subseteq P$ tales que $U \uparrow\downarrow = U$. Se puede ver que $C : \wp(P) \to \wp(P) : U \to U \uparrow\downarrow$ es un operador de clausura sobre P y así $\mathbf{C(P)}$ es el conjunto cuyos puntos son los puntos fijos de C y cuyo orden es el de contenencia.
Veamos que $\mathbf{C(P)}$ es un retículo completo y que P puede ser inmerso en él.

i) Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de elementos de $\mathbf{C(P)}$, $(\bigcap_{i\in I} A_i)\uparrow\downarrow = \bigcap_{i\in I} A_i$.
La contenencia $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq (\bigcap_{i\in I} A_i)\uparrow\downarrow$ es inmediata.

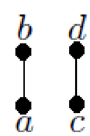
Para la otra contenencia:

$$\begin{aligned}(\forall i \in I)(\textstyle\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_i &\Rightarrow (\textstyle\bigcap_{i\in I} A_i)\uparrow \supseteq A_i\uparrow)\\ &\Rightarrow (\textstyle\bigcap_{i\in I} A_i)\uparrow\downarrow \subseteq A_i\uparrow\downarrow = A_i \quad \forall i \in I\\ &\Rightarrow (\textstyle\bigcap_{i\in I} A_i)\uparrow\downarrow \subseteq \textstyle\bigcap A_i.\end{aligned}$$

Luego como $\mathbf{C(P)}$ es cerrado bajo intersecciones arbitrarias y tiene máximo P, entonces es un retículo completo.

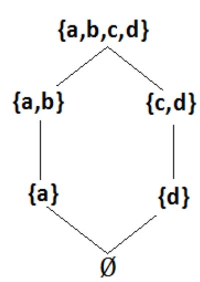
ii) Además $\psi : P \to \mathbf{C(P)} : x \to x\downarrow$ es una inmersión.
Primero $x\downarrow = (x\downarrow)\uparrow\downarrow$, y además $x \leq y \Leftrightarrow x\downarrow \subseteq y\downarrow$.

Ejemplo. Consideremos el siguiente conjunto ordenado P:



Entonces
$\emptyset\uparrow\downarrow = \emptyset$, $\{a\}\uparrow\downarrow = \{a,b\}$, $\{b\}\uparrow\downarrow = \{b\}$, $\{c\}\downarrow\uparrow = \{c,d\}$, $\{d\}\uparrow\downarrow = \{d\}$,
$\{a,b\}\uparrow\downarrow = \{a,b\}$, $\{a,c\}\uparrow\downarrow = \{a,b,c,d\}$, $\{a,d\}\uparrow\downarrow = \{a,b,c,d\}$,
$\{b,c\}\uparrow\downarrow = \{a,b,c,d\}$, $\{c,d\}\uparrow\downarrow = \{c,b\}$, $\{b,d\}\uparrow\downarrow = \{a,b,c,d\}$,
$\{a,b,c\}\uparrow\downarrow = \{a,b,d\}\uparrow\downarrow = \{b,c,d\}\uparrow\downarrow = \{a,c,d\}\uparrow\downarrow = \{a,b,c,d\}\uparrow\downarrow = \{a,b,c,d\}$.

Y así $\mathbf{C(P)}$ es



1.5. Retículos residuados

La residuación, y en forma más general la adjunción, son conceptos fundamentales en estructuras ordenadas y categorías. Los retículos residuados pueden ser considerados como retículos a los que se agrega una operación de monoide residuada $(\cdot)$, es decir una operación asociativa con unidad para la que existen operaciones binarias $\backslash$ y $/$ de tal forma que:

$$x \cdot y \leq z \Leftrightarrow x \leq z/y \Leftrightarrow y \leq x\backslash z.$$

Los retículos residuados empezaron a ser estudiados por algebristas alrededor de 1930 y están asociados a diferentes ramas de la matemática como son el álgebra, la lógica y la topología.

En álgebra aparecen en el área de los grupos ordenados y los retículos de ideales de anillos; en lógica los retículos residuados aparecen como las semánticas naturales asociadas a lógicas subestructurales y en topología los retículos residuados completos o cuantales se pueden representar mediante pretopologías.

1.5.1. Semigrupos, monoides, grupos, grupoides y grupoides residuados.

Las siguientes definiciones fueron tomadas de [8].

Definición 18. *Un álgebra de la forma $(B, \cdot)$ con $\cdot$ una operación binaria sobre B se dice que es un **grupoide**.*
*Si la operación es además **asociativa** diremos que $(B, \cdot)$ es un **semigrupo**.*
*Si $\cdot$ es **asociativa** y tiene elemento **neutro** entonces $(B, \cdot)$ es un **monoide**.*
*Si $\cdot$ es **asociativa**, tiene elemento **neutro** y hay **inversos** entonces $(B, \cdot)$ se denomina **grupo**.*

Si tenemos que $(B, \cdot)$ es un semigrupo conmutativo, y la operación $\cdot$ es además idempotente entonces tenemos que B es un semi-retículo, ya que se puede definir el orden: $x \leq y \Leftrightarrow x \cdot y = x$.

*Un **grupoide parcialmente ordenado** o un **pogrupoide** es una estructura de la forma $B = (B, \cdot, \leq)$ donde $(B, \cdot)$ es un grupoide, $(B, \leq)$ es un* *conjunto ordenado y además la operación $\cdot$ se comporta bien con respecto al orden, esto es: $x \leq y \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z \quad y \quad z \cdot x \leq z \cdot y$. Si adicionalmente tenemos que $(B, \leq)$ es un retículo, entonces se dice que $B = (B, \cdot, \leq)$ es un* ***grupoide-retículo*** *o un* ***l-grupoide****.*

Grupoide parcialmente ordenado residuado. *Un* ***pogrupoide P*** *se dice* ***residuado*** *si la operación $\cdot$ posee residual a derecha e izquierda, esto es si existen$\backslash$ y $/$ tal que: $x \cdot y \leq z$ si y sólo si $y \leq x \backslash z$ si y sólo si $x \leq z/y$ para todo $x, y, z \in P$.*
Similarmente una estructura $\mathbf{P} = \langle P, \cdot, \leq \rangle$ es un ***semigrupo parcialmente ordenado*** *si $\langle P, \cdot \rangle$ es un semigrupo y $\leq$ es un orden parcial sobre P tal que $\cdot$ es monótona creciente esto es:*

$$\textit{si} \quad x \leq x' \quad y \quad y \leq y' \;\; \textit{entonces} \;\; x \cdot y \leq x' \cdot y'.$$

Y una estructura $\mathbf{P} = \langle P, \cdot, \backslash, /, \leq \rangle$ es un ***semigrupo parcialmente ordenado residuado*** *si $\langle P, \cdot \rangle$ es un semigrupo, $\langle P, \leq \rangle$ es un conjunto ordenado y además se satisface*
$x \cdot y \leq z$ si y sólo si $y \leq x \backslash z$ si y sólo si $x \leq z/y \; \forall x, y, z \in P$.

La propiedad anterior es conocida como ley de residuación. Intuitivamente los residuales $\backslash$ y $/$ sirven como una generalización de la operación de división, y x/y es leído como x sobre y y $y \backslash x$ como y bajo x, por ello las operaciones $\backslash$ y $/$ son llamadas respectivamente división a izquierda y derecha. La operación $\cdot$ se dice que es una operación residuada y también se dice que las operaciones $\backslash$ y $/$ son sus residuales a derecha e izquierda.

Obsérvese que en un semigrupo parcialmente ordenado residuado se tiene que la operación $\cdot$ es monótona. En efecto: si $x \leq x'$ y $y \leq y'$ entonces como $x' \cdot y' \leq x' \cdot y'$ y $y \leq y' \leq x' \backslash (x' \cdot y')$ entonces $x' \cdot y \leq x' \cdot y'$. Así tenemos $x \leq x' \leq x' \cdot y'/y$, luego $x \cdot y \leq x' \cdot y'$.

1.5.2. Relación con Adjunciones

Sea P un semigrupo parcialmente ordenado. Para cada $x \in P$ se definen:

$${}_xf : P \to P : y \to x.y \quad y \quad f_x : P \to P : y \to y.x$$

entonces, P es un semigrupo parcialmente ordenado residuado si y sólo si ${}_xf$ y f_x son residuadas para cada $x \in X$. En este caso el residual a derecha de ${}_xf$ es ${}_xg : P \to P : y \to_x g(y) = x\backslash y$ y el residual a derecha de f_x es $g_x : P \to P : y \to g_x(y) = y/x$. Esto es:

$$ {}_xf(y) \leq z \Leftrightarrow y \leq_x g(z), \quad y \quad f_x(y) \leq z \Leftrightarrow y \leq g_x(z), $$

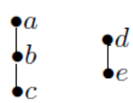
lo que es equivalente a:

$$ x.y \leq z \quad \Leftrightarrow \quad y \leq x\backslash z \quad y \quad y.x \leq z \Leftrightarrow y \leq z/x, $$

respectivamente. Además por las propiedades de adjunciones que vimos anteriormente, se tiene que:

$$ x\backslash z = max\{y : x.y \leq z\} \quad y \quad z/x = max\{y : y.x \leq z\}. $$

Ejemplo. (Ejercicio del libro [5] pg 226) El siguiente grupoide ordenado es residuado.



.	a	b	c	d	e
a	a	b	c	e	e
b	a	b	c	e	e
c	c	c	c	e	e
d	d	d	e	c	c
e	e	e	e	c	c

Se puede ver rápidamente a partir del diagrama de Hasse del conjunto ordenado y de la tabla para la multiplicación que ella se comporta bien con respecto al orden. Y se puede calcular los residuales partiendo de las propiedades de adjunciones anteriores, así por ejemplo:

$$ a\backslash b = max\{k : a \cdot k \leq b\} = max\{b, c\} = b $$

y

$$ a/b = max\{k : k \cdot b \leq a\} = max\{a, b, c\} = a, $$

entonces:

$\backslash$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	d
b	a	b	c	d	d
c	a	a	a	d	d
d	d	d	d	a	c
e	d	d	d	a	a

y

$/$	a	b	c	d	e
a	a	a	a	d	d
b	c	a	a	d	d
c	c	c	a	d	d
d	d	d	d	a	a
e	d	d	d	a	a

1.5.3. Definiciones, propiedades y ejemplos de retículos residuados

Definición 19. *(Tomada de [17]). Un* ***retículo residuado*** *es un semigrupo parcialmente ordenado residuado que es un retículo y tiene unidad para $\cdot$, esto es*
$\mathbf{P} = \langle P, \wedge, \vee, \cdot, \backslash, /, 1\rangle$ *es un retículo residuado si:*

1. $\langle P, \wedge, \vee\rangle$ *es un retículo.*
2. $\langle P, \cdot, 1\rangle$ *es un monoide y* $\backslash$ *y* $/$ *son residuales a derecha e izquierda de* $\cdot$ *respectivamente.*

Si la operación de semigrupo es conmutativa, se puede ver que $x\backslash y = y/x$, para todo x, y en P, y en tal caso se usa el símbolo $x \to y$ para $x\backslash y$ y x/y.

Propiedades heredadas de la adjunción.
Como ya se había mencionado antes las funciones ${}_xf : P \to P : y \to x \cdot y$ y $f_x : P \to P : y \to y \cdot x$ tienen adjunta a derecha y son respectivamente las funciones ${}_xg : P \to P : y \to_x g(y) = x\backslash y$ y $g_x : P \to P : y \to g_x(y) = y/x$. Teniendo en cuenta las propiedades de funciones adjuntas se obtienen las siguientes propiedades importantes en retículos residuados.

Corolario 20. *Si* $\mathbf{P} = \langle P, \wedge, \vee, \cdot, \backslash, /, 1\rangle$ *es un retículo residuado entonces para todo* $x, y, z \in P$ *se tiene:*

i) ${}_xf$ y f_x preservan extremos superiores, esto es:

$$x \cdot (\bigvee A) = \bigvee (x \cdot A) \quad y \quad (\bigvee A) \cdot x = \bigvee (A \cdot x)$$

en particular se tiene:

$$x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z) \quad y \quad (y \vee z) \cdot x = (y \cdot x) \vee (z \cdot x).$$

ii) ${}_xg$ y g_x preservan extremos inferiores,

$$x\backslash(\bigwedge A) = \bigwedge(x\backslash A) \quad y \quad (\bigwedge A)/x = \bigwedge(A/x)$$

en particular:

$$x\backslash(y \wedge z) = (x\backslash y) \wedge (x\backslash z) \quad y \quad (y \wedge z)/x = (y/x) \wedge (z/x).$$

iii) ${}_xf$, f_x, ${}_xg$ y g_x son funciones monótonas.
Si $y \leq z$ entonces: $x \cdot y \leq x \cdot z$, $y \cdot x \leq z \cdot x$, $x\backslash y \leq x\backslash z$ y $y/x \leq z/x$.

iv) ${}_xf \circ {}_xg \circ {}_xf = {}_x f$, ${}_xg \circ {}_xf \circ {}_xg = {}_x g$, $f_x \circ g_x \circ f_x = f_x$ y $g_x \circ f_x \circ g_x = g_x$.

Esto es:
$x \cdot (x\backslash(x \cdot y)) = x.y,$ $x\backslash(x \cdot (x\backslash y)) = x\backslash y$
$((y \cdot x)/x) \cdot x = y \cdot x,$ $((y/x) \cdot x)/x = y/x.$

v) $x\backslash y = max\{z : x \cdot z \leq y\}$ $y/x = max\{z : z \cdot x \leq y\}$.

vi) Consecuencia de lo anterior: $1/x = x = 1\backslash x$.

vii) ${}_xf({}_xg(y)) \leq y$, $y \leq_x g({}_xf(y))$, $f_x(g_x(y)) \leq y$, y $y \leq g_x(f_x(y))$, es decir:

$$x \cdot (x\backslash y) \leq y, \quad y \leq x\backslash(x \cdot y), \quad (y/x) \cdot x \leq y \quad y \quad y \leq (y \cdot x)/x.$$

viii) $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, entonces $1 \leq x/x$ y $1 \leq x\backslash x$.

ix) $(x \vee y)\backslash z = (x\backslash z) \wedge (y\backslash z)$ y $x/(y \vee z) = (x/y) \wedge (x/z)$.

$$\begin{aligned} x/(y \vee z) &= max\{k : k. \cdot y \vee z) \leq x\} \\ &= max\{k : k \cdot y \vee k \cdot z) \leq x\} \\ &\leq max\{k : k \cdot y \leq x\} = x/y. \end{aligned}$$

Así:

$$x/(y \vee z) \leq x/y \quad y \quad x/(y \vee z) \leq x/z \quad \Rightarrow \quad x/(y \vee z) \leq x/y \wedge x/z.$$

Por otra parte:

$$(x/y) \wedge (x/z) \leq x/y \Rightarrow ((x/y) \wedge (x/z)) \cdot y \leq x.$$

y similarmente

$$(x/y) \wedge (x/z) \leq x/z \Rightarrow ((x/y) \wedge (x/z)) \cdot z \leq x.$$

Luego

$$((x/y) \wedge (x/z)) \cdot (y \vee z) \leq x \Rightarrow ((x/y) \wedge (x/z)) \leq x/(y \vee z).$$

x) $x \cdot (y/z) \leq (x \cdot y)/z \quad$ y $\quad (z\backslash y) \cdot x \leq z\backslash(y \cdot x)$.

$$(y/z) \cdot z \leq y \Rightarrow x \cdot (y/z) \cdot z \leq x \cdot y \Rightarrow x \cdot (y/z) \leq (x \cdot y)/z \quad \text{y}$$

$$z \cdot (z\backslash y) \leq y \Rightarrow z \cdot (z\backslash y) \cdot x \leq y \cdot x \Rightarrow (z\backslash y) \cdot x \leq z\backslash(y \cdot x).$$

xi) $(x/y)/z = x/(y \cdot z) \quad$ y $\quad z\backslash(y\backslash x) = (y \cdot z)\backslash x$.

$$x/(z \cdot y) = max\{k : k \cdot z \cdot y \leq x\} = max\{k : k \cdot z \leq x/y\} = (x/y)/z$$

y,

$$(y \cdot z)\backslash x = max\{k : y \cdot z \cdot k \leq x\} = max\{k : z \cdot k \leq y\backslash x\} = z\backslash(y\backslash x).$$

xii) $x\backslash(y/z) = (x\backslash y)/z$.

$$\begin{aligned} x\backslash(y/z) &= max\{k : x \cdot k \leq y/z\} \\ &= max\{k : x \cdot k \cdot z \leq y\} \\ &= max\{k : k \cdot z \leq x\backslash y\} \\ &= (x\backslash y)/z. \end{aligned}$$

xiii) $x \leq y/(x\backslash y) \quad$ y $\quad x \leq (y/x)\backslash y$.

$$x \cdot (x\backslash y) \leq y \Rightarrow x \leq y/(x\backslash y) \quad \text{y} \quad (y/x) \cdot x \leq y \Rightarrow (y/x) \cdot x \leq y.$$

xiv) $y/((y/x)\backslash y) = y/x \quad$ y $\quad (y/(x\backslash y))\backslash y = x\backslash y$.

xv) $(z/y)(y/x) \leq z/x$ y, $(x\backslash y)(y\backslash z) \leq x\backslash z$.

