GEOMETRÍAS NO-EUCLIDIANAS

GEOMETRÍAS NO-EUCLIDIANAS

Débora María Tejada
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

**Friedrich Gauss, 1777-1855; Juan Bolyai, 1802-1860;
Nikolai Lobachebsky, 1793-1856; Bernhard Riemann, 1826-1856**

Resumen: Relatamos aquí una de las piezas más emocionantes de la Historia de las Matemáticas: El descubrimiento de las Geometrías No-Euclidianas. Los actores principales, Gauss, Bolyai, Lobachebsky y Riemann jugaron su papel sin ser conscientes de su importancia. Solamente después de la muerte de Riemann la comunidad matemática entendió su legado.

Marco Histórico:

La historia de la aparición de las Geometrías No-Euclidianas, corresponde a una época revolucionaria en la historia de la Matemática, no solamente porque estas geometrías se desarrollaron prácticamente en el aire, sin un apoyo en la "realidad" de ese momento, sino porque, también, su aparición cuestiona lo que es un sistema axiomático, lo que es un axioma independiente y lo que significa la consistencia de una teoría matemática. Estas preguntas estaban presentes en el momento de la crisis de los fundamentos de la Matemática (a finales del Siglo XIX y comienzos del XX) y darían comienzo, un poco más adelante, a la estructuración de la Lógica Matemática.

A comienzos del Siglo XIX, la Matemática se encontraba madura para tratar de entender aquellos conceptos que se venían utilizando en las distintas ciencias, pero que realmente no se comprendían del todo. Por ejemplo, desde los trabajos de Fourier, la pregunta de lo que era una función no tenía aún una respuesta clara y formal. Así mismo, el concepto de infinito utilizado regularmente en el Cálculo necesitaba urgentemente ser aclarado.

La Estática, la Mecánica Celeste, la Geodesia, el Cálculo Diferencial, la Geometría Analítica estaban apoyadas comodamente sobre la Geometría Euclidiana. Una base aparentemente firme y sólida como para sostener prácticamente todos los conocimientos matemáticos de la época. Nada estaba más lejos de la realidad. El quinto postulado estaba en equilibrio inestable. Y es, precisamente, esta inestabilidad la que permitiría el surgimiento de las Geometrías No-Euclidianas.

La Geometría Euclidiana (o Plana), como su nombre lo indica se le debe a Euclides (300 a.c.). El Libro I de los Elementos de Euclides, recoge los conocimientos de Geometría Plana de la época en 48 Proposiciones, las cuales se **deducen lógicamente** de un conjunto de 23 definiciones, 5 axiomas y 5 postulados. Se dice que éste es el primer tratado de la Matemática pura. El método **axiomático y deductivo** empleado por Euclides es el preferido por la mayoría de los matemáticos de hoy en día, pues garantiza la solidez relativa de la teoría que lo utilice.

En la Geometría Euclidiana, las 23 definiciones explican los conceptos más básicos como "punto", "línea", "plano", "círculo", etc. Los 5 axiomas recogen principios que se toman como verdades evidentes en cualquier ciencia y los 5 postulados establecen las verdades evidentes que cumplen algunos de los conceptos básicos incluídos en las 23 definiciones, son por tanto, restringidos a la Geometría Plana. Escribimos la lista de los axiomas y postulados a continuación.

Axiomas:

1. Las cosas que sean iguales a la misma cosa son iguales entre sí.
2. Si a cantidades iguales se le suman cantidades iguales, los totales serán iguales.
3. Si a cantidades iguales se le restan cantidades iguales, los resultados serán iguales.
4. Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.
5. El todo es mayor que una parte.

Postulados:

1. Una recta puede trazarse desde un punto cualquiera hasta otro.
2. Una recta finita puede prolongarse continuamente y hacerse una recta ilimitada o indefinida.
3. Una circunferencia puede describirse con un centro y una distancia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. *Si una recta que corte a otras dos, forma con éstas ángulos interiores del mismo lado de ella que sumados sean menores que dos rectos, las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortarán del lado en que dicha suma sea menor que dos rectos.*

Observamos que el quinto postulado difiere de los otros postulados por su especial complejidad. Esta característica llamó la atención de los matemáticos desde el principio, pues lo colocaba más cerca de las proposiciones que de los postulados. El mismo Euclides lo sabía y lo introdujo solamente después de la Proposición 28; quizás esperando poder deducirlo lógicamente de los otros postulados. Lo introduce justo en el momento en el cual ya le era inevitable tener que usarlo.

Muchos fueron los matemáticos que se quemaron las pestañas tratando de probar o de simplificar este postulado. Como muestra tenemos a: Ptolomeo (S. II a.c.); Proclus (412-485); Nadir-al-din-al-Tusi (1201-1274); Saccheri (1667-1733); Lambert (1728-1777); D'Alembert (1717-1783); Lagrange (1736-1813); Legendre (1752-1833); Playfair (1748-1819); Laplace (1749-1827); Farkas Bolyai (1775-1856); Wachter (1792-1818); Schweikart (1780-1859); Taurinus (1794-1874).

