Teorema de Horrocks y principio de localización-globalización: Un caso no conmutativo

Juan Sebastian Arias Valero
Código:830441

Trabajo final para optar al título de
Magister en Matemáticas

Director
Oswaldo Lezama

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia
Sede Bogotá
2012

Título en español

Teorema de Horrocks y principio de localización-globalización: Un caso no conmutativo.

Title in English

Horrocks' Theorem and localization-globalization principle: A noncommutative case.

Resumen: Exponemos detalladamente el teorema de Horrocks para anillos de polinomios torcidos, y el principio de localización globalización o teorema de pegamiento de Quillen para álgebras graduadas, basados en los trabajos de Artamonov.

Abstract: We expose accurately the Horrocks' Theorem for skew polynomial rings, and the localization-globalization principle or Quillen's patching Theorem for graded algebras, following Artamonov's works.

Keywords: Noncommutative rings, skew polynomial rings, graded algebras, Horrocks' Theorem, Quillen's patching Theorem, Quillen-Suslin Theorem, Serre's problem on projective modules, algebraic K-theory, noncommutative localization.

Nota de aceptación

Trabajo de tesis
Aprobado por

Jurado
Hernán Giraldo Salazar

Director
Oswaldo Lezama Serrano

Bogotá, D.C., 31 de Mayo de 2012

Dedicado a

A mis padres: Maria Isabel y German.

A mis maestros y amigos de la Academia Superior de Artes de Bogotá.

Agradecimientos

Al profesor Oswaldo Lezama, por su guía en la elaboración de este trabajo.

Índice general

Introducción

Una pregunta importante en álgebra homológica es: ¿cuándo un módulo proyectivo sobre un anillo A -no necesariamente conmutativo- es libre?. Serre plantea en 1955 en su libro "Faisceaux algébriques cohérents"([14], pág. 243), si todo módulo proyectivo finitamente generado sobre $k[x_1, \ldots, x_n]$, para k un cuerpo, es libre. El problema fue resuelto afirmativamente en 1976 por A. Suslin [15] y D. Quillen [11] de manera independiente. Este resultado es conocido como el teorema de Quillen-Suslin. Dos herramientas cruciales en la solución dada por Quillen son el teorema de Horrocks y el principio de localización-globalización o teorema de pegamiento de Quillen ([1], [5], [11]). Dicha solución mostró que el teorema es válido incluso cuando el anillo de coeficientes es un dominio de ideales principales.

Luego de la solución del problema de Serre en el caso conmutativo, se ha continuado investigando acerca de la naturaleza de los módulos proyectivos, esta vez para estructuras no conmutativas. Un avance significativo se debe a V. Artamonov, quien logró una generalización del teorema de Quillen-Suslin versión cancelación para ciertos productos cruzados de biálgebras, incluyendo ejemplos de álgebras de polinomios cuánticos y álgebras envolventes de álgebras de Lie. El presente trabajo se basa en [1], en el cual Artamonov expone dicho teorema (teorema 5.37. de [1]).

Definición. *Sea k un cuerpo junto con una matriz $\boldsymbol{q} = (q_{ij}) \in M_n(k), n \geq 2$, cuyas entradas $q_{ij} \in k \setminus \{0\}$ satisfacen $q_{ii} = q_{ij}q_{ji} = 1$ para $1 \leq i, j \leq n$. Sea r un entero, $0 \leq r \leq n$. Denotemos por*

$$\mathcal{O}_q = k_{\boldsymbol{q}}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_r^{\pm 1}, x_{r+1}, \ldots, x_n]$$

la k-álgebra asociativa generada por los elementos

$$x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_r, x_r^{-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n,$$

sujeta a las relaciones

$$x_i x_i^{-1} = x_i^{-1} x_i = 1, \qquad 1 \leq i \leq r;$$

$$x_i x_j = q_{ij} x_j x_i, \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

Decimos que el álgebra $\mathcal{O}_q$ es un ***álgebra de polinomios cuánticos****. Los elementos q_{ij} son llamados* ***multiparámetros****.*

Un caso en el que se ha logrado una generalización del teorema de Quillen-Suslin para álgebras de polinomios cuánticos es cuando todos los multiparámetros del álgebra son raíces de la unidad. En la prueba de este hecho, Artamonov usa entre otras herramientas, una generalización del teorema de Horrocks esta vez para un anillo B noetheriano a izquierda y $B[x;\sigma]$ el anillo de polinomios torcidos con σ un automorfismo de B. También generaliza el principio de localización para un álgebra $\mathbb{N}$-graduada A no necesariamente conmutativa. Este par de teoremas son el objeto de estudio de este trabajo.

Las extensiones PBW torcidas abarcan una gran cantidad de estructuras no conmutativas como las álgebras envolventes de álgebras de Lie y las extensiones de Ore de tipo inyectivo, de las cuales los anillos de polinomios torcidos de tipo inyectivo -como $B[x;\sigma]$- y las álgebras de Weyl son un caso particular. A continuación presentamos su definición ([9]).

Definición. *Sean R y A dos anillos. A es una* ***extensión PBW torcida*** *(denominada también* ***extensión σ-PBW****) de R si:*

(i) $R \subseteq A$.

(ii) Existen en A elementos $x_1, \ldots, x_n$ tales que A es un R-módulo libre a izquierda con base el conjunto $Mon(A)$ de los monomios estándar,

$$Mon(A) := \{x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \mid \alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n\}.$$

En tal caso se dice que A es un ***anillo de polinomios a izquierda sobre*** *R* ***con respecto a*** *$\{x_1, \ldots, x_n\}$.*

(iii) Para cada $1 \leq i \leq n$ *y* $r \in R \setminus \{0\}$*, existe* $c_{i,r} \in R \setminus \{0\}$ *tal que*

$$x_i r - c_{i,r} x_i \in R.$$

(iv) Para cualesquiera $1 \leq i, j \leq n$*, existe* $c_{i,j} \in R \setminus \{0\}$ *tal que*

$$x_j x_i - c_{i,j} x_i x_j \in R + Rx_1 + \cdots + Rx_n.$$

En este caso escribimos $A := \sigma(R)\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$*.*

Una tarea central del Seminario de Álgebra Constructiva (SAC^2) es el estudio de las extensiones σ-PBW con cuatro enfoques: 1) Métodos de teoría de anillos y módulos, 2) Métodos homológicos y de K-teoría, 3) Métodos matriciales, y 4) Métodos de bases de Gröbner. Uno de los problemas pendientes es el estudio del teorema de Quillen-Suslin para dichas extensiones. El artículo de V. Artamonov [1] muestra una prueba del teorema en un caso especial de álgebras de polinomios cuánticos, vía las dos técnicas que se expondrán en este trabajo. En nuestro seminario, hemos visto las álgebras de polinomios cuánticos de dos maneras: como una localización de una extensión σ-PBW y como una extensión σ-PBW del anillo de polinomios torcidos de Laurent. Esto nos motiva a estudiar el teorema de Horrocks y el principio de localización-globalización desarrollados por Artamonov como herramientas para atacar el teorema de Quillen-Suslin para extensiones PBW torcidas en el espíritu de 1) y 2). El interés de este trabajo radica en la exposición de estas dos técnicas de una manera clara, como aporte al Seminario de Álgebra Constructiva (SAC^2), con el ánimo de que esto ayude al estudio del teorema de Quillen-Suslin para el caso general de extensiones σ-PBW.

El trabajo se divide en tres capítulos: En el primer capítulo se hace una exposición del teorema de Quillen-Suslin: Caso conmutativo, presentando esencialmente la misma prueba dada por Quillen en [11], aunque la versión (algebraica) del teorema de Horrocks (véase el teorema 1.1.1) que usamos es propia de la teoría de módulos, a diferencia de la versión original (geométrica) de Horrocks usada por Quillen y formulada desde la teoría de fibrados vectoriales (véase [11]). Probaremos el teorema clásico de Quillen-Suslin, basados en el teorema de Horrocks y el principio de localización-globalización, con el objeto de resaltar la importancia de ambos teoremas. En la segunda sección del primer capítulo presentamos los anillos de polinomios torcidos y algunas de sus propiedades básicas preparándonos hacia el teorema de Horrocks no conmutativo. Luego, hacemos una presentación del grupo elemental y de Whitehead basada en [1], [4], [5] y [16], lo cuál nos permite entender la formulación del principio de localización-globalización. De igual manera, un breve comentario del método de cancelación, el estudio de las álgebras graduadas y sus localizaciones tomado de [10], así como la revisión de propiedades de módulos finitamente presentados tomadas de [5], son incluidos para entender el lenguaje de dicho principio. En el segundo capítulo presentamos el teorema de Horrocks en el caso no conmutativo. Es de resaltar que la generalización del teorema de Horrocks de Artamonov constituye una generalización de la prueba de Paul Roberts como la presenta Lam en [5]. Esta generalización es parcial, como lo evidencia el gran trabajo que hay que hacer para deducir la versión conmutativa de dicho teorema al final del capítulo (véase el teorema 2.3.2). El tercer capítulo está dedicado al principio de localización-globalización no conmutativo el cual es más una variante de tipo cancelación, que una generalización del caso conmutativo.

Los aportes de este trabajo son los siguientes: 1) Modificación de la prueba original del teorema de Horrocks no conmutativo y adición de una hipótesis (véanse los numerales 3. y 10. de la demostración del teorema 2.2.4) con su debida justificación (observación 2.2.6), 2) Prueba detallada del principio de localización-globalización no conmutativo (teoremas 3.2.26 y 3.2.27) y adición de una hipótesis con la debida justificación (observación 3.2.29) y 3) Presentación de todos los preliminares de tal principio, incluso los que no se encuentran demostrados en los trabajos de Artamonov que tuvimos disponibles ([1, 2, 3]), y los cuales desarrollamos con nuestras propias pruebas (véanse la proposición 3.2.9 y el lema 3.2.19). Incluimos también numerosas correcciones, preliminares, observaciones y notaciones que esperamos ayuden a entender mejor los objetos en juego, y por tanto la teoría.

A lo largo de este trabajo los anillos A se asumiran con unidad y no necesariamente conmutativos. Cuando trabajemos con anillos conmutativos, esto se hará explícito. Todos los A-módulos serán considerados como módulos a izquierda, y por tanto todas las propiedades como ser artiniano o noetheriano, la localización, etc.; serán consideradas a izquierda, a menos que se aclare lo contrario. También, denotaremos por $\mathfrak{P}(A)$ a la categoría de los A-módulos proyectivos finitamente generados cuyos morfismos son A-homomorfismos de módulos, y por $Z(A)$ al centro de A. El anillo de polinomios torcidos con σ un automorfismo de A y δ una σ-derivación, será denotado por $A[x;\sigma,\delta]$. Cuando nos refiramos a anillo graduado o álgebra graduada, estamos considerando dicha estructura como $\mathbb{Z}$-graduada. Las definiciones de los conceptos básicos usados en este escrito pueden encontrarse en [12] y [13], o también en los Cuadernos de Álgebra ([6],[7],[8]) del profesor Oswaldo Lezama.

Notación

$Z(A)$	Centro del anillo A
A^*	Grupo multiplicativo de los elementos invertibles de A
$Rad(A)$	Radical de Jacobson del anillo A
$c.c.(R)$	Cuerpo de cocientes de un dominio de integridad R
R_S, $S^{-1}R$	Localización de R por el sistema multiplicativo S
$R_{\mathfrak{p}}$	Localización de R por el sistema multiplicativo $R \setminus \mathfrak{p}$, con $\mathfrak{p}$ primo
R_a	Localización de R por el subconjunto multiplicativo $\{1, a, a^2, \dots\}$
$A[x;\sigma,\delta]$	Anillo de polinomios torcidos con σ un endomorfismo y δ una σ-derivación
$A\langle x;\sigma,\delta\rangle$	Localización de $A[x;\sigma,\delta]$ por el sistema de polinomios mónicos
$R\langle x\rangle$	Localización de $R[x]$ por el sistema de polinomios mónicos
$h(A)$	Subconjunto de elementos homogéneos del anillo graduado A
A^+	Parte no negativa $\sum_{i\in\mathbb{N}} \oplus A_i$ del anillo $\mathbb{Z}$-graduado A

M_A	El A-módulo a derecha M
${}_AM$	El A-módulo a izquierda M
$N \leq_A M$	N es A-submódulo de M
${}_A\langle x_1, \ldots, x_n\}$	A-submódulo izquierdo generado por $x_1, \ldots, x_n$
$\{x_1, \ldots, x_n\rangle_A$	A-submódulo derecho generado por $x_1, \ldots, x_n$
$M_{\mathfrak{p}}$	Localización del R-módulo M por el sistema multiplicativo $R \setminus \mathfrak{p}$
M_a	Localización del R-módulo M por $\{1, a, a^2, \ldots\}$
$M[x; \sigma, \delta]$	El $A[x; \sigma, \delta]$-módulo $A[x; \sigma, \delta] \otimes_A M$
$M[x]$	El $R[x]$-módulo $R[x] \otimes_R M$
$M\langle x; \sigma, \delta\rangle$	El $A\langle x; \sigma, \delta\rangle$-módulo $A\langle x; \sigma, \delta\rangle \otimes_A M$
$M\langle x\rangle$	El $R\langle x\rangle$-módulo $R\langle x\rangle \otimes_R M$

id_X	Función idéntica sobre el objeto X
$\mathfrak{M}(A)$	Categoría de A-módulos finitamente generados
$\mathfrak{P}(A)$	Categoría de A-módulos proyectivos finitamente generados
AbGrp	Categoría de grupos abelianos
$K_0(A)$	Grupo de Grothendieck del anillo A
$K_1(A)$	Grupo de Whitehead del anillo A

$M_{m\times n}(R)$	Conjunto de las matrices de tamaño $m \times n$ sobre el anillo R
$M_n(R)$	Conjunto de las matrices de tamaño $n \times n$ sobre el anillo R
$GL(n, R)$	Grupo lineal general de orden n sobre el anillo R
$E(n, R)$	Grupo elemental de orden n sobre el anillo R
$GL(R)$	Grupo lineal general sobre el anillo R
$E(R)$	Grupo elemental sobre el anillo R

UFD	Dominio de factorización única
DIP	Dominio de ideales principales

CAPÍTULO 1

Preliminares

Comenzaremos este trabajo con la prueba del teorema de Quillen-Suslin en el caso conmutativo. De esta manera haremos patente la importancia del teorema de Horrocks y el principio de localización-globalización. En la prueba, usaremos la versión conmutativa de ambos teoremas. El teorema de Horrocks será deducido como caso especial de su versión no conmutativa en el capítulo 2. La prueba del principio de localización puede encontrarse en [1], [5] y [11]. Presentamos en este capítulo los anillos de polinomios torcidos como preliminar para el teorema de Horrocks no conmutativo que abordaremos en el capítulo 2. Las demás secciones nos preparan para la formulación del principio de localización-globalización presentado en el capítulo 3.

1.1. Teorema de Quillen-Suslin: Caso conmutativo

Denotemos por $\mathfrak{P}(A)$ la categoría de todos los módulos proyectivos finitamente generados sobre un anillo con unidad A. Sea R un dominio conmutativo y S el subconjunto multiplicativo de todos los polinomios mónicos de $R[x]$, donde $R[x]$ denota el anillo de polinomios usual con coeficientes en R en la indeterminada x. A la localización $S^{-1}R[x]$ la denotamos por $R\langle x\rangle$.

Teorema 1.1.1 (Horrocks). *Sea $(R,\mathfrak{m})$ un dominio local. Si para $P \in \mathfrak{P}(R[x])$, $S^{-1}P$ es un $R\langle x\rangle$-módulo libre, entonces P es libre.*

Sean $R' \subseteq R$ anillos conmutativos. Decimos que un R-módulo M es ***extendido*** desde R' si $M = R \otimes_{R'} N$ para algún R'-módulo N.

Teorema 1.1.2 (**Principio de localización-globalización**). *Si P es un $R[x]$-módulo finitamene presentado, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *P es extendido desde R.*

2. *Para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R, el $R[x]_{\mathfrak{m}}$-módulo $P_{\mathfrak{m}}$ es extendido desde $R_{\mathfrak{m}}$.*

Lema 1.1.3 (**[5], Corolario 2.17.**). *Sean R un anillo conmutativo, S un sistema multiplicativo de R, y M un R-módulo finitamente presentado. Si $S^{-1}M \cong (S^{-1}R)^n$, entonces existe $f \in S$ tal que $M_f \cong R_f^n$.*

Lema 1.1.4. *Sea R un anillo. Todo módulo $P \in \mathfrak{P}(R)$ es de presentación finita.*

Demostración. Sabemos que existe N tal que

$$P \oplus N \underset{\cong}{\xrightarrow{\alpha}} R^n.$$

De esta manera $N \in \mathfrak{P}(R)$ y

$$P \cong (P \oplus N)/(0 \oplus N) \cong R^n/\alpha(N)$$

con $\alpha(N)$ finitamente generado. El resultado se sigue de la proposición 1.1.6 de [8]. □

Teorema 1.1.5 (**Quillen-Suslin**). *Sea k un cuerpo. Entonces los módulos proyectivos finitamente generados sobre $k[x_1, \ldots, x_n]$ son libres.*

Demostración. Probaremos el resultado por inducción sobre el número n de indeterminadas. Si $n = 0$, estamos trabajando con espacios vectoriales, los cuales siempre resultan libres. Asumamos el resultado para $n-1$, y sea P un módulo proyectivo finitamente generado sobre $k[x_1, \ldots, x_n]$. Tomemos $A := k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$. Consideremos el módulo:

$$k\langle x_n \rangle \otimes_{k[x_n]} P.$$

Notemos que el resulta ser un $k\langle x_n \rangle \otimes_{k[x_n]} A[x_n]$-módulo por el isomorfismo de grupos abelianos:

$$k\langle x_n \rangle \otimes_{k[x_n]} P \cong k\langle x_n \rangle \otimes_{k[x_n]} A[x_n] \otimes_{A[x_n]} P.$$

Por otro lado, sabemos que P es proyectivo, luego existe un $A[x_n]$-módulo N tal que

$$P \oplus N \cong A[x_n]^t.$$

Multiplicando a izquierda por $k\langle x_n\rangle$, obtenemos:

$$(k\langle x_n\rangle \otimes_{k[x_n]} P) \oplus (k\langle x_n\rangle \otimes_{k[x_n]} N) \cong (k\langle x_n\rangle \otimes_{k[x_n]} A[x_n])^t.$$

Pero $k\langle x_n\rangle \otimes_{k[x_n]} A[x_n] \cong k\langle x_n\rangle[x_1, \ldots, x_{n-1}]$, luego

$$k\langle x_n\rangle \otimes_{k[x_n]} P$$

es un $k\langle x_n\rangle[x_1, \ldots, x_{n-1}]$-módulo proyectivo. Aplicando la hipótesis de inducción, como $k\langle x_n\rangle$ es un cuerpo,

$$k\langle x_n\rangle \otimes_{k[x_n]} P$$

es libre. Luego

$$k\langle x_n\rangle \otimes_{k[x_n]} P \cong (k\langle x_n\rangle[x_1, \ldots, x_{n-1}])^s.$$

Pero

$$A[x_n] = k[x_1, \ldots, x_n] \subseteq k\langle x_n\rangle[x_1, \ldots, x_{n-1}] \subseteq A\langle x_n\rangle.$$

Entonces, tensorizando el isomorfismo por $A\langle x_n\rangle$:

$$A\langle x_n\rangle \otimes_{k\langle x_n\rangle[x_1,\ldots,x_{n-1}]} k\langle x_n\rangle \otimes_{k[x_n]} P \cong A\langle x_n\rangle^s,$$

y además

$$\begin{aligned} A\langle x_n\rangle \otimes_{A[x_n]} P \cong & A\langle x_n\rangle \otimes_{k\langle x_n\rangle[x_1,\ldots,x_{n-1}]} k\langle x_n\rangle \otimes_{k[x_n]} k[x_1, \ldots, x_n] \otimes_{k[x_1,\ldots,x_n]} P \\ \cong & A\langle x_n\rangle \otimes_{k\langle x_n\rangle[x_1,\ldots,x_{n-1}]} k\langle x_n\rangle \otimes_{k[x_n]} P. \end{aligned}$$

Hemos obtenido entonces que $A\langle x_n\rangle \otimes_{A[x_n]} P$ es $A\langle x_n\rangle$-libre, y por el lema 1.1.3, existe f polinomio mónico en $A[x_n]$ tal que $A[x_n]_f \otimes_{A[x_n]} P$ es $A[x_n]_f$-libre.

Veamos ahora la relación entre ser extendido y ser libre en este caso. Si lograramos demostrar que P es extendido desde A, es decir si

$$P \cong A[x_n] \otimes_A N$$

para algún A-módulo N, entonces

$$P/(x_n P) \cong (A[x_n] \otimes_A N)/x_n(A[x_n] \otimes_A N) \cong N.$$

Además, dado que $P \in \mathfrak{P}(A[x_n])$, $P \oplus K \cong A[x_n]^t$, y así:

$$P/(x_n P) \oplus K/(x_n K) \cong (P \oplus K)/(x_n P \oplus x_n K) \cong A[x_n]^t/(x_n A[x_n]^t) \cong A^t.$$

Esto nos dice que $N \in \mathfrak{P}(A)$. Aplicando la hipótesis de inducción, N resulta ser A-libre, y por consiguiente, como P es extendido desde A, P es $A[x_n]$-libre.

Nuestro objetivo ahora es ver que P es extendido desde A. Gracias al principio de localización-globalización, para esto basta ver que para cada $\mathfrak{m}$ ideal maximal de A, $P_\mathfrak{m}$ es extendido desde $A_\mathfrak{m}$. En este caso bastará ver que $P_\mathfrak{m}$ es $A[x_n]_\mathfrak{m}$-libre, o lo que es lo mismo, que es $A_\mathfrak{m}[x_n]$-libre. Pero esto lo podemos obtener con el teorema de Horrocks si logramos ver que $S^{-1}P_\mathfrak{m}$ es $A_\mathfrak{m}\langle x_n\rangle$-libre, con S el sistema multiplicativo de los polinomios mónicos de $A_\mathfrak{m}[x_n]$. Finalmente, esto se tiene, pues como $A[x_n]_f \otimes_{A[x_n]} P$ es $A[x_n]_f$-libre entonces $A_\mathfrak{m}[x_n]_f \otimes_{A_\mathfrak{m}[x_n]} P_\mathfrak{m}$ es $A_\mathfrak{m}[x_n]_f$-libre, y $S^{-1}A_\mathfrak{m}[x_n] \otimes_{A_\mathfrak{m}[x_n]} P_\mathfrak{m}$ es $A_\mathfrak{m}\langle x_n\rangle$-libre, puesto que f es también mónico de $A_\mathfrak{m}[x_n]$. □

Observación 1.1.6. En el teorema anterior, en el último párrafo, cuando hacemos uso del teorema de Horrocks, nótese que el anillo $R := A_\mathfrak{m} = k[x_1, \ldots, x_{n-1}]_\mathfrak{m}$ es noetheriano. Esto permitiría usar la versión del teorema de Horrocks (véase 1.1.1) un poco más débil en la cual el anillo R es noetheriano. En el capítulo 2 deduciremos el teorema clásico de Horrocks de su versión no conmutativa, con la condición de que R sea noetheriano.

1.2. Anillos de polinomios torcidos

Definiremos a continuación los anillos de polinomios torcidos, los cuales constituyen una clase importante de estructuras no conmutativas. No incluiremos su propiedad universal y demostración del teorema de la base de Hilbert, las cuales se encuentran expuestas en [9]. Discutiremos también algunas propiedades básicas de la localización de anillos no conmutativos, las cuales serán utilizadas en el capítulo 2.

Dado un anillo B, construiremos un nuevo anillo de polinomios en una indeterminada x donde los coeficientes no necesariamente conmutan con x. Buscamos que el nuevo anillo tenga las siguientes características:

1. Cada polinomio debe expresarse unívocamente como una suma finita de la forma $\sum_i a_i x^i$ con $a_i \in B$.

2. El producto xa debe pertenecer a $Bx + B$, es decir, $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$ para algunos $\sigma(a), \delta(a) \in B$.