$(z/y)(y/x) \leq z/x \leq ((z/y) \cdot y)/x \leq z/x$ y,
$(x\backslash y)(y\backslash z) \leq x\backslash(y \cdot (y\backslash z)) \leq x\backslash z$.

xvi) $x/(x\backslash x) = x$ y $(x \setminus x) \setminus x = x$.
Ya se tiene que $x \leq x/(x\backslash x)$. Y por otro lado como $x/(x\backslash x) = max\{z : z \cdot (x\backslash x) \leq x\}$, entonces en particular $(x/(x\backslash x)) \cdot (x\backslash x) \leq x$, además como $1 \leq x/x$, entonces $x/(x\backslash x) \leq x/(x\backslash x) \cdot (x/x) \leq x$, así $x/(x\backslash x) = x$.

Ejemplos

1. (Tomado de [18]). Un *l-grupo* es un álgebra $\mathbf{G} = \langle G, \wedge, \vee, \cdot, ^{-1}, e\rangle$ en donde:

   i) $\langle G, \wedge, \vee\rangle$ es un retículo.

   ii) $\langle G, \cdot, ^{-1}, e\rangle$ es un grupo.

   iii) $\cdot$ es monótona con respecto a $\leq$.

   Todo *l-grupo* es un retículo residuado, los residuales de $\cdot$ son:
   $x\backslash y := x^{-1} \cdot y$ y $x/y := x \cdot y^{-1}$.

   Son *l-grupos* por ejemplo $(\mathbb{Z}, +, \leq)$,$(\mathbb{Q}, +, \leq)$ y $(\mathbb{R}, +, \leq)$, ellos son además conmutativos y $x \rightarrow y = x\backslash y = y/x = (-x) + y$.

   Dados dos *l-grupos* G_1 y G_2 el producto $G_1 \times G_2$ ordenado con el orden lexicográfico también es un *l-grupo*.

   Los *l-grupos* se caracterizan como una subclase de los retículos residuados que cumplen la identidad: $x.(x\backslash 1) = 1$, de hecho si tenemos un retículo residuado que cumple $x.(x\backslash 1) = 1$ entonces $x\backslash 1 = x^{-1}$.

2. Toda álgebra booleana es un retículo residuado con respecto a $\wedge$. En este caso el residual a izquierda y a derecha coinciden y $x \rightarrow z = x' \vee z$ en donde x' es el complemento de x. Notemos que la forma como se define el residual es la traducción de la implicación en la lógica clásica. Veamos que efectivamente $\rightarrow$ es el residual de $\wedge$

$$
\begin{aligned}
x \wedge y \leq z \quad & \Rightarrow \quad x' \vee (x \wedge y) \leq x' \vee z \\
& \Rightarrow \quad (x' \vee x) \wedge (x' \vee y) \leq x' \vee z \\
& \Rightarrow \quad y \leq (x' \vee y) \leq x' \vee z.
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
y \leq (x' \vee z) \quad & \Rightarrow \quad x \wedge y \leq x \wedge (x' \vee z) \\
& \Rightarrow \quad x \wedge y \leq (x \wedge x') \vee (x \wedge z) \\
& \Rightarrow \quad x \wedge y \leq 0 \vee (x \wedge z) \leq z \\
& \Rightarrow x \wedge y \leq z.
\end{aligned}
$$

3. (Tomado de [5] pg 214). Si E es un monoide se define en $(\wp(E), \subseteq)$ la siguiente multiplicación:

$$
\begin{gathered}
X \cdot Y = \{x \cdot y : x \in X, y \in Y\} \\
X \cdot \emptyset = \emptyset = \emptyset \cdot X.
\end{gathered}
$$

y también se define:

$$
\begin{aligned}
X/Y &:= \{z \in E : (\forall y \in Y)(z.y \in X)\}. \\
X\backslash Y &:= \{z \in E : (\forall x \in X)(x.z \in Y)\}.
\end{aligned}
$$

Entonces $\mathbf{P(E)} = \langle \wp(E), \cup, \cap, \cdot, /, \backslash, \{e\} \rangle$ es un retículo residuado.

Note que en este ejemplo la unidad del monoide no coincide con el máximo del retículo.

4. El siguiente ejemplo surge a partir de un ejercicio planteado en [4] pg 226. Considere el semigrupo abeliano ordenado,

$S = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$, con $a_0 > a_1 > a_2 > ...$ y $a_i \cdot a_j = a_{i+j}$.

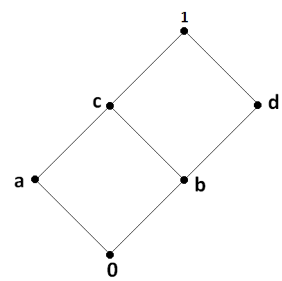
S es un retículo residuado en el cual,

$$
a_i \to a_j = \begin{cases} a_{j-i} & \text{si } \ j \geq i \\ a_0 & \text{si } \ j < i \end{cases}
$$

Por ejemplo, consideremos $S = \mathbb{N}$ con el orden invertido. En este caso $n \cdot m = m + n, \quad$ y

$$n \to m = \begin{cases} m - n & \text{si} \;\; m \geq n \\ 0 & \text{si} \;\; m < n \end{cases}$$

5. Tomado de [13]. El siguiente retículo junto con las operaciones dadas es un retículo residuado.



$\to$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	d	1
b	c	c	1	1	1	1
c	b	c	d	1	d	1
d	a	a	c	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

$\cdot$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	0	a
b	0	0	0	0	b	b
c	0	a	0	a	b	c
d	0	0	b	b	d	d
1	0	a	b	c	d	1

Definición 21. *(Tomada de [18]). Un retículo residuado se dice* ***integral*** *si la unidad del monoide es el elemento máximo del retículo que se denota* $\top$.

En un retículo residuado integral $x \cdot y \leq x$ y $x \cdot y \leq y$ ya que como $x \leq x$ y $y \leq \top$ entonces $x \cdot y \leq x \cdot \top = x$.

Un retículo residuado P es **idempotente creciente** si $x \leq x \cdot x$ para todo $x \in P$.
En un retículo residuado P, integral e idempotente creciente $x \cdot y = x \wedge y$ para todo $x, y \in P$. En efecto,

$$x \wedge y \leq x \;\;\; y \;\;\; x \wedge y \leq y \;\;\; \Rightarrow \;\;\; (x \wedge y) \cdot (x \wedge y) \leq x \cdot y$$

y como, $x \wedge y \leq (x \wedge y) \cdot (x \wedge y)$ entonces $x \wedge y \leq x \cdot y$. Por otro lado de $x \cdot y \leq x$ y $x \cdot y \leq y$ se tiene $x \cdot y \leq x \wedge y$.

Toda álgebra de Heyting es un retículo residuado, conmutativo, acotado en donde $1 = 0 \to 0$ y la operación de monoide es $\wedge$. $\wedge$ y $\to$ forman entonces un par de residuación. Toda álgebra de Heyting es idempotente creciente e integral; y recíprocamente un retículo residuado conmutativo, integral, idempotente creciente y con mínimo, es un álgebra de Heyting.

Por (ii) del anterior corolario toda álgebra de Heyting es distributiva. Y por la proposición 6 de la página 10 en un álgebra de Heyting completa vale la ley de distributividad infinita, esto es,

$$(\bigvee_i x_i) \wedge y = \bigvee_i (x_i \wedge y)$$

Las siguientes dos definiciones y el ejemplo 1 fueron tomados de [8].

Definición 22. *(FL-Algebras (Full Lambek algebra))* ***Una FL-álgebra*** *es una estructura de la forma* $A = (A, \wedge, \vee, \cdot, \backslash, /, 1, 0)$ *donde* $(A, \wedge, \vee, \cdot, \backslash, /, 1)$ *es un retículo residuado y 0 es un elemento arbitrario de A, esta constante 0 es usada para definir operaciones de negación, así* $\sim x = x \backslash 0$ *y* $-x = 0/x$.

Definición 23. *(MV-álgebras) una MV-álgebra es un retículo residuado conmutativo, acotado, que satisface la identidad:* $(x \to y) \to y = x \vee y$.

Ejemplos

1. El intervalo $[0, 1]$ con $x \cdot y = max\{0, x + y - 1\}$ y $x \to y = max\{1, 1 - x + y\}$ es una MV-álgebra. Aquí $x \to y = max\{1, 1 - x + y\}$ se conoce como la norma de Lukasiewicz.

   Los siguientes dos ejemplos son tomados de [14]

2. La *t-norma de Gödel*, denotada por $\odot_G$, es definida por: para todo $a, b \in [0, 1]$ $a \odot_G b = min\{a, b\} = a \wedge b$. $[0, 1]$, con el orden natural,

la multiplicación anterior y el residual $\rightarrow_G$ definido por: para todo $a, b \in [0,1]$

$$a \rightarrow_G b = \begin{cases} 1, & si \quad a \leq b \\ b, & \quad\;\; b < a \end{cases}$$

es un retículo residuado y además se dice que es un álgebra de *Gödel*.

3. El producto o *t- norma Gaines* denotada por $\odot_P$ y definida por: para todo $a, b \in [0,1]$, $a \odot_P b = a.b$ y con el residual:

$$a \rightarrow_P b = \begin{cases} 1, & si \quad a \leq b \\ \frac{b}{a}, & si \quad b < a \end{cases}$$

es un retículo residuado que es además un álgebra producto.

Definición 24. *Un retículo residuado completo es llamado un cuantal unitario. Estos se estudian en detalle en el siguiente capítulo.*

Capítulo 2

Cuantales y Pretopologías

Aunque las ideas de este capítulo tienen su base en los artículos [4] y [29], se hace la observación de que la forma como se presentan los temas y el desarrollo de la mayor parte de las demostraciones son propias de la autora. En este capítulo se establecen relaciones entre los cuantales unitarios, que son retículos residuados completos, y las pretopologías, que se pueden caracterizar como operadores de clausura estables. Se empezará por establecer primero relaciones entre las categorías de sup-retículos y operadores de clausura.

2.1. Sup-retículos y Operadores de Clausura

2.1.1. Sup-retículos

Definición 25. *Un sup-retículo es un conjunto ordenado $(L, \leq)$, en donde para cualquier subconjunto $A \subseteq L$ existe el sup de A.*

Proposición 26. *Un sup-retículo es un retículo completo.*

Demostración. Si $(L, \leq)$ es un sup-retículo veamos para cualquier $A \subseteq X$, $\bigwedge A$ existe. Sea I el conjunto de todas las cotas inferiores de A, y sea $b = \bigvee I$, veamos que justamente $b = \bigwedge A$, para todo $a \in A$ a es cota superior de I, luego $b \leq a$ así b es cota inferior de A veamos ahora que es la máxima de las cotas inferiores, para esto sea k una cota inferior de A, entonces $k \in I$ y por lo tanto $k \leq b$. Notaremos un sup-retículo por $(L, \bigvee)$.

Un morfismo $f : L \to L'$ entre sup-retículos es una función que respeta $\bigvee$, esto es

$$f(\bigvee_{i\in I} x_i) = \bigvee_{i\in I} f(x_i)$$

para toda familia $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq L$.

Proposición 27. *Los morfismos de sup-retículos son las funciones que son adjuntas a izquierda.*

Demostración. Si $f : L \to L'$ es una función adjunta a izquierda entonces f respeta $\bigvee$, así que f es un morfismo de sup-retículos.
Y si f respeta el $\bigvee$, consideremos $g : L' \to L : y \mapsto \bigvee\{x \in L \mid f(x) \leq y\}$, entonces f es adjunta a izquierda de g.

$$\begin{aligned} f(x_0) \leq y &\Leftrightarrow x_0 \in \{x \in L : f(x) \leq y\} \\ &\Rightarrow x_0 \leq \bigvee\{x \in L \mid f(x) \leq y\} \\ &\Leftrightarrow x_0 \leq g(y). \end{aligned}$$

Y,

$$\begin{aligned} x_0 \leq g(y) &\Rightarrow x_0 \leq \bigvee\{x \in L \mid f(x) \leq y\} \\ &\Rightarrow f(x_0) \leq f(\bigvee\{x \in L \mid f(x) \leq y\}) \\ &\Rightarrow f(x_0) \leq \bigvee\{f(x) \in L \mid f(x) \leq y\} \leq y \\ &\Rightarrow f(x_0) \leq y. \end{aligned}$$

Además es fácil ver que la compuesta de dos funciones que respeten el sup también lo respeta y que las identidades en la categoría son justamente las funciones identidades.

De esta manera tenemos la categoría de los sup-retículos que se denotará **SL** y que resulta ser la misma categoría de los retículos completos con funciones adjuntas a izquierda.

2.1.2. Operadores de Clausura

Ahora definamos la categoría de **los operadores de clausura.**
Los objetos de esta categoría serán pares de la forma (X, C) donde X es un conjunto no vacío y $C : \wp(X) \to \wp(X)$ es un operador de clausura sobre X, esto es para todo $A, B \subseteq X$ se tiene:

i. $A \subseteq C(A)$.

ii. Si $A \subseteq B$ entonces $C(A) \subseteq C(B)$.

iii. $C(C(A)) = C(A)$.

Ahora diremos que $f : (X, C) \to (X', C')$ es un morfismo entre operadores de clausura si cumple:

i. $f : X \to X'$ es una función.

ii. $f(C(A)) \subseteq C'(f(A))$.

Veamos que los operadores de clausura con los morfismos anteriores son una categoría:

i. Dados dos morfismos

$$f : (X, C) \to (X_1, C_1) \quad y \quad g : (X_1, C_1) \to (X_2, C_2)$$

$$(g \circ f)(C(A)) = g(f(C(A))) \subseteq g(C_1(f(A))) \subseteq C_2(g(f(A))) = C_2((g \circ f)(A)).$$

Así, compuesta de dos morfismos es morfismo.

ii. Existen identidades $I : (X, C) \to (X, C)$ es justamente la identidad sobre X.

2.1.3. Relación entre sup-retículos y Operadores de Clausura

Definamos ahora funtores que conecten estas categorías.
Dado un operador de clausura (X, C) sea

$$Sat(C) = \{CA : A \subseteq X\} = \{A \subseteq X \mid C(A) = A\},$$

esto es $Sat(C)$ es la colección de todos los subconjuntos de X que quedan fijos bajo C. Llamaremos a $Sat(C)$ los saturados de C, o también los abiertos de C como los llaman en [29].

Proposición 28. *Dado (X, C) un operador de clausura, entonces $(Sat(C), \bigvee)$, con $\bigvee_{i\in I} CU_i = C(\bigcup_{i\in I} CU_i)$ es un sup-retículo.*

Demostración. El orden en $Sat(C)$ es la contenencia, veamos que $\bigvee$ está bien definido; dada CU_i con $i \in I$ una colección de conjuntos C-saturados, por propiedades del operador de clausura C tenemos que $U_i \subseteq CU_i \subseteq \bigcup_{i\in I} CU_i$, entonces $C(U_i) \subseteq C(\bigcup_{i\in I} CU_i)$. Ahora veamos que $C(\bigcup_{i\in I} CU_i)$ es la mínima de las cotas superiores, si CV es una cota superior de CU_i para cada $i \in I$, entonces $\bigcup CU_i \subseteq CV$ y $C(\bigcup CU_i) \subseteq C(CV) = CV$.

Ya tenemos entonces un operador que llamaremos **Sat** que asigna a cada operador de clausura C un sup-retículo $(Sat(C), \bigvee)$, definamos ahora este operador sobre morfismos.
Dada $f : (X, C) \to (X_1, C_1)$ se define $Satf : (SatC, \bigvee_C) \to (SatC_1, \bigvee_{C_1})$ así: $Satf(CA) = C_1(f(CA)) = C_1(f(A))$. Veamos que efectivamente $Satf$ es un morfismo de sup-retículos. Para esto sea A_i con $i \in I$ una colección de conjuntos C- saturados, hay que verificar que $Satf(\bigvee_C A_i) = \bigvee_{C_1}(Satf(A_i))$.

$Satf(\bigvee_C A_i) = C_1(f(\bigvee_C(A_i))) = C_1(f(C(\bigcup A_i))) \subseteq C_1(C_1(f(\bigcup A_i)) = C_1(f(\bigcup_i CA_i) = C_1(\bigcup_i f(CA_i) \subseteq C_1(\bigcup C_1(f(A_i))) = \bigvee_{C_1}(C_1(f(C(A_i)))) = \bigvee_{C_1}(Satf(A_i))$.