Algunos de ellos estaban convencidos de que dicho postulado **no era independiente** de los otros cuatro, es decir que sería posible deducirlo de ellos. Proclus afirmó que dicho postulado debía ser posible demostrarlo a partir de los otros, ya que su recíproco era la Proposición 17. Otros trataron de reemplazarlo por enunciados equivalentes y más evidentes, restándole complejidad y acercándolo a los otros postulados. Hoy en día, utilizamos como quinto postulado el enunciado equivalente reencontrado por Playfair en el Siglo XVII (Proclus ya lo había utilizado). Este dice: *"Por una punto dado exterior a una recta sólo puede trazarse otra (única) paralela a ella"*.

Los trabajos de Saccheri y de Lambert fueron especialmente importantes en el descubrimiento de las Geometrías No-Euclidianas, es decir, Geometrías donde el quinto postulado no es supuesto como cierto.

Tanto Saccheri como Lambert se empeñaron en demostrar la no independencia del quinto postulado. Trataron infructuosamente de demostrarlo, y en su camino descubrieron muchos de los teoremas de las Geometrías No-Euclidianas. Por ello son considerados como precursores.

Saccheri trabajó con la afirmación siguiente, la cual es equivalente al quinto postulado: *"Si en un cuadrilátero un par de lados opuestos son iguales y si los ángulos adyacentes al tercer lado son rectos, entonces los otros dos ángulos también son rectos"*. Sin dificultad probó que los otros dos ángulos son iguales, y en seguida empleando el método de demostración "por el absurdo" consideró tres posibilidades:

A) Los ángulos son agudos.
B) Los ángulos son rectos. (Posibilidad equivalente al quinto postulado de Euclides)
C) Los ángulos son obtusos.

Él sabía que si desechaba las posibilidades A) y C) quedaría probada la B), es decir, probaría el quinto postulado de Euclides. Teniendo en cuenta el Postulado 2, que dice que toda recta se puede extender ilimitadamente, Saccheri probó la imposibilidad de C) y cometiendo varios errores probó la imposibilidad de A), concluyendo, erróneamente, que el postulado de Euclides era cierto. Se cree que Saccheri se dió cuenta de su error y retuvo la publicación de su libro. Éste se publicó sólo después de su muerte.

Por su parte, Lambert trabajó con el enunciado: *"Si en un cuadrilátero tres de sus ángulos son rectos, el cuarto también lo es"*, éste también es equivalente al quinto postulado. En su recorrido fue más allá que Saccheri, pues encontró más teoremas de las Geometrías No-Euclidianas, pero su empeño por demostrar el quinto postulado lo llevó, igualmente, a cometer errores y a concluir falsamente que el quinto postulado no era independiente. Este error se los cobraría la Historia al llamarlos solamente precursores y no descubridores de las Geometrías No-Euclidianas.

Algunos de los sorprendentes teoremas encontrados por Saccheri y Lambert se refieren a la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Por ejemplo:

1) En el caso de la posibilidad A), la suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor que 180°.
2) En el caso de la posibilidad C), la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor que 180°.

En la Geometría Euclidiana o en la posibilidad B) se tiene que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° .

Como habíamos dicho, Lambert avanza un poco más y encuentra por ejemplo que en el caso de la posibilidad A), el área de un triángulo es proporcional al número Π menos la suma de sus ángulos. Esta cantidad se llama el defecto del triángulo. En cambio en la Geometría de Euclides, el área depende del tamaño de los lados y no de los ángulos.

Tal insistencia para demostrar el quinto postulado se veía fortalecida por las consideraciones filosóficas de Kant (1724-1804) quien en su "Crítica de la razón pura" (1781) sostenía que el espacio euclidiano es "inherente en la estructura de nuestra mente" y declaraba, aún más, que el concepto de espacio (euclidiano) no es empírico sino que es una necesidad inevitable en el pensamiento humano.

Este es el marco histórico en el cual Bolyai y Lobachebsky se atreven a negar públicamente el quinto postulado y construyen con su negación (independientemente) una nueva geometría, tan consistente como la de Euclides, aunque en vida nunca lo supieran.

Quizás un poco más anticipadamente, Gauss (1777-1855) ya había hecho lo mismo en su mente, pero el temor al aullido de los Beocios y a ser el centro de polémica contradiciendo a los kantianos, le impidieron escribir y publicar sus resultados. Se sabe de esto por cartas personales fechadas en 1817 (a Olbers), en 1824 (a Taurinus) y en 1829 (a Bessel).

A continuación, nos detendremos en las vidas de Juan Bolyai, Nikolai Lobachebsky y Friedrich Riemann. Mostraremos tangencialmente el papel jugado por Karl F. Gauss en esta pieza histórica. Al mismo tiempo, conoceremos un poco del significado de las geometrías creadas por estos actores.