Dado un anillo con las características descritas, tendremos un par de funciones

$$\sigma, \delta : B \longrightarrow B$$

las cuales no resultan ser tan arbitrarias. En efecto, por la asociatividad: $x(rs) = (xr)s$ y la distributividad: $x(r+s) = xr + xs$, se debe tener que

$$\sigma(rs)x + \delta(rs) = x(rs) = (xr)s = (\sigma(r)x + \delta(r))s = \sigma(r)\sigma(s)x + \sigma(r)\delta(s) + \delta(r)s,$$

y

$$\sigma(r+s)x + \delta(r+s) = x(r+s) = xr + xs = (\sigma(r) + \sigma(s))x + \delta(r) + \delta(s).$$

Comparando coeficientes gracias a la unicidad dada por 1., obtenemos que

$$\sigma(r+s) = \sigma(r) + \sigma(s)$$

$$\sigma(rs) = \sigma(r)\sigma(s),$$

y

$$\delta(r+s) = \delta(r) + \delta(s)$$

$$\delta(rs) = \sigma(r)\delta(s) + \delta(r)s.$$

Es decir, σ es un ***endomorfismo*** de B y δ es una σ***-derivación***. De lo anterior obtenemos además que $\sigma(1) = 1$ y $\delta(1) = 0$.

Podemos probar la existencia de un ***anillo de polinomios torcidos***

$$B[x;\sigma,\delta]$$

cuando poseamos un endomorfismo σ y una σ-derivación δ. Una de las construcciones posibles (véase [9]), es la siguiente: Consideramos el alfabeto $X=\{x'\}\cup B$ y la $\mathbb{Z}$-álgebra libre $\mathbb{Z}\{X\}=\mathbb{Z}[G_X]$, con $\mathbb{Z}[G_X]$ el anillo del monoide libre G_X en el alfabeto X. Definimos

$$B[x;\sigma,\delta]:=\mathbb{Z}\{X\}/\langle x'a-\sigma(a)x'-\delta(a)|a\in B\rangle,$$

entendiendo a x como la clase de x'.

El grado de un polinomio $f=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$ es definido como n siempre que $a_n\neq 0$, y se denota por $grad(f)$. Si $a_n\neq 0$, entonces a_n se denomina el ***coeficiente principal*** de f y escribimos $lc(f)=a_n$; $lm(f):=x^n$ es el ***monomio principal*** de f; el ***término principal*** de f, denotado por $lt(f)$, será a_nx^n. Ahora, si los coeficientes a_i de f son todos nulos decimos que f es el ***polinomio nulo*** y escribimos $f=0$. En este caso definimos $lc(0):=0$, $lm(0):=0$ y $lt(0):=0$. Se tiene entonces que

$$\begin{cases} grad(f)\geq 0, \text{ si } f\neq 0,\\ grad(f+g)\leq \text{máx}\{grad(f),grad(g)\},\\ grad(fg)\leq grad(f)+grad(g).\end{cases}$$

Por último, es bueno resaltar que B está sumergido en $B[x;\sigma,\delta]$ mediante la aplicación $a\mapsto ax^0$.

Teorema 1.2.1 (**Teorema de la base de Hilbert**). *Si B es noetheriano a izquierda (derecha) y σ es un automorfismo, entonces $B[x;\sigma,\delta]$ es noetheriano a izquierda (derecha).*

Demostración. La demostración se puede encontrar en [9], teorema 1.3.7. □

Teorema 1.2.2 (**Algoritmo de la división a izquierda**). *Sean B un anillo y $f,g\in B[x;\sigma,\delta]$ con $g\neq 0$. Si $b_m=lc(g)$ es invertible a izquierda con inverso c, entonces, existen $q,r\in B[x;\sigma,\delta]$ tales que:*

$$f=qg+r, \text{ con } r=0 \text{ ó } grad(r)<grad(g).$$

Demostración. Si $f = 0$, tomamos $q = r = 0$, y el resultado se tiene. Ahora supongamos que $f \neq 0$. Usamos inducción sobre $n := grad(f)$:

$n = 0$: Tenemos que $f \in B$. Hay dos casos:

- $m > 0$: tomamos $q = 0$ y $r = f$, y el resultado se tiene.

- $m = 0$: De esta manera g es invertible a izquierda, luego, tomando $q = fc$ y $r = 0$:

$$f = qg + r = fcg.$$

Supongamos el resultado para polinomios de grado menor que n y sea f con $grad(f) = n$ y $a_n = lc(f)$. Tenemos dos casos:

- $m > n$: tomamos $q = 0$ y $r = f$, y el resultado se tiene.

- $m \leq n$: sea $t = n - m$. Como:

$$\begin{aligned} a_n\sigma^t(c)x^t g &= a_n\sigma^t(c)x^t b_m x^m + \cdots + a_n\sigma^t(c)x^t b_0 \\ &= a_n\sigma^t(c)\sigma^t(b_m)x^n + \text{términos de grado} < n \\ &= a_n x^n + \text{términos de grado} < n. \end{aligned}$$

  Si

$$f_1 = f - a_n\sigma^t(c)x^t g,$$

  entonces $grad(f_1) < n$; luego por la hipótesis de inducción, existen $q_1, r \in B[x;\sigma,\delta]$ tales que:

$$f_1 = q_1 g + r, \text{ con } r = 0 \text{ ó } grad(r) < grad(g).$$

  Por tanto,

$$f = (a_n\sigma^t(c)x^t + q_1)g + r.$$

□

Teorema 1.2.3 (Algoritmo de la división a derecha). *Sean B un anillo, σ un automorfismo y $f, g \in B[x;\sigma,\delta]$ con $g \neq 0$. Si $b_m = lc(g)$ es invertible a derecha con inverso c,* *entonces, existen* $q, r \in B[x;\sigma,\delta]$ *tales que:*

$$f = gq + r, \text{ con } r = 0 \text{ ó } grad(r) < grad(g).$$

Demostración. Escribiendo los coeficientes de los polinomios a derecha, la prueba es análoga a la del teorema 1.2.2. □

Teorema 1.2.4. *Sean* A *un anillo y* S *un sistema multiplicativo de* A*. Entonces,* A *posee un anillo de fracciones a izquierda* $S^{-1}A$ *respecto de* S *si, y sólo si,* S *satisface las siguientes condiciones:*

i) *Si* $a \in A$ *y* $s \in S$ *son tales que* $as = 0$*, entonces existe* $u \in S$ *tal que* $ua = 0$*.*

ii) ***Condición de Ore a izquierda****: dados* $a \in A$ *y* $s \in S$*, existen* $t \in S$ *y* $b \in A$ *tales que* $ta = bs$*.*

Además, en $S^{-1}A$ *la estructura de anillo está dada por las operaciones:*

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{ca + db}{u}, \text{ con } u := cs = dt, \ c, s \text{ dados por ii).}$$

$$\frac{a}{s}\frac{b}{t} := \frac{cb}{us}, \text{ con } ua = ct, \ c, u \text{ dados por ii).}$$

Para $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in S^{-1}A$*.*

Demostración. Véase [8] teorema 1.4.3. □

Proposición 1.2.5. *Sea* A *un anillo que posee anillo de fracciones a izquierda con respecto a un sistema multiplicativo* S*. Entonces, si* A *es noetheriano,* $S^{-1}A$ *también lo es.*

Demostración. Primero veamos que la correspondencia entre ideales izquierdos de A y $S^{-1}A$:

$$\begin{array}{ccc} A & & S^{-1}A \\ K & \xmapsto{S^{-1}(\_)} & S^{-1}K \\ \psi^{-1}(I) & \xleftarrow{\psi^{-1}(\_)} & I, \end{array}$$

donde $S^{-1}K$ es la localización del ideal K visto como A-módulo y $\psi : A \longrightarrow S^{-1}A$ es el homomorfismo canónico, cumple $S^{-1}\psi^{-1}(I) = I$. Antes fijémonos que podemos ver a $S^{-1}K$

incluido en $S^{-1}A$. En efecto, la función que envía una clase $\frac{k}{s}$ en $S^{-1}K$ en la correspondiente clase en $S^{-1}A$ es un $S^{-1}A$-homomorfismo inyectivo: ella está bien definida y es inyectiva pues $\frac{a}{s}=\frac{b}{t}$ en $S^{-1}K$ si y sólo si $\frac{a}{s}=\frac{b}{t}$ en $S^{-1}A$; es aditiva pues $\frac{a}{s}+\frac{b}{t}=\frac{ca+db}{u}$ con $u=cs=dt$ en $S^{-1}K$, y la misma fórmula es válida en $S^{-1}A$; y es $S^{-1}A$-homomorfismo pues la fórmula del producto por escalar $\frac{a}{s}\frac{b}{t}=\frac{cb}{us}$ con $ua=ct$ coincide en $S^{-1}K$ y $S^{-1}A$.
$\subseteq$: Si $\frac{a}{s}\in S^{-1}\psi^{-1}(I)$, entonces $\frac{a}{s}=\frac{1}{s}\frac{a}{1}\in I$.
$\supseteq$: Si $\frac{a}{s}\in I$, $\frac{s}{1}\frac{a}{s}=\frac{a}{1}\in I$, y así $a\in\psi^{-1}(I)$ y por tanto $\frac{a}{s}\in S^{-1}\psi^{-1}(I)$.
Finalmente, si tenemos una cadena ascendente de ideales en $S^{-1}A$, aplicando $\psi^{-1}(\_)$, obtenemos una cadena ascendente de ideales en A la cual se estabiliza. Al aplicarle $S^{-1}(\_)$, obtenemos que la cadena original se estabiliza.

$\square$

Lema 1.2.6. *Sean A un anillo y $S_1\subseteq S_2$ subconjuntos multiplicativos de A sin divisores de cero a izquierda. Se tienen los isomorfismos:*

$$(\psi_1S_2)^{-1}(S_1^{-1}A)\cong S_2^{-1}A\cong(\psi_2S_1)^{-1}(S_2^{-1}A),$$

siempre y cuando existan tales anillos. Aquí, $\psi_1:A\longrightarrow S_1^{-1}A,\psi_2:A\longrightarrow S_2^{-1}A$ son los homomorfismos canónicos.

Demostración. Probaremos sólo el isomorfismo de la izquierda, el otro se puede probar análogamente.
Por la propiedad universal de $(\psi_1S_2)^{-1}(S_1^{-1}A)$, y $S_2^{-1}A$, obtenemos diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\frac{a}{s_1} \arrow[d, mapsto] & S_1^{-1}A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & (\psi_1S_2)^{-1}(S_1^{-1}A) \arrow[dl, dotted, "\exists!\bar{\alpha}"] \\
\frac{a}{s_1} & S_2^{-1}A &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, mapsto] & A \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & S_2^{-1}A \arrow[dl, dotted, "\exists!\bar{\beta}"] \\
\frac{\frac{a}{1}}{\frac{1}{1}} & (\psi_1S_2)^{-1}(S_1^{-1}A). &
\end{tikzcd}$$

Gracias a que $\alpha(\psi_1 S_2) \subseteq (S_2^{-1}A)^*$ y $\beta(S_2) \subseteq ((\psi_1 S_2)^{-1}(S_1^{-1}A))^*$. β está bien definida pues es composición de dos homomorfismos canónicos. Veamos que α está bien definida: Si $\frac{a}{s_1} = \frac{a'}{s_1'}$ en $S_1^{-1}A$, entonces existen $c \in A$, $s \in S_1 \subseteq S_2$ tales que $cs_1 = ss_1'$ y $ca = sa'$, luego $\frac{a}{s_1} = \frac{a'}{s_1'}$ en $S_2^{-1}A$. De manera similar, α es un homomorfismo dado que los elementos que se usan en el cálculo de una suma o un producto en $S_1^{-1}A$ sirven para el mismo cálculo en $S_2^{-1}A$, dado que $S_1 \subseteq S_2$. Finalmente:

$$\bar{\alpha}\bar{\beta}(\frac{a}{s_2}) = \bar{\alpha}(\beta(s_2)^{-1}\frac{\frac{a}{1}}{\frac{1}{1}}) = \bar{\alpha}(\frac{\frac{1}{1}}{\frac{s_2}{1}}\frac{\frac{a}{1}}{\frac{1}{1}}) = \bar{\alpha}(\frac{\frac{a}{1}}{\frac{s_2}{1}}) = \alpha(\frac{s_2}{1})^{-1}\frac{a}{1} = \frac{1}{s_2}\frac{a}{1} = \frac{a}{s_2},$$

y

$$\bar{\beta}\bar{\alpha}(\frac{\frac{a}{s_1}}{\frac{s_2}{1}}) = \bar{\beta}(\frac{1}{s_2}\frac{a}{s_1}) = \bar{\beta}(\frac{a}{s_1 s_2}) = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{s_1 s_2}{1}}\frac{\frac{a}{1}}{\frac{1}{1}} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{s_1 s_2}{1}} = \frac{\frac{a}{s_1}}{\frac{s_2}{1}},$$

donde la última igualdad se tiene pues:

$$\frac{1}{1}\frac{a}{1} = \frac{s_1}{1}\frac{a}{s_1}, \text{ y } \frac{1}{1}\frac{s_1 s_2}{1} = \frac{s_1}{1}\frac{s_2}{1},$$

en $S_1^{-1}A$.

□

Proposición 1.2.7. *Sean A un anillo y $S \subseteq Z(A)$ un subconjunto multiplicativo. Entonces, en $S^{-1}A$, la relación de igualdad de fracciones, y las fórmulas de suma y multiplicación pueden ser asumidas como en el caso conmutativo de la localización.*

Demostración. Puede usarse un argumento análogo al de la observación 1.4.8. (ii) de [8]. □

Lema 1.2.8. *Sean A un anillo y $a, b \in Z(A)$, con a, ab no nilpotentes. Hay un homomorfismo natural de anillos α :*

$$\begin{array}{ccc} A_a & \longrightarrow & A_{ba} \\ \frac{x}{a^n} & \longmapsto & \frac{b^n x}{(ba)^n} \end{array}$$

Demostración. El homomorfismo canónico $\psi : A \longrightarrow A_{ba}$, cumple que $\psi(a^n)$ tiene como inverso a $\frac{b^n}{(ba)^n}$. De esta manera, por la propiedad universal de la localización A_a obtenemos que la aplicación de arriba es un homomorfismo bien definido. □

Lema 1.2.9. *Sean A un anillo y $a, b \in Z(A)$, con a, b, ab no nilpotentes. Se tiene el isomorfismo:*

$$(A_a)_b \cong A_{ab}.$$

Demostración. Por la propiedad universal de $(A_a)_b$, y A_{ab}, obtenemos diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} \frac{x}{a^n} \arrow[d, mapsto] & A_a \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & (A_a)_b \arrow[dl, dotted, "\exists!\bar{\alpha}"] \\ \frac{b^n x}{(ba)^n} & A_{ab} & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, mapsto] & A \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & A_{ab} \arrow[dl, dotted, "\exists!\bar{\beta}"] \\ \frac{\frac{x}{1}}{\frac{1}{1}} & (A_a)_b. & \end{tikzcd}$$

Gracias a que $\alpha(\frac{b}{1}) = \frac{b}{1} = (\frac{a}{ab})^{-1} \in (A_{ab})^*$ y $\beta(ab) = (\frac{\frac{1}{a}}{\frac{b}{1}})^{-1} \in ((A_a)_b)^*$. Además:

$$\bar{\alpha}\bar{\beta}(\frac{x}{(ab)^n}) = \bar{\alpha}(\beta((ab)^n)^{-1}\frac{\frac{x}{1}}{\frac{1}{1}}) = \bar{\alpha}(\frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{b^n}{1}}\frac{\frac{x}{1}}{\frac{1}{1}}) = \bar{\alpha}(\frac{\frac{x}{a^n}}{\frac{b^n}{1}}) = \alpha(\frac{b^n}{1})^{-1}\alpha(\frac{x}{a^n}) = \frac{a^n}{(ab)^n}\frac{b^n x}{(ab)^n} =$$

$$\frac{x}{(ab)^n},$$

y

$$\bar{\beta}\bar{\alpha}(\frac{\frac{x}{a^n}}{\frac{b^m}{1}}) = \bar{\beta}(\frac{a^m}{(ab)^m}\frac{b^n x}{(ab)^n}) = \bar{\beta}(\frac{a^m b^n x}{(ab)^{m+n}}) = \frac{\frac{1}{a^{n+m}}}{\frac{b^{n+m}}{1}}\frac{\frac{a^m b^n x}{1}}{\frac{1}{1}} = \frac{\frac{a^m b^n x}{a^{n+m}}}{\frac{b^{n+m}}{1}} = \frac{\frac{b^n x}{a^n}}{\frac{b^{n+m}}{1}} = \frac{\frac{x}{a^n}}{\frac{b^m}{1}}.$$

□

Lema 1.2.10. *Sean A un anillo y $a \in Z(A)$, con a no nilpotente. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene el isomorfismo:*

$$A_a \cong A_{a^n}.$$

Demostración. Del lema 1.2.8, tenemos un homomorfismos de anillos

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & A_a & \cong & A_{a^{n-1}a} = A_{a^n} \\ & \frac{x}{a^m} & \longmapsto & \frac{a^{m(n-1)}x}{a^{nm}} \end{array},$$

el cual tiene como inversa la inclusión

$$\begin{array}{rccc} \beta: & A_{a^n} & \cong & A_a \\ & \frac{x}{a^{nl}} & \longmapsto & \frac{x}{a^{nl}} \end{array}.$$

□

1.3. El grupo elemental

Presentamos ahora una construcción general del grupo elemental, el cual constituye una herramienta importante en el entendimiento del grupo de Whitehead, que se presentará en la sección 1.4. Este tratamiento nos preparará para abordar el teorema de localización-globalización en el capítulo 3.

Observación 1.3.1. Sean A un anillo y M un A-módulo tal que $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$, con M_i un A-módulo para $1 \leq i \leq n$. Según el teorema 5.3.6. de [6], tenemos el isomorfismo:

$$\begin{array}{rccc} p: & End_A(M) & \longrightarrow & P := \bigoplus_{i,j=1}^{n} Hom_A(M_i, M_j) \\ & f & \longmapsto & (p_{ij}(f)) \end{array}$$

con

$$\begin{array}{rccc} p_{ij}: & End_A(M) & \longrightarrow & Hom_A(M_i, M_j) \\ & f & \longmapsto & \pi_j f \mu_i \end{array},$$

donde $\mu_i : M_i \longrightarrow M$ y $\pi_j : M \longrightarrow M_j$ son la i-ésima inyección canónica y la j-ésima proyección canónica, respectivamente. Nótese que si

$$h \in Hom_A(M_i, M_j) \subseteq \bigoplus_{i,j=1}^{n} Hom_A(M_i, M_j),$$

$p^{-1}(h)(M_{i'}) = 0$ para $i' \neq i$, y $p^{-1}(h)|_{M_i} = h$. Así, tenemos un homomorfismo de grupos para cualesquiera $i \neq j$:

$$\begin{array}{rccc} \alpha_{ij}: & (Hom_A(M_i, M_j), +) & \longrightarrow & (Aut_A(M), \circ) \\ & h & \longmapsto & id_M + p^{-1}(h) \end{array}.$$

Notemos que α_{ij} está bien definido dado que $id_M + p^{-1}(h) \in Aut_A(M)$, pues

$$(id_M - p^{-1}(h))(id_M + p^{-1}(h)) = (id_M + p^{-1}(h))(id_M - p^{-1}(h)) =$$

$$id_M - (p^{-1}(h)p^{-1}(h)) = id_M.$$

Y además es homomorfismo:

$$\alpha_{ij}(h+g) = id_M + p^{-1}(h+g) = id_M + p^{-1}(h) + p^{-1}(g) = (id_M + p^{-1}(h))(id_M + p^{-1}(g)).$$

Nótese que $p^{-1}(h)p^{-1}(h) = 0$ y $p^{-1}(h)p^{-1}(g) = 0$ gracias a que $i \neq j$.

Definición 1.3.2. *Sea M como en la observación anterior. Al subgrupo de $Aut_A(M)$ generado por las imágenes de los homomorfismos α_{ij} para $i \neq j$, lo denotamos por*

$$E(M_1, \ldots, M_n),$$

*y a los elementos $id_M + p^{-1}(h)$ con $h \in Hom_A(M_i, M_j)$ que lo generan los llamamos **automorfismos elementales** de M con respecto a la descomposición $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$. Si $M_2 \cong \ldots \cong M_{n+1} \cong N$ escribimos $E(M_1; n, N)$, en lugar de $E(M_1, \ldots, M_n)$. También, $E(n, A)$ es por definición $E(A^n)$.*

Observación 1.3.3. Gracias al isomorfismo p, a cada elemento $f \in End_A(M)$ lo podemos identificar con una matriz $[f_{ij}]_{n \times n}$ con $f_{ij} := p_{ji}(f) \in Hom_A(M_j, M_i)$, de tal manera que la composición en $End_A(M)$ corresponde al producto usual de matrices, la suma en $End_A(M)$ corresponde a la suma usual de matrices, y con:

$$[f_{ij}]_{n \times n}[m_j]_{n \times 1} := [\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(m_j)]_{n \times 1} \in M_1 \oplus \cdots \oplus M_n,$$

para $[m_j]_{n\times 1} \in M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$. Según lo anterior, los elementos de $Aut_A(M) \subseteq End_A(M)$ corresponden a matrices invertibles, y cada automorfismo elemental

$$id_M + p^{-1}(h) \in E(M_1, \ldots, M_n) \subseteq Aut_A(M),$$

se identifica con una matriz con identidades en la diagonal y h en la posición i, j con $h \in Hom_A(M_j, M_i)$.

Ejemplo 1.3.4. En el caso $M = A^n$, $Aut_A(A^n)$ corresponde a $GL(n, A)$, y $E(n, A)$ corresponde al subgrupo de $GL(n, A)$ generado por las matrices elementales:

$$E_{ij} = I_{n\times n} + ae_{ij}$$

donde e_{ij} es la matriz con 1 en la posición i, j y 0 en las demás. El efecto de E_{ij} sobre una matriz A, al multiplicarla a izquierda, es sumarle a la fila i-ésima a-veces(a izq.) la fila j-ésima; y al multiplicarla a derecha, es sumarle a la columna j-ésima a-veces(a der.) la columna i-ésima.

Observación 1.3.5. Notemos que tenemos una inclusión natural:

$$\begin{array}{ccc} Aut(A^n) & \rightarrowtail & Aut(A^{n+1}) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha \oplus id_A \end{array}$$

la cual corresponde a un homomorfismo de grupos:

$$GL(n, A) \rightarrowtail GL(n+1, A)$$

que envía la matriz $C \in GL(n, A)$ en

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(n+1, A).$$

Definición 1.3.6. *Definimos $GL(A)$ y $E(A)$ como los límites (directos) en la categoría de grupos, de los diagramas:*

$$GL(1, A) \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail GL(n, A) \rightarrowtail GL(n+1, A) \rightarrowtail \ldots,$$

y

$$E(1,A) \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail E(n,A) \rightarrowtail E(n+1,A) \rightarrowtail \dots$$

respectivamente.

Observación 1.3.7. Los elementos de $GL(A)$(respectivamente $E(A)$) pueden verse como matrices infinitas:

$$\begin{pmatrix} C & 0 & & \\ & 1 & & \\ 0 & & 1 & \vdots \\ & & \dots & \ddots \end{pmatrix}$$

con $C \in GL(n,A)$(respectivamente $E(n,A)$). Formalmente,

$$GL(A) := (\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} GL(n,A))/\sim,$$

donde la relación $\sim$ está dada por:

$$C \sim B \text{ si y sólo si existen } t, s \text{ tales que } \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix},$$

o lo que es lo mismo, si y sólo si los automorfismos $\alpha \in Aut(A^n)$, $\beta \in Aut(A^m)$, asociados a C y B cumplen $\alpha \oplus id_{A^t} = \beta \oplus id_{A^s}$. $\sim$ resulta ser una relación de equivalencia, y el producto $[C]_\sim [B]_\sim$ está dado por $[C'B']_\sim$ con $C' = \begin{pmatrix} C_{n\times n} & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} B_{m\times m} & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$, y $n+t = m+s$. Una construcción análoga es posible para $E(A)$.

Lema 1.3.8. *Las matrices*

$$\begin{pmatrix} I_n & C \\ 0 & I_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_m \end{pmatrix} \in E(n+m,A),$$

para $C \in M_{n\times m}(A)$, $B \in M_{m\times n}(A)$.

Demostración. Basta aplicar operaciones elementales sobre columnas a I_{n+m}. □

Observación 1.3.9. El lema anterior garantiza que aplicar operaciones elementales en bloques sobre columnas equivale a hacer operaciones elementales sobre columnas. Nótese que las matrices del lema corresponden a automorfismos elementales de $A^n \oplus A^m$.