Y por otro lado como $A_j \subseteq \bigcup_i A_i \subseteq C(\bigcup_i A_i) = \bigvee_C A_i$ entonces

$$f(A_j) \subseteq f(\bigvee_C A_i) \subseteq C_1 f(\bigvee_C A_i) = Satf(\bigvee_C A_i)$$

luego $C_1 f(A_j) \subseteq Satf(\bigvee_C A_i)$ es decir:

$$Satf(A_j) \subseteq Satf(\bigvee_C A_i) \;\; y \;\; \bigvee_{C_1} Satf(A_j) \subseteq Satf(\bigvee_C)A_i.$$

Sat es un funtor,

$$Sat1_{(X,C)}(CA) = C(1(CA)) = C(CA) = CA = 1_{Sat(X,C)}(CA).$$

Y dadas $g : (X, C) \to (X', C')$ y $f : (X', C') \to (X'', C'')$

$$Sat(f \circ g)(CA) = C''((f \circ g)(A)) = C''(f(g(A)))$$

y

$$(Satf \circ Satg)(CA) = Satf(Satg(CA)) = Satf(C'(g(A))) = C''(f(g(A))).$$

Ahora se define otro funtor que asigna a sup-retículos operadores de clausura, éste se denotará **Transl**.
Dado un sup-retículo L, $Transl(L) = (L, C_{\bigvee})$, en donde
$C_{\bigvee} : \wp(L) \to \wp(L) : A \mapsto \bigvee A\downarrow$. $C_{\bigvee}$ es un operador de clausura.
Definamos ahora **Transl** sobre morfismos, para $f : (X, \bigvee) \to (X, \bigvee_1)$, se define $Transl(f) = f$.

$$f(C_{\bigvee}(A)) = f((\bigvee A)\downarrow) \subseteq (\bigvee_1 f(A))\downarrow = C_1 f(A),$$

pues:

$$\begin{aligned} z \in f((\bigvee A)\downarrow) &\Rightarrow z = f(x) \ \ con \ \ x \leq \bigvee A \\ &\Rightarrow z = f(x) \ \ con \ \ f(x) \leq f(\bigvee A) = \bigvee f(A) \\ &\Rightarrow z \leq \bigvee f(A) \\ &\Rightarrow z \in C_1 f(A). \end{aligned}$$

y f es entonces un morfismo entre operadores de clausura. Así **Transl** es un funtor pues por su definición se tiene que $Transl(1_{L,\bigvee}) = 1_{Transl(L)}$ y dadas $g : L \to L' \to$ y $f : L' \to L''$, $Transl(f \circ g) = Translf \circ Translg$.

Teorema 29. *El funtor **Sat** es adjunto a izquierda de **Transl**.*

Demostración. La transformación $\eta : I_{OC} \to Transl \circ Sat$, que a cada (X, C) operador de clausura le asigna

$$\eta_x : (X, C) \to Transl(Sat(X, C)) : x \to C\{x\}$$

en una transformación natural.

η_x es un morfismo entre operadores de clausura, esto es

$$\eta_x(CA) \subseteq C_1(\eta_x A)$$

(Aquí $Transl(Sat(X, C)) = (SatC, C_1)$), veamos:

$$\begin{aligned} z \in C(A) &\Rightarrow \{z\} \subseteq C(A) \\ &\Rightarrow \eta_X(z) \subseteq CA \subseteq C \textstyle\bigcup_{a\in A} C\{a\} \\ &\Rightarrow \eta_X(z) \subseteq \textstyle\bigvee \eta_X(A) \\ &\Rightarrow \eta_X(z) \in (\textstyle\bigvee \eta_X(A)) \downarrow \\ &\Rightarrow \eta_X(z) \in C_1\eta_X(A). \end{aligned}$$

Y para cualquier $f : (X, C) \to (X_1, C_1)$ el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} (X,C) & \xrightarrow{\eta_X} & Transl(Sat(C)) \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle Transl(Satf)} \\ (X_1,C_1) & \xrightarrow[\eta_{X_1}]{} & Transl(Sat(C_1)) \end{array}$$

Dado $x \in X$ $TranslSatf(\eta_X(x)) = C_1(f(C\{x\})) = C_1(f(x)) = \eta_{X_1}(f(x))$.

Además η_X es universal ya que dados (X, C) un operador de clausura, $(L, \bigvee)$ un sup-retículo y $f : (X, C) \to Transl(L)$, existe un único morfismo $g : Sat(C) \to L$ tal que $f = Translg \circ \eta_X$. Tal morfismo es $g : Sat(C) \to L : CU \mapsto \bigvee f(U)$. Veamos que efectivamente g es un morfismo de sup-retículos, esto es veamos que $g(\bigvee_C CU_i) = \bigvee g(CU_i)$.

$$\begin{aligned} U_i \subseteq CU_i \subseteq \bigcup CU_i &\Rightarrow f(U_i) \subseteq f(\bigcup CU_i) \\ &\Rightarrow \bigvee f(U_i) \le \bigvee f(\bigcup CU_i) \\ &\Rightarrow g(CU_i) \le \bigvee f(\bigcup CU_i) \\ &\Rightarrow \bigvee_i g(CU_i) \le \bigvee f(\bigcup CU_i) \\ &\Rightarrow \bigvee_i g(CU_i) \le g(C(\bigcup)) \\ &\Rightarrow \bigvee_i g(CU_i) \le CU_i)) = g(\bigvee_C CU_i) \end{aligned}$$

Y por otro lado:

$$\begin{aligned}
g(\bigvee_C CU_i) &= g(C(\bigcup CU_i)) \\
&= \bigvee(f(C(\bigcup U_i))) \\
&\leq \bigvee C_{idL} f(\bigcup U_i) \\
&= \bigvee \downarrow \bigvee f(\bigcup U_i) \\
&= \bigvee f(\bigcup U_i) \\
&= \bigvee \bigcup f(U_i)
\end{aligned}$$

Y $\bigvee \bigcup f(U_i) \leq \bigvee_i \bigvee f(U_i) = \bigvee g(CU_i)$, veamos:
$\bigvee f(U_i)$ es cota superior de $f(U_i)$, y $\bigvee f(U_i) \leq \bigvee_i \bigvee f(U_i)$, así $\bigvee_i \bigvee f(U_i)$ es cota superior de $f(U_i)$ para todo $i \in I$ entonces $\bigvee_i \bigvee f(U_i)$ es cota superior de $\bigcup f(U_i)$ y por consiguiente $\bigvee \bigcup f(U_i) \leq \bigvee_i \bigvee f(U_i)$. Luego g es morfismo de sup-retículos.

Ahora veamos que $f = Translg \circ \eta_X$. Dada $x \in X$,

$$(Translg \circ \eta_X)(x) = Translg(C\{x\}) = g(C\{x\}) = f(x).$$

Teorema 30. *Todo sup-retículo L es isomorfo a $Sat(Transl(L))$.*

Demostración. Veamos que $id_L : Sat(Transl(L)) \to L : CU \mapsto \bigvee U$ es un isomorfismo. id_L está bien definida, además es un morfismo de sup-retículos esto es $id_L(\bigvee_{C_{id_L}} CU_i) = \bigvee id_L(CU_i) = \bigvee(\bigvee U_i)$. Veamos:

$$id_L(\bigvee_C CU_i) = id_L(C(\bigcup CU_i)) = \bigvee(\bigcup CU_i) = \bigvee(\bigcup_{i \in I}\{a \in L : a \leq \bigvee U_i\}),$$

así si $a \in \bigcup_{i \in I}\{a \in L : a \leq \bigvee U_i\}$ entonces existe i tal que

$$a \leq \bigvee U_i \leq \bigvee(\bigvee U_i),$$

entonces $\bigcup_{i \in I}\{a \in L : a \leq \bigvee U_i\} \leq \bigvee(\bigvee U_i)$.
Ahora veamos que si k es cota superior de $\bigcup CU_i$ entonces $\bigvee(\bigvee U_i) \leq k$; $a \leq k \;\; \forall a \in \bigcup CU_i$ en particular k es cota superior de U_i entonces k es cota

superior de $\bigvee U_i$ y por consiguiente $\bigvee(\bigvee U_i) \leq k$.

Además id_L es inyectiva pues si $\bigvee U = \bigvee V$ entonces $\downarrow U = \downarrow V$, así $CU = CV$. La inversa de id_L es

$$\downarrow_L : L \to Sat(Transl(L)) : l \to \downarrow l = \{x \in L : x \leq l\}.$$

$\downarrow_L$ es un morfismo de sup-retículos: $\downarrow_L (\bigvee U) = \{x \in L : x \leq \bigvee U\}$ y $\bigvee_C(\downarrow_L U) = C(\bigcup_{b\in U} \downarrow b) = \{x \in L : x \leq \bigvee(\bigcup_{b\in U} \downarrow b)\}$; si $x \leq \bigvee U$, como $U \subseteq \bigcup_{b\in U} \downarrow b$ entonces $x \leq \bigvee U \leq \bigvee \bigcup_{b\in U} \downarrow b$ y si $x \leq \bigvee(\bigcup_{b\in U} \downarrow b)$ entonces existe $b \in U$ tal que $x \leq b \leq \bigvee U$, entonces $\downarrow_L (\bigvee U) = \bigvee_C(\downarrow_L U)$.
Y además

$$(id_L \circ \downarrow_L)(l) = id_L(\downarrow l) = \bigvee \downarrow l = l \quad \text{y} \quad (\downarrow_L \circ id_L)(CU) = \downarrow_L (\bigvee U) = \downarrow (\bigvee U) = CU.$$

Ejemplo. Sea L el retículo $\{0,1\}$ con $0 \leq 1$, veamos que L es isomorfo a $Sat(Transl(L))$.
$Transl(L) = (L, C_\bigvee) = (\{0,1\}, C_\bigvee)$ en donde
$C_\bigvee : \wp(L) \to \wp(L) : A \mapsto (\bigvee A)\downarrow$. Así:
$C_\bigvee(\emptyset) = (\bigvee \emptyset)\downarrow = 0\downarrow = \{0\}$
$C_\bigvee(\{0\}) = (\bigvee\{0\})\downarrow = 0\downarrow = \{0\}$
$C_\bigvee(\{1\}) = (\bigvee\{1\})\downarrow = 1\downarrow = \{0,1\}$
$C_\bigvee(\{0,1\}) = (\bigvee\{0,1\})\downarrow = 1\downarrow = \{0,1\}$.
Y, $Sat(C_\bigvee) = (\{0\}, \{0,1\})$ con $\{0\} \leq \{0,1\}$ es isomorfo a L.

Observación. Nótese que dado un supretículo L, $Sat(Transl(L))$ coincide con el completamiento de MacNeille de L (para $U \subseteq L, (\bigvee U)\downarrow = U\uparrow\downarrow$) y obviamente como L es completo deben ser isomorfos.

Afirmación 1. *Los funtores Sat y $Transl$ no forman una equivalencia entre las categorías de los operadores de clausura y los sup-retículos.*

Si lo anterior se tuviera entonces para cada operador de clausura (X, C), $transl(SatC)$ debería ser isomorfo a (X, C), pero esto no se tiene.
Consideremos por ejemplo (X, C) un operador de clausura para el cual $C(\emptyset) = \emptyset$, por ejemplo sea $X \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera y sea
$C : \wp(X) \to \wp(X)$, definido así: $C(A) = \emptyset$ si $A = \emptyset$ y $C(A) = X$ si $A \neq \emptyset$, C es un operador de clausura. $Sat(C) = \{\emptyset, X\}$ para que (X, C) sea isomorfo a $Transl(SatC)$ se necesitaría que existiera una función

$$f : Transl(SatC) = (\{\emptyset, X\}, C_\bigvee) \to (X, C)$$

tal que $f(C_\bigvee(A)) \subseteq C(f(A))$ con $A \subseteq \{\emptyset, X\}$. Pero si tomamos en particular $A = \emptyset$ entonces $f(\emptyset) = \emptyset$ y $C(f(\emptyset)) = \emptyset$ y por otro lado $C_\bigvee(\emptyset) = (\bigvee \emptyset) \downarrow = (min(Sat(C))) \downarrow = \{\emptyset\} \neq \emptyset$, luego $f(C_\bigvee(\emptyset)) \nsubseteq C(f(\emptyset))$.

2.2. Cuantales y pretopologías

2.2.1. Cuantales

Un local es un retículo completo L que satisface la ley de distributividad $a \wedge (\bigvee b_\alpha) = \bigvee(a \wedge b_\alpha)$ para todo $a \in L$ y $\{b_\alpha\} \subseteq L$. Un ejemplo de local es el retículo $\mathcal{O}(X)$ de los subconjuntos abiertos de un espacio topológico X. En realidad los locales son álgebras de Heyting, que intentan calcar las propiedades de orden de una topología.
En muchas áreas de teoría de anillos es conveniente construir un espacio o, más generalmente, un local de ideales de un anillo. De hecho un primer paso para dar una representación de un anillo es introducir un local de ideales, que es útil para demostrar propiedades del anillo, que en el anillo propio son difíciles de ver.

Los **cuantales** fueron introducidos por C.J. Mulvey con el fin de dar una extensión no conmutativa del concepto de local. Con respecto a lógica tenemos que los cuantales dan una semántica completa para las lógicas subestructurales básicas en particular para la lógica lineal. Esto es, los cuantales son para la lógica lineal lo que las álgebras de Heyting son para la lógica intuicionista.

Los cuantales son básicamente retículos residuados completos con unidad. Así que en esta sección se presentará un estudio un poco más profundo sobre cuantales y su conexión con unas estructuras topológicas, las pretopologías, las cuales tienen sus raíces en la teoría de la topología formal, cuyo objetivo es estudiar propiedades de los espacios topológicos sin hablar de sus puntos.

Definición 31. *(Tomada de [18]). Un álgebra* $\boldsymbol{Q}=\langle Q, \bigvee, \cdot\rangle$ *es un cuantal si:*

i. $(Q, \bigvee)$ *es un sup-retículo.*

ii. $(Q, \cdot)$ *es un semigrupo.*

iii. Se tiene que $(\bigvee_i x_i) \cdot y = \bigvee_i (x_i \cdot y)$ *y* $y \cdot (\bigvee_i x_i) = \bigvee_i (y \cdot x_i)$ *para todo* $x_i, y \in Q$.

Ya se había visto antes que si $(Q, \bigvee)$ es un sup-retículo, entonces existe el $\bigwedge$ y además $(Q, \bigvee, \bigwedge)$ es completo. En efecto, $\bigvee$ induce una relación de orden $\leq$ sobre Q: $x \leq t$ si y sólo si $x \vee t = t$ (es conocido que $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva) y además la operación $\bigwedge$ queda dada por: $\bigwedge S = \bigvee \{x \in Q : x \leq y \ \ para \ \ todo \ \ y \in S\}$.

Un cuantal se dice **unitario** si la multiplicación tiene unidad, y **conmutativo** si la multiplicación es conmutativa. Un cuantal unitario en el cual la identidad es el elemento máximo del retículo se denomina **integral**.

Los cuantales unitarios son básicamente retículos residuados completos.

Proposición 32. *Todo cuantal unitario es un retículo residuado y recíprocamente cualquier retículo residuado cuyo retículo asociado sea completo es un cuantal.*

Demostración. Sea $\mathbf{Q}$=$\langle Q, \bigvee, \cdot, 1\rangle$ un cuantal entonces tenemos que Q es un retículo, y $(Q, \cdot, 1)$ es un monoide. Solo hace falta ver que $\cdot$ es una operación residuada. Para esto utilizaremos adjunciones: lo que debemos ver es que las funciones:

$$_xf : P \to P : y \to x \cdot y \quad y \quad f_x : P \to P : y \to y \cdot x$$

tienen adjunta a derecha, pero por el corolario 8 de la página 12 basta ver que ellas son monótonas y que $x \backslash y = max\{z : x{\cdot}z \leq y\}$, $y/x = max\{z : z{\cdot}x \leq y\}$ existen. Veamos que ellas son monótonas:

$$\begin{aligned} y \leq z &\Leftrightarrow y \vee z = z \\ &\Leftrightarrow x \cdot (y \vee z) = x \cdot y \vee x \cdot z = x \cdot z \\ &\Leftrightarrow x \cdot y \leq x \cdot z, \end{aligned}$$

así $_xf$ es monótona y análogamente f_x también lo es.

Ahora veamos que $x \backslash y = max\{z : x \cdot z \leq y\}$, $y/x = max\{z : z \cdot x \leq y\}$ existen. Como Q es un retículo completo $\bigvee\{z : x \cdot z \leq y\}$ existe, veamos que

$\bigvee\{z : x{\cdot}z \leq y\} = max\{z : x{\cdot}z \leq y\}$, basta ver que $\bigvee\{z : x{\cdot}z \leq y\}$ pertenece al conjunto: lo cual se tiene pues $x.\bigvee\{z : x{\cdot}z \leq y\} = \bigvee\{x{\cdot}z : x{\cdot}z \leq y\} \leq y$. Luego $\cdot$ tiene residuales $x\backslash y = max\{z : x \cdot z \leq y\}$, $y/x = max\{z : z \cdot x \leq y\}$, y $(Q, \bigvee, \cdot, 1, /, \backslash)$ es un retículo residuado.

La otra parte de la equivalencia es inmediata debido a que ${}_xf$ y f_x son funciones adjuntas a izquierda y deben preservar los extremos superiores.