János (Juan) Bolyai

(15 de diciembre de 1802, Kolozsvar, Hungría, hoy Cluj, Rumania –
27 de enero de 1860 Marosvárárhely, Hungría, hoy Tirgu-Mures, Rumania).

Su padre Farkas (Wolfgang) Bolyai, era también matemático y había sido compañero de Gauss en la Universidad. Se dice de él que fue el primer matemático húngaro que obtuvo resultados originales. Podemos ubicarlo en la lista de los matemáticos empeñados en probar el quinto postulado. Por supuesto, fue el primer instructor de Juan, quien ya a los 13 años dominaba el Cálculo y la Mecánica Analítica.

Bolyai estudió en el Colegio Real de Ingeniería en Viena entre los años 1818 al 1822. Ya en ese entonces, la matemática ocupaba gran parte de su tiempo y, quizás influenciado por su padre, trataba, también, de demostrar el quinto postulado.

Luego pasó al Cuerpo de Ingeniería de la Armada Austro-Húngara. Allí logró distinguirse entre sus compañeros por ser un enérgico soldado, un experto espadachín, violinista y bailarín. Su personalidad era pendenciera, aunque su padre fue el único científico que lo entendió durante su vida, el estado natural entre ellos era de pelea y de discusión. Estando en el Cuerpo de Ingeniería se batió en duelo con trece compañeros con la condición de que entre duelo y duelo, si ganaba, le dejaran tocar una pieza de violín. ¡Tocó las trece piezas! En esa época aprendió 9 lenguas extranjeras, entre ellas el Chino y el Tibetano.

Cuando su padre, se dio cuenta que estaba tratando de probar el quinto postulado le advierte en una carta de 1820:

"Por amor de Dios te lo ruego, olvídalo. Témelo como a las pasiones sensuales, porque lo mismo que ellas, puede llegar a absorber todo tu tiempo y privarte de tu salud, de la paz del espíritu y de la felicidad en la vida. Este abismo oscuro puede, quizás devorar unos mil Newtons, uno sobre otro, nunca habrá luz sobre la tierra."

Sin embargo, Bolyai no le hace caso y por esa misma época llega al convencimiento de la independencia del quinto postulado, es decir, de la imposibilidad de probarlo a partir de los otros postulados. Para 1823, según carta a su padre, se ve claro que ya ha madurado sus ideas.

"He resuelto publicar un trabajo sobre la teoría de las paralelas, tan pronto como ponga el material en orden... Todavía no he completado el trabajo... pero he hecho tan maravillosos descubrimientos que he sido prácticamente aplastado por ellos y sería la causa de continuo remordimiento dejarlos perder... He creado un universo nuevo de la nada..."

Ante esta decisión, su padre, en forma premonitoria, lo alienta a escribir:

"Si es cierto que has llegado a la solución del problema, hay que publicarlo rápidamente por dos razones: primero porque las ideas pasan fácilmente de uno a otro, quien pudiera anticiparse a la publicación; y segundo porque parece cierto que muchas cosas tienen su época, en las cuales ellas son encontradas al mismo tiempo en distintas partes, así como las violetas aparecen en primavera en todos lados."

Después de superar muchos inconvenientes económicos, su trabajo lo publica en 1832 como un apéndice (de un libro de su padre) de 26 páginas titulado "Apéndice que exhibe la ciencia del espacio absolutamente verdadera; esto es la independencia de la verdad o falsedad del Axioma XI de Euclides (a priori indecidible para siempre): a la que se adjunta -en caso de falsedad- una cuadratura geométrica del círculo" ("Scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem: adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica"). Este título se ha traducido modernamente como "La Ciencia Absoluta del Espacio".

El libro tiene una nota de recepción de 1829. Hubo una pre-publicación en 1831 la cual fue enviada por Farkas a Gauss, pero parece que se perdió en el correo. En enero de 1832, Farkas vuelve a enviarle una copia a Gauss, pidiéndole su concepto y Gauss le responde en menos de un mes diciéndole:

"Si yo comenzara con la afirmación de que no me atrevo a hablar con admiración de este trabajo, usted estaría sorprendido por un momento, pero yo no puedo hacer otra cosa; alabarlo sería alabarme a mí mismo, pues el contenido de éste, el camino que su hijo ha seguido, los resultados que él ha obtenido, coinciden casi exactamente con mis meditaciones, las cuales han ocupado mi mente entre 30 y 35 años... estoy gratamente sorprendido de no tener que hacer este esfuerzo* y estoy muy contento de que sea el hijo de mi viejo amigo quien lo hace mejor que yo de esta notable manera."

Termina la carta proponiéndole a Juan el problema de calcular el volumen de un tetraedro, lo que muestra que Gauss si entendió el trabajo del joven Bolyai.