Lema 1.3.10.
$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \ -J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in E(2n, A),$$

Demostración. Mediante operaciones elementales en bloques sobre columnas obtenemos la reducción:

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1=c_1+c_2} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2=c_2-c_1} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1=c_1+c_2} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

Aquí c_1, c_2 denotan las columnas de las matrices. □

Lema 1.3.11 (Lema de Whitehead). *Si $C, B \in GL(n, A)$, entonces:*

$$\begin{pmatrix} CB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} E(2n, A).$$

Demostración. Tenemos la reducción mediante operaciones elementales sobre columnas:

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1=c_1+c_2B^{-1}} \begin{pmatrix} C & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2=c_2-c_1B} \begin{pmatrix} C & -CB \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\_)\cdot J}$$

$$\begin{pmatrix} CB & C \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2=c_2-c_1B^{-1}} \begin{pmatrix} CB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

Aquí, J es la matriz del lema anterior. □

Corolario 1.3.12. *Sea $B \in GL(n, A)$. Entonces:*

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \in E(2n, A).$$

Demostración. Basta tomar $C = I_n$ en el lema anterior. □

Recordemos que si g, h son elementos de un grupo $(G, \cdot)$, $[a, b] := aba^{-1}b^{-1} \in G$.

Lema 1.3.13. *Sean $a, b \in A$. Entonces:*

$$[I_n + ae_{ij}, I_n + be_{jk}] = I_n + abe_{ik},$$

para cualquier tripla i, j, k de índices distintos.

Demostración.

1. Nótese que:

$$e_{ij}e_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k; \\ e_{il}, & \text{si } j = k. \end{cases}$$

2.

$$\begin{aligned}
[I_n + ae_{ij}, I_n + be_{jk}] &= (I_n + ae_{ij})(I_n + be_{jk})(I_n - ae_{ij})(I_n - be_{jk}) \\
&= (I_n + ae_{ij} + be_{jk} + abe_{ik})(I_n - ae_{ij})(I_n - be_{jk}) \\
&= (I_n + ae_{ij} + be_{jk} + abe_{ik} - ae_{ij})(I_n - be_{jk}) \\
&= (I_n + be_{jk} + abe_{ik})(I_n - be_{jk}) \\
&= I_n + be_{jk} + abe_{ik} - be_{jk} \\
&= I_n + abe_{ik}.
\end{aligned}$$

□

Corolario 1.3.14.

i) $E(n, A) = [E(n, A), E(n, A)]$, *para* $n \geq 3$.

ii) $E(A) = [E(A), E(A)]$.

Demostración.

i) Sabemos que $[E(n, A), E(n, A)] \leq E(n, A)$. Además, como todo generador de $E(n, A)$ está en el conmutador para $n \geq 3$ por el lema anterior, se tiene la otra inclusión.

ii) Por un lado $[E(A), E(A)] \leq E(A)$. Además, si $[C]_\sim \in E(A)$ podemos asumir que $C \in E(n, A)$ con $n \geq 3$, así $C \in [E(n, A), E(n, A)]$, y por tanto $[C]_\sim \in [E(A), E(A)]$.

□

Teorema 1.3.15.

$$E(A) = [GL(A), GL(A)].$$

Demostración. Por un lado $E(A) \leq [E(A), E(A)] \leq [GL(A), GL(A)]$. Además, si $[D]_\sim \in [GL(A), GL(A)]$, podemos asumir que $D = CBC^{-1}B^{-1}$, con $C, B \in GL(n, A)$. Por el corolario 1.3.12 tenemos que:

$$\begin{pmatrix} CBC^{-1}B^{-1} & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CB & 0 \\ 0 & (CB)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in E(2n, A).$$

Así, $[D]_\sim \in E(A)$. □

Corolario 1.3.16.

i) $E(A) \triangleleft GL(A)$.

ii) $GL(A)/E(A)$ *es abeliano.*

Corolario 1.3.17. *Según la prueba del teorema anterior:*

$$CBC^{-1} \equiv B \; mod(E(A)).$$

A continuación presentaremos algunos de los resultados anteriores de forma más general.

Observación 1.3.18. Sea $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ como en la observación 1.3.1. Sean

$$\phi : M_{i_1} \oplus \cdots \oplus M_{i_p} \longrightarrow M_{j_1} \oplus \cdots \oplus M_{j_q},$$

y

$$\psi : M_{k_1} \oplus \cdots \oplus M_{k_r} \longrightarrow M_{l_1} \oplus \cdots \oplus M_{l_s},$$

A-homomorfismos con $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n$, $1 \leq k_1 < \cdots < k_r \leq n$, y $1 \leq l_1 < \cdots < l_s \leq n$. Si $\{i_1, \ldots, i_p\} \cap \{l_1, \ldots, l_s\}$ es vacío, entonces, extendiendo ϕ y ψ a endomorfismos de M tomando $\phi(M_i) = 0$, $\psi(M_j) = 0$ para $i \neq i_1, \ldots, i_p$, $j \neq k_1, \ldots, k_r$; obtenemos que $\phi\psi = 0$, y

$$(id_M + \phi)(id_M + \psi) = id_M + \phi + \psi + \phi\psi = id_M + \phi + \psi.$$

Lema 1.3.19 (Análogo del lema 1.3.8)**.** *Sea $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_{n+m}$, como en la observación 1.3.1. Supongamos que*

$$\beta : N := M_1 \oplus \cdots \oplus M_n \longrightarrow N' := M_{n+1} \oplus \cdots \oplus M_{n+m},$$

y

$$\gamma : M_{n+1} \oplus \cdots \oplus M_{n+m} \longrightarrow M_1 \oplus \cdots \oplus M_n,$$

son homomorfismos de A-módulos. Extendamos β y γ a endomorfismos de M como en la observación anterior. Entonces:

$$id_M + \gamma = \begin{pmatrix} id_N & \gamma \\ 0 & id_{N'} \end{pmatrix}, \ id_M + \beta = \begin{pmatrix} id_N & 0 \\ \beta & id_{N'} \end{pmatrix} \in E(M_1, \ldots, M_{n+m}).$$

Demostración. Primero notemos que

$$\gamma = p^{-1}p(\gamma) = p^{-1}(\sum_{i=n+1}^{n+m} \sum_{j=1}^{n} \pi_j \gamma \mu_i) = \sum_{i=n+1}^{n+m} \sum_{j=1}^{n} p^{-1}(\pi_j \gamma \mu_i),$$

para μ_i, π_j, y p^{-1} como en la observación 1.3.1. De esta manera, por la observación 1.3.18 tenemos que

$$id_M + \gamma = id_M + \sum_{i=n+1}^{n+m} \sum_{j=1}^{n} p^{-1}(\pi_j \gamma \mu_i) = \prod_{i=n+1}^{n+m} \prod_{j=1}^{n} (id_M + p^{-1}(\pi_j \gamma \mu_i)) \in E(M_1, \ldots, M_{n+m}),$$

donde $\prod$ denota el producto en el anillo $End_A(M)$, es decir, la composición de endomorfismos. Un cálculo análogo muestra que $id_M + \beta \in E(M_1, \ldots, M_{n+m})$. $\square$

Lema 1.3.20 (Análogo del lema 1.3.10)**.** *Sean $N := M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$, $N' := M_{n+1} \oplus \cdots \oplus M_{n+m}$ y*

$$\gamma : N' = M_{n+1} \oplus \cdots \oplus M_{n+m} \longrightarrow N = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$$

un isomorfismo. Entonces:

$$\chi = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in E(M_1, \ldots, M_{n+m}).$$

Demostración. Notemos que

$$\begin{pmatrix} id_N & 0 \\ -\gamma^{-1} & id_{N'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} id_N & \gamma \\ 0 & id_{N'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} id_N & 0 \\ -\gamma^{-1} & id_{N'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} id_N & \gamma \\ -\gamma^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} id_N & 0 \\ -\gamma^{-1} & id_{N'} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, χ es producto de automorfismos en $E(M_1, \ldots, M_{n+m})$.

□

Lema 1.3.21 (Lema de Whitehead con morfismos). *Sean*

$$\gamma : N' := M_{n+1} \oplus \cdots \oplus M_{n+m} \longrightarrow N := M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$$

un isomorfismo de A-módulos y

$$\beta \in Aut_A(M_{n+1} \oplus \cdots \oplus M_{n+m}).$$

Entonces:

$$\gamma\beta\gamma^{-1} \oplus \beta^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma\beta\gamma^{-1} & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix} \in E(M_1, \ldots, M_{n+m}).$$

Demostración. Notemos que $\gamma\beta\gamma^{-1} \oplus \beta^{-1}$ es un producto en $E(M_1, \ldots, M_{n+m})$:

$$\begin{pmatrix} id_N & 0 \\ \beta^{-1}\gamma^{-1} & id_{N'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} id_N & -\gamma\beta \\ 0 & id_{N'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} id_N & -\gamma\beta^{-1} \\ 0 & id_{N'} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} id_N & -\gamma\beta \\ \beta^{-1}\gamma^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} id_N & -\gamma\beta^{-1} \\ 0 & id_{N'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\beta\gamma^{-1} & \gamma \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} id_N & -\gamma\beta^{-1} \\ 0 & id_{N'} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \gamma\beta\gamma^{-1} & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}.$$

Aquí, $\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \chi$ es la matriz del lema anterior. □

Corolario 1.3.22 (Análogo del corolario 1.3.12)**.** *Sea* $\beta \in Aut_A(M_1 \oplus \cdots \oplus M_n)$*. Entonces:*

$$\beta \oplus \beta^{-1} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix} \in E(M_1, \ldots, M_n, M_1, \ldots M_n).$$

Demostración. Basta tomar $\gamma = id_N$, para $N = N' := M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$, en el lema anterior.

□

Corolario 1.3.23. *Sea* $M := M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$*. Si* $\delta = \gamma\beta\gamma^{-1}\beta^{-1}$*, con* $\gamma, \beta \in Aut_A(M)$*, por el corolario anterior tenemos que:*

$$\begin{pmatrix} \gamma\beta\gamma^{-1}\beta^{-1} & 0 \\ 0 & id_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\beta & 0 \\ 0 & (\gamma\beta)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^{-1} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$\in E(M_1, \ldots, M_n, M_1, \ldots, M_n).$$

Lema 1.3.24 (Análogo del lema 1.3.13)**.** *Sean* $M := M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ *y* p^{-1} *como en la observación 1.3.1. Si*

$$\phi : M_j \longrightarrow M_i, \ \psi : M_k \longrightarrow M_j,$$

son A-homomorfismos, entonces

$$[id_M + p^{-1}(\phi), id_M + p^{-1}(\psi)] = id_M + p^{-1}(\phi\psi),$$

para cualquier tripla i, j, k *de índices distintos.*

Demostración. Primero, nótese que $\psi\phi = 0$, $\phi\phi = 0$, y $\psi\psi = 0$, pues $i \neq k$, $i \neq j$, y $j \neq k$. Además,

$$[id_M + p^{-1}(\phi), id_M + p^{-1}(\psi)] =$$

$$(id_M + p^{-1}(\phi))(id_M + p^{-1}(\psi))(id_M - p^{-1}(\phi))(id_M - p^{-1}(\psi)) =$$

$$(id_M + p^{-1}(\phi) + p^{-1}(\psi) + p^{-1}(\phi\psi))(id_M - p^{-1}(\phi))(id_M - p^{-1}(\psi)) =$$

$$(id_M + p^{-1}(\phi) + p^{-1}(\psi) + p^{-1}(\phi\psi) - p^{-1}(\phi))(id_M - p^{-1}(\psi)) =$$

$$(id_M + p^{-1}(\psi) + p^{-1}(\phi\psi))(id_M - p^{-1}(\psi)) =$$

$$id_M + p^{-1}(\psi) + p^{-1}(\phi\psi) - p^{-1}(\psi) = id_M + p^{-1}(\phi\psi).$$

$\square$

1.4. El grupo de Whitehead

A lo largo de esta sección, A denota un anillo arbitrario.

Definición 1.4.1. *Sean $\mathcal{D}$ una subcategoría plena de $\mathfrak{P}(A)$ cerrada para sumas directas finitas, y $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ la categoría cuyos objetos son automorfismos de módulos en $\mathcal{D}$ y $Hom_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}}(\alpha, \beta)$, para $\alpha \in Aut_{\mathcal{D}}(P)$, $\beta \in Aut_{\mathcal{D}}(Q)$, está dado por A-homomorfismos $f \in Hom_{\mathcal{D}}(P, Q)$ tales que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[d, "f"] \\ Q \arrow[r, "\beta"'] & Q \end{tikzcd}$$

conmuta. Denotemos por $< \alpha >$ la clase de todos los automorfismos en $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ isomorfos a α. Sean $F_{\mathcal{D}}$ el grupo abeliano libre multiplicativo con base el conjunto $X_{\mathcal{D}}$ de todas las clases $< \alpha >$, y $N_{\mathcal{D}}$ el subgrupo libre generado por la unión de los subconjuntos:

$$S_1 := \{< \alpha \oplus \beta >< \alpha >^{-1}< \beta >^{-1} | \alpha \in Aut_{\mathcal{D}}(P), \beta \in Aut_{\mathcal{D}}(Q); P, Q \in \mathcal{D}\}$$

$$S_2 := \{< \alpha\beta >< \alpha >^{-1}< \beta >^{-1} | \alpha, \beta \in Aut_{\mathcal{D}}(P); P \in \mathcal{D}\}.$$

*Al cociente $F_{\mathcal{D}}/N_{\mathcal{D}}$ lo denotamos por $K_1(\mathcal{D})$. Si $\mathcal{D} = \mathfrak{P}(A)$, escribimos simplemente $K_1(A)$ y lo llamamos el **grupo de Whitehead del anillo** A. A la clase de un elemento $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ en $K_1(\mathcal{D})$ la denotamos por $[\alpha]$.*

Lema 1.4.2.

i) Si $P \in \mathcal{D}$, la clase $[id_P]$ es precisamente el elemento neutro 1 en $K_1(\mathcal{D})$.

ii) Sea $[\alpha] \in K_1(\mathcal{D})$, entonces $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$.

Demostración.

i) Notemos que para cada $\alpha \in Aut_A(P)$, con $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$, tenemos que

$$[id_P][\alpha] = [id_P\alpha] = [\alpha] = [\alpha id_P] = [\alpha][id_P],$$

gracias a las relaciones dadas por S_2, y así, $[id_P] = 1$.

ii) Las relaciones dadas por S_2 garantizan que

$$[\alpha][\alpha^{-1}] = [id_P] = [\alpha^{-1}][\alpha],$$

y por tanto, $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$.

$\square$

Teorema 1.4.3. *Sean $P = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$ una suma directa de A-módulos proyectivos y $\alpha \in E(P_1, \ldots, P_n)$. Entonces $[\alpha] = 1$ en $K_1(A)$.*

Demostración. Basta ver nuestro resultado para el caso $\alpha = id_P + p^{-1}(\psi)$, con $\psi : P_k \longrightarrow P_i$, $k \neq i$, y p^{-1} como en la observación 1.3.1. Sea $P_{n+1} := P_i$. Tenemos que $\alpha \oplus id_{P_{n+1}} = id_{P'} + p^{-1}(\psi)$, para $P' := P \oplus P_{n+1}$, es también un automorfismo elemental en $E(P_1, \ldots, P_{n+1})$, y así, por 1.3.24, $\alpha \oplus id_{P_{n+1}} = [id_{P'} + p^{-1}(id^{-1}), id_{P'} + p^{-1}(id \circ \psi)]$ con $id : P_i \longrightarrow P_{n+1}$ la función identidad. Finalmente como $K_1(A)$ es abeliano, entonces $[\alpha] = [\alpha \oplus id_{P_{n+1}}] = 1$. $\square$

Presentaremos a continuación una proposición cuya demostración no incluiremos en este trabajo dado que requiere una gran cantidad de preliminares que se alejan de nuestro objetivo. Dicha demostración, junto con sus preliminares, se puede encontrar expuesta de manera clara en [4].

Proposición 1.4.4 ([4], capítulo VII, proposición 1.9.)**.** *Sea $\alpha \in Aut_A(P)$, con $P \in \mathfrak{P}(A)$ y $[\alpha] = 1$ en $K_1(A)$. Entonces, existe $\phi \in Aut_A(F)$, con $F \in \mathfrak{P}(A)$, tal que $\alpha \oplus \phi \oplus \phi^{-1}$ es un conmutador en $Aut_A(P \oplus F \oplus F)$. Más aun, $\alpha \oplus id_{F \oplus F} = (\alpha \oplus \phi \oplus \phi^{-1})(id_P \oplus \phi^{-1} \oplus \phi)$, con $id_P \oplus \phi^{-1} \oplus \phi$ conmutador en $Aut_A(P \oplus F \oplus F)$.*

Observación 1.4.5. Sean α un conmutador en $Aut_A(M_1, \ldots, M_n)$ y

$$f : M_1 \oplus \cdots \oplus M_n \longrightarrow M'_1 \oplus \cdots \oplus M'_m$$

un A-isomorfismo. Entonces, si $\alpha = \beta\gamma\beta^{-1}\gamma^{-1}$, tenemos que

$$f\alpha f^{-1} = (f\beta f^{-1})(f\gamma f^{-1})(f\beta^{-1} f^{-1})(f\gamma^{-1} f^{-1}) = (f\beta f^{-1})(f\gamma f^{-1})(f\beta f^{-1})^{-1}(f\gamma f^{-1})^{-1},$$

y así, $f\alpha f^{-1}$ es un conmutador en $Aut_A(M'_1 \oplus \cdots \oplus M'_m)$.

Corolario 1.4.6. *Sea $\alpha \in Aut_A(P)$ como en la proposición 1.4.4. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \oplus id_{A^n}$ es un producto de conmutadores en $Aut_A(P \oplus A^n)$.*

Demostración. Sea $P' := F \oplus F \in \mathfrak{P}(A)$, con F como en la proposición 1.4.4. Sabemos que existe un A-isomorfismo $\gamma : P' \oplus Q \longrightarrow A^n$. Además, como $\alpha \oplus id_{P'}$ es un producto de dos conmutadores en $Aut_A(P \oplus P')$ por la proposición 1.4.4, entonces $\alpha \oplus id_{P' \oplus Q}$ es producto de conmutadores en $Aut_A(P \oplus P' \oplus Q)$. Por lo tanto:

$$\alpha \oplus id_{A^n} = (id_P \oplus \gamma)(\alpha \oplus id_{P' \oplus Q})(id_P \oplus \gamma^{-1}),$$

es un producto de conmutadores en $Aut_A(P \oplus A^n)$, gracias a la observación 1.4.5, tomando $f := id_P \oplus \gamma$. $\square$

Observación 1.4.7. Nótese que en el corolario anterior $\alpha \oplus id_{A^n}$ es un producto de conmutadores en $Aut_A(P \oplus A^n)$, entonces, $\alpha \oplus id_{A^{n+1}}$ es un producto de conmutadores en $Aut_A(P \oplus A^{n+1})$ sumando id_A a cada automorfismo de la descomposición de $\alpha \oplus id_{A^n}$. De esta manera podemos asumir que $n \geq 1$.

Teorema 1.4.8. *Sea $\alpha \in Aut_A(P)$ con $P \in \mathfrak{P}(A)$. Si $[\alpha] = 1$ en $K_1(A)$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \oplus id_{A^n \oplus P \oplus A^n} \in E(P, P_1, \ldots, P_n, P, P_1, \ldots, P_n)$, con $P_i := A$ para $1 \leq i \leq n$.*

Demostración. Por el corolario anterior, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \oplus id_{A^n}$ es un producto de conmutadores en $Aut_A(P \oplus A^n)$. Por tanto, por el corolario 1.3.23, $\alpha \oplus id_{A^n \oplus P \oplus A^n} \in E(P, A, \ldots, A, P, A, \ldots, A)$. $\square$

Observación 1.4.9. En el teorema anterior, gracias a la observación 1.4.7, podemos asumir que $n \geq 1$.

Definición 1.4.10. *Denotamos por $\mathfrak{F}$ a la subcategoría plena de $\mathfrak{P}(A)$ cuyos objetos son módulos de la forma A^n con $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 1.4.11.

$$K_1(\mathfrak{F}) \cong K_1(A).$$

Demostración. Haremos la prueba en tres pasos. En los pasos 1. y 2., construiremos homomorfismos $\overline{\theta}$ y $\overline{\mu}$ respectivamente entre los grupos, y en el paso 3., mostraremos que $\overline{\mu}$ es el inverso de $\overline{\theta}$.

1. Tenemos
$$\begin{array}{rccc} \theta: & X_{\mathfrak{F}} & \longrightarrow & F(A)/N(A) \\ & <\alpha> & \longmapsto & [\alpha] \end{array}.$$
Donde $F(A)/N(A)$ es el cociente en la definición de $K_1(A)$, y $[\alpha]$ es la clase de $<\alpha>$ en dicho cociente. Nótese que θ está bien definida pues si $\alpha \cong \beta$ en $\mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$ entonces $\alpha \cong \beta$ en $\mathcal{C}_{\mathfrak{P}(A)}$. Por la propiedad universal de $F_{\mathfrak{F}}$, existe un $\mathbb{Z}$-homomorfismo bien definido
$$\hat{\theta}: F_{\mathfrak{F}} \longrightarrow F(A)/N(A),$$
el cual induce un nuevo homomorfismo:
$$\overline{\theta}: F_{\mathfrak{F}}/N_{\mathfrak{F}} \longrightarrow F(A)/N(A),$$
pues
$$\hat{\theta}(<\alpha\oplus\beta>) = [\alpha\oplus\beta] = [\alpha][\beta] = \hat{\theta}(\alpha)\hat{\theta}(\beta)$$
y
$$\hat{\theta}(<\alpha\beta>) = [\alpha\beta] = [\alpha][\beta] = \hat{\theta}(\alpha)\hat{\theta}(\beta).$$

2. Tenemos
$$\begin{array}{rccc} \mu: & X_{\mathfrak{P}(A)} & \longrightarrow & F_{\mathfrak{F}}/N_{\mathfrak{F}} \\ & <\alpha> & \longmapsto & [\gamma(\alpha\oplus id_Q)\gamma^{-1}] \end{array},$$
donde
$$\begin{tikzcd} P\oplus Q \arrow[r, "\gamma", "\cong"'] \arrow[d, "\alpha\oplus id_Q"'] & A^n \arrow[d, "\gamma(\alpha\oplus id_Q)\gamma^{-1}"] \\ P\oplus Q \arrow[r, "\gamma", "\cong"'] & A^n \end{tikzcd}$$
conmuta con $\alpha \in Aut_A(P)$, $P \in \mathfrak{P}(A)$, y Q es tal que $P\oplus Q \cong A^n$. Veamos ahora que μ está bien definida:

- Si $\alpha \cong \beta$ en $\mathcal{C}_{\mathfrak{P}(A)}$, existe un isomorfismo f tal que
$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[d, "f"] \\ P' \arrow[r, "\beta"'] & P' \end{tikzcd}.$$

Sea $\gamma : P \oplus Q \cong A^n$. Entonces $\gamma(f^{-1} \oplus id_Q) : P' \oplus Q \cong A^n$. Pero

$$\begin{tikzcd}
P \oplus Q \arrow[r, "\alpha\oplus id_Q"] \arrow[d, "f\oplus id_Q"'] & P \oplus Q \arrow[d, "f\oplus id_Q"] \\
P' \oplus Q \arrow[r, "\beta\oplus id_Q"'] & P' \oplus Q
\end{tikzcd}$$

conmuta, y así

$$(f^{-1} \oplus id_Q)(\beta \oplus id_Q)(f \oplus id_Q) = \alpha \oplus id_Q.$$

Al aplicar $\gamma(\_)\gamma^{-1}$ a ambos lados de esta ecuación obtenemos que $\mu(\alpha) = \mu(\beta)$.