Dados dos cuantales Q y Q', una función $f : Q \to Q'$ es un morfismo entre cuantales si es un morfismo de sup-retículos y un morfismo de monoides, es decir que $f(\bigvee_{i\in I} q_i) = \bigvee_{i\in I} f(q_i)$ para cada familia $\{q_i\}_{i\in I} \subseteq Q$, y $f(p \cdot q) = f(p) \cdot f(q)$ para todo $p, q \in Q$ y $f(1) = 1$ (cuando el cuantal es unitario).

Ejemplos. Los ejemplos 1,3 y 4 fueron tomados de [21] y los ejemplos 5, 6, 7, y 8 de [26].

1. Dado $\mathbf{Q}$=$\langle Q, \bigvee, \cdot\rangle$ un cuantal, si tomamos Q con el mismo orden pero cambiamos la multiplicación $a * b = b \cdot a$ entonces $\mathbf{Q}$=$\langle Q, \bigvee, *\rangle$ también es un cuantal.

2. Dado un espacio topológico $\mathbf{X}$ el retículo de los subconjuntos abiertos de $\mathbf{X}$ es un cuantal cuya multiplicación es la intersección y $A \to B = A^C \cup B$.

3. Sea M un monoide, el conjunto $\wp(M)$ ordenado con la inclusión y con la multiplicación calculada punto a punto es un cuantal unitario y es el cuantal libremente generado por M, esto es si se tiene un homomorfismo $f : M \to Q$ entonces f se puede extender a un homomorfismo entre cuantales $f* : \wp(M) \to Q$.

4. Sea X un conjunto, el conjunto $2^{X\times X}$ de relaciones binarias sobre X bajo el orden de inclusión es un cuantal unitario cuya multiplicación es la composición de relaciones y su unidad es la relación identidad sobre X.

5. Sea R un anillo, el conjunto de todos los subgrupos aditivos de R es un cuantal con:
   $\bigvee = \sum$ y $A \cdot B = AB = \{a_1b_1 + ... + a_nb_n : a_i \in A \;\; y \;\; b_i \in B\}$.

Similarmente los ideales a derecha, a izquierda y a los dos lados de un anillo R también son cuantales.

6. Suponga que R es una $C^* - \acute{a}lgebra$. Los conjuntos de ideales cerrados a derecha, a izquierda y a los dos lados forman cuantales idempotentes con $\bigvee = \overline{\sum}$ y $A \cdot B = \overline{AB}$. En particular los ideales cerrados a ambos lados forman un local.

7. El conjunto $End(X)$ de endomorfismos de un sup-retículo X con $\bigvee$ calculado punto por punto y $\cdot$ dado por la composición es un cuantal.

8. El conjunto $Mat_n(L)$ de matrices $n \times n$, sobre un local L con el $\bigvee$, calculado componente a componente y $A \cdot B(i,j) = \bigvee_x A(i,x) \cdot B(x,j)$ es un cuantal.

9. Son cuantales también los retículos residuados de los ejemplos 3 y 5 dados en el capítulo 1 en la página 26.

2.2.2. Pretopologías

La presentación de pretopologías que se hace aquí se basa en las ideas del artículo [29].
Las pretopologías tienen sus raíces en la topología formal cuyo objetivo es describir las propiedades de un espacio topológico sin utilizar sus puntos sino estudiando de manera global las propiedades de sus conjuntos abiertos. Para ello se considera por ejemplo la operación intersección y la relación de cubrimiento (contenencia en la unión). Por ello antes de introducir el concepto de pretopologías se verá el concepto de topología formal.

Como lo que se quiere es hablar de las propiedades de un espacio topológico (X, τ) a partir de sus conjuntos abiertos, lo primero que se debe hacer es pensar en tal conjunto, pero él puede ser generado sólo a partir de una base, de unos abiertos básicos, a tal conjunto de abiertos o vecindades básicas lo llamaremos S. Ahora sobre S tenemos una operación que es la intersección y la denotaremos $\cdot$ daremos además a $(S, \cdot)$ estructura de monoide para eso introduciremos una constante 1 que será la unidad para la operación $\cdot$ (en un espacio topológico 1 es todo el espacio). Tenemos también una relación infinitaria entre abiertos básicos y colecciones de abiertos básicos, que es la relación de cubrimiento, se dice que un abierto básico a es cubierto por una colección de abiertos básicos U si $a \subseteq \bigcup U$, a esta relación la denotaremos de manera general como $a \triangleleft U$. Y por último se introduce un predicado $Pos(a)$ que se define como $Pos(a) \equiv (\exists x \in X)(x \in a)$. Así se obtiene la definición de *Topología formal* presentada en [29].

Definición 33. *Una topología formal es una estructura $A = (S, \cdot, 1, \triangleleft, Pos)$ donde:*

i. $(S, \cdot, 1)$ *es un monoide conmutativo.*

ii. $\triangleleft$ *es una relación infinitaria llamada cubrimiento que satisface:*

$$(Reflexividad)\ \frac{a \in U}{a \triangleleft U} \qquad (Transitividad)\ \frac{a \triangleleft U \quad (\forall b \in U) b \triangleleft V}{a \triangleleft V}$$

$$(Localización\ \ a\ \ derecha)\frac{a \triangleleft U \quad a \triangleleft V}{a \triangleleft \{b \cdot c : b \in U, c \in V\}}.$$

$$(Localización\ \ a\ \ izquierda)\frac{a \triangleleft U}{a \cdot b \triangleleft U}.$$

iii. Pos es un predicado que satisface:

$$(monotonicidad)\ \frac{a \triangleleft U \quad Pos(a)}{(\exists b \in U) Pos(b)} \qquad (positividad)\ \frac{Pos(a) \to a \triangleleft U}{a \triangleleft U}.$$

Con el fin de caracterizar los abiertos se define sobre $\wp(S)$ la siguiente relación de equivalencia: dadas dos colecciones U y V de abiertos básicos $U =_A V \equiv (U \triangleleft V \ \ y \ \ V \triangleleft U)$, de esta manera $\wp(S)/ =_A$ representa la colección de abiertos de X, (dos colecciones de vecindades básicas U y V representan el mismo abierto si sus uniones son iguales), una clase de equivalencia representa un abierto y además se le puede dar a esta colección la estructura de local siendo $\bigvee_{i \in I}[U_i] = [\bigcup_{i \in I} U_i]$ y $[U] \cdot [V] = [U \cap V]$.

Notemos que todas las condiciones dadas en la definición de topología formal para la relación $\triangleleft$ no son necesarias para darle a $\wp(S)/ =_A$ la estructura de local: las únicas usadas fueron reflexividad y transitividad.

Ahora pensemos en cuáles serían las condiciones necesarias y suficientes para que la relación $=_A$ definida anteriormente sea una relación de congruencia sobre $(\wp(S), \cdot, \bigcup)$ siendo $\cdot$ definida como: $U \cdot V = \{a \cdot b : a \in U \ \ y \ \ b \in V\}$. Necesitamos que la relación $=_A$ sea reflexiva, simétrica y transitiva, así que es suficiente pedir a la relación $\lhd$ que sea reflexiva y transitiva. Ahora necesitamos que las operaciones queden bien definidas sobre las clases. $\bigcup_{i\in I}[U_i] = [\bigcup_{i\in I} U_i]$ está bien definida precisamente por la definición de $=_A$ pues dos clases son iguales si la unión de sus elementos son iguales. Ahora para que $[U]\cdot[V] = [U\cdot V]$ quede bien definida se necesita que si $U =_A U'$ y $V =_A V'$ entonces $[U\cdot V] = [U'\cdot V']$, esto es que si $U \lhd U'$ y $V \lhd V'$ entonces $U\cdot V \lhd U'\cdot V'$ y esto se cumple si y sólo si $\lhd$ satisface la condición de localización o también llamada condición de estabilidad: $\dfrac{a \lhd U \quad b \lhd V}{a\cdot b \lhd U\cdot V}$. Es a partir de considerar estas propiedades para la relación $\lhd$ que se tiene el concepto de *pretopología*.

Definición 34. *Un precubrimiento sobre un monoide* $(S,\cdot,1)$ *es un preorden infinitario* $\lhd$ *que satisface una regla de estabilidad, esto es* $\lhd$ *satisface:*

$$\frac{a \in U}{a \lhd U} \qquad \frac{a \lhd U \quad U \lhd V}{a \lhd V} \qquad \frac{a \lhd U \quad b \lhd V}{a\cdot b \lhd U\cdot V}.$$

($U \lhd V$ *significa que* $(\forall b \in U)\ \ (b \lhd V)$*).*

Una **pretopología** es una cuádrupla $\mathcal{F} = (S,\cdot,1,\lhd_{\mathcal{F}})$, donde $(S,\cdot,1)$ es un monoide, llamado la base de $\mathcal{F}$, y $\lhd_{\mathcal{F}}$ es un precubrimiento en S. En este caso, si hacemos una relación con la topología formal $a \lhd U$ se lee a es precubierto por U.

A las pretopologías se les puede dar también una interpretación independiente que las relaciona como las semánticas asociadas a la lógica lineal . Tomemos a S como el universo de objetos producidos, o como las ocurrencias de piezas o pedazos de información, las cuales son combinadas por medio de $\cdot$. 1 se puede pensar como el objeto que no tiene costo por ser producido. La estructura lógica del universo es determinada por la relación infinitaria $\lhd_{\mathcal{F}}$ que es pensada como una generalización del número de miembros o socios (una generalización de la relación de pertenencia). Entonces $a \lhd U$ es interpretada como a es forzada por $\lhd_{\mathcal{F}}$ para ser un elemento de U o a es un $\mathcal{F}$-elemento de U. Una de las ventajas de las pretopologías con respecto a las semánticas álgebraicas usuales, es que ellas nos permiten además involucrar diagramas, que en muchas ocasiones nos ayudan para poder dar un significado intuitivo de las cosas.

Tenemos también una definición alterna para pretopologías a partir de operadores de clausura, gracias a la correspondencia que hay entre preórdenes infinitarios y operadores de clausura. Así, dada una pretopología tenemos un operador de clausura estable asociado y, viceversa, si tenemos un operador de clausura estable sobre un monoide conmutativo entonces tenemos una pretopología. La correspondencia está dada de la siguiente manera:

Proposición 35. *Si* $(S, \cdot, 1, \lhd_{\mathcal{F}})$ *es una pretopología entonces* $\mathcal{F}_{\lhd} : \wp(S) \to \wp(S) : U \to \mathcal{F}_{\lhd}(U) = \{a \in S : a \lhd U\}$*, es un operador de clausura estable. Y si* $\mathcal{F}$ *es un operador de clausura estable sobre un monoide* $(S, \cdot, 1)$ *entonces* $a \lhd_{\mathcal{F}} U := a \in \mathcal{F}(U)$ *es un precubrimiento.*

Demostración. Sea $(S, \cdot, 1, \lhd_{\mathcal{F}})$ una pretopología. Debemos ver que $\mathcal{F}_{\lhd}$ (definido como antes) es un operador de clausura estable esto es que: i) $U \subseteq \mathcal{F}_{\lhd}(U)$, ii) Si $U \subseteq V$ entonces $\mathcal{F}_{\lhd}(U) \subseteq \mathcal{F}_{\lhd}(V)$, iii) $\mathcal{F}_{\lhd}(\mathcal{F}_{\lhd}(U)) = \mathcal{F}_{\lhd}(U)$ y iv) $\mathcal{F}_{\lhd}(U) \cdot \mathcal{F}_{\lhd}(V) \subseteq \mathcal{F}_{\lhd}(U \cdot V)$.
Claramente, debido a la reflexividad de $\lhd$, $U \subseteq \mathcal{F}_{\lhd}(U)$. Supongamos ahora que $U \subseteq V$ y sea $a \in \mathcal{F}_{\lhd}(U)$. Entonces $a \lhd U$, pero como para todo $b \in U \;\; b \lhd V$, por transitividad $a \lhd V$, esto es $a \in \mathcal{F}_{\lhd}(V)$. Consideremos ahora $a \in \mathcal{F}_{\lhd}(\mathcal{F}_{\lhd}(U))$. Tenemos que $a \lhd \mathcal{F}_{\lhd}(U)$ y para todo $b \in \mathcal{F}_{\lhd}(U)(b \lhd U)$, entonces $a \lhd U$, esto es, $a \in \mathcal{F}_{\lhd}(U)$. Por último veamos que $\mathcal{F}$ es estable. Si $x \in \mathcal{F}_{\lhd}(U) \cdot \mathcal{F}_{\lhd}(V)$ entonces $x = a \cdot b$, con $a \lhd U$ y $b \lhd V$, luego por la estabilidad de $\lhd$, $x = a \cdot b \lhd U \cdot V$, esto es $x = a \cdot b \in \mathcal{F}_{\lhd}(U \cdot V)$.

Sea por otro lado $\mathcal{F}$ un operador de clausura estable sobre un monoide $(S, \cdot, 1)$. Debemos ver que la relación $a \lhd_{\mathcal{F}} U \equiv a \in \mathcal{F}(U)$ es un precubrimiento. Primero si $a \in U$ entonces $a \in \mathcal{F}(U)$ y $a \lhd_{\mathcal{F}} U$; también si $a \lhd_{\mathcal{F}} U$ y para todo $b \in U(b \lhd_{\mathcal{F}} V)$ entonces $a \in \mathcal{F}(U)$ y para todo $b \in U(b \in \mathcal{F}(V))$ implica $a \in \mathcal{F}(U)$ y $U \subseteq \mathcal{F}(V)$)implica $\mathcal{F}(U) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{F}(V)) = \mathcal{F}(V)$, luego $a \in \mathcal{F}(V)$ esto es $a \lhd_{\mathcal{F}} V$. Y por último, para la estabilidad supongamos que $a \lhd_{\mathcal{F}} U$ *y* $b \lhd_{\mathcal{F}} V$. Entonces $a \in \mathcal{F}(U)$ y $b \in \mathcal{F}(V)$ luego $a \cdot b \in \mathcal{F}(U) \cdot \mathcal{F}(V) \subseteq \mathcal{F}(U \cdot V)$ y así $a \cdot b \lhd_{\mathcal{F}} U \cdot V$.
Además $\mathcal{F}_{\lhd_{\mathcal{F}}} = \mathcal{F}$ y $\lhd_{\mathcal{F}_{\lhd}} = \lhd$, por lo que hablar de precubrimiento sobre una base $(S, \cdot, 1)$ equivale a hablar de operadores de clausura estables sobre $(S, \cdot, 1)$ y también equivale a hablar de congruencias sobre $(\wp(S), \cdot, \bigcup)$. (Para mayor información puede ver [4] y [29]).

Así tenemos la siguiente definición equivalente para pretopologías.

Definición 36. *$(S, \cdot, 1, \mathcal{F})$ es una* ***pretopología*** *si:*

i. *$(S, \cdot, 1)$ es un monoide.*

ii. *$\mathcal{F}$ es un operador de clausura estable sobre S, esto es: $\mathcal{F} : \wp(S) \to \wp(S)$ y satisface: i) $U \subseteq \mathcal{F}(U)$, ii) Si $U \subseteq V$ entonces $\mathcal{F}(U) \subseteq \mathcal{F}(V)$, iii) $\mathcal{F}(\mathcal{F}(U)) = \mathcal{F}(U)$ y iv) $\mathcal{F}(U) \cdot \mathcal{F}(V) \subseteq \mathcal{F}(U \cdot V)$.*

Por último un morfismo f entre dos pretopologías $(S, \cdot, 1, \mathcal{F})$ y $(S', \cdot, 1', \mathcal{F}')$ es un morfismo de operadores de clausura que además tienen un buen comportamiento con respecto a la operación $\cdot$, esto es $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ y $f(1) = 1'$.

Ejemplos

1. Dado cualquier monoide $(S, \cdot, 1)$ la relación $a \lhd U \equiv a \in U$ siempre es un precubrimiento. En este caso el operador de clausura asociado es la identidad en $\wp(S)$.

2. Sea $S = \mathbb{N} \cup \{\top\}$ los naturales con la suma y el orden usual, junto con un elemento $\top$ que hará el papel del máximo de S y para el que se tiene que $n + \top = \top$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definamos para $n \in S$ y $U \subseteq S$, $n \lhd U \equiv n \geq \wedge U$. Veamos que $\lhd$ es un precubrimiento.

   Si $n \in U$ entonces $n \geq \wedge U$. Por otro lado si $n \lhd U$ y $U \lhd V$, entonces $n \geq \wedge U$ y para todo $b \in U$ $b \geq \wedge V$, es decir, $\wedge V \leq \wedge U$ para todo $b \in U$, así $\wedge V \leq \wedge U \leq n$, entonces $n \geq \wedge V$. Para la propiedad de estabilidad, si $n \lhd U$, y $m \lhd V$ entonces $a + b \geq \wedge U + \wedge V = \wedge(U + V)$.

   El operador de clausura asociado es: $\mathcal{F}U = \{n \in S : n \geq \wedge U\}$.

3. Dado un espacio topológico (X, τ) y S una base para τ entonces $(S, \cap, X, \lhd)$ con $a \lhd U \equiv a \subseteq \cup U$ para $a \in S$ y $U \subseteq S$, es una pretopología. En éste caso $\mathcal{F}U = \{a \in S : a \subseteq \cup U\}$.