Esta carta desconcierta a Bolyai, quien acusa a su padre de haberle estado pasando sus resultados a Gauss sin su consentimiento. Frustrado, Bolyai no vuelve a publicar nada, aunque después de su muerte deja por lo menos 20.000 páginas de manuscritos, los cuales reposan hoy en la biblioteca de Tirgu-Mures. En estos manuscritos se ve la insistencia de Juan, por mostrar que su teoría era **consistente**, es decir, que no alojaba en sí misma una contradicción. Este era el principal impedimento, como lo veremos más adelante, que tenía Gauss para publicar sus resultados.

Bolyai enferma de fiebres periódicas y en 1833 se jubila de la Armada. Poco después, enamorado quiere casarse, pero el gobierno no se lo permite, ya que una pensión de jubilación no sería suficiente para mantener una familia. Decide entonces vivir con su novia en la ciudad donde estaba establecida su madre, pues las relaciones con su padre estaban demasiado tensas.

El otro intento de Bolyai por hacer público uno de sus trabajos matemáticos fue cuando participó en un concurso para darle una interpretación geométrica a los números complejos. Su trabajo no fue entendido, allí dió una interpretación por parejas de números reales, muy parecida a la que usamos hoy en día. Además, citó su apéndice, donde sugirió que la geometría que allí aparecía se daría en una esfera de radio imaginario.

Infortunadamente, Bolyai nunca conoció la siguiente frase de Gauss, refiriéndose a él en carta a Gerling del 14 de febrero de 1832: "Yo tengo a este joven geómetra Bolyai por un genio de primera magnitud". Probablemente hubiera sido otra la Historia si Bolyai la hubiese conocido. Farkas Bolyai muere, ya reconciliado con su hijo, en 1854 y seis años después moriría Juan Bolyai.

* Se refiere a escribir los resultados.

Nikolai Ivanovich Lobachebsky

(2 de noviembre de 1793, Makarief, Novgorod, Rusia – 24 de febrero de 1856, Kazan, Rusia)

Teniendo 7 años queda huérfano de padre. A los 8 años entra al Instituto de Kazan y a los 14 logra ser admitido en la Universidad de Kazan, donde transcurrieron sus siguientes 40 años. A los 18 obtuvo su título de maestría en Física (uno de sus maestros fue Bartels, quien conocía a Gauss), a los 21 fue nombrado profesor asistente, a los 23 profesor ordinario y a los 34 Rector de la Universidad, cargo del que fue retirado sin explicaciones en 1846. Durante muchos años fue el encargado de la biblioteca y del museo de la Universidad. Se cuenta que era un trabajador incansable, y siendo aún rector no le daba pena estar en mangas de camisa quitando el polvo en la biblioteca. Una vez llegó un visitante muy importante, quien lo confundió con el portero, y le pidió lo guiara por la biblioteca. Este visitante extranjero quedó maravillado de lo cultos que eran los porteros en Rusia y le quizo dar una propina, la cual Lobachebsky no aceptó ofendido. Esa noche, cual no sería la sorpresa cuando se encontraron en una cena que ofrecía el gobernador.

Para 1815, Lobachebsky comienza a tratar de demostrar el quinto postulado siguiendo los caminos de Legendre. En 1823, en unas notas suyas aparece escrito al lado del postulado de Euclides que éste aún no tiene demostración. En 1826 presentó la conferencia "Una sucinta exposición de los principios de la geometría con una demostración rigurosa del teorema de las paralelas". (Este manuscrito se perdió, quizás él mismo lo recogió al darse cuenta que era imposible lo de la demostración.)

En 1829 publica una memoria en el Bulletin de la Universidad de Kazan sobre "Los Principios de la Geometría", adelantándose a Bolyai con su publicación. Parece que en esta memoria se recoge gran parte del manuscrito del 26, pero por ningún lado aparece lo de la prueba rigurosa del teorema de las paralelas. La Historia lo premia dándole su nombre a la geometría descubierta por él.

En 1840 publica en alemán "Investigaciones geométricas de la teoría de las paralelas". La cual iba acompañada de un resumen en alemán. Esta obra la conoce Gauss y en 1841 le escribe a J. F. Encke: "Estoy haciendo considerables progresos en ruso... Mr. Knorre me envió una pequeña memoria de Lobachebsky (de Kazan) escrita en ruso y esta memoria así como su opúsculo en alemán sobre líneas paralelas... ha despertado en mí el deseo de averiguar más acerca de este inteligente matemático."

También le escribe a Schumaker, en 1846, recordándole que, él mismo -Gauss-, desde 1792 ya tenía la convicción de la existencia de esta "geometría imaginaria" (como la llama Lobachebsky) siempre y cuando la geometría euclidiana no sea verdadera. De todas maneras, Gauss reconoce en la obra de Lobachebsky un "verdadero espíritu geométrico" y gracias a Gauss, Lobachebsky fue nombrado en 1842 miembro de la Sociedad Real de Gotinga.