- Si

$$\gamma : P \oplus Q \cong A^n \text{ y } \gamma' : P \oplus Q' \cong A^m,$$

tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
P \oplus Q \oplus P \oplus Q' \arrow[r, "\alpha\oplus id_Q\oplus id_P\oplus id_Q"] \arrow[d, "f_{1,3}"'] & P \oplus Q \oplus P \oplus Q' \arrow[d, "f_{1,3}"] \\
P \oplus Q \oplus P \oplus Q' \arrow[r, "id_Q\oplus id_Q\oplus\alpha\oplus id_{Q'}"'] & P \oplus Q \oplus P \oplus Q'
\end{tikzcd}$$

con $f_{1,3}$ inducida por la permutación $(1,3)$. Al aplicar $(\gamma \oplus \gamma')(\_)(\gamma^{-1} \oplus \gamma'^{-1})$ al diagrama la conmutatividad se conserva. Por tanto:

$$\begin{aligned}
[\gamma(\alpha \oplus id_Q)\gamma^{-1}] =& [(\gamma(\alpha \oplus id_Q)\gamma^{-1}) \oplus (\gamma' id_{P\oplus Q'}\gamma'^{-1})] \\
=& [(\gamma \oplus \gamma')(\alpha \oplus id_Q \oplus id_P \oplus id_{Q'})(\gamma^{-1} \oplus \gamma'^{-1})] \\
=& [(\gamma \oplus \gamma')(id_P \oplus id_Q \oplus \alpha \oplus id_{Q'})(\gamma^{-1} \oplus \gamma'^{-1})] \\
=& [(\gamma id_{P\oplus Q}\gamma^{-1}) \oplus (\gamma'(\alpha \oplus id_{Q'})\gamma'^{-1})] \\
=& [\gamma'(\alpha \oplus id_{Q'})\gamma'^{-1}].
\end{aligned}$$

Así, obtenemos

$$\hat{\mu} : F(A) \longrightarrow F_{\mathfrak{F}}/N_{\mathfrak{F}},$$

que induce:

$$\overline{\mu} : F(A)/N(A) \longrightarrow F_{\mathfrak{F}}/N_{\mathfrak{F}},$$

pues

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(<\alpha\oplus\beta>) =&[(\gamma\oplus\gamma')(\alpha\oplus id_Q\oplus\beta\oplus id_{Q'})(\gamma^{-1}\oplus\gamma'^{-1})]\\ =&[(\gamma(\alpha\oplus id_Q)\gamma^{-1})\oplus(\gamma'(\beta\oplus id_{Q'})\gamma'^{-1})]\\ =&[(\gamma(\alpha\oplus id_Q)\gamma^{-1})][(\gamma'(\beta\oplus id_{Q'})\gamma'^{-1})]\\ =&\hat{\mu}(\alpha)\hat{\mu}(\beta),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{array}{ccc} P\oplus Q\oplus P'\oplus Q' & \xrightarrow[\cong]{\gamma\oplus\gamma'} & A^{n+m}\\ {\scriptstyle \alpha\oplus id_Q\oplus\beta\oplus id_{Q'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\gamma\oplus\gamma')(\alpha\oplus id_Q\oplus\beta\oplus id_{Q'})(\gamma^{-1}\oplus\gamma'^{-1})}\\ P\oplus Q\oplus P'\oplus Q' & \xrightarrow[\cong]{\gamma\oplus\gamma'} & A^{n+m}\end{array}$$

conmuta, y

$$\gamma : P\oplus Q\cong A^n,\ \gamma' : P'\oplus Q'\cong A^m,$$

con $\alpha\in Aut_A(P)$, $\beta\in Aut_A(P')$; $P,P'\in\mathfrak{P}(A)$. También

$$\hat{\mu}(<\alpha\beta>) = [\gamma\alpha\beta\gamma^{-1}] = [\gamma\alpha\gamma^{-1}\gamma\beta\gamma^{-1}] = [\gamma\alpha\gamma^{-1}][\gamma\beta\gamma^{-1}] = \hat{\mu}(\alpha)\hat{\mu}(\beta),$$

con

$$\gamma : P\oplus Q\cong A^n$$

y $\alpha,\beta\in Aut_A(P)$, $P\in\mathfrak{P}(A)$.

3. Si $\alpha\in Aut_A(P)$:

$$\bar{\theta}\bar{\mu}([\alpha]) = \bar{\theta}([\gamma(\alpha\oplus id_Q)\gamma^{-1}]) = [\gamma(\alpha\oplus id_Q)\gamma^{-1}] = [\alpha\oplus id_Q] = [\alpha].$$

Si $\alpha\in Aut_A(A^n)$:

$$\bar{\mu}\bar{\theta}([\alpha]) = \bar{\mu}([\alpha]) = [\alpha].$$

□

Teorema 1.4.12.

$$K_1(A)\cong K_1(\mathfrak{F})\cong GL(A)/E(A).$$

Demostración. Al igual que en el teorema anterior haremos la prueba en tres pasos.

1. Consideremos la aplicación:

$$\begin{array}{cccc} \phi: & GL(A) & \longrightarrow & F_{\mathfrak{F}}/N_{\mathfrak{F}} \\ & [C]_{\sim} & \longmapsto & [\alpha] \end{array}$$

donde $C \in GL(n, A)$, $\alpha \in Aut(A^n)$ es el automorfismo correspondiente a C, y $[\alpha]$ denota la imagen de $< \alpha >$ en el cociente $F_{\mathfrak{F}}/N_{\mathfrak{F}}$.

- ϕ está bien definida:
  Si $C \sim B$ con $C \in GL(n, A)$, $B \in GL(m, A)$ y $\alpha \in Aut(A^n)$, $\beta \in Aut(A^m)$ los automorfismos correspondientes, entonces $\alpha \oplus id_{A^s} = \beta \oplus id_{A^t}$ y así

$$[\alpha] = [\alpha \oplus id_{A^s}] = [\beta \oplus id_{A^t}] = [\beta].$$

- ϕ es un homomorfismo:
  Sean $C \in GL(n, A)$, $B \in GL(m, A)$. Para el cálculo de $\phi(\cdot)$ podemos asumir que $n = m$. Si $\alpha, \beta \in Aut(A^n)$ son los automorfismos correspondientes,

$$\phi(CB) = [\alpha\beta] = [\alpha][\beta] = \phi(C)\phi(B),$$

  gracias a que el automorfismo asociado a un producto de matrices CB es la composición $\alpha\beta$ de los automorfismos respectivos.

Tenemos un homomorfismo bien definido:

$$\bar{\phi} : GL(A)/E(A) \longrightarrow K_1(\mathfrak{F}).$$

Para esto basta ver que $\phi(E(A)) = 0$, pero esto se tiene por la proposición 1.4.3, dado que todo elemento de $\phi(E(A))$ puede verse como la clase $[\alpha]$ para $\alpha \in E(n, A)$ con $n \in \mathbb{Z}^+$.

2. Sea

$$\begin{array}{cccc} \theta: & X_{\mathfrak{F}} & \longrightarrow & GL(A)/E(A) \\ & < \alpha > & \longmapsto & \bar{C} \end{array},$$

donde $\alpha \in Aut(A^n)$, C es la matriz asociada a α, y $\bar{C}$ su imagen canónica en $GL(A)/E(A)$.

θ está bien definida: Si

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"', "\cong"] & A^n \arrow[d, "\cong"', "f"] \\ A^m \arrow[r, "\alpha'"'] & A^m \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces

$$\begin{tikzcd} A^{n+m} \arrow[r, "\alpha \oplus id_{A^m}"] \arrow[d, "f\oplus f^{-1}"', "\cong"] & A^{n+m} \arrow[d, "\cong"', "f\oplus f^{-1}"] \\ A^{m+n} \arrow[r, "\alpha' \oplus id_{A^n}"'] & A^{m+n} \end{tikzcd}$$

conmuta. Si $C_{n\times n}$, $C'_{m\times m}$, D_{n+m} son las matrices asociadas a α, α' y $f \oplus f^{-1}$ respectivamente, entonces:

$$\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = D^{-1} \begin{bmatrix} C' & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} D,$$

y así, dado que $GL(A)/E(A)$ es abeliano:

$$\bar{C} = \overline{\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix} C' & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}} = \bar{C}'.$$

Luego θ queda bien definida.

Gracias a la propiedad universal de $F_{\mathfrak{F}}$ y a que $GL(A)/E(A)$ es abeliano tenemos un homomorfismo

$$\hat{\theta} : F_{\mathfrak{F}} \longrightarrow GL(A)/E(A),$$

el cual induce un homomorfismo en el cociente

$$\bar{\theta} : F_{\mathfrak{F}}/N_{\mathfrak{F}} \longrightarrow GL(A)/E(A),$$

dado que:

- Si $< \alpha \oplus \beta >< \alpha >^{-1}< \beta >^{-1} \in S_1$ con $\alpha \in Aut(A^n)$, $\beta \in Aut(A^m)$ y matrices respectivas $C_{n\times n}$, $B_{m\times m}$, sin pérdida de generalidad podemos asumir $n = m$ puesto que $\bar{\theta}(\gamma) = \bar{\theta}(\gamma \oplus id)$. Tenemos:

$$\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

en $GL(2n, A)$, con

$$\begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in E(2n, A).$$

Por tanto:

$$\hat{\theta}(\alpha \oplus \beta) = \hat{\theta}(\alpha)\hat{\theta}(\beta),$$

es decir, $\hat{\theta}(S_1) = 0$.

- Si $z =< \alpha\beta >< \alpha >^{-1}< \beta >^{-1} \in S_2$ con $\alpha, \beta \in Aut(A^n)$ y matrices respectivas $C_{n\times n}$, $B_{n\times n}$, entonces

$$\hat{\theta}(z) = \overline{CBC^{-1}B^{-1}} = 0,$$

pues $GL(A)/E(A)$ es abeliano.

3.

$$\bar{\theta}\bar{\phi}(\bar{C}) = \bar{\theta}([\alpha]) = \bar{C},$$

y

$$\bar{\phi}\bar{\theta}([\alpha]) = \bar{\phi}(\bar{C}) = [\alpha],$$

para $C \in GL(n, A)$ y $\alpha \in Aut(A^n)$ su correspondiente automorfismo.

□

1.5. El método de cancelación

Comenzamos esta sección con una proposición que nos ayudará a entender el concepto de elemento unimodular de un módulo.

Proposición 1.5.1. *Sean M un A-módulo y $m \in M$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) Existe un homomorfismo de A-módulos

$$f : M \longrightarrow A$$

tal que $f(m) = 1$.

ii) El homomorfismo de A*-módulos*

$$\begin{array}{rccc} h: & A & \longrightarrow & M \\ & a & \longmapsto & am \end{array}$$

es inyectivo hendido.

iii) $M = K \oplus Am$ *para algún* $K \leq_A M$, *y* $Ann(m) = \{0\}$.

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$: Nótese que $fh(a) = f(am) = af(m) = a$ para cada $a \in A$. Así, $fh = id_A$.
$ii) \Rightarrow iii)$: Si h es inyectivo hendido con inverso g, entonces h es inyectivo y $M = K \oplus Im(h)$ para $K = Ker(g) \leq_A M$. Es decir, $M = K \oplus Am$ con $Ann(m) = \{0\}$.
$iii) \Rightarrow i)$: Como $Ann(m) = \{0\}$, entonces m es una base del A-módulo cíclico Am. Basta definir:

$$\begin{array}{rccc} f: & M = K \oplus Am & \longrightarrow & A \\ & k + am & \longmapsto & a \end{array},$$

para $k \in K$ y $a \in A$. □

Definición 1.5.2. *Sean* M *un* A*-módulo y* $m \in M$. *Decimos que* m *es* ***unimodular****, si satisface alguna de las condiciones de la proposición 1.5.1.*

Es importante tener en cuenta que el principio de localización-globalización en su versión no conmutativa formulada por Artamonov, no constituye una generalización plena de su correspondiente versión conmutativa. El es una variante de tipo cancelación, la cual conserva una analogía clara con la versión clásica. En este espíritu, mostramos a continuación un teorema sencillo pero esencial que nos permitirá interpretar dicho principio.

Teorema 1.5.3. *Sea* A *un anillo. Supongamos que* P *y* Q *son* A*-módulos, y sean* Ae, Ae' *módulos cíclicos con bases* e, e' *respectivamente. Si además* $Q \oplus Ae' = P \oplus Ae$, *entonces son equivalentes:*

i) $Q \cong P$.

ii) Existe $\alpha \in Aut_A(Q \oplus Ae')$ *tal que* $\alpha(e') = e$.

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$: Si $\beta : Q \longrightarrow P$ es un isomorfismo de A-módulos, entonces, $\beta \oplus i \in Aut_A(Q \oplus Ae')$, donde

$$\begin{array}{rccc} i: & Ae' & \longrightarrow & Ae \\ & e' & \longmapsto & e \end{array}.$$

$ii) \Rightarrow i)$: Cada α como en $ii)$ induce un A-isomorfismo:

$$Q \cong (Q \oplus Ae')/(0 \oplus Ae') \xrightarrow{\bar{\alpha}} (P \oplus Ae)/(0 \oplus Ae) \cong P.$$

$\square$

Observación 1.5.4. Sean M un A-módulo y X el conjunto de elementos unimodulares de M. Tenemos una acción natural del grupo de automorfismos de M (o de cualquier subgrupo de este) sobre X:

$$\begin{array}{ccc} Aut_A(M) \times X & \longrightarrow & X \\ (\alpha, m) & \longmapsto & \alpha(m) \end{array}.$$

Nótese que $\alpha(m) \in X$, pues si $f(m) = 1$ para algún homomorfismo $f : M \longrightarrow A$, entonces $f\alpha^{-1}(\alpha(m)) = 1$.

Ahora veamos como esta acción se relaciona con el método de la cancelación. Supongamos que P y Q son A-módulos tales que

$$Q \oplus Ae' = P \oplus Ae, \tag{I}$$

donde Ae, Ae' son módulos cíclicos con bases e, e' respectivamente. Tomando $M := Q \oplus Ae' = P \oplus Ae$, tenemos que $e, e' \in X$. Luego, según el teorema 1.5.3, $Q \cong P$ (es decir, podemos cancelar el sumando A en ambos lados de la igualdad I); si, y sólo si e y e' están en la misma órbita. Si la acción es transitiva, dicha cancelación es posible independientemente de P, Q, e, e'; siempre y cuando $M = Q \oplus Ae' = P \oplus Ae$.

También, tenemos una acción natural del grupo de automorfismos de M (o de cualquier subgrupo de este) sobre el conjunto E de epimorfismos de M en A:

$$\begin{array}{ccc} Aut_A(M) \times E & \longrightarrow & E \\ (\alpha, f) & \longmapsto & f\alpha \end{array}.$$

1.6. Álgebras graduadas y sus localizaciones

Definición 1.6.1. *Un anillo A se dice que es $\mathbb{Z}$-graduado, o simplemente **graduado**, si posee una familia de subgrupos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de su subgrupo aditivo $(A,+)$ que satisface las siguientes condiciones:*

i) $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$, *para cualesquiera* $i,j \in \mathbb{Z}$.

ii) $A = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \oplus A_i$.

*Para $i \in \mathbb{Z}$, A_i se denomina la **componente homogénea de grado** i y los elementos de A_i se dice que son **homogéneos de grado** i. Denotamos por $h(A)$ al conjunto de todos los elementos homogéneos de A. La familia $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ se denomina una **graduación** de A. Si $A_i = 0$ para $i < 0$, es decir, $A = \sum_{i\in\mathbb{N}} \oplus A_i$, se dice que A es un anillo **graduado positivamente**. Sea R un anillo conmutativo graduado con graduación $\{R_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Si A es una R- álgebra, se dice que A es $\mathbb{Z}$-graduada si además de las condiciones anteriores se tiene que*

iii) $R_iA_j \subseteq A_{i+j}$, *para cualesquiera* $i,j \in \mathbb{Z}$,

*es decir, si A es un R-**módulo graduado**. En particular, si dotamos a R con la graduación trivial $\{R_0\}$ con $R_0 := R$, A es $\mathbb{Z}$-graduada si además de i) y ii), A_i es un R-submódulo de A.*

Proposición 1.6.2. *Sea A un anillo graduado. Entonces:*

1. $1 \in A_0$.
2. A_0 *es subanillo de* A.

Demostración.

1. Sean $1 = a_{i_1} + \cdots + a_0 + \cdots + a_{i_t}$, $b = b_{j_1} + \cdots + b_0 + \cdots + b_{j_s} \in A$. Entonces, $1b_{j_k} = b_{j_k}$, luego $a_{i_1}b_{j_k} + \cdots + a_0b_{j_k} + \cdots + a_{i_t}b_{j_k} = b_{j_k}$, y así $a_0b_{j_k} = b_{j_k}$ para $1 \leq k \leq s$. Luego $a_0b = b$, y análogamente $ba_0 = b$, para cualquier $b \in A$. Entonces, $a_0 = 1 \in A_0$.
2. Primero notemos que $(A_0,+) \leq (A,+)$ por definición. Además, $A_0A_0 \subseteq A_0$ y $1 \in A_0$, luego $(A_0,\cdot,1)$ es submonoide de $(A,\cdot,1)$.

□

Teorema 1.6.3. *Sean A un anillo graduado y S un subconjunto multiplicativo de elementos homogéneos. Entonces las condiciones del teorema 1.2.4 se satisfacen si, y sólo si,*

i′) Si $a \in h(A)$ y $s \in S$ son tales que $as = 0$, entonces existe $u \in S$ tal que $ua = 0$.

ii′) Dados $a \in h(A)$ y $s \in S$, existen $t \in S$ y $b \in h(A)$ tales que $ta = bs$.

Demostración.

- $i) \Rightarrow i')$: Inmediata.
- $ii) \Rightarrow ii')$: Si $a \in h(A)$ y $s \in S$, por $i)$, existen $t \in S$ y $b \in A$ tales que $ta = bs \in h(A)$. Así, si $b = b_{i_1} + \cdots + b_0 + \cdots + b_{i_t}$, reemplazando en la ecuación anterior e igualando componentes homogéneas obtenemos que $ta = b_{i_k}s \in h(A)$.

Ahora probaremos $i') \Rightarrow i)$ y $ii') \Rightarrow ii)$ por inducción sobre n, donde n es el número de sumandos $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n} \in h(A)$ de $a \in A$: El caso $n = 1$ se tiene por $i')$ y $ii')$. Supongamos ciertos nuestros resultados para elementos con número de sumandos homogéneos menor que n $(n \geq 2)$. Sean $a = a_{i_1} + \cdots + a_{i_n}$ y $s \in S$.

- $i') \Rightarrow i)$: Si $as = 0$, $(a_{i_1}s + \cdots + a_{i_{n-1}}s) + a_{i_n}s = 0$, y por tanto asumiendo que los a_{i_k} están en componentes homogéneas distintas, $(a_{i_1} + \cdots + a_{i_{n-1}})s = 0$ y $a_{i_n}s = 0$. Por hipótesis de inducción, existe $u_1 \in S$ tal que $u_1(a_{i_1} + \cdots + a_{i_{n-1}}) = 0$. También, puesto que $u_1a_{i_n}s = 0$, por el caso $n = 1$, existe $u_2 \in S$ tal que $u_2u_1a_{i_n} = 0$. Así, si $u := u_2u_1$, tenemos que $ua = 0$.
- $ii') \Rightarrow ii)$: Gracias a la hipótesis de inducción y el caso $n = 1$, existen $t_1, t_2 \in S$, $b_1, b_2 \in A$ tales que $t_1(a_{i_1} + \cdots + a_{i_{n-1}}) = b_1s$ y $t_2a_{i_n} = b_2s$. También, por el caso $n = 1$, existen $u \in S$, $v \in A$ tales que $t := ut_1 = vt_2 \in S$. Así $ta = (ub_1 + vb_2)s$.

□

Teorema 1.6.4. *Sean A un anillo graduado y S un subconjunto multiplicativo de elementos homogéneos. Si $S^{-1}A$ existe, es decir, se satisfacen las condiciones del teorema anterior, entonces $S^{-1}A$ es un anillo graduado.*

Demostración.

- Sea $(S^{-1}A)_i := \{\frac{a}{s} \in S^{-1}A\backslash\{0\} \mid a \in A_j,\ s \in S_k,\ \text{y } j-k=i\}\cup\{0\}$ para $S_k := S\cap A_k$ y $i, k \in \mathbb{Z}$. Veamos que el conjunto anterior está bien definido. Supongamos que $\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \neq 0$ donde $a \in A_j$, $s \in S_k$, $b \in A_{j'}$ y $t \in S_{k'}$. Entonces $\frac{a}{s} - \frac{b}{t} = \frac{ca-db}{u} = 0$ con $c \in S_l$, $d \in A_{l'}$ y $u := cs = dt$. Nótese que podemos asumir que c y d son homogéneos gracias al teorema anterior. De esta manera existe $v \in S_m$ tal que $v(ca - db) = 0$, es decir, $vca = vdb$. De $vca = vdb \neq 0$ y $cs = dt \neq 0$, obtenemos $l + j = l' + j'$ y $l + k = l' + k'$. Restando las ecuaciones anteriores, $j - k = j' - k'$.

- $(S^{-1}A)_i$ es subgrupo de $S^{-1}A$: Sean $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in (S^{-1}A)_i$. Entonces $a \in A_j$, $s \in S_k$, $b \in A_{j'}$ y $t \in S_{k'}$ para algunos $j, k, j', k' \in \mathbb{Z}$ tales que

$$j - k = j' - k' = i. \tag{1}$$

  Luego $\frac{a}{s} - \frac{b}{t} = \frac{ca-db}{u}$ con $u := cs = dt \in S$, $c \in S_l$, $d \in A_{l'}$. Así, como $cs = dt \neq 0$, entonces

$$l + k = l' + k'. \tag{2}$$

  También $ca \in A_{l+j}$ y $db \in A_{l'+j'}$, pero sumando las igualdades 1. y 2., $l+j = l'+j'$. Por tanto $ca - db \in A_{l+j} = A_{l'+j'}$, $u \in A_{l+k} = A_{l'+k'}$ y $(l + j) - (l + k) = j - k = i$, es decir, $\frac{a}{s} - \frac{b}{t} \in (S^{-1}A)_i$.

- $(S^{-1}A)_i(S^{-1}A)_{i'} \subseteq (S^{-1}A)_{i+i'}$: Sean $\frac{a}{s} \in (S^{-1}A)_i$ y $\frac{b}{t} = (S^{-1}A)_{i'}$. Entonces $a \in A_j$, $s \in A_k$, $b \in A_{j'}$ y $t \in A_{k'}$, con $j - k = i$ y $j' - k' = i'$. Hay dos posibilidades:

  - $\frac{a}{s} = 0$: En este caso $\frac{a}{s}\frac{b}{t} = 0 \in (S^{-1}A)_{i+i'}$.
  - $\frac{a}{s} \neq 0$: Tenemos que $\frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{cb}{us}$ con $ua = ct$, $u \in S_l$, $c \in A_{l'}$. Como $ua = ct \neq 0$, entonces $l+j = l'+k'$, y así $(l'+j')-(l+k) = (l'+j'+l+j)-(l+k+l'+k') = (j' + j) - (k + k') = i + i'$, con $cb \in A_{l'+j'}$ y $us \in A_{l+k}$.

- $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \oplus(S^{-1}A)_i = (S^{-1}A)$:

  - Igualdad: Si $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$, entonces $a = a_{i_1} + \cdots + a_{i_n}$, y así $\frac{a}{s} = \frac{a_{i_1}}{s} + \cdots + \frac{a_{i_n}}{s} \in \sum_{i\in\mathbb{Z}} \oplus(S^{-1}A)_i$.
  - Suma directa: Si $\frac{a_{j_1}}{s_{k_1}} + \cdots + \frac{a_{j_n}}{s_{k_n}} = 0$, entonces $t_1a_{j_1} + \cdots + t_na_{j_n}$ con $t_1 \in S$ y $t_i \in A$ homogéneo para $2 \leq i \leq n$, multiplicando a izquierda por un $s \in S$

adecuado. Los t_i son homogéneos pues para $n = 2$, si $\frac{a_{j_1}}{s_{k_1}} + \frac{a_{j_2}}{s_{k_2}} = 0$, entonces $a_{j_1} + \frac{s_{k_1}}{1}\frac{a_{j_2}}{s_{k_2}} = a_{j_1} + \frac{ca_{j_2}}{u} = 0$, con $us_{k_1} = cs_{k_2}$, $u \in S$ y c homogéneo. Por tanto $ua_{j_1} + ca_{j_2} = 0$. Inductivamente es posible ver este resultado para cualquier n. Por otro lado notemos que los $t_ia_{j_i}$ están en componentes homogéneas distintas pues si $t_ia_{j_i}$ y $t_{i'}a_{j_{i'}}$ con $i \neq i'$ estuvieran en la misma componente homogénea en A, $\frac{t_ia_{j_i}}{s} = \frac{a_{j_i}}{s_{k_i}}$ y $\frac{t_{i'}a_{j_{i'}}}{s} = \frac{a_{j_{i'}}}{s_{k_{i'}}}$ estarían en la misma componente homogénea en $S^{-1}A$, lo que sería contradictorio. De esta manera $t_1a_{j_1} = 0$ con $t_1 \in S$, y así $\frac{a_{j_1}}{s_{k_1}} = 0$. Análogamente podemos deducir que $\frac{a_{j_i}}{s_{k_i}} = 0$ para cada $2 \leq i \leq n$.

□

Corolario 1.6.5. *En el caso en que A es una R-álgebra graduada, $S^{-1}A$ también lo es.*

Demostración.