2.2.3. Relación entre Pretopologías y cuantales

Teorema 37. *Para cualquier pretopología* $\mathcal{F} = (S, \cdot, 1, \mathcal{F})$*, la estructura* $(Sat(\mathcal{F}), \cdot_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}(1), \bigvee)$*, donde* $\cdot_{\mathcal{F}}$ *es definida por:*

$$\mathcal{F}U \cdot_{\mathcal{F}} \mathcal{F}V = \mathcal{F}(\mathcal{F}U \cdot \mathcal{F}V),$$

es un cuantal unitario.

Demostración. Primero veamos que $\mathcal{F}U \cdot_{\mathcal{F}} \mathcal{F}V := \mathcal{F}(\mathcal{F}U \cdot \mathcal{F}V) = \mathcal{F}(U \cdot V)\cdot$ Por estabilidad de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}U \cdot \mathcal{F}V \subseteq \mathcal{F}(U \cdot V)$ luego $\mathcal{F}(\mathcal{F}U \cdot \mathcal{F}V) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{F}(U \cdot V)) = \mathcal{F}(U \cdot V)$ y por otro lado como $U \subseteq \mathcal{F}U$ y $V \subseteq \mathcal{F}V$ entonces $U \cdot V \subseteq \mathcal{F}U \cdot \mathcal{F}V$ y $\mathcal{F}(U \cdot V) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{F}U \cdot \mathcal{F}V)$, así $\mathcal{F}U \cdot_{\mathcal{F}} \mathcal{F}V = \mathcal{F}(U \cdot V)$.
Con lo anterior veamos entonces que la operación $\cdot_{\mathcal{F}}$ es asociativa, para ello sean $U, V, W \subseteq S$, $\mathcal{F}U \cdot_{\mathcal{F}} (\mathcal{F}V \cdot_{\mathcal{F}} \mathcal{F}W) = \mathcal{F}U \cdot_{\mathcal{F}} \mathcal{F}(V \cdot W) = \mathcal{F}(U \cdot (V \cdot W))$ y similarmente $(\mathcal{F}U \cdot_{\mathcal{F}} \mathcal{F}V) \cdot_{\mathcal{F}} W = \mathcal{F}((U \cdot V) \cdot W)$, así, $\cdot_{\mathcal{F}}$ es asociativa.
Se tiene también que $\mathcal{F}\{1\}$ es la unidad para $\cdot_{\mathcal{F}}$, $\mathcal{F}U \cdot_{\mathcal{F}} \mathcal{F}1 = \mathcal{F}(U \cdot 1) = \mathcal{F}U$.
Por la proposición 28 de la página 34 tenemos también que $(Sat(\mathcal{F}), \bigvee)$ es un sup-retículo.
Entonces sólo hace falta ver que se tiene la distributividad de $\cdot$ con respecto a $\bigvee$: para esto sean $\mathcal{F}U$ y $\mathcal{F}V_i$ con $i \in I$ un elemento y una colección de elementos de $Sat(\mathcal{F})$ respectivamente, entonces $\mathcal{F}U \cdot_{\mathcal{F}} (\bigvee_{i \in I} \mathcal{F}V_i) = \mathcal{F}U \cdot_{\mathcal{F}} \mathcal{F}(\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}V_i) = \mathcal{F}U \cdot_{\mathcal{F}} \mathcal{F}(\bigcup_{i \in I} V_i) = \mathcal{F}(U \cdot \bigcup_{i \in I} V_i) = \mathcal{F}(\bigcup_{i \in I} U.V_i) = \mathcal{F}(\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}(U \cdot V_i)) = \bigvee_{i \in I} \mathcal{F}U \cdot_{\mathcal{F}} \mathcal{F}V_i$. Además se tiene que si la operación $\cdot$ es conmutativa entonces también lo es $\cdot_{\mathcal{F}}$.

Tenemos entonces un operador **Sat** que asigna cuantales a pretopologías. Definamos ahora este operador sobre morfismos y veamos que es un funtor. Para ello sean $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ un morfismo entre dos pretopologías, entonces se define $Satf$ igual a como se definió en la página 34 para morfismos de operadores de clausura, esto es: $Satf : (Sat(\mathcal{F}), \cdot_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}(1), \bigvee) \to (Sat(\mathcal{F}'), \cdot_{\mathcal{F}'}, \mathcal{F}'(1), \bigvee) : \mathcal{F}U \to \mathcal{F}'f(U)$. Como ya se había visto que $Satf$ era un morfismos de sup-retículos, entonces sólo hace falta ver que es un morfismo de monoides también, y esto se tiene pues, $Satf(\mathcal{F}U \cdot_{\mathcal{F}} \mathcal{F}V) = \mathcal{F}'(f(\mathcal{F}U \cdot \mathcal{F}V)) = \mathcal{F}'(f(\mathcal{F}U) \cdot f(\mathcal{F}V)) = \mathcal{F}'(f(\mathcal{F}U)) \cdot_{\mathcal{F}} \mathcal{F}'(f(\mathcal{F}V)) = Satf(\mathcal{F}U) \cdot_{\mathcal{F}} Satf(\mathcal{F}V)$.
También tenemos el funtor **Transl** que asigna pretopologías a cuantales.

Proposición 38. *Dado un cuantal unitario* $(Q, \cdot, 1, \bigvee)$*,* $Transl(Q) = (Q, \cdot, 1, \mathcal{F}_{\bigvee})$ *donde* $\mathcal{F}_{\bigvee} : \wp(Q) \to \wp(Q) : U \to \downarrow \bigvee U$*, es una pretopología.*

Demostración. Sólo hace falta ver que $\mathcal{F}_{\bigvee}$ es estable, esto es que dados $U, V \subseteq Q$ entonces $\mathcal{F}_{\bigvee}U \cdot \mathcal{F}_{\bigvee}V \subseteq \mathcal{F}_{\bigvee}(U \cdot V)$, lo que equivale a ver que:
$\downarrow \bigvee U \cdot \downarrow \bigvee V \subseteq \downarrow \bigvee (U \cdot V)$. Sea entonces $x \in \downarrow \bigvee U \cdot \downarrow \bigvee V$, luego $x = p \cdot q$ con $p \leq \bigvee U$ y $q \leq \bigvee V$ y como la multiplicación es monótona entonces $x = p \cdot q \leq \bigvee U \cdot \bigvee V$, esto es $x \in \downarrow \bigvee U \cdot V$.
Ahora **Transl** sobre morfismos de cuantales se define de la misma manera que se había hecho antes para sup-retículos, si $f : (Q, \cdot, 1, \bigvee) \to (Q', \cdot, 1', \bigvee)$ es un morfismo de cuantales entonces $Transl(f) := f$, era un morfismo entre operadores de clausura, y obviamente es también un morfismo de monoide.

Proposición 39. *Cada cuantal Q unitario es isomorfo a Sat(Transl)(Q).*

Demostración. La función $Id_Q : Sat(Transl(Q)) \to Q : \mathcal{F}_{\vee}U \to \bigvee U$, que en la demostración del teorema 30 de la página 37 ya se había visto que era un morfismo de sup-retículos es también un morfismo de cuantales, pues es compatible con la estructura de monoide, veamos: dados $\mathcal{F}_{\vee}U, \mathcal{F}_{\vee}V \in Sat(Transl(Q))$, $Id_Q(\mathcal{F}_{\vee}U \cdot \mathcal{F}_{\vee}V)) = Id_Q(\mathcal{F}_{\vee}U) \cdot Id_Q(\mathcal{F}_{\vee}U)$. $Id_Q(\mathcal{F}_{\vee}U \cdot \mathcal{F}_{\vee}V) = \bigvee(\mathcal{F}_{\vee}U \cdot \mathcal{F}_{\vee}V) = \bigvee \mathcal{F}_{\vee}(U \cdot V) = \bigvee \downarrow \bigvee(U.V) = \bigvee U \cdot V$, y $Id_Q(\mathcal{F}_{\vee}U) \cdot Id_Q(\mathcal{F}_{\vee}V) = \bigvee U \cdot \bigvee V = (\bigvee_{u \in U} u) \cdot \bigvee V = \bigvee_{u \in U}(u \cdot \bigvee V) = \bigvee_{u \in U}(\bigvee_{v \in V} u \cdot v) = \bigvee U \cdot V$. Ya se había visto también que era inyectiva y su inversa es $\downarrow_Q : Q \to Sat(Transl(Q)) : q \to \downarrow q$.

Proposición 40. *El funtor* ***Sat*** *es adjunto a izquierda del funtor* ***Transl****.*

Afirmación 2. *Los funtores* ***Sat*** *y* ***Tranls*** *no forman una equivalencia entre la categoría* ***Quant*** *de cuantales y la categoría* ***Pret*** *de pretopologías.*

La razón es la misma por la que las categorías de sup-retículos y de operadores de clausura no eran equivalentes mediante estos funtores. No siempre que se tome una pretopología $\mathcal{F}$ y se le aplique $Transl(Sat(\mathcal{F}))$ se obtiene una pretopología isomorfa a $\mathcal{F}$ (ver afirmación 1 de la página 38).

Capítulo 3

Lógicas subestructurales y correspondencia con retículos residuados

3.1. Lógicas Subestructurales

Según Luis Vega [32], en los años 30 del siglo XX florecen tres ramas de la lógica: la teoría de la demostración, la semántica formal y la teoría de la computación convertidas hoy en lógicas subestructurales, álgebras de modelos y programación lógica. Las lógicas subestructurales relacionadas con la teoría de la demostración nacen como consecuencia de la necesaria incursión de la lógica en otras áreas del conocimiento como en la lingüística, la filosofía, la teoría de la computación, en la inteligencia artificial, la programación lógica, el control de procesos, etc. A partir de esta expansión de la lógica a otras áreas surgen diferentes sistemas lógicos que no pueden encuadrarse dentro del sistema de la lógica clásica; las lógicas subestructurales resultan ser entonces un ambiente adecuado para la formalización y estudio de estos sistemas lógicos. El nombre de lógicas subestructurales fue dado por primera vez por Shorêder-Heister Dosen en 1993 y se basan justamente en el principio de Dosen que propone distintos sistemas lógicos con las mismas reglas para las constantes lógicas pero con modificaciones en las reglas estructurales; es por ello que las lógicas subestructurales se formalizan en sistemas de secuentes de Genzent mediante el uso de reglas estructurales, y son lógicas más débiles que la lógica clásica y la lógica intuicionista porque se obtienen a partir de ellas

mediante restricciones de las reglas estructurales que se tienen para ellas. Las reglas estructurales tienen su base en el pensamiento estructural, y pueden ser pensadas como reglas particulares que gobiernan el comportamiento de una colección de información, en particular la combinación de premisas. Las lógicas subestructurales según Restall [23] incursionan en dos campos de la lógica formal, en lo particular y en lo general, no sólo se preocupan por lo que se pueda deducir de una colección de proposiciones sino también por la estructura de cada proposición y el comportamiento de ellas cuando son combinadas.
El propósito de las lógicas subestructurales es entonces introducir uniformemente una clase de reglas en la cual varias lógicas no clásicas, originadas por diferentes motivaciones, pueden ser discutidas al mismo tiempo y lo que permite crear tal ambiente uniforme son precisamente las reglas estructurales.

El objetivo de este capítulo será formalizar las lógicas subestructurales mediante sistemas de secuentes en los que intervienen algunas reglas estructurales, y dar ejemplos concretos de ellas, como son las lógicas clásica, intuicionista, lineal, relevante y otras, mostrando en algunos casos cómo la ausencia de algunas reglas estructurales conlleva a la invalidez de proposiciones verdaderas en la lógica clásica.

Para esto, se hará primero una introducción general a los sistemas de secuentes y a las reglas estructurales.

Finalmente se hará una correspondencia de las lógicas subestructurales básicas con los retículos residuados, más específicamente con los retículos residuados completos, es decir con cuantales unitarios.

3.1.1. Sistemas de secuentes de Hilbert

La idea con el nacimiento de estos sistemas deductivos es poder obtener fórmulas a partir de un conjunto de fórmulas ya dadas, más que demostrar la consistencia de tal conjunto de fórmulas.
El sistema deductivo de Hilbert cuenta con dos elementos: Axiomas y una regla de inferencia.

Los axiomas son:

1. $p \to (q \to p)$.
2. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$.
3. $(\neg p \to \neg q) \to ((\neg p \to q) \to p)$.

La regla de inferencia es "Modus Ponens"

$$\frac{\begin{array}{l} p \to q \\ p \end{array}}{q}.$$

Una deducción formal de una fórmula q a partir de un conjunto de fórmulas dadas es una sucesión finita de fórmulas $p_1, p_2, ..., p_n$ donde cada p_n es una de las fórmulas originales o es un axioma lógico del sistema de Hilbert o se obtiene de la aplicación de la regla de inferencia a dos fórmulas anteriores.

3.1.2. Sistemas de secuentes de Gentzen

El cálculo de secuentes fue inventado en 1935 por el matemático alemán Gerhard Gentzen y es, al igual que el sistema de Hilbert, un sistema deductivo (Tomado de [32]). El cálculo de secuentes es una pieza clave en la teoría de la demostración, que estudia las demostraciones como objetos matemáticos (metamatemática) y también la presentación de Gentzen ha resultado ser de importancia fundamental en los estudios teóricos relativos a los lenguajes lógicos y a la prueba automática de teoremas, ya que los secuentes reflejan de manera cómoda los lenguajes de máquina en las ciencias de la computación.

La siguiente presentación de Sistemas de Gentzen es básicamente tomada de [18] y enriquecida con algunas ideas de [15] y [23].
Un secuente es una expresión de la forma $\Gamma \Rightarrow \Delta$, donde Γ y Δ son secuencias de fórmulas (posiblemente vacías). La interpretación intuitiva de un secuente será que de todas las fórmulas de Γ al menos una fórmula de Δ puede ser demostrada o por ejemplo en la lógica clásica $\Gamma \Rightarrow \Delta$ significa que la conjunción de las fórmulas de Γ implica la disyunción de las fórmulas de Δ.

Un sistema de secuentes cuenta con dos componentes importantes: los axiomas y las reglas deductivas. Los axiomas son verdades evidentes. Las reglas deductivas, que se pueden entender como transformaciones de fórmulas que llevan a otra fórmula verdadera, se clasifican en: reglas estructurales (debilitamiento, contracción, intercambio), reglas lógicas (o reglas para los conectivos) y la regla de corte.

AXIOMA IDENTIDAD:

$$C \Rightarrow C.$$

Se trata, en realidad, de un esquema axiomático, y C puede reemplazarse por cualquier fórmula.

REGLAS DEDUCTIVAS:

Las **reglas estructurales** son:

- Debilitamiento: nos permite introducir afirmaciones a izquierda y a derecha de secuentes.

  $$\frac{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha, \Sigma \Rightarrow \Delta}\ (\text{débil} \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Lambda, \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Lambda, \alpha, \Theta}\ (\Rightarrow \text{débil})$$

  Si de Γ y Σ se deduce Δ, entonces de Γ y Σ y cualquier otra premisa se sigue deduciendo Δ, y a derecha si el secuente $\Gamma \Rightarrow \Lambda, \Theta$ es válido entonces el secuente $\Gamma \Rightarrow \Lambda, \alpha, \Theta$ también lo es y esto por ejemplo se tiene también en la lógica clásica debido a la interpretación que se ha dado a los secuentes (de la conjunción de las fórmulas de la izquierda se deben deducir la disyunción de las fórmulas de la derecha).

  Esta regla por ejemplo no se tiene en la lógica relevante, y cuando tenemos $\Gamma, \alpha, \Sigma \Rightarrow \Delta$, necesariamente α debe usarse en la deducción de Δ, α debe ser relevante en la demostración de Δ.

- Contracción: nos permite usar cada afirmación más de una vez (a izquierda) y eliminar redundancia de afirmaciones (a derecha).

  $$\frac{\Gamma, \alpha, \alpha, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha, \Sigma \Rightarrow \Delta}\ (\text{contr} \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Lambda, \alpha, \alpha, \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Lambda, \alpha, \Theta}\ (\Rightarrow \text{contr}).$$

Esta regla nos permite tener control sobre los recursos. Cuando ésta regla no se cumple una premisa no se puede utilizar más de una vez.

En la lógica lineal por ejemplo no se cumplen las reglas de debilitamiento y contracción.

- Intercambio: establece que las fórmulas se pueden usar en un orden arbitrario (suerte de conmutatividad).