Después de su relevo de la rectoría, enfermó y comenzó a perder la vista. En 1855, poco antes de morir y ya completamente ciego, Lobachebsky publicó su obra cumbre "La Pangeometría", escrita simultáneamente en Ruso y en Francés y dedicada al aniversario 50 de la Universidad de Kazan.

Karl Friedrich Gauss

(30 de abril de 1777, Brunswick, Alemania
23 de febrero de 1855, Gotinga, Alemania)

Para tener la idea del papel jugado por Gauss en el descubrimiento de las Geometrías No-Euclidianas, nada mejor que citar extractos de algunas de sus cartas.

Carta a Farkas Bolyai de 1799:

"Casi todos, es cierto, quisieron dar a ésto el título de axioma; yo no; podría en efecto, ocurrir que por lejanos que entre sí estuvieran los vértices de un triángulo en el espacio, su área fuese, sin embargo, inferior a un límite asignado. Poseo muchas afirmaciones como ésta pero no encuentro ninguna de ellas satisfactoria."
Carta a H. W. Olbers de 1817:

"Estoy cada vez más convencido de que la necesidad de nuestra geometría no puede ser probada..."

Carta a F. A. Taurinus de 1824:

"La hipótesis de que la suma de los tres ángulos es menor que 180° conduce a una curiosa geometría, muy diferente de la nuestra (la Euclidiana), pero completamente consistente, la cual he desarrollado a mi entera satisfacción, de manera que puedo resolver cualquier problema de ella, a excepción de la determinación de una constante, que no puede ser designada a priori; cuanto más grande se tome la constante, más se aproxima esta geometría a la Euclidiana; y coincide con ella cuando la constante es infinitamente grande. Los teoremas de esta geometría parecen paradójicos y al no iniciado absurdos; pero una pausada y constante reflexión revela que no contienen nada imposible en absoluto. Por ejemplo, los tres ángulos de un triángulo pueden llegar a ser tan pequeños como se desee, con sólo alargar los lados suficientemente; sin embargo, el área del triángulo nunca puede pasar de un límite definido, no importa lo que se alarguen los lados, ni tampoco alcanzarlo.

Todos mis esfuerzos por descubrir una contradicción, una inconsistencia, en esta geometría no Euclidiana han sido vanos, y la única cosa en la que se opone a nuestras concepciones es que si fuese cierta, existiría en el espacio una magnitud lineal, determinada por ella misma (pero desconocida para nosotros). Pero me parece que, a pesar de la verborrea de los filósofos, la cual ignora todo, sabemos poco o casi nada, de la naturaleza real del espacio..."

Carta a Bessel de 1829:

"Puede tomar mucho tiempo, antes de que publique mis investigaciones sobre este tema; en efecto, puede que no lo sea durante mi vida, pues temo el aullido de los Beocios..."

Comentario de Bolyai después de la muerte de Gauss:

"...todas las razones expuestas por Gauss para explicar porque no publicaría nada sobre este tema estando en vida, no tienen fuerza y son vacías; pues en ciencia, así como en la vida diaria, es necesario clarificar las cosas de interés público que sean todavía vagas..."

Agrega, más adelante, que no son razones para dejar la ciencia en su estado letárgico.

La Geometría de Bolyai-Lobachebsky-Gauss

La geometría creada por Bolyai, Lobachebsky y Gauss es conocida hoy como la Geometría Lobachebskiana o Hiperbólica. En esta geometría se suponen las definiciones, axiomas y los cuatro primeros postulados de la Geometría Euclidiana. Pero el quinto postulado es diferente. Este dice así: *"Por un punto exterior a una recta pasan infinitas rectas que no cortan la primera"*.

Con este cambio, aparece una geometría totalmente sorprendente para quien está acostumbrado a pensar dentro de la Geometría Euclidiana. En esta nueva Geometría se pueden deducir, entre otros, los siguientes teoremas:

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor que 180º, pudiendo tomar cualquier valor mayor que 0º y menor que 180º. Ya vimos que este teorema había sido encontrado por Saccheri y Lambert.

El área de un triángulo es proporcional al número **Π** *menos la suma de los ángulos interiores. O sea que, el área de un triángulo no puede superar una constante predeterminada.* Este teorema descubierto por Lambert era bien conocido por Gauss, tal como lo podemos ver en su carta a Taurinus.

No existen triángulos semejantes. Es decir, si dos triángulos tienen los mismos ángulos, ellos son congruentes. Observamos que la Trigonometría Plana está basada en la existencia de los triángulos semejantes. Sin embargo, tanto Bolyai como Lobachebsky desarrollaron una trigonometría consistente con su geometría.

El hecho de que Bolyai, Lobachebsky y Gauss estaban plenamente convencidos de la **independencia** del quinto postulado hace que la Historia los reconozca como los verdaderos descubridores de la Geometría Lobachebskiana. Sin embargo, el problema de la **consistencia** de esta geometría, es decir, estar seguros de que la teoría no era contradictoria, no lo pudieron resolver ellos estando en vida. Era, entonces, necesaria la participación de otros actores que pudieran aclarar este problema.