- $S^{-1}A$ es una R-álgebra: $S^{-1}A$ es un R-módulo mediante el homomorfismo de anillos ϕ:

$$\begin{array}{ccccc} R & \longrightarrow & A & \longrightarrow & S^{-1}A \\ r & \longmapsto & r \cdot 1 & \longmapsto & \frac{r\cdot 1}{1} \end{array}.$$

  Nos resta entonces ver que $Im(\phi) \subseteq Z(S^{-1}A)$. En efecto,

$$\frac{r \cdot 1}{1}\frac{a}{s} = \frac{(r \cdot 1)a}{s} = \frac{a(r \cdot 1)}{s} = \frac{a}{s}\frac{r \cdot 1}{1},$$

  pues los elementos $r \cdot 1$ conmutan con los de A.

- $R_i(S^{-1}A)_j \subseteq (S^{-1}A)_{i+j}$: Sean $a \in A_k$ y $s \in S_l$, con $k - l = j$. Como $\frac{r_i \cdot 1}{1}\frac{a}{s} = \frac{(r_i \cdot 1)a}{s} = \frac{r_i \cdot a}{s}$ con $r_ia \in A_{i+k}$ y $s \in S_l$, entonces $\frac{r_i \cdot a}{s} \in (S^{-1}A)_{i+k-l} = (S^{-1}A)_{i+j}$.

□

1.7. Algunas propiedades de módulos finitamente presentados

Como en el caso conmutativo, los módulos finitamente presentados juegan un papel importante en el principio de localización-globalización, y en general en la solución del problema de Serre (véase [5] capítulo I). Una ventaja de este tipo de módulos, es que podemos probar afirmaciones acerca de ellos, vía una reducción al caso de módulos libres. A continuación exponemos algunas propiedades que usaremos en el siguiente capítulo.

Proposición 1.7.1. *Sean R un anillo y $F_1, F_2 : \mathfrak{M}(R) \longrightarrow$ **AbGrp** dos funtores contravariantes exactos a izquierda, y sea $\tau : F_1 \longrightarrow F_2$ una transformación natural. Si $\tau_{R^n} : F_1(R^n) \longrightarrow F_2(R^n)$ es un isomorfismo para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $\tau_M : F_1(M) \longrightarrow F_2(M)$ es un isomorfismo para cada R-módulo M finitamente presentado.*

Demostración. Sea ${}_RM$ finitamente presentado, tenemos entonces una sucesión exacta

$$R^n \longrightarrow R^m \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

la cual induce un diagrama conmutativo con filas exactas con τ_{R^n}, τ_{R^m} isomorfismos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & F_1(M) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_M"'] & F_1(R^m) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{R^m}"'] & F_1(R^n) \arrow[d, "\tau_{R^n}"'] \\ 0 \arrow[r] & F_2(M) \arrow[r] & F_2(R^m) \arrow[r] & F_2(R^n). \end{tikzcd}$$

Finalmente, por el lema de los cinco obtenemos que $\tau(M)$ es un isomorfismo. □

Proposición 1.7.2. *Sean N un R-módulo finitamente presentado y $\{{}_RM_i\}_{i\in I}$. Entonces, tenemos un $\mathbb{Z}$-isomorfismo:*

$$Hom_R(N, \bigoplus_{i\in I} M_i) \cong \bigoplus_{i\in I} Hom_R(N, M_i).$$

Demostración. Sean

$$H(N) := Hom_R(N, \bigoplus_{i\in I} M_i), \ \ P(N) := \bigoplus_{i\in I} Hom_R(N, M_i).$$

Definimos el $\mathbb{Z}$-homomorfismo:

$$\begin{array}{cccc} \tau_N : & P(N) & \longrightarrow & H(N) \\ & (f_i)_{i\in I} & \longmapsto & f \end{array},$$

con f obtenida mediante la propiedad universal del producto:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\exists! f"] \arrow[dr, dotted, "f_i"'] & \prod_{i\in I} M_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ & M_i, \end{tikzcd}$$

para cada $i \in I$.

Nótese que dado que todas las f_i son nulas excepto un número finito, $f \in H(N)$. Así tenemos los funtores contravariantes exactos a izquierda:

$$\mathfrak{M}(R) \xrightarrow{H} \mathbf{AbGrp} \qquad\qquad \mathfrak{M}(R) \xrightarrow{P} \mathbf{AbGrp}$$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "h"'] & H(N) \\ N' \arrow[r, mapsto] & H(N') \arrow[u, "\_\circ h"'] \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} N \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "h"'] & P(N) \\ N' \arrow[r, mapsto] & P(N'). \arrow[u, "\bigoplus_{i\in I}(\_\circ h)"'] \end{tikzcd}$$

Además, la familia de los τ_N con N finitamente generado, determina una transformación natural $\tau : P \longrightarrow H$ pues los diagramas:

$$\begin{tikzcd} P(N) \arrow[r, "\tau_N"] & H(N) \\ P(N') \arrow[u, "\bigoplus_{i\in I}(\_\circ h)"] \arrow[r, "\tau_{N'}"] & H(N') \arrow[u, "\_\circ h"] \end{tikzcd}$$

conmutan. En efecto, sea $(f_i')_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} Hom_R(N', M_i)$. Por un lado

$$\tau_{N'}((f_i')_{i\in I})h = f'h,$$

y

$$\tau_N(\bigoplus_{i\in I}(\_ \circ h))((f_i')_{i\in I}) = \tau_N((f_i'h)_{i\in I}).$$

Pero notemos que $f'h$ hace conmutar

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\exists! f'h"] \arrow[dr, dotted, "f_i'h"'] & \prod_{i\in I} M_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ & M_i, \end{tikzcd}$$

para cada $i \in I$, y así

$$f'h = \tau_N((f_i'h)_{i\in I}).$$

Finalmente, para aplicar la proposition 1.7.1 falta ver que

$$\tau_{R^n} : P(R^n) \longrightarrow H(R^n)$$

es un $\mathbb{Z}$-isomorfismo:

De la demostración del teorema 5.3.6. de [6], tenemos un $\mathbb{Z}$-isomorfismo

$$p' : H' := Hom_R(R^n, \prod_{i\in I} M_i) \longrightarrow P' := \prod_{i\in I} Hom_R(R^n, M_i).$$

El cual se restringe a un $\mathbb{Z}$-homomorfismo

$$p'|_{H(R^n)} : H(R^n) \longrightarrow P(R^n).$$

En efecto, si $f \in Hom_R(R^n, \bigoplus_{i\in I} M_i)$, entonces $f(e_1), \ldots, f(e_n) \in \bigoplus_{i\in I_0} M_i$, donde $\{e_i\}$ es la base canónica de R_n, para algún $I_0 \subseteq I$ finito. De esta manera $f(r_1 + \cdots + r_n) = r_1 f(e_1) + \cdots + r_n f(e_n) \in \bigoplus_{i\in I_0} M_i$ para todo $r = (r_1, \ldots, r_n) \in R^n$. Así, $\pi_i' p'(f) = p_i'(f) = \pi_i f = 0$ para cada $i \in I \setminus I_0$, con

$$\begin{tikzcd} H' \arrow[r, "\exists! p'"] \arrow[dr, dotted, "p_i'"'] & P' \arrow[d, "\pi_i'"] \\ & Hom_R(R^n, M_i) \end{tikzcd}$$

en la propiedad universal de P'. Por tanto, $p'(f) \in \bigoplus_{i\in I} Hom_R(R^n, M_i)$. Finalmente notemos que τ_{R^n} es un $\mathbb{Z}$-isomorfismo con inverso $p'|_{H(R^n)}$:

- Si $f \in H(R^n)$, $\tau_{R^n} p'(f) = f$ gracias a la propiedad universal de $\prod_{i\in I} M_i$, pues

$$\pi_i \tau_{R^n}(p'(f)) = (p'(f))_i = \pi_i' p'(f) = p_i'(f) = \pi_i f.$$

- Si $(f_i)_{i\in I} \in P(R^n)$, $p'\tau_{R_n}((f_i)_{i\in I}) = (f_i)_{i\in I}$ gracias a la propiedad universal de P' pues

$$\pi_i' p' \tau_{R^n}((f_i)_{i\in I}) = p_i' \tau_{R^n}((f_i)_{i\in I}) = p_i' f = \pi_i f = f_i = \pi_i'((f_i)_{i\in I}).$$

$\square$

CAPÍTULO 2

Teorema de Horrocks

En este capítulo presentamos la prueba del teorema de Horrocks en el caso de anillos de polinomios torcidos, y la deducción del teorema clásico en el caso conmutativo a partir del caso no conmutativo. Hemos modificado algunos detalles de la demostración del teorema de Horrocks dada por Artamonov, así como también añadimos una hipótesis con la debida justificación. Lo anterior constituye uno de los aportes del presente trabajo. Comenzamos el capítulo con algunas propiedades de la localización del anillo de polinomios torcidos por el sistema de polinomios mónicos.

2.1. La localización por el sistema de polinomios mónicos

En este capítulo trabajaremos con $A = B[x;\sigma,\delta]$ y $S \subseteq A$ el sistema multiplicativo de los polinomios con coeficiente principal invertible. De aquí en adelante módulo noetheriano(artiniano) significará en realidad noetheriano(artiniano) a izquierda.

Lema 2.1.1. *Sea $f \in A$ tal que $lc(f)$ es invertible a izquierda, entonces A/Af es un B-módulo finitamente generado.*

Demostración. Si $\overline{g} \in A/Af$, usando el algoritmo de la división (teorema 1.2.2), existen $q, r \in A$ tales que $g = qf + r$, con $r = 0$ ó $grad(r) < grad(f)$. Así, si $n = grad(f)$, entonces $\overline{g} = \overline{r} \in \langle \overline{1}, \ldots, \overline{x^{n-1}} \}$. □

Proposición 2.1.2. *Si B es noetheriano, entonces S satisface la condición de Ore a izquierda.*

Demostración. Sean $f \in S$ y $g \in A$. Por el lema anterior A/Af es un B-módulo finitamente generado y por tanto noetheriano. Consideremos la siguiente cadena ascendente de B-submódulos de A/Af:

$$\langle \overline{g} \} \leqslant \langle \overline{g} \} + \langle \overline{xg} \} \leqslant \langle \overline{g} \} + \langle \overline{xg} \} + \langle \overline{x^2 g} \} \leqslant \dots .$$

Como A/Af es noetheriano, existe n tal que:

$$\sum_{k=0}^{n} \langle \overline{x^k g} \} = \sum_{k=0}^{n+1} \langle \overline{x^k g} \},$$

luego

$$\overline{x^{n+1} g} = \sum_{k=0}^{n} \overline{b_k x^k g};$$

en consecuencia

$$(x^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} b_k x^k) g \in Af,$$

con $x^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \in S$. □

Corolario 2.1.3. *$S^{-1}A$ existe.*

Demostración. Como los elementos de S no son divisores de cero a derecha la condición i) del teorema 1.2.4 se tiene. La condición ii) es precisamente la condición de Ore. □

Notación 2.1.4. Denotaremos $B\langle x; \sigma, \delta \rangle$ a la localización $S^{-1}A$.

Observación 2.1.5. Dado que S no tiene divisores de cero a izquierda el homomorfismo canónico $\psi : B[x; \sigma, \delta] \longrightarrow B\langle x; \sigma, \delta \rangle$ es inyectivo; esto da lugar a que de aquí en adelante identifiquemos a A con $\psi(A)$.

Corolario 2.1.6. *Sea B un anillo noetheriano. Si σ es un automorfismo $B\langle x; \sigma, \delta \rangle$ es noetheriano.*

Demostración. Notemos que $B[x; \sigma, \delta]$ es noetheriano por el teorema de la base de Hilbert, luego la proposición 1.2.5 asegura que $B\langle x; \sigma, \delta \rangle$ es noetheriano. □

Definición 2.1.7. *Sea Λ (respectivamente I) el subconjunto de $B\langle x;\sigma,\delta\rangle$ que consta de 0 junto con todos los cocientes $g^{-1}f$ con $grad(g) \geq grad(f)$ (respectivamente $grad(g) > grad(f)$).*

Proposición 2.1.8.

1. *Λ es un subanillo de $B\langle x;\sigma,\delta\rangle$.*

2. *I es un ideal bilátero de Λ.*

Demostración.

1. Sean $\frac{f}{g}$, $\frac{f_1}{g_1}$ en Λ. Entonces:

$$\frac{f}{g} - \frac{f_1}{g_1} = \frac{hf - h_1 f_1}{u}.$$

Donde $hg = h_1 g_1 = u \in S$ y $h \in S$. Además, podemos darnos cuenta que h_1 también está en S si comparamos los coeficientes principales de hg y $h_1 g_1$. Por tanto:

$$\begin{aligned} grad(hf - h_1 f_1) &\leq \max\{grad(hf), grad(h_1 f_1)\} \\ &= \max\{grad(h) + grad(f), grad(h_1) + grad(f_1)\} \\ &\leq \max\{grad(h) + grad(g), grad(h_1) + grad(g_1)\} \\ &= \max\{grad(hg), grad(h_1 g_1)\} = grad(u). \end{aligned}$$

Luego $\frac{f}{g} - \frac{f_1}{g_1} \in S^{-1}A$. Esto nos dice que Λ es un subgrupo aditivo de $S^{-1}A$. También:

$$\frac{f}{g}\frac{f_1}{g_1} = \frac{hf_1}{ug}.$$

Con $uf = hg_1$. Así:

$$\begin{aligned} grad(hf_1) &\leq grad(h) + grad(f_1) \leq grad(h) + grad(g_1) \\ &= grad(hg_1) = grad(uf) \\ &= grad(u) + grad(f) \leq grad(u) + grad(g) \\ &= grad(ug). \end{aligned}$$

Es decir, Λ es cerrado para el producto, y como $\frac{1}{1} \in \Lambda$, tenemos que es un subanillo de $S^{-1}A$.

2. Primero notemos que si $\frac{f}{g}$ y $\frac{f_1}{g_1}$ están en $I \subseteq \Lambda$, la desigualdad en 1. que mostraba que Λ era subgrupo de $S^{-1}A$ se vuelve estricta. Esto implica que I es subgrupo aditivo de $S^{-1}A$. Por otro lado, si $\frac{f}{g}$ o $\frac{f_1}{g_1}$ está en I, la desigualdad en 1. que mostraba que Λ era cerrado para producto se vuelve estricta. Esto significa justamente que I es un ideal bilátero de Λ.

□

Proposición 2.1.9. *Sea σ un automorfismo.*

$$B\langle x; \sigma, \delta\rangle = \Lambda + A,\ \Lambda \cap A = B,\ \Lambda = B \oplus I,\ B\langle x; \sigma, \delta\rangle = I \oplus A.$$

Demostración.

1. $B\langle x; \sigma, \delta\rangle = \Lambda + A$:

   - $\subseteq$: si $\frac{f}{g} \in B\langle x; \sigma, \delta\rangle$, como $g \in S$, por el teorema 1.2.3. existen $q, r \in A$ tales que $f = gq + r$, con $r = 0$ ó $grad(r) < grad(g)$. Así:

   $$\frac{f}{g} = \frac{r + gq}{g} = \frac{r}{g} + \frac{gq}{g} = \frac{r}{g} + \frac{q}{1} \in \Lambda + A.$$

   - $\supseteq$: clara a partir de la observación 2.1.5. y de que $\Lambda \subseteq B\langle x; \sigma, \delta\rangle$.

2. $\Lambda \cap A = B$:

   - $\subseteq$: si $\frac{f}{g} \in A$ podemos asumir que $g = 1$. Si además, $\frac{f}{1} \in \Lambda$, entonces $grad(f) \leq 0$ o $f = 0$, es decir, $\frac{f}{1} \in B$.
   - $\supseteq$: se sigue del hecho de que $B \subseteq A$ y $B \subseteq \Lambda$.

3. $\Lambda = B \oplus I$: $\Lambda \supseteq B + I$: clara a partir de las definiciones. $\Lambda \subseteq B + I$: Si $\frac{f}{g} \in \Lambda$ hay dos posibilidades. Si $grad(g) > grad(f)$, entonces $\frac{f}{g} \in I$. Por otro lado, si $n := grad(g) = grad(f)$, escribiendo $a := lc(f)$, $b := lc(g) \in B^*$, tenemos que

$$f_1 = f - gc,\ c := \sigma^{-n}(b^{-1}a)$$

es de grado estrictamente menor que n. Así:

$$\frac{f}{g} = \frac{gc}{g} + \frac{f_1}{g} \in B + I.$$

$I \cap B = \{0\}$: si $\frac{b}{1} \in B$ está en I, entonces $grad(b) < 0$ ó $b = 0$, de donde $\frac{b}{1} = 0$. Por otro lado es claro que $0 \in I \cap \{0\}$.

4. $B\langle x; \sigma, \delta\rangle = I \oplus A$: a partir de 1. y 3. es claro que $B\langle x; \sigma, \delta\rangle = I + A$, además, por 2. y 3., $I \cap A = I \cap \Lambda \cap A = I \cap B = \{0\}$.

□

Lema 2.1.10. *$I \subseteq Rad(\Lambda)$.*

Demostración. Sabemos por la proposición 2.1.8 que I es un ideal bilátero de Λ. Además, si $\frac{f}{g} \in I$, entonces

$$1 + \frac{f}{g} = \frac{g}{g} + \frac{f}{g} = \frac{g+f}{g}$$

con $lc(g+f) = lc(g) \in B^*$, y por tanto, $1 + \frac{f}{g} \in \Lambda^*$. Nuestro resultado se sigue entonces del corolario 7.1.4 de [7].

□

En lo que resta de este capítulo denotaremos por J al radical de Jacobson de B.

Definición 2.1.11. *Sea R un anillo con radical de Jacobson I. Decimos que R es semilocal, si R/I es un anillo artiniano.*

Proposición 2.1.12. *Supongamos que σ es sobreyectivo, entonces:*

1. *El subconjunto χ de Λ formado por los cocientes $\dfrac{f}{g}$, con $lc(f) \in J$, está contenido en el radical de Jacobson de Λ.*

2. *Si B es semilocal, Λ es semilocal.*

Demostración.

1. Primero observemos que χ es cerrrado para producto a derecha: Sean $\frac{f}{g} \in \chi$, $\frac{f_1}{g_1} \in \Lambda$. Entonces $\frac{f}{g}\frac{f_1}{g_1} = \frac{hf_1}{ug}$, con $uf = hg_1$ y $u \in S$. Comparando los coeficientes principales

de uf y hg_1, obtenemos $lc(u)\sigma^n(lc(f)) = lc(h)\sigma^m(lc(g_1))$. Si probamos que $\sigma(J) \subseteq J$ tendríamos $lc(u)\sigma^n(lc(f)) \in J$ y por lo tanto, como $\sigma^m(lc(g_1))$ es invertible, entonces $lc(h) \in J$. En efecto, como σ es sobreyectivo, $\sigma(J)$ es un ideal bilátero de B, luego, por el corolario 7.1.4. de [7], como $1 - \sigma(b) = \sigma(1-b) \in B^*$ para $b \in J$, se tiene que $\sigma(b) \in J$. De esta manera $lc(hf_1) = lc(h)\sigma^t(lc(f_1)) \in J$, y por tanto $\frac{f}{g}\frac{f_1}{g_1} \in \chi$.

Por otro lado, si $\frac{f}{g} \in \chi$, entonces:

$$1 + \frac{f}{g} = \frac{g}{g} + \frac{f}{g} = \frac{g+f}{g}$$

con $lc(g+f) = lc(g) \in B^*$ si $grad(g) > grad(f)$, y, $lc(g+f) = lc(g) + lc(f) \in B^*$ si $grad(g) = grad(f)$. Luego $1 + \frac{f}{g} \in \Lambda^*$ con inverso $\frac{g}{g+f}$. Finalmente, por el párrafo anterior y la proposición 7.1.2. de [7], esto muestra que $\chi \subseteq Rad(\Lambda)$.

2. Primero consideremos el isomorfismo de anillos:

$$\begin{array}{ccc} B/J & \cong & (B \oplus I)/(J \oplus I) = \Lambda/(J \oplus I) \\ \bar{b} & \longrightarrow & \bar{b} \end{array}.$$

Notemos que $J \oplus I \subseteq Rad(\Lambda)$: Si $b \in J$ y $\frac{f}{g} \in I$, entonces:

$$b + \frac{f}{g} = \frac{gb}{g} + \frac{f}{g} = \frac{gb+f}{g} = \frac{lc(g)\sigma^n(b)x^n + \text{términos de grado} < n}{g}$$

Con $n = grad(g)$. Si $lc(g)\sigma^n(b) = 0$, $b + \frac{f}{g} \in I \subseteq Rad(\Lambda)$. Por el contrario, si $lc(g)\sigma^n(b) \in J$ es no nulo, $b + \frac{f}{g} \in \chi \subseteq Rad(\Lambda)$.

De lo anterior, el siguiente homomorfismo de anillos está bien definido:

$$\alpha : \Lambda/(J \oplus I) \longrightarrow \Lambda/Rad(\Lambda)$$

$$\overline{\frac{f}{g}} \longmapsto \overline{\frac{f}{g}}.$$

Además es claramente sobreyectivo, luego $\Lambda/Rad(\Lambda)$ es isomorfo a un cociente de B/J. Esto nos dice que si B/J es artiniano, entonces $\Lambda/Rad(\Lambda)$ es artiniano.

$\square$

Lema 2.1.13. *Sea M un A-módulo finitamente generado tal que:*

$$S^{-1}M = 0 \text{ y } JM = M.$$

Entonces $M = 0$.

Demostración. Sabemos que $M = \langle m_1, m_2, \ldots, m_n \}$. Como $\frac{m_i}{1} = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$, entonces $f_i(x)m_i = 0$ para algunos $f_i(x) \in S$.

Veamos que M es finitamente generado como B-módulo: Sea $m \in M$, entonces $m = p_1m_1 + \cdots + p_nm_n$. Pero dado que los coeficientes principales de los f_i son invertibles, por el algoritmo de la división (teorema 1.2.2), tenemos que $p_i = q_if_i + r_i$ para algunos q_i y r_i con $r_i = 0$ ó $grad(r_i) < grad(f_i)$. Sea $t = \text{máx}\{grad(f_i)\}$. Así, si $r_i = \sum_{j=0}^{t-1} a_{ij}x^j$:

$$m = r_1m_1 + \cdots + r_nm_n = \sum_i \sum_j a_{ij}x^jm_i.$$

Luego, $\{x^jm_i\}$ genera a M como B-módulo.

Finalmente, puesto que $J = Rad(B)$, del lema de Nakayama se sigue que $M = 0$. □

Lema 2.1.14. *Supongamos que σ es un automorfismo. Sean $p, p' \in B[x;\sigma]$ con $p \in S$. Si $pp' \in JB[x;\sigma]$, entonces $p' \in JB[x;\sigma]$.*

Demostración. Sean p, p' como en el enunciado.Tenemos que $pp' = k$ con $k \in JB[x;\sigma]$. Sean $n = grad(p)$, $m = grad(p')$, así $pp' = \sum_{t=0}^{n+m} c_tx^t$. Vamos a probar por inducción sobre i que $p'_{m-i} \in J$, calculando c_{n+m-i}:

- $i = 0$. Como $c_{n+m} = p_n\sigma^n(p'_m) \in J$ y $p_n \in B^*$, tenemos que $\sigma^m(p'_m) \in J$; luego $p'_m \in J$, pues σ es automorfismo.

- Supongamos el resultado para indices menores que $i \geq 0$. Como

$$c_{n+m-i} = p_{n-i}\sigma^{n-i}(p'_m) + \cdots + p_{n-2}\sigma^{n-2}(p'_{m-i+2}) + p_{n-1}\sigma^{n-1}(p'_{m-i+1}) + p_n\sigma^n(p'_{m-i}),$$

  y $p_n \in B^*$, tenemos que $p_n\sigma^n(p'_{m-i}) \in J$; luego $p'_{m-i} \in J$, pues σ es automorfismo.

□

Lema 2.1.15. *Sean $p, p' \in B[x;\sigma]$ con $p' \in S$. Si $pp' \in JB[x;\sigma]$, entonces $p \in JB[x;\sigma]$.*

Demostración. La prueba es análoga a la del lema anterior y no usa que σ sea automorfismo.

□

2.2. Prueba de Artamonov

Iniciamos esta sección con un lema que interpreta la definición 2.2.2 que presentaremos adelante.

Lema 2.2.1. *Sean R un anillo, N un R-módulo y $M, M', N' \leq_R N$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $M \subseteq M' + N'$ *y* $M' \subseteq M + N'$.
2. $M + N' = M' + N'$.
3. $\pi(M) = \pi(M')$ *con* π *la proyección canónica de* N *en el cociente* N/N'.