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \beta, \alpha, \Sigma \Rightarrow \Delta} \text{ (inter} \Rightarrow\text{)} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Lambda, \alpha, \beta, \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Lambda, \beta, \alpha, \Theta} \text{ (}\Rightarrow\text{ inter).}$$

- **Reglas para conectivos**: determinan el manejo de los conectivos a la derecha y a la izquierda, y son:
  - Implicación:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha, \Theta \qquad \Pi, \beta, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Pi, \alpha \to \beta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Theta} (\to \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta, \Theta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \to \beta, \Theta} (\Rightarrow \to).$$

  - Conjunción:

$$\frac{\Gamma, \alpha, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta, \Sigma \Rightarrow \Delta} (\wedge_1 \Rightarrow) \quad \frac{\Gamma, \beta, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta, \Sigma \Rightarrow \Delta} (\wedge_2 \Rightarrow).$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Lambda, \alpha, \Theta \qquad \Gamma \Rightarrow \Lambda, \beta, \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Lambda, \alpha \wedge \beta, \Theta} (\Rightarrow \wedge).$$

  - Disyunción:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Lambda, \alpha, \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Lambda, \alpha \vee \beta, \Theta} (\Rightarrow \vee_1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Lambda, \beta, \Theta}{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Lambda, \alpha \vee \beta, \Theta} (\Rightarrow \vee_2)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \Sigma \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \beta, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta, \Sigma \Rightarrow \Delta} (\vee \Rightarrow).$$

  - Negación:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha, \Theta}{\neg\alpha, \Gamma \Rightarrow \Theta}\ (\neg \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Theta}{\Gamma \Rightarrow \neg\alpha, \Theta}\ (\Rightarrow \neg).$$

- **Regla de corte**:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha, \Theta \qquad \Sigma, \alpha, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Sigma, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Theta}\ (\text{corte}).$$

- **Cuantificador Universal:**

$$\frac{\Gamma \vdash F(a)}{\Gamma \vdash \forall x F(x)} \qquad \frac{F(a), \Gamma \vdash \Delta}{\forall x F(x), \Gamma \vdash \Delta}$$

- **Cuantificador Existencial:**

$$\frac{\Gamma \vdash F(a)}{\Gamma \vdash \exists x F(x)} \qquad \frac{F(a), \Gamma \vdash \Delta}{\exists x F(x), \Gamma \vdash \Delta}$$

Constantes proposicionales
Para establecer valores de verdad para proposiciones se deben introducir también constantes proposicionales. Algunas de las constantes que se introducen en sistemas de secuentes son:

- $\top$ y $\bot$ que denotan las proposiciones constantemente verdadera y falsa respectivamente, ellas se introducen mediante los siguientes secuentes iniciales:

$$\Gamma \Rightarrow \top \qquad \Gamma, \bot, \Sigma \Rightarrow \Delta.$$

  donde $\Gamma, \Sigma \ \ y \ \ \Delta$ pueden ser vacíos.

- **0** y **1**, que intuitivamente representan la secuencia vacía de fórmulas a la derecha y a la izquierda respectivamente. Los secuentes iniciales que se tienen para 0 y 1 son:

$$\Rightarrow 1 \qquad 0 \Rightarrow$$

y, las reglas estructurales para ellos son:

$$\frac{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, 1, \Sigma \Rightarrow \Delta}(1 \ \ \text{débil}\ ) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Lambda, \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Lambda, 0, \Theta}(0 \ \ \text{débil}).$$

1 se dice que es la proposición débil entre las fórmulas demostrables y 0 la proposición fuerte entre las fórmulas contradictorias. Una fórmula α se dice contradictoria si $\alpha \Rightarrow$ es demostrable.

Con la constante 0 se puede definir la negación $\neg\alpha$ de α por $\alpha \to 0$.
$\top(0)$ es lógicamente equivalente a $\neg\bot(\neg 1)$.
Si en un sistema de secuentes se tienen las reglas de debilitamiento se puede ver que $\top(\bot)$ es lógicamente equivalente a $1(0)$.
Y recíprocamente si $\top$ es equivalente a 1 entonces usando el secuente inicial 1, la regla (débil) y la regla de corte se puede derivar la regla de debilitamiento (débil$\Rightarrow$).

Veamos algunos aspectos que hacen de las lógicas subestructurales ese ambiente adecuado para formalizar diferentes sistemas lógicos que no pueden encuadrarse dentro de la lógica clásica.

- **Intercambio (orden) y contracción (uso de recursos)**

Empecemos por decir que las reglas estructurales pueden ser pensadas como reglas particulares que gobiernan el comportamiento de una colección de información, en particular la combinación de premisas. Por ejemplo si consideramos la regla:

$$X; A \vdash B \text{ si y sólo si } X \vdash A \to B$$

se establece que se puede deducir B de X junto con A, si y sólo si se puede deducir el condicional $A \to B$ de sólo X.

La regla anterior (usualmente denominada "teorema de la deducción") lleva incluida tres nociones importantes: la primera es la deducibilidad que se representa por el símbolo $\vdash$; la segunda es el condicional que se escribe como $\to$; y hay una tercera noción usualmente poco observada que es la forma como se combinan las premisas. Esta noción se representa por el punto y coma.

Si en el teorema de la deducción variamos el orden de las premisas entonces varía el condicional y, viceversa, si manejamos diferentes condicionales tendremos diferente orden en las premisas. El teorema de deducción también se puede ver como una relación de RESIDUACIÓN, otro aspecto importante que capturan las lógicas subestructurales.

La combinación de premisas corresponde a una composición de cadenas u otras unidades lingüísticas, por ejemplo también en un lenguaje el orden en que concatenemos las palabras nos pueden dar estructuras diferentes dentro del lenguaje, Aquí $X; X$ es diferente de X, y también $X; Y$ es diferente de $Y; X$. No sólo es importante el número de premisas sino también su orden.

Ahora veamos dos ejemplos tomados de [24] de cómo afecta el no tener la regla de intercambio (conmutatividad) y la regla de contracción algunas proposiciones de la lógica clásica.

En la lógica clásica la proposición $(p \to q) \to q$, es una tautología, y ella se puede mostrar a partir del teorema de deducción y de la regla de intercambio, así:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to q \vdash p \to q}{p \to q, p \vdash q}\text{T.deducción}}{\dfrac{p, p \to q \vdash q}{p \vdash (p \to q) \to q}\text{T.deducción}}(\text{inter} \Rightarrow)}{}$$

Notemos que sin la regla de intercambio no podríamos mostrar la validez de ésta proposición. Así como tampoco se podría demostrar la inferencia $p \to (p \to q) \vdash p \to q$ sin usar la regla de contracción y la regla de corte en la siguiente prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to (p \to q) \ \vdash \ p \to (p \to q)}{p \to (p \to q), p \ \vdash \ p \to q} \qquad \dfrac{p \to q \ \vdash \ p \to q}{p \to q, p \ \vdash \ q}}{(p \to (p \to q), p), p \vdash q}\,\text{(corte)}.}{p \to (p \to q), p \ \vdash \ q}\,(\text{contr} \Rightarrow)}{p \to (p \to q) \ \vdash \ p \to q}$$

- **Debilitamiento**

Tener o no la regla de debilitamiento tiene repercusiones sobre la interpretación de algunas consecuencias lógicas y también sobre la combinación de premisas. Si tenemos por ejemplo $\Gamma \vdash \Delta$ y tenemos la regla de debilitamiento tenemos entonces que $\Gamma, \alpha \vdash \Delta$, pero si no tenemos la regla de debilitamiento el tener $\Gamma, \alpha \vdash \Delta$ implica que de alguna manera la proposición α tiene que ser relevante en la deducción de Δ, por otra parte el poder introducir α bien sea a derecha o a izquierda de los secuentes proporcionará debido al teorema de deducción diferentes implicaciones. Lo que se quiere con la regla de debilitamiento de alguna manera es tener más control sobre las proposiciones. Un sinsabor que se tiene en la lógica clásica es por ejemplo que la proposición "si 2+2 = 5 entonces 6 es un número primo", sea verdadera. se debería tener que el antecedente estuviera de alguna manera relacionado con el consecuente y además con su deducción. Es precisamente la lógica relevante de la cual se hablará más adelante la que se encarga de tomar en cuenta esos aspectos de la implicación que no son tenidos en cuenta en la lógica clásica.

Una proposición que falla en cualquier sistema que no tenga la regla de debilitamiento es la distributividad de la conjunción con respecto a la disyunción y viceversa. Veamos.

Este ejemplo fue tomado de [18]. Aquí $(d \Rightarrow)$ y $(\Rightarrow d)$ representan respectivamente (débil $\Rightarrow$) y ($\Rightarrow$ débil).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\Rightarrow\alpha}{\alpha,\beta\Rightarrow\alpha}(d\Rightarrow) \quad \dfrac{\beta\Rightarrow\beta}{\alpha,\beta\Rightarrow\beta}(d\Rightarrow)}{\dfrac{\alpha,\beta\Rightarrow\alpha\wedge\beta}{\alpha,\beta\Rightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)}(\Rightarrow\vee_2)}(\Rightarrow\wedge) \quad \dfrac{\dfrac{\alpha\Rightarrow\alpha}{\alpha,\gamma\Rightarrow\alpha}(d\Rightarrow) \quad \dfrac{\gamma\Rightarrow\gamma}{\alpha,\gamma\Rightarrow\gamma}(d\Rightarrow)}{\dfrac{\alpha,\gamma\Rightarrow\alpha\wedge\gamma}{\alpha,\gamma\Rightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)}(\vee_1\Rightarrow)}(\Rightarrow\wedge)}{\dfrac{\dfrac{\alpha,\beta\vee\gamma\Rightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)}{\alpha\wedge(\beta\vee\gamma),\beta\vee\gamma\Rightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)}(\wedge_1\Rightarrow)}{\dfrac{\alpha\wedge(\beta\vee\gamma),\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)\Rightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)}{\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)\Rightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)}(\text{corte}\Rightarrow)}(\wedge_1\Rightarrow)}(\vee\Rightarrow).$$

Y por otro lado:

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha}(\wedge_2 \Rightarrow) \qquad \dfrac{\dfrac{\beta \Rightarrow \beta}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow \beta}(\wedge_1 \Rightarrow)}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow \beta \vee \gamma}(\Rightarrow \vee_2)}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)}(\Rightarrow \wedge).$$

y de manera análoga, $\alpha \wedge \gamma \Rightarrow \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$.

Así por $(\vee \Rightarrow)$ tenemos la otra implicación:

$$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \Rightarrow \alpha \wedge (\beta \vee \gamma).$$

Otra idea que según Restall [23], motiva la introducción de las reglas estructurales es:

- **Conocimiento del Recurso**: la idea aquí es ver qué recursos pueden ser usados y ver si ellos se pueden usar un número determinado de veces. A este respecto, Girard introduce la lógica lineal (ver [12] páginas 40-41), en la cual las premisas no pueden ser vueltas a usar (las premisas pueden entenderse aquí, como objetos físicos, como "bits"de información, que se "gastan" cada vez que se usan).

Todas las ideas anteriores sugieren que las lógicas subestructurales son lógicas sensibles al número y al orden de las ocurrencias de las premisas en una deducción y que las reglas estructurales influyen no sólo en los condicionales sino también en las propiedades de los conectivos.

En sistemas de secuentes en los que tengamos las reglas de debilitamiento, contracción, reglas para la conjunción y la disyunción y regla de corte, se puede ver que las comas al lado izquierdo de un secuente equivalen a conjunciones y a la derecha equivalen a disyunciones. Veamos:

$$\dfrac{\dfrac{\delta \Rightarrow \delta}{\delta, \varphi \Rightarrow \delta}(\text{débil } \Rightarrow) \qquad \dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\delta, \varphi \Rightarrow \varphi}(\text{débil} \Rightarrow)}{\delta, \varphi \Rightarrow \delta \wedge \varphi}(\Rightarrow \wedge).$$

y también del secuente $\delta \wedge \varphi \Rightarrow \psi$ puede derivarse de $\delta, \varphi \Rightarrow \psi$, usando regla de contracción a izquierda:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\delta, \varphi \Rightarrow \psi}{\delta \wedge \varphi, \varphi \Rightarrow \psi}(\wedge_1 \Rightarrow)}{\delta \wedge \varphi, \delta \wedge \varphi \Rightarrow \psi}(\wedge_2 \Rightarrow)}{\delta \wedge \varphi \Rightarrow \psi}(\text{cont} \Rightarrow).$$

Con ayuda de lo anterior tenemos que si $\delta \wedge \varphi \Rightarrow \psi$ es demostrable entonces $\delta, \varphi \Rightarrow \psi$ es demostrable usando la regla de corte:

$$\frac{\delta, \varphi \Rightarrow \delta \wedge \varphi \qquad \delta \wedge \varphi \Rightarrow \psi}{\delta, \varphi \Rightarrow \psi}(\text{corte}).$$

Así cuando tenemos estas reglas un secuente $\delta, \varphi \Rightarrow \psi$ es demostrable si y sólo si $\delta \wedge \varphi \Rightarrow \psi$ es demostrable.

Y para las comas a la derecha:
$\delta \Rightarrow \alpha, \beta$ es demostrable si y sólo si $\delta \Rightarrow \alpha \vee \beta$ es demostrable.

Veamos que $\alpha \vee \beta \Rightarrow \alpha, \beta$ siempre es válido.

$$\cfrac{\cfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\alpha \Rightarrow \alpha, \beta} \qquad \cfrac{\beta \Rightarrow \beta}{\beta \Rightarrow \alpha, \beta}(\Rightarrow \text{débil})}{\alpha \vee \beta \Rightarrow \alpha, \beta}(\vee \Rightarrow).$$

y si tenemos $\psi \Rightarrow \alpha, \beta$ entonces tenemos $\psi \Rightarrow \alpha \vee \beta$,

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\psi \Rightarrow \alpha, \beta}{\psi \Rightarrow \alpha \vee \beta, \beta}(\Rightarrow \vee_1)}{\psi \Rightarrow \alpha \vee \beta, \alpha \vee \beta}(\Rightarrow \vee_2).}{\psi \Rightarrow \alpha \vee \beta}(\Rightarrow \text{corte})$$

Y de $\psi \Rightarrow \alpha \vee \beta$ se puede deducir $\psi \Rightarrow \alpha, \beta$.

$$\frac{\psi \Rightarrow \alpha \vee \beta \qquad \alpha \vee \beta \Rightarrow \alpha, \beta}{\psi \Rightarrow \alpha, \beta}(\text{corte})$$

Con lo visto anteriormente y usando inducción tenemos la siguiente proposición.

Proposición 41. *(Tomada de [18]). Cuando tenemos reglas de debilitamiento, contracción y corte un secuente* $\alpha_1, ..., \alpha_m \Rightarrow \beta_1, ..., \beta_n$ *es demostrable si y sólo si el secuente* $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_m \Rightarrow \beta_1 \vee ... \vee \beta_n$ *es demostrable.*

En caso de no tener debilitamiento y contracción se introduce un nuevo conectivo $*$ llamado **fusión o conjunción multiplicativa**, el cual representa la coma en algunas lógicas subestructurales no clásicas. Las reglas para este conectivo son:

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha * \beta, \Sigma \Rightarrow \Delta}(* \Rightarrow) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha, \Lambda \qquad\qquad \Sigma \Rightarrow \beta, \Theta}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \alpha * \beta, \Lambda, \Theta}(\Rightarrow *).$$

Proposición 42. *(Tomada de [18]). En un sistema de secuentes con sólo las reglas para* $*$ *y la regla de corte, un secuente* $\alpha_1, ..., \alpha_m \Rightarrow \beta$*, es demostrable si y sólo si* $\alpha_1 * ... * \alpha_m \Rightarrow \beta$ *es demostrable.*

Demostración.

$$\frac{\alpha_1, ..., \alpha_m \Rightarrow \beta}{\alpha_1 * ... * \alpha_m \Rightarrow \beta}(* \Rightarrow)$$

y si $\alpha_1 * ... * \alpha_m \Rightarrow \beta$ es demostrable entonces:

$$\frac{\alpha_1, ..., \alpha_m \Rightarrow \alpha_1 * ... * \alpha_m \qquad\qquad \alpha_1 * ... * \alpha_m \Rightarrow \beta}{\alpha_1, ..., \alpha_m \Rightarrow \beta}(\text{corte}).$$

Existe una relación importante entre fusión e implicación: se tiene que $*$ y $\rightarrow$ son un par residuado. Esta relación se expresa mediante el siguiente lema.

Lema 43. *Un secuente* $\alpha * \beta \Rightarrow \gamma$ *es demostrable si y sólo si* $\alpha \Rightarrow \beta \rightarrow \gamma$ *es demostrable.*

Veamos ahora con más profundidad algunos ejemplos de lógicas subestructurales formalizadas en sistemas de secuentes de Gentzen.
Tenemos entre las lógicas subestructurales por ejemplo a la lógica lineal utilizada en informática en áreas como semántica operacional y programación lógica; las lógicas multivaluadas o difusa utilizadas en sistemas

inteligentes y deducción automática, que permite a partir de algunos datos encontrar otros desconocidos, la lógica relevante que toma en cuenta aspectos para la implicación que no son considerados en la lógica clásica, y pide por ejemplo, que en una implicación el antecedente y el consecuente estén relacionados, es decir que el antecedente sea realmente relevante para el consecuente.

3.1.3. Ejemplos de lógicas subestructurales formalizadas en sistemas de secuentes

- **Sistema de secuentes para la lógica proposicional clásica (LK)**

(Tomado de [18].