Georg Friedrich Bernhard Riemann

(17 de septiembre de 1826, Breselenz, Hannover, Alemania –
20 de julio de 1866, Selasca, Italia)

Hijo de pastor luterano, era el segundo entre 6 hermanos. Al igual que Juan Bolyai, su padre fue su primer instructor. Ya a los 6 años se le notaba su genio creador; le gustaba exasperar a sus hermanos proponiéndoles problemas de Aritmética. Teniendo 10 años comenzó a recibir, formalmente, lecciones de Aritmética y Geometría y a los 14 fue enviado a Hannover, donde su abuela, para entrar al tercer grado superior de la secundaria. Era supremamente tímido, lo que hacía que sus compañeros de escuela se burlasen de él continuamente. Este rasgo haría de él una persona introvertida en sociedad e intimamente ligada a su familia. Cuando su abuela murió, pasó al Instituto de Luneburg, donde el director se dio cuenta de sus aptitudes y le permitió entrar a su biblioteca personal. En esta época conoció la obra "Teoría de Números" de Legendre y el "Cálculo" de Euler. En 1846 (de 19 años) entra a la Universidad de Gotinga como estudiante de Filosofía y Teología, ambicionando ser pastor, con el fin de complacer a su padre. Pero su atracción por las matemáticas lo lleva a las conferencias de Stern, Gauss y Goldschmidt y, finalmente, con el consentimento de su padre, cambia de carrera.

Comienza estudiando un año en Gotinga, luego dos en la Universidad de Berlín y finalmente otros dos en Gotinga. Sus maestros, en Berlín, fueron Jacobi, Dirichlet, Steiner y Einseinstein. Allí se originan sus ideas sobre las funciones analíticas de una variable compleja, tema que desarrollaría en su disertación doctoral. En esta disertación introdujo las hoy llamadas Superficies de Riemann de n-hojas, concepto que comenzaría a abrir las puertas de la Topología, una rama nueva de la Matemática. Por la misma época en que escribe su disertación, se dedica a la Física experimental y sueña con una Física geometrizada, vislumbrándose el deseo de tener una teoría unificadora.

En 1850 escribió: "...puede ser establecida una teoría matemática completa que vaya desde las leyes elementales para los puntos individuales hasta los procesos que aparecen ante nosotros en el plenum (espacio continuamente lleno) de la realidad, sin distinción entre gravitación, electricidad, magnetismo o termodinámica..."

Una vez graduado, deseaba ser conferencista en la universidad. Esto le daría el derecho de dar clases y de recibir un pago según el número de alumnos asistentes. Como debía presentar un examen de habilitación, le propone al jurado tres temas; siendo el tercer tema sobre fundamentos de la Geometría. Gauss, quien era uno de los jurados, escoge dicho tema, en el cual Bernhard no se sentía bien preparado. Esto lo sabemos por una carta llena de angustia que escribió a su padre. En esta época decae su salud y se demora dos años preparando el examen. Finalmente, en junio de 1854 presenta su habilitación con la exposición: *"Sobre las hipótesis que sirven de* *fundamentos de la Geometría".* Después de ésta, Gauss salió entusiasmado y, prácticamente, es la única vez que se le oyó manifestar públicamente admiración por el trabajo de otro.

Este trabajo de Riemann revolucionó completamente la Geometría. La Geometría Euclidiana y la creada por Bolyai, Lobachebsky y Gauss son casos particulares de la Geometría Riemanniana.

En 1859 es nombrado profesor titular en reemplazo de Dirichlet, quien había reemplazado a Gauss en 1855. Mejorando sus condiciones económicas, se casa pero un mes después enferma de pleuresía, la cual se convierte en tuberculosis falleciendo a causa de ésta a orillas del Lago Mayor en Italia. Su muerte prematura, probablemente, impidió que fuese el creador de la Teoría de la Relatividad.

La Geometría de Riemann

La genialidad de Riemann se da al concebir espacios de n dimensiones (n-variedades) dotados de una métrica (es decir, de una manera o forma para medir distancias entre puntos infinitamente cercanos) relativa al punto de localización en el espacio. Asignarle a cada punto una métrica es darle "rigidez" a la n-variedad. Una métrica determina las geodésicas, es decir, las líneas más cortas entre dos puntos y, también, hace posible medir sobre la variedad longitudes de curvas; distancias entre puntos lejanos; ángulos entre curvas; áreas, volúmenes, etc.