Demostración. Evidente. □

Definición 2.2.2. *Si alguna de las condiciones del lema anterior se satisface, decimos que* M ***es congruente con*** M' ***módulo*** N' *y escribimos:*

$$M \equiv M' \ (mod\ N').$$

Definición 2.2.3. *Sea Q un B-módulo y σ un automorfismo de B. Definimos:*

$$Q[x;\sigma] := B[x;\sigma] \otimes_B Q,\ \ Q\langle x;\sigma\rangle := B\langle x;\sigma\rangle \otimes_B Q.$$

Teorema 2.2.4 (Horrocks no conmutativo). *Sea B un anillo noetheriano y σ automorfismo. Sean $Q \in \mathfrak{P}(B)$, $P \in \mathfrak{P}(B[x;\sigma])$ y supongamos que existe un epimorfismo de $B\langle x;\sigma\rangle$-módulos*

$$f : S^{-1}P \longrightarrow N := Q\langle x;\sigma\rangle\,,$$

con

$$f(P) \equiv Q[x;\sigma] \ (mod\ JN).$$

Entonces existe un automorfismo h de N tal que

$$h(x) \equiv x \ (mod\ JI \otimes_B Q)$$

para cada $x \in Q$. Además, si $f(P)$ es $B[x;\sigma]$-proyectivo, tenemos:

$$f(P) = h(Q[x;\sigma]).$$

Demostración. Primero notemos que Q es plano, y por tanto no hay ningún problema en considerar $M \otimes_B Q \subseteq B\langle x;\sigma\rangle \otimes_B Q$, siempre que $M \leq_B B\langle x;\sigma\rangle$. Realizaremos la prueba en varios pasos.

1. Gracias a la propiedad 4. de la proposición 2.1.9:

$$N = B\langle x;\sigma\rangle \otimes_B Q = (A + I) \otimes_B Q = (A \otimes_B Q) + (I \otimes_B Q) = Q[x;\sigma] + (I \otimes_B Q).$$

2. Si $\Delta \leq_B B\langle x;\sigma\rangle$ es también un subanillo, $\Delta \otimes_B Q$ es un Δ-módulo finitamente generado. En efecto, dado que Q es generado como B-módulo por $q_1, \ldots, q_m \in Q$, $\Delta \otimes_B Q$ es generado como Δ-módulo por $1 \otimes q_1, \ldots, 1 \otimes q_m \in \Delta \otimes_B Q$.

3. $N = f(P) + (I \otimes_B Q)$:

   Aplicaremos el lema de Nakayama. Consideremos el B-módulo $M := N/(f(P) + I \otimes_B Q)$. Primero veamos que es B-finitamente generado, para esto consideremos el homomorfismo sobreyectivo de B-módulos:

$$\begin{array}{rcl} M' := (Q[x;\sigma] + f(P))/f(P) & \longrightarrow & N/(f(P) + I \otimes_B Q) = M \\ \overline{z} & \longmapsto & \overline{z} \end{array}.$$

   Nótese que el es sobreyectivo pues por 1., si $z \in N$, $z = z' + z''$ con $z' \in Q[x;\sigma]$ y $z'' \in I \otimes_B Q$. Así, $\overline{z} = \overline{z'}$. Por lo anterior, basta ver que M' es B-finitamente generado. En efecto, por 2., tomando $\Delta = A$, tenemos los homomorfismos sobreyectivos de A-módulos:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^{m}[({}_A\langle 1\otimes q_i\}+f(P))/f(P)] & \longrightarrow & (Q[x;\sigma]+f(P))/f(P) \\ & & \\ (\overline{p_1\otimes q_1},\dots,\overline{p_m\otimes q_m}) & \longmapsto & \overline{p_1\otimes q_1+\cdots+p_m\otimes q_m} \end{array},$$

y para cada $i=1,\dots,m$

$$\begin{array}{ccc} A/As_i & \longrightarrow & (\langle 1\otimes q_i\}_A+f(P))/f(P) \\ \overline{p} & \longmapsto & \overline{p\otimes q_i} \end{array},$$

donde $f(\frac{z_i}{s_i})=1\otimes q_i$, con $\frac{z_i}{s_i}\in S^{-1}P$. Nótese que el homomorfismo está bien definido pues si $\overline{p}=0$ entonces $p=rs_i\in As_i$ y así $p\otimes q_i=rs_i(1\otimes q_i)=f(rz_i)\in f(P)$. Finalmente, como cada A/As_i es finitamente generado como B-módulo por el lema 2.1.1, todos los B-módulos considerados resultan finitamente generados.
Por otro lado, gracias a la congruencia en la hipótesis:

$$JM=J(N/(f(P)+I\otimes_B Q))=(JN+f(P)+I\otimes_B Q)/(f(P)+I\otimes_B Q)$$

$$=(JN+Q[x;\sigma]+I\otimes_B Q)/(f(P)+I\otimes_B Q)=N/(f(P)+I\otimes_B Q)=M.$$

Luego el lema de Nakayama asegura que $M=\{0\}$, es decir, $N=f(P)+I\otimes_B Q$.

4. $Q[x;\sigma]\equiv f(P)$ $(mod\ JI\otimes_B Q)$:

   Por un lado, de la congruencia en la hipótesis y multiplicando la igualdad en 1. por J obtenemos:

$$f(P)\subseteq Q[x;\sigma]+JN=Q[x;\sigma]+JQ[x;\sigma]+JI\otimes_B Q=Q[x;\sigma]+JI\otimes_B Q.$$

   Además, multiplicando la igualdad en 3. por J:

$$Q[x;\sigma]\subseteq f(P)+JN=f(P)+Jf(P)+JI\otimes_B Q=f(P)+JI\otimes_B Q.$$

5. Existencia del endomorfismo h:

Como Q es B-proyectivo tenemos el siguiente diagrama conmutativo de B-módulos:

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, dotted, "\exists g''"'] \arrow[d, "\pi"] \\ P \arrow[r, "\overline{f}"'] & N/(JI \otimes_B Q) \end{tikzcd}$$

Donde $\overline{f}$ es la restricción de f a P seguida de la proyección en el cociente, π es la proyección y $Im(\pi) \subseteq Im(\overline{f})$ pues por 4. $Q \subseteq f(P) + JI \otimes_B Q$. También tenemos una función bilineal y B-balanceada

$$\begin{array}{cccc} g': & B[x;\sigma] \times Q & \longrightarrow & P \\ & (p,q) & \longmapsto & pg''(q) \end{array},$$

de la cual obtenemos un $\mathbb{Z}$-homomorfismo g tal que:

$$\begin{tikzcd} B[x;\sigma] \times Q \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g'"'] & B[x;\sigma] \otimes_B Q \arrow[dl, dotted, "g"] \\ P & \end{tikzcd}$$

y que resulta ser un $B[x;\sigma]$-homomorfismo.

Tenemos entonces para $z = 1 \otimes q \in B \otimes_B Q \cong Q$:

$$\overline{fg(z)} = \overline{f}g(z) = \overline{f}g'(1,q) = \overline{f}g''(q) = \pi(q) = \overline{1 \otimes q},$$

es decir,

$$fg(z) \equiv z \ (mod \ JI \otimes_B Q). \tag{C}$$

Ahora extendemos fg a un endomorfismo h del $B\langle x;\sigma\rangle$-módulo N gracias a la propiedad universal de la localización:

$$\begin{tikzcd} Q[x;\sigma] \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "fg"'] & S^{-1}Q[x;\sigma] \arrow[dl, dotted, "h'"] & Q\langle x;\sigma\rangle \arrow[l, "\cong"'] \arrow[dll, dotted, "h"] \\ N & & \end{tikzcd},$$

con

$$\begin{array}{ccccccc} Q\langle x;\sigma\rangle \cong & (B\langle x;\sigma\rangle \otimes_A B[x;\sigma]) \otimes_B Q & \xrightarrow{\cong} & B\langle x;\sigma\rangle \otimes_A (B[x;\sigma] \otimes_B Q) & \xrightarrow{\cong} & S^{-1}Q[x;\sigma] \\ \frac{p}{q} \otimes z \mapsto & (\frac{p}{q} \otimes 1) \otimes z & \mapsto & \frac{p}{q} \otimes (1 \otimes z) & \mapsto & \frac{p\otimes z}{q} \end{array}.$$

6. h es un automorfismo de $Q\langle x;\sigma\rangle$:

   Primero notemos que el Λ-módulo

$$\Lambda \otimes_B Q = (B + I) \otimes_B Q = (B \otimes_B Q) + (I \otimes_B Q)$$

   es invariante respecto a h debido a la congruencia C:

$$\begin{aligned} h((B \otimes_B Q) + (I \otimes_B Q)) &\subseteq (B \otimes_B Q) + (JI \otimes_B Q) + Ih(B \otimes Q) \\ &\subseteq (B \otimes_B Q) + (JI \otimes_B Q) + (I \otimes_B Q) + (IJI \otimes_B Q) \\ &\subseteq (B \otimes_B Q) + (I \otimes_B Q). \end{aligned}$$

   Además, $I \subseteq Rad(\Lambda)$ gracias a 2.1.10, y por 2., $\Lambda \otimes_B Q$ es un Λ-módulo finitamente generado. Luego, por el párrafo anterior

$$h(\Lambda \otimes_B Q) + I(\Lambda \otimes_B Q) \subseteq \Lambda \otimes_B Q,$$

   y,

$$(B \otimes_B Q) + (I \otimes_B Q) \subseteq h(B \otimes_B Q) + (JI \otimes_B Q) + (I \otimes_B Q) \subseteq h(\Lambda \otimes_B Q) + I(\Lambda \otimes_B Q).$$

   Por tanto, $h(\Lambda \otimes_B Q) + I(\Lambda \otimes_B Q) = \Lambda \otimes_B Q$. Usando el lema de Nakayama, $h(\Lambda \otimes_B Q) = \Lambda \otimes_B Q$, es decir, h se restringe a un automorfismo del Λ-módulo $\Lambda \otimes_B Q$. También, como $Im(h) \supseteq \Lambda \otimes_B Q \supseteq B \otimes_B Q$ y h es $B\langle x;\sigma\rangle$-homomorfismo, entonces h es sobreyectivo; pero por 2., $Q\langle x;\sigma\rangle$ es finitamente generado sobre el anillo noetheriano $B\langle x;\sigma\rangle$ (corolario 2.1.6) y por tanto es noetheriano, luego h resulta ser un automorfismo por la proposición 1.3.4. de [7].

7. $f(P) \equiv h(Q[x;\sigma])$ $(mod\ JN)$: Primero notemos que

$$h(Q[x;\sigma]) = B[x;\sigma]h(B \otimes_B Q) = B[x;\sigma]fg(B \otimes_B Q) \subseteq B[x;\sigma]f(P) = f(P).$$

También, por la congruencia en la hipótesis del teorema y C:

$$\begin{aligned}
f(P) \subseteq & Q[x;\sigma] + JN = B[x;\sigma](B \otimes_B Q) + JN \\
\subseteq & B[x;\sigma](h(B \otimes_B Q) + (JI \otimes_B Q)) + JN \\
\subseteq & h(B[x;\sigma] \otimes_B Q) + B[x;\sigma](JI \otimes_B Q) + JN \\
\subseteq & h(Q[x;\sigma]) + J(B[x;\sigma](I \otimes_B Q)) + JN \qquad [\delta = 0] \\
\subseteq & h(Q[x;\sigma]) + JN.
\end{aligned}$$

8. Del punto anterior obtenemos que $f(P) = h(Q[x;\sigma]) + (f(P) \cap JN)$.

9. $P \cap (JS^{-1}P) = JP$:

   La inclusión $\supseteq$ es clara a partir de las definiciones. Para la inclusión $\subseteq$, si

   $$p = k_1 \frac{p_1}{q_1} + \cdots + k_t \frac{p_t}{q_t} \in P \cap (JS^{-1}P), k_i \in J, 1 \leq i \leq t.$$

   Aplicando la condición de Ore a las parejas k_i, q_i obtenemos $s_i \in S$ y $a_i \in B[x;\sigma]$ tales que $s_i k_i = a_i q_i$, y así

   $$p = \frac{a_1 p_1}{q'_1} + \cdots + \frac{a_t p_t}{q'_t}.$$

   Además, por 2.1.15, $a_i \in JB[x;\sigma]$ pues $s_i k_i \in JB[x;\sigma]$. Multiplicando a izquierda por un $s \in S$ apropiado obtenemos que

   $$sp = p' \in JP.$$

   Recordemos ahora que P es $B[x;\sigma]$-proyectivo finitamente generado y por tanto existen $\psi : L \twoheadrightarrow P$, $\phi : P \rightarrowtail L$ con $L \cong B[x;\sigma]^n$ y $\psi\phi = id_P$. Tomemos $e_1, \ldots, e_n$ una base de L. Enviando los términos de la ecuación anterior a L mediante ϕ y escribiéndolos en la base, obtenemos:

   $$s\phi(p) = sf_1 e_1 + \cdots + sf_n e_n = g'_1 e_1 + \cdots + g'_n e_n = \phi(p')$$

   Luego $sf_i = g'_i \in JB[x;\sigma]$. Aplicando 2.1.14, obtenemos que $f_i \in JB[x;\sigma]$, así $\phi(p) \in JL$ y $p = \psi\phi(p) \in J\psi(L) = JP$.

10. $f(P)\cap JN = Jf(P)$: En este punto es clave que el módulo $f(P)$ es $B[x;\sigma]$-proyectivo. Al aplicar el mismo razonamiento de 9., esta vez reemplazando a P y $S^{-1}P$ por $f(P)$ y $S^{-1}f(P)$ respectivamente, obtenemos $\psi(f(P)) \cap JS^{-1}f(P) = \psi(Jf(P))$, donde $\psi : f(P) \longrightarrow S^{-1}f(P)$ es el homomorfismo canónico. También, la inclusión $f(P) \hookrightarrow N$ induce un $S^{-1}A$-homomorfismo inyectivo α:

$$\begin{array}{ccccc} S^{-1}f(P) & \longrightarrow & S^{-1}N & \cong & N \\ \frac{f(p)}{s} & \longmapsto & \frac{f(p)}{s} & \longmapsto & \frac{1}{s}f(p) \end{array}.$$

Además, si $f(\frac{p}{s}) \in N$, $f(\frac{p}{s}) = \frac{1}{s}f(p) = \alpha(\frac{f(p)}{s})$, y por tanto α es un isomorfismo. De lo anterior obtenemos $\alpha\psi(f(P))\cap\alpha(JS^{-1}f(P)) = \alpha\psi(Jf(P))$, es decir, $f(P)\cap JN = Jf(P)$.

11. De 8. y 10. obtenemos que $f(P) = h(Q[x;\sigma]) + Jf(P)$.

12. $f(P) = h(Q[x;\sigma])$:

    Sea $M := f(P)/h(Q[x;\sigma])$. Dado que

$$JM = (h(Q[x;\sigma]) + Jf(P))/h(Q[x;\sigma]) = M$$

por 11. y $S^{-1}M \cong S^{-1}f(P)/S^{-1}h(Q[x;\sigma]) = \{0\}$, por 2.1.13, obtenemos que $M = 0$.

□

Ejemplo 2.2.5. Si el $B[x;\sigma]$-módulo $f(P)$ no cumple cierta hipótesis adicional como su proyectividad, el numeral 10. del teorema puede fallar. Tomemos $B = \mathbb{Z}[i]_{\langle 3\rangle}$ la localización de los enteros gaussianos por el ideal primo de los multiplos de 3: notemos que $\langle 3\rangle$ es un ideal primo pues 3 es irreducible en el UFD $\mathbb{Z}[i]$ y por lo tanto primo, $\mathbb{Z}[i]$ es noetheriano y así B resulta también noetheriano, y que B es un anillo local con maximal J compuesto por todas las fracciones con numerador múltiplo de 3 y denominador con parte real o imaginaria que no es múltiplo de 3. Fijemonos que los elementos de $S = \mathbb{Z}[i] \setminus \langle 3\rangle$ no son divisores de cero, luego podemos asumir que $B \subseteq c.c.(\mathbb{Z}[i]) = \mathbb{Q}[i]$; con esto en mente, el automorfismo dado por la conjugación se restringe a B como un nuevo automorfismo σ dado que $\sigma(B) \subseteq B$ y $\sigma^2 = id_B$.

Tomaremos $P = B[x;\sigma]^2 = \langle p_1, p_2\}$ y $Q = B$, de esta manera $S^{-1}P \cong B\langle x,\sigma\rangle^2$, $Q[x;\sigma] \cong$

$B[x;\sigma]$ y $Q\langle x;\sigma\rangle \cong B\langle x;\sigma\rangle$. Por esto, para escoger nuestra f, bastará definirla en los elementos básicos:

$$\begin{array}{rccc} f: & S^{-1}P & \longrightarrow & B\langle x,\sigma\rangle \\ & p_1 & \longmapsto & 1 \\ & p_2 & \longmapsto & \frac{3}{x} \end{array}.$$

Notemos que f es sobre pues $1 \in Im(f)$. Además la congruencia se tiene pues por un lado $B[x;\sigma] \subseteq f(P)$ y también, para cada $p \in P$,

$$\begin{aligned} f(p) =& g_1 + g_2\frac{3}{x} = g_1 + \frac{\overline{g_2}3}{x} && \text{cond. Ore} : xg_2 = \overline{g_2}x \\ =& g_1 + 3\frac{\overline{g_2}}{x} && \text{cond. Ore} : x3 = 3x \\ &\in B[x;\sigma] + JB\langle x;\sigma\rangle, \end{aligned}$$

donde $\overline{g_2}$ denota el polinomio obtenido de g_2 conjugando cada coeficiente.
Finalmente notemos que $f(p_2) = \frac{3}{x} = 3\frac{1}{x} \in JB\langle x;\sigma\rangle$, pero $\frac{3}{x} \notin B[x;\sigma] \supseteq Jf(P)$.

Observación 2.2.6.

- El ejemplo anterior muestra la necesidad de colocar entre las hipótesis del teorema 2.2.4, que $f(P)$ sea proyectivo como $B[x;\sigma]$-módulo, lo cual no aparece en los artículos de Artamonov acerca de módulos proyectivos sobre álgebras de polinomios cuánticos y productos cruzados (teorema 5.6 de [1]).

- En el numeral 3. de la prueba de 2.2.4, hemos modificado el argumento original de la demostración de este hecho, pues no es claro en principio, por qué

  $$f(P) + I \otimes_B Q$$

  es un $B[x;\sigma]$-módulo, hecho que utiliza Artamonov para localizar el cociente

  $$N/f(P) + I \otimes_B Q,$$

  y por el lema 2.1.13 concluir que

  $$N = f(P) + I \otimes_B Q.$$

2.3. Comparación con el caso conmutativo

A continuación mostramos un cuadro comparativo entre los objetos usados en la prueba del teorema de Horrocks dada por Paul Roberts (véase [5], capítulo II, corolario 4.2) y la prueba de Artamonov.

<table>
<tr><th>Caso conmutativo</th><th>Caso no conmutativo</th></tr>
<tr><td>$(R,\mathfrak{m})$ dominio local</td><td>B anillo noetheriano a izq. y $Rad(B) = J$</td></tr>
<tr><td>$A = R[x]$ anillo de polinomios usual</td><td>$A = B[x;\sigma]$ anillo de polinomios torcidos con $\sigma \in Aut(B)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$S \subseteq A$ sistema multiplicativo de polinomios en A
con coeficiente principal invertible</td></tr>
<tr><td>Existe $R\langle x\rangle := S^{-1}A = S^{-1}R[x]$</td><td>$S$ satisface condición de Ore a izq., luego existe $B\langle x;\sigma\rangle := S^{-1}A = S^{-1}B[x;\sigma]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Lambda = \{g^{-1}f \in S^{-1}A \mid grad(g) \geq grad(f)\} \cup \{0\}$
$I = x^{-1}\Lambda = \{g^{-1}f \in S^{-1}A \mid grad(g) > grad(f)\} \cup \{0\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$Q[x;\sigma] := B[x;\sigma] \otimes_B Q$, $Q\langle x;\sigma\rangle := B\langle x;\sigma\rangle \otimes_B Q$</td></tr>
</table>

Presentaremos a continuación la demostración del teorema de Horrocks en el caso conmutativo como consecuencia de la versión no conmutativa, pero antes necesitamos verificar un hecho importante.

Si $(R,\mathfrak{m})$ es conmutativo local, y M un R-módulo, su **reducción módulo** $\mathfrak{m}$ es el módulo $\overline{M} = M/\mathfrak{m}M$.

Proposición 2.3.1. *Sea $(R,\mathfrak{m})$ un dominio local. Si para $P \in \mathfrak{P}(A)$, $S^{-1}P$ es un $R\langle x\rangle$-módulo libre, entonces existe una base $\{x_i\}$ en $S^{-1}P$ tal que*

$$P \equiv P' \ (mod\ \mathfrak{m}S^{-1}P),$$

con

$$P' := R[x]x_1 + \cdots + R[x]x_n.$$

Demostración. Dividimos la prueba en varios pasos. Sea $\{x_1,\ldots,x_n\}$ una $R\langle x\rangle$-base de $S^{-1}P$. Definamos $\overline{R}(x) := c.c.(\overline{R}[x])$.

1. $\overline{S^{-1}P}$ es un espacio vectorial sobre $\overline{R}(x)$:

- Producto: Notemos que si $\overline{p} \in \overline{R}[x]$ entonces $\overline{p} = \overline{a_0} + \cdots + \overline{a_n} x^n$ proviene de $p = a_0 + \cdots + a_n x^n \in R[x]$.

  Para $\frac{\overline{p}}{\overline{q}} \in \overline{R}(x)$ y $\overline{z} \in \overline{S^{-1}P}$, $z \in S^{-1}P$, definimos:

$$\frac{\overline{p}}{\overline{q}}\overline{z} := \overline{\frac{p}{q}z},$$

  donde $\frac{p}{q}z$ es el producto dado por la estructura de $S^{-1}P$ cómo $R\langle x\rangle$-módulo, teniendo en cuenta que $\frac{p}{q} \in R\langle x\rangle$, pues, $lc(\overline{q}) = \overline{b_n} \neq 0$ implica $lc(q) = b_n$ invertible.

- La definición no depende de la clase en $\overline{R}(x)$ ni de los representantes de los coeficientes de los polinomios: Si $\frac{\overline{p}}{\overline{q}} = \frac{\overline{p_1}}{\overline{q_1}}$, puesto que $\overline{R}[x]$ es dominio, tenemos que $\overline{pq_1} - \overline{p_1 q} = 0$, luego, $t := pq_1 - p_1 q \in \mathfrak{m}[x]$. Así:

$$\frac{p}{q}z - \frac{p_1}{q_1}z = (\frac{p}{q} - \frac{p_1}{q_1})z = \frac{t}{1}\frac{1}{qq_1}z \in \mathfrak{m}S^{-1}P.$$

- La definición no depende de la clase de z pues si $z - z' \in \mathfrak{m}S^{-1}P$, entonces $\frac{p}{q}z - \frac{p}{q}z' \in \mathfrak{m}S^{-1}P$ gracias a que los elementos de $R\langle x\rangle$ conmutan.

2. En $\overline{S^{-1}P}$, las clases $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$ forman una $\overline{R}(x)$-base:

   - Generan: Pues $x_1, \ldots, x_n$ generan $S^{-1}P$ con coeficientes en $R\langle x\rangle$. Solo hay que tomar clases en $\overline{S^{-1}P}$.

   - Son l.i.: Si
$$\frac{\overline{p_1}}{\overline{q_1}}\overline{x_1} + \cdots + \frac{\overline{p_n}}{\overline{q_n}}\overline{x_n} = \overline{\frac{p_1}{q_1}x_1 + \cdots + \frac{p_n}{q_n}x_n} = 0,$$
     entonces,
$$\frac{p_1}{q_1}x_1 + \cdots + \frac{p_n}{q_n}x_n \in \mathfrak{m}S^{-1}P.$$
     Pero como $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una $R\langle x\rangle$-base de $S^{-1}P$:
$$\frac{p_1}{q_1}x_1 + \cdots + \frac{p_n}{q_n}x_n = \frac{s_1}{t_1}x_1 + \cdots + \frac{s_n}{t_n}x_n,$$
     con $s_i \in \mathfrak{m}[x]$. Así, $\frac{\overline{p_i}}{\overline{q_i}} = \frac{\overline{s_i}}{\overline{t_i}} = 0$ para $1 \leq i \leq n$.

3. $\overline{P}$ es un $\overline{R}[x]$-módulo mediante las operaciones que dotan a P como $R[x]$-módulo.