El lenguaje en este sistema es $L = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\}$.
Un secuente en LK es de la forma: $\alpha_1, ..., \alpha_m \Rightarrow \beta_1, ..., \beta_n$ con $m, n \geq 0$.
Las reglas de inferencia de LK son todas las reglas estructurales, las reglas para conectivos y la regla de corte que se enunciaron antes.
Las pruebas y la demostrabilidad de fórmulas en LK son definidas en el modo usual.

- **Sistema de secuentes para la lógica intuicionista (LJ)**

(Tomado de [18]). El lenguaje es el mismo de LK.
Los secuentes son de la forma: $\alpha_1, ..., \alpha_m \Rightarrow \beta$, donde $m \geq 0$ y β puede ser vacío.
Las reglas de inferencia en LJ son obtenidas a partir de las de LK asumiendo que Λ y Θ pueden ser vacíos y que Δ consiste de a lo más una fórmula.

- **Lógica Relevante**

La lógica relevante se obtiene a partir de la lógica proposicional eliminando las reglas de debilitamiento, fue propuesta en 1928 por el filósofo ruso Iván Orlov y toma en cuenta aspectos para la implicación que no son tenidos en cuenta en la lógica clásica, por ejemplo un aspecto que deja inconformidad en la lógica clásica es que siempre la implicación entre dos proposiciones falsas sea verdadera, por ejemplo: la proposición si la luna es de queso entonces 6 es un número primo es verdadera, pero 6 no es un número primo y el problema radica en que no hay una conexión entre entre el antecedente y el consecuente. En la lógica relevante la fórmula $A \to B$ no puede ser probada si A y B no tienen al menos una variable lógica en común, esto se conoce como el principio de la variable compartida. Por otro lado si $X, A \vdash B$ es válida entonces X y A deben ser relevantes para B y también no siempre de $X \vdash A$ se tiene $X, Y \vdash A$.

Otros matemáticos que han estudiado la lógica relevante son Ackermann, Churc, Anderson, Belnap y Dunn. Las anteriores ideas fueron tomadas de [7], [22] y [23].

- **Lógica lineal**

Una lógica subestructural en la cual se tiene el conectivo fusión y hay distinción entre $\top$ y 1, y $\bot$ y 0 es la lógica lineal, en la cual no se tienen las reglas de debilitamiento y contracción. Las hipótesis aquí son vistas como recursos que se deben usar exactamente una vez en una prueba. Los secuentes para la lógica lineal son iguales a los de la lógica clásica.

Los conectivos para la lógica lineal tienen, por así decirlo, dos versiones: una multiplicativa y una aditiva.

La presentación que aquí se hace de la lógica lineal corresponde al artículo [15]. Éste es un artículo que nos ayuda a entender un poco la existencia de conectivos multiplicativos y aditivos, allí se habla precisamente de dos sistemas derivados de la lógica clásica S_1 y S_2 en donde las reglas de introducción para $\wedge$ y $\vee$ difieren cuando no se tienen las reglas de debilitamiento y contracción.

En S_1 la conjunción se introduce mediante las reglas:

$$L1\wedge \quad \frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A\wedge B \Rightarrow \Delta} \qquad R1\wedge \frac{\Gamma_1 \Rightarrow A, \Delta_1 \quad \Gamma_2 \Rightarrow B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow A\wedge B, \Delta_1, \Delta_2}.$$

Y en S_2:

$$L2\wedge \ \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A\wedge B \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A\wedge B \Rightarrow \Delta} \qquad R2\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A\wedge B, \Delta}.$$

Aquí Γ y Δ son multiconjuntos de fórmulas, es decir conjuntos que pueden tener ocurrencias repetidas de fórmulas.

"En S_1 la introducción de la conjunción se da a partir de contextos diferentes, en cuanto al sistema S_2 la introducción de la conjunción es sensible con respecto al contexto, es decir, sólo podemos introducirla a partir de contextos fragmentados."

Para demostrar que las reglas de introducción para la conjunción en S_1 y en S_2 son equivalenes se hace uso de las reglas de debilitamiento y contracción, por ejemplo:

$R_1\wedge \Rightarrow R_2\wedge$:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma, \Gamma \Rightarrow A\wedge B, \Delta, \Delta}R1\wedge}{\Gamma \Rightarrow A\wedge B, \Delta} \Rightarrow \text{contr}.$$

Y para ver que $R_2\wedge \Rightarrow R_1\wedge$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \Rightarrow A, \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \Rightarrow B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow A, \Delta_1 \quad \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow B, \Delta_2}\text{débil} \Rightarrow}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow A, \Delta_1, \Delta_2 \quad \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow B, \Delta_1, \Delta_2}\text{débil} \Rightarrow}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow A\wedge B, \Delta_1, \Delta_2}R2\wedge$$

Como la lógica lineal carece de las reglas de debilitamiento y contracción entonces estas reglas de introducción serían diferentes. Una representa entonces la conjunción multiplicativa y la otra la conjunción aditiva

Es así entonces como se tienen para la lógica lineal los siguientes conectivos:

- Conjunción multiplicativa: también llamada tensor, es denotada por $\otimes$ o por $*$. La constante 1 actúa como una unidad para esta conjunción, esto es $\alpha \otimes 1 = 1 \otimes \alpha = \alpha$ y sus reglas como lo habíamos visto antes son:

$$L_{\otimes}\ \frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \otimes B \Rightarrow \Delta} \qquad R_{\otimes}\frac{\Gamma_1 \Rightarrow A, \Delta_1 \quad \Gamma_2 \Rightarrow B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow A \otimes B, \Delta_1, \Delta_2}.$$

- Conjunción aditiva: es denotada por & y su unidad es $\top$. Las reglas para ella son las mismas dadas al inicio de los sistemas de secuentes de Gentzen para la conjunción normal, estas son:

$$L_{\&}\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A\&B \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A\&B \Rightarrow \Delta} \qquad R_{\&}\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A\&B, \Delta}.$$

- Disyunción multiplicativa: se denota por $\wp$ se denomina par, su unidad es $\perp$ y sus reglas son:

$$L_{\wp}\frac{\Gamma_1, A \Rightarrow \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \Rightarrow \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A\wp B \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2} \qquad R_{\wp}\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A\wp B, \Delta}.$$

- Disyunción aditiva: se denota por $\oplus$ y su unidad es 0. Las reglas para ella son:

$$L_{\oplus}\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \oplus B \Rightarrow \Delta} \qquad R_{\oplus}\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B, \Delta} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B, \Delta}.$$

- Implicación lineal Multiplicativa: su símbolo es $\multimap$.

$$L_{\multimap}\frac{\Gamma_1, A \Rightarrow \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \Rightarrow \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \multimap B \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2} \qquad R_{\multimap}\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B, \Delta}.$$

- Implicación lineal Aditiva: su símbolo es Υ y sus reglas son:

$$L_{\Upsilon}\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A\Upsilon B \Rightarrow \Delta} \qquad R_{\Upsilon}\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A\Upsilon B, \Delta} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A\Upsilon B, \Delta}.$$

- Conectivos Exponenciales: como habíamos mencionado antes en la lógica lineal no se tienen las reglas estructurales de debilitamiento y contracción, es por ello que cuenta con dos operadores lineales o exponenciales ! y ? los que tienen similaridades con los conectivos $\square$ y $\diamondsuit$ usados en lógica modal y se encargan de la validez controlada de estas reglas (debilitamiento y contracción). Así cuando las fórmulas tienen como predecesor al operador ! esto significa que para ellas valen las reglas de debilitamiento y contracción a izquierda y para las fórmulas que tienen como predecesor a ? valen las reglas de debilitamiento y contracción a derecha. Las reglas para estos operadores son:

$$L_! \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta} \qquad R_! \frac{!\Gamma, A \Rightarrow ?\Delta}{!\Gamma \Rightarrow !A, ?\Delta}.$$

$$W_! \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta} \qquad C_! \frac{\Gamma, !A, !A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}.$$

$$L_? \frac{!\Gamma, A \Rightarrow ?\Delta}{!\Gamma, ?A \Rightarrow ?\Delta} \qquad R_? \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?A, \Delta}.$$

$$W_? \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?A, \Delta} \qquad C_? \frac{\Gamma \Rightarrow ?A, ?A, \Delta}{\Gamma, \Rightarrow ?A, \Delta}.$$

- Cuantificador Universal:

$$\frac{\Gamma \vdash F(a)}{\Gamma \vdash \forall x F(x)} \qquad \frac{F(a), \Gamma \vdash \Delta}{\forall x F(x), \Gamma \vdash \Delta}.$$

- Cuantificador Existencial:

$$\frac{\Gamma \vdash F(a)}{\Gamma \vdash \exists x F(x)} \qquad \frac{F(a), \Gamma \vdash \Delta}{\exists x F(x), \Gamma \vdash \Delta}.$$

- **Cálculo completo de Lambek (FL)**

Fue propuesto por Joachim Lambek en 1958 con el objetivo de modelar la sintaxis de idiomas, es conocido también como el cálculo sintáctico . En los años 50 una necesidad que se tenía era la de traducir textos de un idioma a otro, esto se empezó a desarrollar con ayuda de programas computacionales

de revisión gramatical (idiomas artificiales) y es así como el cálculo de Lambek nace para estudiar las combinaciones de categorías sintácticas, generar oraciones gramaticales y formalizar lo que se conoce como la lingüística de cómputo: una parte de la inteligencia artificial que se encarga de la compresión y producción de idiomas.
El cálculo de Lambek se usa como base lógica para la mayoría de las gramáticas categoriales. "Una categoría gramatical es el nombre que se le da en lingüística a ciertas teorías gramaticales basadas en formalismos lógicos y matemáticos "(vea [27]).

Este cálculo se obtiene a partir de LJ quitando todas las reglas estructurales y agregando reglas para $*$. En este sistema debido a la ausencia de las reglas de intercambio, resulta natural introducir dos símbolos para implicación / y \ que son conocidos como residuales a izquierda y a derecha respectivamente.(Podemos decir que el cálculo de Lambek cuenta entonces con tres operaciones binarias, una multiplicación $*$ y dos divisiones una hacia la izquierda y otra hacia la derecha / y \).

Las reglas estructurales para estos residuales son:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \qquad \Pi, \beta, \Sigma \Rightarrow \delta}{\Pi, \beta/\alpha, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \delta}(/ \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \beta/\alpha}(\Rightarrow /).$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \qquad \Pi, \beta, \Sigma \Rightarrow \delta}{\Pi, \Gamma, \alpha\backslash\beta, \Sigma \Rightarrow \delta}(\backslash \Rightarrow) \qquad \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha\backslash\beta}(\Rightarrow \backslash).$$

En sistemas en donde se tiene la regla de intercambio se puede ver que β/α y $\alpha\backslash\beta$ son equivalentes (tomado de [18]):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha \qquad \beta \Rightarrow \beta}{\alpha, \alpha\backslash\beta \Rightarrow \beta}(\backslash \Rightarrow)}{\alpha\backslash\beta, \alpha \Rightarrow \beta}(\text{inter} \Rightarrow)}{\alpha\backslash\beta \Rightarrow \beta/\alpha}(\Rightarrow /)$$

Similarmente se ve que $\beta/\alpha \Rightarrow \alpha\backslash\beta$.
En tal caso β/α y $\alpha\backslash\beta$ se denotan como $\alpha \rightarrow \beta$.

Proposición 44. *En FL las siguientes afirmaciones son equivalentes. Para todos α, β, γ fórmulas:*

1. $\alpha * \beta \Rightarrow \gamma$ *es demostrable.*

2. $\alpha \Rightarrow \gamma/\beta$ *es demostrable.*

3. $\beta \Rightarrow \alpha\backslash\gamma$ *es demostrable.*

Demostración.

$(1 \Rightarrow 2)$

$$\dfrac{\dfrac{\alpha * \beta \Rightarrow \gamma}{\alpha, \beta \Rightarrow \gamma}}{\alpha \Rightarrow \gamma/\beta}(\Rightarrow /).$$

$(2 \Rightarrow 1)$

$$\dfrac{\alpha \Rightarrow \gamma/\beta \qquad \dfrac{\beta \Rightarrow \beta \qquad \gamma \Rightarrow \gamma}{\gamma/\beta, \beta \Rightarrow \gamma}(/ \Rightarrow)}{\alpha, \beta \Rightarrow \gamma}(\text{corte}).$$

$(1 \Rightarrow 3)$

$$\dfrac{\dfrac{\alpha * \beta \Rightarrow \gamma}{\alpha, \beta \Rightarrow \gamma}}{\beta \Rightarrow \alpha\backslash\gamma}(\Rightarrow \backslash)$$

$(3 \Rightarrow 1)$

$$\dfrac{\dfrac{\beta \Rightarrow \alpha\backslash\gamma \qquad \dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha \qquad \gamma \Rightarrow \gamma}{\alpha, \alpha\backslash\gamma \Rightarrow \gamma}(\backslash \Rightarrow)}{\alpha, \beta \Rightarrow \gamma}(\text{corte}).}{\alpha * \beta \Rightarrow \gamma}$$

Veamos algunas de las lógicas que se derivan a partir de FL agregándole reglas estructurales, ellas serán conocidas con el nombre de lógicas subestructurales básicas. Para esto i, d y c denotarán las reglas (inter$\Rightarrow$),(débil$\Rightarrow$) y (contr $\Rightarrow$) respectivamente.

- FL_i: denota a FL agregándole la regla de intercambio a izquierda, que es igual a la lógica lineal intuicionista (multiplicativa, aditiva).

- FL_{id}: se agrega a FL la regla de intercambio y debilitamiento (a izquierda). FL_{id} se conoce como la lógica monoidal, extensiones de ella son la lógica difusa y la lógica de muchos valores de Lukasiewicz.

- CFL_i: se obtiene de LK quitando las reglas de debilitamiento y contracción, es equivalente a la lógica lineal, multiplicativa aditiva introducida por Girard.

- CFL_{id} y CFL_{ic} se obtienen de CFL_i agregándole las reglas de debilitamiento y contracción respectivamente. CFL_{ic} corresponde al sistema LR, conocido como la lógica relevante sin la ley distributiva.

Las lógicas anteriores derivadas de **FL** se denominarán **lógicas subestructurales básicas**.

3.2. Correspondencia entre lógicas subestructurales y retículos residuados

Se sigue para esta parte las ideas expuestas en [18].
El objetivo en esta sección es mostrar que los retículos residuados son la contraparte algebraica para las lógicas subestructurales, es decir que son sus semánticas asociadas. Se mirará primero cómo se hace la interpretación de las fórmulas en FL-álgebras mediante las valuaciones y se definirá validez de fórmulas en las FL-álgebras, lo que ayudará a demostrar el teorema de validez y luego mediante el argumento general de construcción de álgebras de Lindenbaum se demostrará la completitud.

3.2.1. FL-álgebras e interpretación de fórmulas en FL-álgebras

Recordemos que una FL-álgebra es un retículo residuado con un elemento fijo 0 (no necesariamente el mínimo en el retículo). (Vea definición 22 de la página 28).

Una FL-álgebra conmutativa A será llamada una FL_i-álgebra, una FL-álgebra idempotente creciente, una FL_c-álgebra, una FL-álgebra conmutativa idempotente creciente una FL_{ic}-álgebra y, una FL-álgebra integral una FL_{id}-álgebra.
Si una FL_i-álgebra P satisface $\neg\neg x \leq x$ para todo $x \in P$ ésta es llamada una CFL_i-álgebra, y similarmente se definen CFL_{ic}-álgebras y CFL_{id}-álgebras.

Interpretación de fórmulas en una FL – álgebra.

Lo primero para establecer la conexión entre las lógicas subestructurales básicas y las FL álgebras, es interpretar las fórmulas en una FL-álgebra.
Una valuación ν en una FL-álgebra P es una función del conjunto de todas las variables proposicionales en el conjunto P. Cada valuación se extiende inductivamente desde el conjunto de todas las fórmulas a P de la siguiente manera:

$\nu(1) = 1$ y $\nu(0) = 0$
$\nu(\top) = \top$ y $\nu(\bot) = \bot$ (cuando el lenguaje contiene $\top$ y $\bot$ y P es acotado).
$\nu(\alpha \wedge \beta) = \nu(\alpha) \wedge \nu(\beta)$
$\nu(\alpha \vee \beta) = \nu(\alpha) \vee \nu(\beta)$
$\nu(\alpha * \beta) = \nu(\alpha) \cdot \nu(\beta)$
$\nu(\alpha \backslash \beta) = \nu(\alpha) \backslash \nu(\beta)$
$\nu(\alpha / \beta) = \nu(\alpha) / \nu(\beta)$.

3.2.2. Validez y completitud

Validez : una fórmula α es válida en P si $\nu(\alpha) \geq 1$, para cualquier valuación ν en P.