Riemann define para cada punto $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_n})$ de la **n**-variedad, la métrica por medio de la forma diferencial:

$$\begin{aligned} \mathbf{d^2s = g_{11}d^2x_1 + g_{22}d^2x_2 + \dots + g_{nn}d^2x_n + g_{12}dx_1dx_2 + g_{13}dx_1dx_3 +} \\ \mathbf{+ \dots + g_{1n}dx_1dx_n + g_{23}dx_2dx_3 + g_{24}dx_2dx_4 + \dots + g_{n\text{-}1n}\, dx_{n\text{-}1}dx_n}, \end{aligned}$$

donde las funciones $\mathbf{g_{ij}}$ dependen del punto $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_n})$.

Con esta definición, la Geometría Euclidiana se realiza en una **2**-variedad (precisamente, el plano euclídeo) con métrica definida por $\mathbf{d^2s = d^2x_1 + d^2x_2}$. Aquí $\mathbf{g_{11} = g_{22} = 1}$ **y** $\mathbf{g_{12} = 0}$. Uno de los ejemplos que presentó Riemann en su conferencia es la llamada Geometría Esférica (mal llamada Geometría Riemanniana), la cual se realiza en una **2**-variedad (precisamente, una esfera) con métrica definida por la forma cuadrática $\mathbf{d^2s = R^2\, Cos^2(x_2/R)d^2x_1 + d^2x_2}$. Aquí $\mathbf{g_{11} = R^2Cos(x_2/R)}$, $\mathbf{g_{22} = 1}$ **y** $\mathbf{g_{12} = 0}$, donde **R** es una constante que representa el radio de la esfera.

Ni Riemann ni Gauss, cayeron en cuenta que la Geometría Lobachebskiana (o Hiperbólica) también se realiza en una **2**-variedad con métrica definida por la forma $\mathbf{d^2s = Cosh^2(x_2/K)d^2x_1 + d^2x_2}$. Aquí $\mathbf{g_{11} = Cosh^2(x_2/K)}$, $\mathbf{g_{22} = 1}$ **y** $\mathbf{g_{12} = 0}$, donde **K** es una constante.

El problema de la consistencia

El haberse dado cuenta de este hecho les hubiera resuelto el problema de la consistencia de la Geometría Lobachebskiana (Hiperbólica). Sin embargo, tuvo que morir el respetado Gauss, para que con la publicación de sus notas personales, la comunidad matemática comenzara a aceptar la posibilidad de las ideas de la Geometría Hiperbólica. El universo creado de la nada de Bolyai y la geometría imaginaria de Lobachebsky comenzaban a materializarse como algo posiblemente real.

En 1868 Beltrami (1834-1900), utilizando la Geometría Riemanniana construyó la pseudoesfera y mostró que las geodésicas (líneas que realizan la distancia más corta entre dos puntos) de ésta cumplían los axiomas de la Geometría Hiperbólica. Beltrami había encontrado un modelo de la Geometría Hiperbólica, dentro de la Geometría Euclidiana. Este modelo probaba que la consistencia de la Geometría Hiperbólica dependía de la consistencia de la Geometría Euclidiana, pues cualquier contradicción que la Geometría Hiperbólica tuviese, estaría inmersa en la Geometría Euclidiana.

Recíprocamente, más adelante, se descubre que las Orosferas son modelos de la Geometría Euclidiana dentro de la Geometría Hiperbólica, es decir, una contradicción en la Geometría Euclidiana conllevaría, también, una contradicción en la Geometría Hiperbólica. Se tiene de esta manera probada la consistencia relativa de estas dos Geometrías.

En 1872 Felix Klein, partiendo de la definición de geometría como el estudio de aquellas propiedades que permanecen invariantes bajo la acción de un grupo de transformaciones, caracteriza las geometrías y observa que las Geometrías Euclidiana, Esférica e Hiperbólica son sólo parte de la Geometría Proyectiva, la cual había sido desarrollada por Poncelet (1788-1867) en 1822 en su "Tratado sobre las propiedades proyectivas de las figuras". Desde ese entonces, la Geometría Euclídea se conoce, también, con el nombre de Geometría Parabólica; la Geometría Esférica con el nombre de Geometría Elíptica y la Geometría Lobachebskiana con el nombre de Geometría Hiperbólica.

Geometrías en el Siglo XX

A finales del Siglo XIX, los trabajos de Cantor desataron una crisis en los fundamentos de la Matemática. Con el fin de darle una base firme a la Matemática se recurrió a las teorías axiomatizadas. El primer ejemplo de una teoría de este estilo, era la Geometría Euclidiana, la cual fue revisada y reescrita por Hilbert en 1900. Este trabajo de Hilbert, permitió entender muy bien lo que era una teoría axiomatizada y sería la semilla para el nacimiento de la Lógica Matemática y de la Meta-matemática.