4. $\overline{P} \in \mathfrak{P}(\overline{R}[x])$: Sabemos que $P \in \mathfrak{P}(R[x])$, luego:

$$R[x]^m \cong P \oplus N$$

y,

$$R[x]^m/\mathfrak{m}R[x]^m \cong (P \oplus N)/\mathfrak{m}(P \oplus N).$$

Pero,

$$(\mathfrak{m}R[x])^m = \mathfrak{m}R[x]^m,\ \mathfrak{m}(P \oplus N) = \mathfrak{m}P \oplus \mathfrak{m}N.$$

Por tanto:

$$\overline{R}[x]^m \cong R[x]^m/(\mathfrak{m}R[x])^m \cong (P \oplus N)/(\mathfrak{m}P \oplus \mathfrak{m}N) \cong (P/\mathfrak{m}P) \oplus (N/\mathfrak{m}N).$$

Es decir, $\overline{P}$ es proyectivo finitamente generado.

5. Por el corolario 1.7.16. de [8], como $\overline{R}[x]$ es un DIP, $\overline{P}$ es libre pues es proyectivo. Sea $\{\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_m}\}$ con $e_i \in P$, una base de $\overline{P}$ como $\overline{R}[x]$-módulo.

6. En $\overline{S^{-1}P}$, las imágenes canónicas $\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_m$ forman una $\overline{R}(x)$-base:

   - Generan: Sea $\overline{\frac{z}{q}} \in \overline{S^{-1}P}$. Por 5., sabemos que:

   $$\overline{z} = \overline{p_1}\ \overline{e_1} + \cdots + \overline{p_m}\ \overline{e_m},$$

   entonces,

   $$z \equiv p_1e_1 + \cdots + p_me_m\ (mod\ \mathfrak{m}P),$$

   y,

   $$\frac{z}{q} \equiv \frac{p_1}{q}e_1 + \cdots + \frac{p_m}{q}e_m\ (mod\ \mathfrak{m}S^{-1}P).$$

   Así,

   $$\overline{\frac{z}{q}} = \frac{\overline{p_1}}{\overline{q}}\hat{e}_1 + \cdots + \frac{\overline{p_m}}{\overline{q}}\hat{e}_m.$$

   - Son l.i.: Si

   $$\frac{\overline{p_1}}{\overline{q_1}}\hat{e}_1 + \cdots + \frac{\overline{p_m}}{\overline{q_m}}\hat{e}_m = 0,$$

   entonces,

   $$\frac{p_1}{q_1}e_1 + \cdots + \frac{p_m}{q_m}e_m \in \mathfrak{m}S^{-1}P,$$

donde cada $q_i \in S$. Multiplicando por $\prod_i q_i$:

$$r_1 p_1 e_1 + \cdots + r_m p_m e_m \in \mathfrak{m}P,$$

con $r_i \in S$. Pasando al cociente $\overline{P}$:

$$\overline{r_1}\ \overline{p_1}\ \overline{e_1} + \cdots + \overline{r_m}\ \overline{p_m}\ \overline{e_m} = 0.$$

Entonces, $\overline{r_i}\ \overline{p_i} = 0$ en $\overline{R}[x]$, con $\overline{r_i} \neq 0$. Por tanto $\overline{p_i} = 0$ pues $\overline{R}[x]$ es dominio. Así:

$$\frac{\overline{p_i}}{\overline{q_i}} = 0,\ 1 \leq i \leq m.$$

7. Tenemos entonces que $n = m$ pues todas las bases del $\overline{R}(x)$-espacio vectorial $\overline{S^{-1}P}$ tienen el mismo cardinal. También, existe $\overline{C} \in GL(n, \overline{R}(x))$ tal que:

$$\overline{C}\begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \vdots \\ \hat{e}_n \end{bmatrix}.$$

8. La matriz $\overline{C}$ puede ser reducida mediante operaciones elementales sobre columnas a una matriz diagonal, es decir, existen $\overline{C_1}$, $\overline{C_1}^{-1}, \overline{D} \in GL(n, \overline{R}(x))$, con $D = diag(\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n})$ tales que $\overline{C}\ \overline{C_1}^{-1} = D$, o lo que es lo mismo $\overline{C} = \overline{D}\ \overline{C_1}$. Entonces:

$$\overline{DC_1}\begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \vdots \\ \hat{e}_n \end{bmatrix}.$$

Como $\overline{C_1}$ es un producto de elementales en $\overline{R}(x)$, ella corresponde a un producto de elementales $C_1 \in E(n, R\langle x\rangle)$. Esto nos dice que C_1 es invertible. De la misma manera $\overline{D}$ corresponde a $D = diag(b_1, \ldots, b_n)$ con $b_i \in R\langle x\rangle$. Como $\overline{D}$ es invertible, $\overline{b_i} \neq 0$, y así podemos asumir que b_i es invertible en $R\langle x\rangle$. De esta manera:

$$C\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

con $C = DC_1 \in GL(n, R\langle x\rangle)$ puede ser puesta como la base $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de $S^{-1}P$.

9. De 7. tenemos:

$$e_i = x_i + z_i, \text{ con } z_i \in \mathfrak{m}S^{-1}P,\ 1 \leq i \leq n.$$

10. $P' \equiv P\ (mod\ \mathfrak{m}S^{-1}P)$:

   - Por 9, $P' = R[x]x_1 + \cdots + R[x]x_n = R[x](e_1 - z_1) + \cdots + R[x](e_n - z_n)$, con $z_i \in \mathfrak{m}S^{-1}P$. Entonces, si $p' \in P'$, $p' = p + z$ con $p \in P,\ z \in \mathfrak{m}S^{-1}P$.
   - Si $p \in P$, como $\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n}$ forman una base de $\overline{P}$ como $\overline{R}[x]$-módulo:

$$\begin{aligned} p &= p_1e_1 + \cdots + p_ne_n + u && u \in \mathfrak{m}P \subseteq \mathfrak{m}S^{-1}P \\ &= p_1(x_1 + z_1) + \cdots + p_n(x_n + z_n) + u && \\ &= p' + z && p' \in P',\ z \in \mathfrak{m}S^{-1}P. \end{aligned}$$

□

Añadiremos en el siguiente teorema que nuestro anillo R sea noetheriano, cosa que difiere de la formulación original del teorema de Horrocks en el caso conmutativo, pero que no afecta la prueba del teorema de Quillen-Suslin como se vió en el capítulo 1, observación 1.1.6.

Teorema 2.3.2 (Horrocks). *Sea $(R, \mathfrak{m})$ un dominio local. Si para $P \in \mathfrak{P}(A)$, $S^{-1}P$ es un $R\langle x\rangle$-módulo libre, entonces P es libre.*

Demostración. Sea n como en la proposición anterior. Tomemos en el teorema de Horrocks 2.2.4 $Q = R^n \in \mathfrak{P}(R)$. Tenemos un $R\langle x\rangle$-isomorfismo $f := \alpha\beta$:

$$S^{-1}P \xrightarrow{\beta} R\langle x\rangle^n \xrightarrow{\alpha} R\langle x\rangle \otimes_R R^n = R^n\langle x\rangle.$$

Con α, β isomorfismos de $R\langle x\rangle$-módulos, β dado por la hipótesis de que $S^{-1}P$ es libre y $\alpha(p_1, \ldots, p_n) = \sum_i p_i \otimes u_i$, con $\{u_i\}_{1\leq i\leq n}$ la base canónica de R^n. Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ la $R\langle x\rangle$-base de $S^{-1}P$ como en la proposición anterior, así, podemos asumir que $\beta(x_i) = e_i$, con e_i los elementos de la base canónica de $R\langle x\rangle^n$. Sabemos que

$$P \equiv P'\ (mod\ \mathfrak{m}S^{-1}P),$$

con $P' = R[x]x_1 + \cdots + R[x]x_n$. Luego enviando la congruencia anterior mediante f, como $p - p' \in \mathfrak{m}S^{-1}P$ implica $f(p) - f(p') \in \mathfrak{m}R^n\langle x\rangle$, tenemos:

$$f(P) \equiv f(P') \; (mod \; \mathfrak{m}R^n\langle x\rangle).$$

Pero

$$\begin{aligned} f(P') &= f(R[x]x_1 + \cdots + R[x]x_n) = R[x]f(x_1) + \cdots + R[x]f(x_n) \\ &= R[x](1 \otimes u_1) + \cdots + R[x](1 \otimes u_n) = \psi \otimes id_{R^n}(R[x] \otimes_R R^n) \\ &= \psi \otimes id_{R^n}(R^n[x]), \end{aligned}$$

con

$$\psi \otimes id_{R^n} : R[x] \otimes_R R^n = R^n[x] \longrightarrow R\langle x\rangle \otimes_R R^n = R^n\langle x\rangle$$

la inclusión canónica. Así,

$$f(P) \equiv R^n[x] \; (mod \; \mathfrak{m}R^n\langle x\rangle).$$

Finalmente, el teorema de Horrocks asegura que existe un $R\langle x\rangle$-automorfismo h de $Q\langle x\rangle$ tal que

$$P \cong f(P) = h(R[x] \otimes_R R^n) \cong R[x] \otimes_R R^n \cong R[x]^n.$$

Luego P es $R[x]$-libre.

$\square$

CAPÍTULO 3

Principio de localización-globalización

En el presente capítulo hacemos una exposición detallada de la prueba del principio de localización-globalización para álgebras graduadas y sus preliminares, el cual constituye una versión de tipo cancelación del teorema clásico de pegamiento de Quillen. Hemos añadido una hipótesis al enunciado con la debida justificación. La mayoría de resultados presentados en las dos primeras secciones de este capítulo no son formulados o probados en los artículos de Artamonov:[1, 2, 3]. Su desarrollo constituye otro de los aportes de la presente monografía. En la tercera sección, mostramos un cuadro comparativo entre los objetos usados en la prueba de Quillen y la prueba de Artamonov. Finalizamos el trabajo con una sección de observaciones finales en las que comentamos el teorema de Quillen-Suslin tipo cancelación de Artamonov, y como éste se relaciona con el principio de localización-globalización.

3.1. Algunos anillos de endomorfismos

Como herramientas preparatorias para la prueba del principio de localización-globalización necesitamos considerar primero en detalle algunos anillos de endomorfismos, y ciertos homomorfismos distinguidos entre ellos.

Observación 3.1.1. Sean A una R-álgebra graduada, A' subanillo de A_0 y M, N A'-módulos, con M finitamente presentado. Gracias al teorema 2.11 de [12] y a la proposición

1.7.2 tenemos los $\mathbb{Z}$-isomorfismos

$$\begin{aligned} Hom_A(A\otimes_{A'} M, A\otimes_{A'} N) &\cong Hom_{A'}(M, Hom_A(A, A\otimes_{A'} N)) \\ &\cong Hom_{A'}(M, A\otimes_{A'} N) \cong Hom_{A'}(M, \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i \otimes_{A'} N) \\ &\cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} Hom_{A'}(M, A_i\otimes_{A'} N). \end{aligned}$$

Es decir, un $\mathbb{Z}$-isomorfismo ϕ con $\theta := \phi^{-1}$:

$$\begin{array}{ccc} Hom_A(A\otimes_{A'} M, A\otimes_{A'} N) & \longrightarrow & \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} Hom_{A'}(M, A_i\otimes_{A'} N) \\ u & \longmapsto & \phi(u) = \phi_{i_1}(u) + \cdots + \phi_{i_n}(u) \\ \theta(v_i) = v & \longleftarrow\!\!\shortmid & v_i \end{array},$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \phi_{i_k}(u): \quad M & \longrightarrow & A_{i_k}\otimes_{A'} N \\ m & \longmapsto & u(1\otimes m)_{i_k} \end{array},$$

con $u(1\otimes m) = u(1\otimes m)_{i_1} + \cdots + u(1\otimes m)_{i_n} \in \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}(A_i\otimes_{A'} N)$, y v es obtenido por la propiedad universal del producto tensorial:

$$\begin{tikzcd} A\times M \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v_i'"'] & A\otimes_{A'} M \arrow[dl, dotted, "\exists v"] \\ A\otimes_{A'} N & \end{tikzcd},$$

con

$$\begin{array}{rcl} v_i': \quad A\times M & \longrightarrow & A\otimes_{A'} N \\ (a,m) & \longmapsto & av_i(m) \end{array}$$

bilineal y A'-balanceada. Nótese que θ preserva el producto por elementos de $Z(A)$.

Proposición 3.1.2. *Sean A una R-álgebra graduada, A' subanillo de A_0 y M, N A'-módulos, con M finitamente presentado. Entonces,*

$$Hom_A(A\otimes_{A'} M, A\otimes_{A'} N)$$

es un R-módulo graduado.

Demostración.

- $H := Hom_A(A \otimes_{A'} M, A \otimes_{A'} N)$ es un R-módulo con la suma usual de homomorfismos y producto por escalar dado por el producto usual de constante por homomorfismo $ru = (r \cdot 1)u$, con $r \in R$, $r \cdot 1 \in A$ y $u \in H$.

- Por la observación 3.1.1 tenemos un $\mathbb{Z}$-isomorfismo ϕ con $\theta := \phi^{-1}$:

$$\phi : Hom_A(A \otimes_{A'} M, A \otimes_{A'} N) \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} Hom_{A'}(M, A_i \otimes_{A'} N).$$

  Así, $H = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_i$, donde

$$H_i := \theta(Hom_{A'}(M, A_i \otimes_{A'} N)).$$

- H es graduado, pues si $r \in R_i$, $v = \theta(v_j) \in H_j$, entonces

$$\begin{aligned}
\phi(rv)(m) =& \phi((r \cdot 1)v)(m) = (r \cdot 1)v(1 \otimes m) = (r \cdot 1)v_j(m) \\
=& (r \cdot 1)\sum_k a_k \otimes n_k = \sum_k r a_k \otimes n_k \\
\in& A_{i+j} \otimes_{A'} N
\end{aligned}$$

  pues $a_k \in A_j$. Así, $rv = \theta\phi(rv) \in \theta(Hom_{A'}(M, A_{i+j} \otimes_{A'} N))$.

□

Proposición 3.1.3. *Sean A una R-álgebra graduada, A' subanillo de A_0 y M un A'-módulo finitamente presentado. Entonces,*

$$End_A(A \otimes_{A'} M)$$

es una R-álgebra graduada.

Demostración.

1. $E := End_A(A \otimes_{A'} M)$ es un anillo con producto dado por la composición y la suma usual de homomorfismos, es un R-módulo por la proposición anterior, y además es

una R-álgebra pues si $r \in R$ y $u, v \in E$, entonces

$$r(uv(x)) = (r \cdot 1)(u(v(x)) = (r \cdot 1)u(v(x)) = (ru)(v)(x),$$

y

$$r(uv(x)) = (r \cdot 1)(u(v(x)) = u((r \cdot 1)v(x)) = u(rv)(x),$$

para cada $x \in A \otimes_{A'} M$.

2. Por la observación 3.1.1 tenemos un $\mathbb{Z}$-isomorfismo ϕ con $\theta := \phi^{-1}$:

$$\phi : End_A(A \otimes_{A'} M) \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} Hom_{A'}(M, A_i \otimes_{A'} M).$$

Así, $E = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} E_i$, donde

$$E_i := \theta(Hom_{A'}(M, A_i \otimes_{A'} M)).$$

3. $E_i E_j \subseteq E_{i+j}$: Sean $u = \theta(u_i) \in E_i$, $v = \theta(v_j) \in E_j$. Entonces

$$\begin{aligned}
\phi(uv)(m) =& uv(1 \otimes m) = u(v(1 \otimes m)) = u(v_j(m)) \\
=& \sum_k u(a'_k \otimes m'_k) = \sum_k a'_k u_i(m'_k) \\
=& \sum_k \sum_l a'_k a''_l \otimes m''_{k,l} \in A_{i+j} \otimes M,
\end{aligned}$$

pues $a'_k \in A_j$, $a''_l \in A_i$. Así, $uv = \theta\phi(uv) \in \theta(Hom_{A'}(M, A_{i+j} \otimes_{A'} M))$.
$R_i E_j \subseteq E_{i+j}$: Por la proposición anterior.

□

Proposición 3.1.4. *Sean A una R-álgebra graduada positivamente, A' subanillo de A_0 y M, N A'-módulos, con M finitamente presentado. Dado $c \in h(Z(A))$ se tiene un $\mathbb{Z}$-endomorfismo del R-módulo $Hom_A(A \otimes_{A'} M, A \otimes_{A'} N)$ dado por:*

$$\begin{array}{ccc}
Hom_A(A \otimes_{A'} M, A \otimes_{A'} N) & \longrightarrow & Hom_A(A \otimes_{A'} M, A \otimes_{A'} N) \\
f & \longmapsto & f(c) := \theta(f_0 + cf_1 + c^2 f_2 + \cdots + c^n f_n)
\end{array}$$

para $f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n = \phi(f)$ y $f_k \in Hom_{A'}(M, A_k \otimes_{A'} N)$.

Demostración. Sean $f, g \in End_A(A \otimes_{A'} M)$, $f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n = \phi(f)$, $g_0 + g_1 + g_2 + \cdots + g_m = \phi(g)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $n = m$.

$$\begin{aligned}(f+g)(c) =&\theta(f_0 + g_0 + c(f_1 + g_1) + c^2(f_2 + g_2) + \cdots + c^n(f_n + g_n))\\ =&\theta(f_0 + cf_1 + c^2 f_2 + \cdots + c^n f_n) + \theta(g_0 + cg_1 + c^2 g_2 + \cdots + c^n g_n)\\ =&f(c) + g(c).\end{aligned}$$

□

Proposición 3.1.5. *Sean A una R-álgebra graduada positivamente, A' subanillo de A_0, M, N A'-módulos finitamente presentados, y L un A'-módulo. Dados $c \in h(Z(A))$,*

$$g \in Hom_A(A \otimes_{A'} M, A \otimes_{A'} N) \text{ y } f \in Hom_A(A \otimes_{A'} N, A \otimes_{A'} L),$$

entonces:

$$fg(c) = f(c)g(c).$$

Demostración. Sean ϕ, θ, ϕ', θ', ϕ'', θ'' los isomorfismos naturales relativos a $Hom_A(A \otimes_{A'} N, A \otimes_{A'} L)$, $Hom_A(A \otimes_{A'} M, A \otimes_{A'} N)$ y $Hom_A(A \otimes_{A'} M, A \otimes_{A'} L)$ respectivamente. Escribamos $f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n = \phi(f)$, $g_0 + g_1 + g_2 + \cdots + g_m = \phi'(g)$. Podemos asumir que $n = m$.

$$\begin{aligned}fg(c) =&\theta\phi(f)\theta'\phi'(g)(c) = (\theta(f_0) + \cdots + \theta(f_n))(\theta'(g_0) + \cdots + \theta'(g_n))(c)\\ =&(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\theta(f_i)\theta'(g_j))(c) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\theta(f_i)\theta'(g_j)(c)\\ =&\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\theta''(c^{i+j}\phi''(\theta(f_i)\theta'(g_j)))\\ =&\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}c^{i+j}\theta(f_i)\theta'(g_j) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}c^i\theta(f_i)c^j\theta'(g_j)\\ =&(\theta(f_0) + \cdots + c^n\theta(f_n))(\theta'(g_0) + \cdots + c^n\theta'(g_n))\\ =&\theta(f_0 + \cdots + c^n f_n)\theta'(g_0 + \cdots + c^n g_n)\\ =&f(c)g(c).\end{aligned}$$

Nótese que

$$\phi''(\theta(f_i)\theta'(g_j)) \in Hom_{A'}(M, A_{i+j} \otimes_{A'} L).$$

□

Proposición 3.1.6. *Sean A una R-álgebra graduada positivamente, A' un subanillo de A_0 y M un A'-módulo finitamente presentado. Dado $c \in h(Z(A))$ se tiene un endomorfismo del anillo $End_A(A \otimes_{A'} M)$ dado por:*

$$\begin{array}{ccc} End_A(A \otimes_{A'} M) & \longrightarrow & End_A(A \otimes_{A'} M) \\ f & \longmapsto & f(c) := \theta(f_0 + cf_1 + c^2 f_2 + \cdots + c^n f_n) \end{array}$$

para $f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n = \phi(f)$ y $f_k \in Hom_{A'}(M, A_k \otimes_{A'} M)$. En particular, el endomorfismo preserva invertibles, es decir, automorfismos.

Demostración.

1. La aplicación definida es aditiva por la proposición 3.1.4.

2. La aplicación definida es multiplicativa por la proposición 3.1.5.

3. $$id(c) = \theta(1 \otimes \_) = id.$$

   Para $id = id_{End_A(A \otimes_{A'} M)}$, puesto que $\phi(id) = (1 \otimes \_) \in Hom_{A'}(M, A_0 \otimes_{A'} M)$.

□

Proposición 3.1.7. *Sean A una R-álgebra graduada positivamente, A' un subanillo de A_0 y $M_1, \ldots, M_n$ A'-módulos finitamente presentados. Dado $c \in h(Z(A))$, se tiene un endomorfismo del anillo $End(A \otimes_{A'} M_1 \oplus \cdots \oplus A \otimes_{A'} M_n)$ dado por:*

$$\begin{array}{ccc} End(A \otimes_{A'} M_1 \oplus \cdots \oplus A \otimes_{A'} M_n) & \longrightarrow & End(A \otimes_{A'} M_1 \oplus \cdots \oplus A \otimes_{A'} M_n) \\ \alpha = [\alpha_{ij}]_{n \times n} & \longmapsto & \alpha(c) := [\alpha_{ij}(c)]_{n \times n} \end{array}.$$

En particular, el endomorfismo es invariante respecto al grupo elemental, y preserva invertibles, es decir, automorfismos. Aquí, $[\alpha_{ij}]_{n \times n}$ con $\alpha_{ij} \in Hom(A \otimes_{A'} M_i, A \otimes_{A'} M_j)$, es la matriz de la observación 1.3.3.

Demostración.

- $id(c) = id$ pues para cada i, $id_{A\otimes_{A'}M_i}(c) = id_{A\otimes_{A'}M_i}$ por la proposición anterior.
- La aplicación es aditiva: Por la observación 1.3.3 y la proposición 3.1.4, si

  $$\alpha, \beta \in End(A \otimes_{A'} M_1 \oplus \cdots \oplus A \otimes_{A'} M_n),$$

  entonces

  $$(\alpha + \beta)(c) = [(\alpha_{ij} + \beta_{ij})(c)]_{n\times n} = [\alpha_{ij}(c) + \beta_{ij}(c)]_{n\times n} = \alpha(c) + \beta(c).$$

- La aplicación es multiplicativa: Si

  $$\alpha, \beta \in End(A \otimes_{A'} M_1 \oplus \cdots \oplus A \otimes_{A'} M_n),$$

  entonces

  $$(\alpha\beta)(c) = [(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj})(c)]_{n\times n} = [\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}(c)\beta_{kj}(c)]_{n\times n} = \alpha(c)\beta(c).$$

- La aplicación es invariante respecto al grupo elemental: Como preserva la composición, basta ver que preserva automorfismos elementales. Sea

  $$id + \psi \in E(A \otimes_{A'} M_1, \ldots, A \otimes_{A'} M_n),$$

  entonces

  $$(id + \psi)(c) = id(c) + \psi(c) = id + \psi(c) \in E(A \otimes_{A'} M_1, \ldots, A \otimes_{A'} M_n),$$

  por la proposición 3.1.5

$\square$

3.2. Prueba de Artamonov

Lema 3.2.1. *Sea m un número natural. Entonces:*

$$(x_1 + x_2)^{2m} = x_1^m h_1(x_1, x_2) + x_2^m h_2(x_1, x_2),$$

en el anillo $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$, donde $h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2]$ son de grado m.

Demostración.

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2)^{2m} &= \sum_{i=0}^{2m} \binom{2m}{i} x_1^i x_2^{2m-i} \\ &= \sum_{i=0}^{m} \binom{2m}{i} x_1^i x_2^{2m-i} + \sum_{i=m+1}^{2m} \binom{2m}{i} x_1^i x_2^{2m-i} \\ &= x_2^m (\sum_{i=0}^{m} \binom{2m}{i} x_1^i x_2^{m-i}) + x_1^m (\sum_{i=m+1}^{2m} \binom{2m}{i} x_1^{i-m} x_2^{2m-i}).\end{aligned}$$

Luego, obtenemos nuestro resultado tomando:

$$h_1(x_1, x_2) := \sum_{i=m+1}^{2m} \binom{2m}{i} x_1^{i-m} x_2^{2m-i},$$

$$h_2(x_1, x_2) := \sum_{i=0}^{m} \binom{2m}{i} x_1^i x_2^{m-i}.$$

□

Proposición 3.2.2. *Sean $m \in \mathbb{N}$ y $l \in \mathbb{Z}^+$. Entonces:*

$$(x_1 + x_2)^{2ml} = x_2^{ml} h_2^l(x_1, x_2) + x_1^m h_1(x_1, x_2),$$

en el anillo $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$, donde $h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2]$ son de grado $2ml - m$ y m respectivamente, y $h_1(x_1, x_2)$ depende de l.