Un secuente S, $\alpha_1, ..., \alpha_m \Rightarrow \beta$ es válido en P, esto se denota $\models_P S$ si y sólo si $\nu(\alpha_1)...\nu(\alpha_m) \leq \nu(\beta)$ es válida para cualquier valuación ν en P o, en el caso de FL_i-álgebras si la fórmula $(\alpha_1 * ... * \alpha_m) \rightarrow \beta$ es válida. Se asume que $\nu(\alpha_1)...\nu(\alpha_m) = 1$ si $m = 0$, y $\nu(\beta) = 0$ cuando β es vacío. Para P una FL-álgebra conmutativa, un secuente de la forma $\alpha_1, ..., \alpha_m \Rightarrow \beta_1, ..., \beta_n$ es válido en P si y sólo si $\nu(\alpha_1) \cdot ... \cdot \nu(\alpha_m) \leq \nu(\beta_1) + ... + \nu(\beta_n)$ vale para cualquier valuación ν en P. Aquí $x + y := \neg(\neg x \cdot \neg y)$.

Teorema 45. *(Validez y completitud). Para cualquier secuente S, S es demostrable en FL si y sólo si éste es válido en toda $FL-$álgebra. Esto vale también para las otras lógicas subestructurales básicas y las correspondientes clases de FL-álgebras.*

Bosquejo de la demostración. Supongamos que $\vdash_{FL} S$, para demostrar que $\models_{FL} S$ debemos ver que para cualquier $FL-$álgebra P y cualquier valuación $\nu : V \to P$ donde V representa el conjunto de todas las variables proposicionales, se tiene que $\models_P S$.
Notemos que la validez de un secuente en FL depende de los axiomas y las reglas estructurales que se utilicen en su demostración. Así, la demostración de la validez de un secuente en una FL-álgebra se puede hacer por inducción en la longitud de su prueba y entonces habrá que demostrar que todos los axiomas de FL (que sólo es uno) valen en P y además que si las premisas de una regla de FL valen en P entonces también vale la conclusión.
El axioma identidad es válido en P, ya que siempre vale que $\nu(C) \leq \nu(C)$.

Veamos que se tiene también la regla de corte. Las premisas de la regla de corte son: $\Gamma \Rightarrow \alpha$ y $\alpha \Rightarrow \beta$, así $\nu(\Gamma) \leq \nu(\alpha)$ y $\nu(\alpha) \leq \nu(\beta)$ por transitividad del orden se tiene que $\nu(\Gamma) \leq \nu(\beta)$, esto es el secuente $\Gamma \Rightarrow \beta$ es válido en P.
Veamos que las reglas estructurales para $*$ también son válidas.
La premisa para $(* \Rightarrow)$ es: $\alpha, \beta \Rightarrow \delta$ si esta vale en P entonces $\nu(\alpha) \cdot \nu(\beta) \leq \nu(\delta)$, esto es $\nu(\alpha * \beta) \leq \nu(\delta)$, que equivale a $\alpha * \beta \Rightarrow \delta$.

De otro lado si las premisas para $(\Rightarrow *)$ que son $\Gamma \Rightarrow \alpha$ y $\Sigma \Rightarrow \beta$, valen en P, entonces $\nu(\Gamma) \leq \nu(\alpha)$ y $\nu(\Sigma) \leq \nu(\beta)$, como $\cdot$ es monótona $\nu(\Gamma) \cdot \nu(\Sigma) \leq \nu(\alpha) \cdot \nu(\beta)$, de donde $\nu(\Gamma * \Sigma) \leq \nu(\alpha * \beta)$, esto es $\Gamma, \Sigma \Rightarrow \alpha * \beta$.

Habría también que verificar las reglas para los otros conectivos. Veamos algunas:

Para la conjunción, las premisas son: $\Gamma \Rightarrow \alpha$ y $\Gamma \Rightarrow \beta$ esto es $\nu(\Gamma) \leq \nu(\alpha)$ y $\nu(\Gamma) \leq \nu(\beta)$, luego $\nu(\Gamma) \leq \nu(\alpha) \wedge \nu(\beta) = \nu(\alpha \wedge \beta)$, y así $\Gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta$. De otro lado de $\alpha \Rightarrow \Delta$ se tiene que $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \Delta$ pues $\nu(\alpha \wedge \beta) \leq \nu(\alpha) \leq \nu(\Delta)$. Para la disyunción es similar. Veamos para el residual a izquierda $(/)$, la premisa es:

$\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta$, es decir $\nu(\Gamma) \cdot \nu(\alpha) \leq \nu(\beta)$ y como $\cdot$ y / es un par residuado entonces: $\nu(\Gamma) \leq \nu(\beta)/\nu(\alpha)$, así $\Gamma \Rightarrow \beta/\alpha$. Para el residual a derecha es similar.

La otra parte del teorema (completitud) se demuestra usando el argumento general de las álgebras de Lindenbaum. La idea de este argumento consiste en construir una FL-algebra P a partir de todas las fórmulas de FL y una valuación de tal forma que aquellas fórmulas que son válidas en P son precisamente los teoremas de FL. Presentamos la construcción de una tal álgebra de manera general y la demostración de la completitud será entonces un caso particular de esta construcción.

- **Álgebras de Lindenbaum**

(Tomado de [23]). El álgebra de Lindenbaum P_C de un sistema G es definida como sigue:

Los elementos son las clases de equivalencia de teoremas: $[A] = \{B : A \dashv\vdash B\}$.

El orden $\leq$ se define por $[A] \leq [B]$ si y sólo si $A \vdash B$.

Para un operador binario $\circ$ en G, se define $[A] \circ [B] = [A \circ B]$, para uno unario $\circ[A] = [\circ A]$ y para una constante $\circ$, $\circ = [\circ]$.

El álgebra de Lindenbaum queda bien definida (independientemente de los representantes): si $[A] = [A']$ y si $A \vdash B$ entonces por regla de corte $A' \vdash B$. También si $[A] = [A']$ y $[B] = [B']$ entonces $A \circ B \dashv\vdash A' \circ B'$. Para operadores unarios también si $[A] = [A']$, entonces $\circ A \dashv\vdash \circ A'$.

Afirmación 3. *Si $\models_P S$ para toda FL-álgebra P, entonces $\vdash_{FL} S$.*

Si $\models_P S$ entonces en particular para cualquier valuación de FL en P_{FL}, $\models_{P_{FL}} S$. Consideremos la valuación dada por $\nu(p) = [p]$, por inducción en fórmulas se demuestra que para toda $S \in FL$, $\nu(S) = [S]$, luego si $\models_{P_{FL}} S$, entonces $[S] \geq [1]$, esto es $1 \vdash_{FL} S$, por lo tanto $\vdash_{FL} S$ (1 es la secuencia vacía a izquierda).

En particular en las álgebras de Heyting, como $\cdot$ coincide con $\wedge$ y también como el 1 coincide con $\top$ entonces para α, α es válida en cada álgebra de Heyting, se denota $\vdash_H \alpha$, si, para cada álgebra de Heyting H y cada valuación $\nu : V \to H$ se tiene que $\nu(\alpha) = 1$.

Veamos como ejemplo ilustrativo que en las álgebras de Heyting no se satisface $\alpha \vee \neg\alpha$. En consecuencia en el cálculo proposicional intuicionista no se deduce $\alpha \vee \neg\alpha$.

(Tomado de [18]). Consideremos $Ab(\mathbb{R})$ el álgebra de Heyting de los abiertos usuales de la recta real, y sea $\nu : V \to Ab(\mathbb{R})$ la función constante definida como $\nu(p) = (0, \infty)$, para $p \in V$, $\nu(p \vee \neg p) = \nu(p) \vee \neg\nu(p) = \mathbb{R} - \{0\} \neq \top$, luego $\alpha \vee \neg\alpha$ no se satisface en ésta álgebra de Heyting.

Teorema 46. *(Tomado de [18]). Sea L una lógica subestructural básica. Entonces, para cualquier fórmula α, α es demostrable en L si y sólo si ésta es válida en toda L-álgebra completa.*

Demostración. Por el teorema anterior sólo hay que demostrar que si α es válida en toda L-álgebra completa, entonces α es válida en toda L-álgebra, lo que usamos para hacerlo es que cualquier lógica subestructural L, puede ser embebida en una L-álgebra completa, mediante la técnica de completamiento de MacNeille (vea sección 1.4, en la página 17), y de esta forma si α no es válida en una lógica subestructural L, tampoco lo será en su completamiento y con esto quedaría demostrado el teorema.
Del anterior teorema vemos entonces que nos podemos restringir a estudiar el resultado sólo en las L-álgebras completas es decir en los cuantales unitarios.

3.3. Semánticas para la lógica lineal

"Los cuantales son a la lógica lineal como las álgebras de Heyting son a la lógica intucionista". (Tomado de [1]).

La lógica lineal (conmutativa) como se había dicho antes se obtiene a partir de la lógica clásica eliminando las reglas de contracción y debilitamiento. Si además eliminamos la regla de intercambio obtenemos la lógica lineal no-conmutativa de Girard. Los cuantales proporcionan una semántica para la lógica lineal no conmutativa y los cuantales conmutativos proporcionan una semántica para la lógica lineal conmutativa. Se interpretan entonces los conectivos aditivos $\oplus, \wedge$ por $\vee$ y $\wedge$ respectivamente y la conjunción multiplicativa $\otimes$ por la multiplicación.

Cuando no tenemos la regla de intercambio las implicaciones a derecha e izquierda se interpretarán como las operaciones de residuación:

$$a \setminus b = max\{x : a \cdot x \leq b\} \qquad \text{y} \qquad b/a = \{x : x \cdot a \leq b\}.$$

Cuando el cuantal es multiplicativo los residuales coinciden y entonces tendremos una interpretación de la implicación lineal $\multimap$.

Por otro lado tenemos también la semántica de pretopologías para la lógica lineal. Dada una pretopología $\mathcal{F} = (S, \cdot, 1, \lhd_{\mathcal{F}})$ consideremos el operador de clausura que asigna a cada subconjunto U de S el subconjunto $\mathcal{F}U = \{a \in S : a \lhd_{\mathcal{F}} U\}$. Estos subconjuntos $\mathcal{F}U$ son llamados $\mathcal{F}-$saturados y son adoptados para la interpretación de fórmulas. La noción de consecuencia entre subconjuntos saturados es justamente la inclusión, que coincide con la relación de precubrimiento $\lhd_{\mathcal{F}}$, así esta será la interpretación para la consecuencia entre fórmulas $\vdash$. La disyunción y la conjunción aditiva $\oplus$ y $\wedge$ son interpretadas mediante $\cup$ e $\cap$ entre subconjuntos $\mathcal{F}-$saturados y la conjunción multiplicativa $\otimes$ por $\cdot_{\mathcal{F}}$. Las constantes proposicionales $\top, 0$ y 1 son interpretadas por $\mathcal{F}S$, $\mathcal{F}\emptyset$ y $\mathcal{F}\{1\}$ respectivamente. Y la implicación queda interpretada por:

$$U \to_{\mathcal{F}} V = \{a \in S : a \cdot U \lhd_{\mathcal{F}} V\}.$$

Para la negación se escoge un elemento arbitrario en $Sat(\mathcal{F})$ que denotaremos $\perp_{\mathcal{F}}$ y $\neg\mathcal{F}U \equiv U \to_{\mathcal{F}} \perp_{\mathcal{F}}$. Para más información acerca de las semánticas para la lógica lineal y para la demostración de validez y completitud puede revisarse [1], [15], [28] y [34].

Bibliografía

[1] ABRAMSKY, Samson, VICKERS, Steven "Quantales, observational logic and process semantics", *Math. Struct. in Computer Science* 3 (1993):161-227.

[2] BAIER, Jorge, "Un sistema deductivo para LP ", *Pontificia Universidad Católica de Chile* (http://web.ing.puc.cl/ jabaier/iic2212/sld.pdf).

[3] BALBES, Raymond, *Distributive Lattices*, University of Missouri, Press, 1974.

[4] BATTILOTTI, Giulia, SAMBIN,Giovanni, "Pretopologies and a uniform presentation of sup-lattices, quantales and frames", *Ann. Pure Appl.Logic* 137 (2006):30-61. (http://www.math.unipd.it/ sambin/txt/BS2003.pdf).

[5] BLYTH, T.S., JANOWITZ, M.F., *Residuation theory*, Oxford: Pergamon Press, 1972.

[6] DE CASTRO,R., RUBIANO, G., *Una revisión del completamiento de Dedekind MacNeille*, Miscelánea matemática, Sociedad Matemática Mexicana, 37 (2003): 65-76 1972.

[7] DOSEN, Kosta, "A Historical Introduction to Substructural Logics", *In Substructural Logics* Oxford University Press, Oxford, 1993, pp. 1-30.

[8] GALATOS,N.,JIPSEN,P.,KOWALSKI,T.,ONO, H.,"Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at Substructural Logics", *Studies in Logic and the foundations of mathematics* vol. 151.

[9] JIPSEN,P., TSINAKIS,C., "A survey of residuated lattices", *Ordered Algebraic Structures.*, J. Martinez (eds.), Dordrecht, (2002): 19-56.

[10] JOHNSTONE, Peter T., *Stone Spaces*, Cambridge: University Press, 1982.

[11] LEGRIS, Javier, "Demostraciones formales y pensamiento estructural", En: MARTINS,R.A., MARTINS L.A.C.P, SILVA,C.C., *Filosofía e história da ciência no Cono Sul: 3°Encontro*, Campinas: FERREIRA, J.M.H. (eds.), 2004, p.p. 218-225.

[12] LEMUS, Ernesto, "Pronombres clíticos Españoles: Un análisis lingüístico-matemático ",*Hispanismo Cervantes* (http://hispanismo.cervantes.es/documentos/11773-Pronombres

[13] MULVEY, C.J. "Quantales", en : Hazewinkel, Michiel, *Encyclopaedia of mathematics,third supplement*, Amsterdam: Kluwer, 2002, pp. 312-314.

[14] MURESAN, Claudia, "The Reticulation of a Residuated Lattice",*Bull.Math.Soc.Sci.Math.Rumanie*Tomo 51 (99) No.1 (2008): 47-65.(http://egovbus.net/rdl/articole/No1Art52.pdf).

[15] NUNEZ,María da Paz, "Consideraciones generales acerca de la lógica lineal", *Energeia* 1(2) (2002): 217-230.

[16] ONO, Hiroakira, "Closure Operators and Complete Embeddings of Residuated Lattices", *Studia Logica* 74 (2003):427-440. (http://www.jaist.ac.jp/is/labs/ono-ishihara-lab/ono-lab/Paper/50ysl.pdf).

[17] ONO, Hiroakira, "Semantics for Substructural Logics", *Studies in Logic and Computation* Oxford University Press 2 (1993): 259-291.

[18] ONO, Hiroakira, "Substructural logics and residuated lattices - an introduction", *Trends in logic* 20 (2003):177-212. (http://www.jaist.ac.jp/is/labs/ono-ishihara-lab/ono-lab/Paper/50ysl.pdf).

[19] OOSTRA, Arnold , "Algebras de Heyting", Bogotá: *XIV Coloquio Distrital de Matemáticas*, 1997.

[20] RESENDE, Pedro, "Lectures on étale groupoids, inverse semigroups and quantales", *For the GAMAP IP Meeting, Antwerp.*(2006) (http://www.math.ist.utl.pt/pmr/poci55958/gncg51gamapversion2.pdf).

[21] RESENDE, Pedro, "Quantales and observational semantics", *Departamento de Matemáticas. Instituto Superior Técnico.* (http://sqig.math.ist.utl.pt/pub/ResendeP/00-R-qos.pdf).

[22] RESENDE, Pedro, "Quantales as geometric objects: symmetry beyond grupoids?", *CIM Bulletin* 18 (2005):11-15.

[23] RESTALL, Greg, *Introduction to substructural logics*, London: Routledge, 2000.

[24] RESTALL, Greg, *Substructural Logics*,*The Stanford Encyclopedia of Philosophy*Summer Edition (2011). (http://plato.stanford.edu/archives/sum2011/entries/logic-substructural).

[25] ROMERO,Luisa María,"Estudio de las reglas de inferencia deductiva para aplicarlas en los analizadores sintácticos,"*Actas del Encuentro de matemáticos andaluces*(2001):721.

[26] ROSENTHAL, Kimmo I, NIEFIELD, Susan "Constructing locales from quantales ", *Mathematical Proceedings of the London Philisophical Society* 104 (1988):215-234.

[27] SALGUERO, Francisco, *El doble origen de las gramáticas categoriales*,*Universidad de Sevilla.*

[28] SAMBIN, Giovanni, "Pretopologies and completeness proofs", *J. Symbolic Logic* 60 (1995):861-878.

[29] SAMBIN, Giovanni, "The semantics of Pretopologies", *In Substructural Logics* (1993):293-307.

[30] S.Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer Verlag, 1998.

[31] VALENTINI, Silvio, "Representation theorems for quantales", *Math. Log. Q.* 40 (1994):182-190.

[32] VEGA, Luis, "La lógica del siglo XX en España (Notas para una discusión de la situación actual de la lógica en los estudios de filosofía)", *Trabajo de investigación BFF 2002-03856* (2004).

[33] WARD, M, y DILWORTH, R.P, "Residuated lattices", *Transactions of the American Mathematical Society* 45 (1939):335-354.

[34] YETTER, D. N, "Quantales and (noncommutative) linear logic", *Journal of Symbolic Logic* 55 (1990): 41-64.