Hasta ese entonces, la Geometría Riemanniana no dejaba de ser una simple rama exótica de la Matemática sin muchas aplicaciones. Pocos años después se revelaría su poder. Teniendo en cuenta el experimento de Michelson y Morley (1877), que probó que la velocidad de la luz es independiente del emisor, es decir que para todo observador la velocidad de la luz es la misma, Einstein comenzó a madurar su teoría de la relatividad. Para que su teoría tuviese fortaleza necesitaba fundamentarla matemáticamente. La Geometría Euclidiana no le servía, pues necesitaba una geometría que fuera relativa a cada observador, necesitaba una geometría que variara de un lugar a otro en el espacio según la concentración de la materia presente en el lugar del observador. La Geometría Riemanniana era la apropiada. Desde entonces, la Geometría Riemanniana marcha de la mano de la Física Moderna.

Por el lado de la matemática pura, las teorías y conjeturas de William Thurston (1974), las cuales tratan de clasificar las 3-variedades, resaltan de nuevo la importancia de la Geometría Hiperbólica.

El siguiente paralelo nos puede aclarar la relación entre las geometrías que hemos mencionado aquí.

Paralelo entre las geometrías

	Hiperbólica	Parabólica	Elíptica
Autores	Bolyai, Lobachebsky Gauss	Griegos antiguos. Euclides	Riemann
Otros nombres	Lobachebskiana, Imaginaria, Pangeometría	Plana, Euclidiana, Euclídea	Esférica, Riemanniana
Postulados	Valen los primeros 4 postulados	Valen los primeros 4 postulados	Valen los postulados 1,3 y 4. Las líneas no se pueden extender indefinida-mente.
Quinto Postulado	Por un punto exterior a una recta pasan infinitas rectas paralelas a la recta dada.	Por un punto exterior a una recta pasa una única recta paralela a la recta dada.	Por un punto exterior a una recta no pasan paralelas a la recta dada.
Suma de ángulos de un triángulo.	Es menor que el número Π.	Es igual a Π.	Es mayor que Π.

Las 3 posibilidades de Saccheri. Si en un cuadrilátero un par de lados opuestos son iguales y si los ángulos adyacentes al tercer lado son rectos, entonces los otros dos ángulos...	Son agudos.	Son rectos.	Son obtusos.
La curvatura es constante y...	Negativa.	Cero.	Positiva.
El área de un triángulo es...	Proporcional a **Π** menos la suma de los ángulos. No depende de los lados.	No depende de los ángulos. Si depende de los lados.	Proporcional a la suma de los ángulos menos **Π**. No depende de los lados.
La longitud de una circunferencia de radio **r** es...	Mayor que dos veces **Π** por **r**.	Igual a dos veces **Π** por **r**.	Menor que dos veces **Π** por **r**.

BIBLIOGRAFÍA

1. Bell, E. T. "Historia de las Matemáticas". Fondo de Cultura Económica, México, 1949.
2. Blanché R. "La axiomática. Traducción de Fedérico Osorio Altúzar. México. Centro de estudios filosóficos de la UNAM.
3. Bonola, R. "Non-Euclidian Geometry". Dover, Toronto, 1955.
4. Boyer, C. B. "Historia de la Matemática". Alianza Editorial, Madrid, 1966.
5. Do Carmo, M. P. "Riemannian Geometry". Birkhauser, Boston, 1993.
6. Eves, H. "Estudio de las geometrías", Centro Regional de Ayuda Técnica, AID. Unión gráfica S.A., México, 1969.
7. Faber, R. L. "Foundations of Euclidean and Non-Euclidian Geometry". Marcel Dekker, New York, 1983.
8. Greenberg, M. J. "Euclidian and Non-Euclidian Geometries". W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1974.
9. Karteszi, F. y Szénássy, B. "János Bolyai, Appendix the theory of space". Akadémiai Kiadó. Budapest, 1987. Traducción al inglés.
10. Kline, M. "Mathematical thought from ancient to modern times". Oxford University Press, New York, 1972.
11. Milnor, J. "Hiperbolic Geometry: the first 150 years". Bull. A.M.S., Vol. 6, No. 1, Jan. 1982.
12. Montesinos, J. M. "Las geometrías no-euclídeas: Gauss, Lobachebski y Bolyai". Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, Madrid, 1987.
13. Newman, J. R. "Enciclopedia Sigma El Mundo de las Matemáticas", Vol. 2 y 5, Editorial Grijalbo, Barcelona, 1994.
14. Poincaré, H. "Science and Hypothesis". Dover Publications, New York, 1952.
15. Ratcliffe, J. G. "Foundations of Hyperbolic Manifolds". Springer-Verlag, New York, 1994.
16. Rosenfeld, B. A. "A History of Non-Euclidian Geometry". Springer-Verlag, New York, 1988.
17. Smith, D. E. "History of Mathematics". Dover, New York, 1953.
18. Stillwell, J. "Sources of Hyperbolic Geometry". American Mathematical Society, Rhode Island, 1996.
19. Stillwell, J. "Mathematics and its History". Springer-Verlag, New York, 1989.
20. Struik, D. J. "A Concise History of Mathematics". Editorial Dover, New York, 1967.
21. Weeks, J. R. "The Shape of Space". Marcel Dekker, New York, 1985.