Demostración. Por inducción sobre l. El caso $l = 1$ es precisamente el lema 3.2.1. Supongamos el resultado para l, y veamos para $l + 1$:

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2)^{2m(l+1)} =&(x_1 + x_2)^{2ml}(x_1 + x_2)^{2m}\\ =&(x_2^{ml}h_2^l(x_1, x_2) + x_1^m h_1'(x_1, x_2))(x_2^m h_2(x_1, x_2) + x_1^m h_1''(x_1, x_2))\\ =&x_2^{m(l+1)}h_2^{l+1}(x_1, x_2) + x_1^m h_1'(x_1, x_2)x_2^m h_2(x_1, x_2)\\ &+ x_1^m h_1''(x_1, x_2)x_2^{ml}h_2^l(x_1, x_2) + x_1^m h_1''(x_1, x_2)x_1^m h_1'(x_1, x_2)\\ =&x_2^{m(l+1)}h_2^{l+1}(x_1, x_2) + x_1^m h_1(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Aquí, la segunda igualdad está dada por la hipótesis de inducción y el caso $l = 1$,

$$h_1(x_1 + x_2) := h_1'(x_1, x_2)x_2^m h_2(x_1, x_2) + h_1''(x_1, x_2)x_2^{ml}h_2^l(x_1, x_2) + h_1''(x_1, x_2)x_1^m h_1'(x_1, x_2)$$

es de grado $2ml + m$, y $h_2(x_1, x_2)$ es el polinomio del lema 3.2.1. □

Sea A un anillo graduado positivamente y $Z(A)$ su centro. A tiene estructura natural de $Z(A)$-álgebra dada por la inclusión de $Z(A)$ en A. Sea Z un subanillo graduado de A contenido en $Z(A)$. Así, A también tiene estructura de Z-álgebra graduada positivamente. Supongamos además que ningún elemento no nulo de Z es un divisor de cero en A. Sea a un elemento homogéneo y no nulo de Z. Recordemos que A_a es la localización del anillo A por el sistema multiplicativo $\{1, a, a^2, \dots\}$. Denotamos por A_a^+ la parte no negativa de la localización $\mathbb{Z}$-graduada A_a (véase 1.6.5). En lo que sigue, la componente homogénea de grado i de A_a^+ será denotada por $A_a^+(i)$.

Lema 3.2.3. *Sea $a \in Z_m \setminus \{0\}$. Entonces A_0 está incluido en $A_a^+(0)$ de manera natural, y por tanto puede verse como un subanillo. En particular, $A_a^+(0)$ es A_0-módulo a derecha.*

Demostración. Recordemos que

$$A_a^+(0) = \{\frac{x}{s} \mid x \in A_i, s \in S_i, s = a^l, i = ml\},$$

y que la aplicación canónica

$$\psi_a : A \longrightarrow A_a^+$$

es inyectiva pues a no es divisor de cero en A. Tenemos entonces que ψ se restringe a un homomorfismo de anillos inyectivo

$$\psi_a|_{A_0} : A_0 \longrightarrow A_a^+(0),$$

con $\psi_a(x) = \frac{x}{1}$. □

Corolario 3.2.4. *Sean M y N A_0-módulos, con M finitamente presentado y $a \in Z \setminus \{0\}$ un elemento homogéneo. Entonces*

$$Hom_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M, A_a^+ \otimes_{A_0} N)$$

es un Z-módulo graduado mediante un isomorfismo ϕ_a con inverso θ_a:

$$\phi_a : Hom_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M, A_a^+ \otimes_{A_0} N) \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} Hom_{A_0}(M, A_a^+(i) \otimes_{A_0} N),$$

como en la proposición 3.1.2.

Demostración. Consecuencia del lema anterior y la proposición 3.1.2. □

Corolario 3.2.5. *Sea M un A_0-módulo finitamente presentado y $a \in Z \setminus \{0\}$ un elemento homogéneo. Entonces*

$$End_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M)$$

es una Z-álgebra graduada mediante un isomorfismo ϕ_a con inverso θ_a:

$$\phi_a : End_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M) \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} Hom_{A_0}(M, A_a^+(i) \otimes_{A_0} M),$$

como en la proposición 3.1.2.

Observación 3.2.6. Sean M, N A_0-módulos y S un sistema multiplicativo de elementos homogéneos de Z. Como en la observación 3.1.1, tenemos:

$$Hom_{A_S^+}(A_S^+ \otimes_{A_0} M, A_S^+ \otimes_{A_0} N) \cong Hom_{A_0}(M, Hom_{A_S^+}(A_S^+, A_S^+ \otimes_{A_0} N)) \cong$$

$$Hom_{A_0}(M, A_S^+ \otimes_{A_0} N) = Hom_{A_0}(M, (\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_S^+(i)) \otimes_{A_0} N).$$

Es decir, un $\mathbb{Z}$-isomorfismo λ_S con $\mu_S := \lambda_S^{-1}$:

$$\lambda_S : Hom_{A_S^+}(A_S^+ \otimes_{A_0} M, A_S^+ \otimes_{A_0} N) \longrightarrow Hom_{A_0}(M, (\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_S^+(i)) \otimes_{A_0} N).$$

En particular, para $a \in Z \setminus \{0\}$, $S = \{1, a, a^2, \dots\}$, tenemos un $\mathbb{Z}$-isomorfismo λ_a con $\mu_a := \lambda_a^{-1}$:

$$\lambda_a : Hom_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M, A_a^+ \otimes_{A_0} N) \longrightarrow Hom_{A_0}(M, (\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_a^+(i)) \otimes_{A_0} N).$$

Observación 3.2.7. Sean M un A_0-módulo, N un A_0-módulo plano y $a \in Z \setminus \{0\}$ un elemento homogéneo. Por la demostración del lema 3.2.3 tenemos una inyección canónica

$$\psi_a \otimes id_N : A \otimes_{A_0} N \longrightarrow A_a^+ \otimes_{A_0} N,$$

que induce una inclusión natural:

$$\psi_a \otimes id_N \circ \_ : Hom_{A_0}(M, A \otimes_{A_0} N) \longrightarrow Hom_{A_0}(M, A_a^+ \otimes_{A_0} N).$$

Definición 3.2.8. *Sean A una R-álgebra graduada positivamente, A' subanillo de A_0 y M un A'-módulo. Sea $u \in End_A(A \otimes_{A'} M)$. Definimos $o(u) \geq n$ si*

$$u(1 \otimes M) \subseteq (\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_{n+i}) \otimes_{A'} M.$$

Proposición 3.2.9. *Sean M un A_0-módulo finitamente generado, N un A_0-módulo plano y $a \in Z_m \setminus \{0\}$. Entonces*

$$Hom_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M, A_a^+ \otimes_{A_0} N) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} a^{-k}\mu_a(Hom_{A_0}(M, (\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_{mk+i}) \otimes_{A_0} N)).$$

En particular, todo morfismo $u \in Hom_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M, A_a^+ \otimes_{A_0} N)$ es de la forma $a^{-k}\mu_a(u')$, con $o(\mu_a(u')) \geq mk$.

Demostración. $\supseteq$: Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mu_a(Hom_{A_0}(M, \bigoplus_{i\in\mathbb{N}}(A_{mk+i})\otimes_{A_0} N)) \subseteq Hom_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M, A_a^+ \otimes_{A_0} N)$. Además, $a^{-k} \in Z(A_a^+)$, y por tanto,

$$a^{-k}\mu_a(Hom_{A_0}(M, \bigoplus_{i\in\mathbb{N}}(A_{mk+i}) \otimes_{A_0} N)) \subseteq Hom_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M, A_a^+ \otimes_{A_0} N).$$

$\subseteq$: Sea $u \in Hom_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M, A_a^+ \otimes_{A_0} N)$, entonces

$$\lambda_a(u) = u(1 \otimes \_) \in Hom_{A_0}(M, A_a^+ \otimes_{A_0} N),$$

pero como M es finitamente generado y $a \in Z(A)$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ de tal manera que $a^k\lambda_a(u) \in Hom_{A_0}(M, A \otimes_{A_0} N)$. Así,

$$a^{-k}\mu_a(a^k\lambda_a(u))(y \otimes z) = a^{-k}y(a^k\lambda_a(u)(z)) = a^{-k}y(a^k u(1 \otimes z)) = yu(1 \otimes z))$$

$$= u(y \otimes z),$$

para $y \otimes z \in A_a^+ \otimes_{A_0} M$. De esta manera $u = a^{-k}\mu_a(a^k\lambda_a(u))$. Finalmente, $a^k\lambda_a(u) = \lambda_a(a^k u) \in Hom_{A_0}(M, \bigoplus_{i\in\mathbb{N}}(A_{mk+i}) \otimes_{A_0} N)$. En efecto, supongamos que existe $n < mk$, y $z \in M$ tal que $(\lambda_a(a^k u))(z)_n \in A_n \otimes_{A_0} N$ es no nulo, entonces $\lambda_a(u)(z) = (a^{-k}\lambda_a(a^k u))(z)$, y $(a^{-k}\lambda_a(a^k u))(z)_{n-mk} \in A_a(n-mk) \otimes_{A_0} N$ es no nulo, con $n - mk < 0$, lo que es una contradicción pues $\lambda_a(u)(z) \in A_a^+ \otimes_{A_0} N$. □

Observación 3.2.10. Sean $a \in Z\setminus\{0\}$, $b \in Z\setminus\{0\}$ elementos homogéneos. Del lema 1.2.8 tenemos una inclusión natural de anillos

$$\begin{array}{ccc} A_a & \longrightarrow & A_{ba} \\ \frac{x}{a^n} & \longmapsto & \frac{b^n x}{(ba)^n} \end{array},$$

que preserva grados, y que por tanto se restringe a una nueva entre las partes no negativas:

$$A_a^+ \longrightarrow A_{ba}^+.$$

Lema 3.2.11. *Sean $S_1 \subseteq S_2$ subconjuntos multiplicativos de elementos homogéneos de Z. Entonces*

$$(A_{S_1}^+)_{S_2}^+ \cong A_{S_2}^+.$$

Demostración. De la demostración del lema 1.2.6, tenemos los homomorfismos de anillos

$$\begin{array}{cccc} \bar{\alpha}: & (A_{S_1})_{S_2} & \cong & A_{S_2} \\ & (\frac{a}{s_1})/s_2 & \longmapsto & \frac{a}{s_1 s_2} \end{array},$$

$$\begin{array}{cccc} \bar{\beta}: & A_{S_2} & \cong & (A_{S_1})_{S_2} \\ & \frac{a}{s_2} & \longmapsto & (\frac{a}{1})/s_2 \end{array},$$

los cuales, por cuestiones de grados, se restringen a homomorfismos entre las partes no negativas:

$$\bar{\alpha}: (A^+_{S_1})^+_{S_2} \longrightarrow A^+_{S_2},$$

$$\bar{\beta}: A^+_{S_2} \longrightarrow (A^+_{S_1})^+_{S_2}.$$

Pero $\bar{\alpha}\bar{\beta} = id = \bar{\beta}\bar{\alpha}$, según 1.2.6. Nótese que $(A^+_{S_1})^+_{S_2}$ puede verse incluido naturalmente en $(A_{S_1})_{S_2}$, mediante la composición:

$$(A^+_{S_1})^+_{S_2} \xrightarrow{i} (A^+_{S_1})_{S_2} \xrightarrow{j_{S_2}} (A_{S_1})_{S_2},$$

donde i (respectivamente j) es la inclusión natural de la parte no negativa de $(A^+_{S_1})_{S_2}$ (resp. A_{S_1}) en $(A^+_{S_1})_{S_2}$ (resp. A_{S_1}).

□

Lema 3.2.12. *Sean A un anillo graduado, y $a, b \in Z(A) \setminus \{0\}$ elementos homogéneos. Entonces:*

$$(A^+_a)^+_b \cong A^+_{ab}.$$

Demostración. De la demostración de 1.2.9, tenemos los homomorfismos de anillos

$$\begin{array}{cccc} \bar{\alpha}: & (A_a)_b & \cong & A_{ab} \\ & (\frac{x}{a^n})/\frac{b^m}{1} & \longmapsto & \frac{a^m b^n x}{(ab)^{m+n}} \end{array},$$

$$\begin{array}{cccc} \bar{\beta}: & A_{ab} & \cong & (A_a)_b \\ & \frac{x}{(ab)^n} & \longmapsto & (\frac{x}{a^n})/\frac{b^n}{1} \end{array},$$

que se restringen a homomorfismos entre las partes no negativas:

$$\bar{\alpha} : (A_a^+)_b^+ \longrightarrow A_{ab}^+,$$

$$\bar{\beta} : A_{ab}^+ \longrightarrow (A_a^+)_b^+,$$

y con $\bar{\alpha}\bar{\beta} = id = \bar{\beta}\bar{\alpha}$, según 1.2.9.

□

Lema 3.2.13. *Sean A un anillo graduado, y $a \in Z(A) \setminus \{0\}$ un elemento homogéneo. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene el isomorfismo:*

$$A_a^+ \cong A_{a^n}^+.$$

Demostración. Los homomorfismos de 1.2.10 se restringen a homomorfismos entre las partes no negativas, y constituyen un isomorfismo. □

Observación 3.2.14. Sea S un subconjunto multiplicativo de elementos homogéneos de Z. Tenemos una inyección canónica

$$\begin{array}{rccc} \zeta : & A & \rightarrowtail & A_S^+ \\ & x & \longmapsto & \frac{x}{1} \end{array}$$

dado que S consiste de no divisores de 0 en A. Sean N, M A_0-módulos, con N plano. El funtor localización induce una aplicación

$$\begin{array}{rccc} loc : & Hom_A(A \otimes_{A_0} M, A \otimes_{A_0} N) & \longrightarrow & Hom_{A_S^+}(A_S^+ \otimes_{A_0} M, A_S^+ \otimes_{A_0} N) \\ & f & \longmapsto & loc(f) : \frac{x}{s} \otimes m \mapsto \frac{1}{s} f(x \otimes m) = \frac{x}{s} f(1 \otimes m) \end{array}.$$

Consideremos la inclusión

$$\zeta \otimes id_N : A \otimes_{A_0} N \rightarrowtail A_S^+ \otimes_{A_0} N.$$

Se puede verificar que *loc* puede obtenerse también mediante la composición:

$$\begin{aligned} Hom_A(A \otimes_{A_0} M, A \otimes_{A_0} N) &\underset{\cong}{\xrightarrow{\lambda}} Hom_{A_0}(M, A \otimes_{A_0} N) \\ &\underset{1-1}{\xrightarrow{(\zeta \otimes id_N \circ \_)}} Hom_{A_0}(M, A_S^+ \otimes_{A_0} N) \\ &\underset{\cong}{\xrightarrow{\mu_S}} Hom_{A_S^+}(A_S^+ \otimes_{A_0} M, A_S^+ \otimes_{A_0} N), \end{aligned}$$

y así, *loc* resulta ser un $\mathbb{Z}$-homomorfismo inyectivo. Mas aun, si $M_1, \ldots, M_n$ son A_0-módulos planos tenemos una inclusión natural *loc*:

$$\begin{array}{ccc} End(A \otimes_{A_0} M_1 \oplus \cdots \oplus A \otimes_{A_0} M_n) & \longrightarrow & End(A_S^+ \otimes_{A_0} M_1 \oplus \cdots \oplus A_S^+ \otimes_{A_0} M_n) \\ \alpha = [\alpha_{ij}]_{n \times n} & \longmapsto & [loc_{ij}(\alpha_{ij})]_{n \times n} \end{array},$$

con

$$Hom_A(A \otimes_{A_0} M_j, A \otimes_{A_0} M_i) \xrightarrow{loc_{ij}} Hom_{A_S^+}(A_S^+ \otimes_{A_0} M_j, A_S^+ \otimes_{A_0} M_i)$$

la inclusión natural del comienzo. Aquí, $[\alpha_{ij}]_{n \times n}$ con $\alpha_{ij} \in Hom(A \otimes_{A_0} M_j, A \otimes_{A_0} M_i)$, es la matriz de la observación 1.3.3.

Observación 3.2.15. Sean S_1, S_2 subconjuntos multiplicativos de elementos homogéneos de Z. Notemos que según el lema 1.2.6, tenemos la inclusión

$$\zeta : A_{S_1}^+ \rightarrowtail (A_{S_1}^+)_{S_2}^+$$

dado que

$$\psi_{S_2} : A_{S_1} \longrightarrow (A_{S_1})_{S_2}$$

es inyectiva pues S_2 consiste de no divisores de 0 en A_{S_1}. De la observación 3.2.14, tenemos un $\mathbb{Z}$-homomorfismo *loc* inyectivo:

$$loc : Hom_{A_{S_1}^+}(A_{S_1}^+ \otimes_{A_0} M, A_{S_1}^+ \otimes_{A_0} N) \longrightarrow Hom_{(A_{S_1}^+)_{S_2}^+}((A_{S_1}^+)_{S_2}^+ \otimes_{A_0} M, (A_{S_1}^+)_{S_2}^+ \otimes_{A_0} N).$$

El induce una inclusión natural *loc*:

$$End(A_{S_1}^+ \otimes_{A_0} M_1 \oplus \cdots \oplus A_{S_1}^+ \otimes_{A_0} M_n) \longrightarrow$$

$$End((A_{S_1}^+)_{S_2}^+ \otimes_{A_0} M_1 \oplus \cdots \oplus (A_{S_1}^+)_{S_2}^+ \otimes_{A_0} M_n).$$

En particular, si $S_1 \subseteq S_2$, por el lema 3.2.11 tenemos que

$$(A^+_{S_1})^+_{S_2} \cong A^+_{S_2},$$

y por tanto tenemos

$$\begin{array}{rccc} loc: & Hom_{A^+_{S_1}}(A^+_{S_1} \otimes_{A_0} M, A^+_{S_1} \otimes_{A_0} N) & \longrightarrow & Hom_{A^+_{S_2}}(A^+_{S_2} \otimes_{A_0} M, A^+_{S_2} \otimes_{A_0} N) \\ & f & \longmapsto & loc(f) : \frac{x}{s} \otimes m \mapsto \frac{x}{s} f(1 \otimes m) \end{array},$$

y una inclusión natural *loc*:

$$\begin{array}{ccc} End(A^+_{S_1} \otimes_{A_0} M_1 \oplus \cdots \oplus A^+_{S_1} \otimes_{A_0} M_n) & \longrightarrow & End(A^+_{S_2} \otimes_{A_0} M_1 \oplus \cdots \oplus A^+_{S_2} \otimes_{A_0} M_n) \\ \alpha = [\alpha_{ij}]_{n \times n} & \longmapsto & [loc_{ij}(\alpha_{ij})]_{n \times n} \end{array}.$$

Específicamente, para $a \in h(Z \setminus \{0\})$, $S_1 := \{1, a, a^2, \dots\}$ y $S_2 := h(Z \setminus \{0\})$, tenemos

$$loc : Hom_{A^+_a}(A^+_a \otimes_{A_0} M, A^+_a \otimes_{A_0} N) \longrightarrow Hom_{A^+_{S_2}}(A^+_{S_2} \otimes_{A_0} M, A^+_{S_2} \otimes_{A_0} N),$$

y una inclusión natural que denotaremos por loc_Z:

$$End(A^+_a \otimes_{A_0} M_1 \oplus \cdots \oplus A^+_a \otimes_{A_0} M_n) \longrightarrow End(A^+_{S_2} \otimes_{A_0} M_1 \oplus \cdots \oplus A^+_{S_2} \otimes_{A_0} M_n).$$

Definición 3.2.16. *En lo que sigue a la localización $A^+_{S_2}$, con $S_2 := h(Z \setminus \{0\})$, la denotaremos por A^+_Z.*

Proposición 3.2.17. *La inclusión de la observación 3.2.14*

$$loc : End(A \otimes_{A_0} M_1 \oplus \cdots \oplus A \otimes_{A_0} M_n) \longrightarrow End(A^+_S \otimes_{A_0} M_1 \oplus \cdots \oplus A^+_S \otimes_{A_0} M_n),$$

es un homomorfismo de anillos y es invariante respecto al grupo elemental. En particular preserva invertibles, es decir, automorfismos. Esto es válido en particular, para:

$$loc_Z : End(A^+_a \otimes_{A_0} M_1 \oplus \cdots \oplus A^+_a \otimes_{A_0} M_n) \longrightarrow End(A^+_Z \otimes_{A_0} M_1 \oplus \cdots \oplus A^+_Z \otimes_{A_0} M_n).$$

Demostración.

- Notemos que loc es un $\mathbb{Z}$-homomorfismo pues cada loc_{ij} es un $\mathbb{Z}$-homomorfismo por la observación 3.2.14.

- $loc(id) = id$: Si $1 \leq i \leq n$, entonces, para $id = id_{A\otimes_{A_0} M_i}$,

$$\begin{aligned} loc_{ii}(id) =& \mu_S(\zeta \otimes id_M \circ \_)\lambda(id) \\ =& \mu_S(\zeta \otimes id_M \circ \_)(1 \otimes \_) \\ =& \mu_S(1 \otimes \_) = id_{A^+_{S_2}\otimes_{A_0} M_i}. \end{aligned}$$

- $loc(\alpha\beta) = loc(\alpha)loc(\beta)$:

$$\begin{aligned} loc(\alpha\beta) &= loc([\alpha\beta_{ij}]_{n\times n}) = loc([\sum_{k=1}^{n}(\alpha_{ik}\beta_{kj})]_{n\times n}) \\ &= [\sum_{k=1}^{n} loc_{ij}(\alpha_{ik}\beta_{kj})]_{n\times n} = [\sum_{k=1}^{n} loc_{ik}(\alpha_{ik})loc_{kj}(\beta_{kj})]_{n\times n} \\ &= [(loc(\alpha)loc(\beta))_{ij}]_{n\times n}. \end{aligned}$$

  pues $loc_{ij}(\alpha_{ik}\beta_{kj}) = loc_{ik}(\alpha_{ik})loc_{kj}(\beta_{kj})$ dado que la localización por S es un funtor.

- loc es invariante respecto al grupo elemental: Como loc preserva la composición, basta ver que loc preserva automorfismos elementales. Sea

$$id + \psi \in E(A \otimes_{A_0} M_1, \ldots, A \otimes_{A_0} M_n),$$

  entonces

$$loc(id + \psi) = loc(id) + loc(\psi) = id + loc(\psi) \in E(A^+_S \otimes_{A_0} M_1, \ldots, A^+_S \otimes_{A_0} M_n).$$

□

Definición 3.2.18. *Sean R un anillo, y $P \in \mathfrak{P}(R)$. Decimos que P es* ***estrictamente proyectivo*** *si R es sumando directo de P^n para algún $n \in \mathbb{Z}^+$.*

Lema 3.2.19. *Sean $a, c \in Z_m \setminus \{0\}$, $P_1, \ldots, P_n$ A_0-módulos estrictamente proyectivos con $n \geq 3$ y $k, s, q \in \mathbb{N}$. Si*

$$u = id + a^{-k}y \in E(A^+_a \otimes_{A_0} P_1, \ldots, A^+_a \otimes_{A_0} P_n)$$

con

$$y : A \otimes_{A_0} P_j \longrightarrow A \otimes_{A_0} P_{j'} \ , o(y) \geq mk, \ \ j \neq j';$$

y

$$v = id + c^{-s} a^q z \in E(A_c^+ \otimes_{A_0} P_1, \ldots, A_c^+ \otimes_{A_0} P_n)$$

con

$$z : A \otimes_{A_0} P_i \longrightarrow A \otimes_{A_0} P_{i'}, \ \ o(z) \geq m(s-q), \ \ i \neq i';$$

entonces, si q *es par y* $s \geq \frac{q}{2} \geq k$,

$$u^{-1} v u \in E(A_c^+ \otimes_{A_0} P_1, \ldots, A_c^+ \otimes_{A_0} P_n)$$

es producto de automorfismos elementales de la forma

$$id + c^{-s'} a^{\frac{q}{2} - k} x,$$

con

$$x : A \otimes_{A_0} P_i \longrightarrow A \otimes P_{i'}, \ \ i \neq i'.$$

Demostración. Gracias a la observación a la proposición 3.2.17, podemos hacer nuestros cálculos en $E := End(A_Z^+ \otimes_{A_0} P_1 \oplus \cdots \oplus A_Z^+ \otimes_{A_0} P_n)$. En lo que sigue, estará implícito el uso de las inclusiones loc_Z relativas a a y c.

$$\begin{aligned}
u^{-1} v u =& (id - a^{-k} y)(id + c^{-s} a^q z)(id + a^{-k} y) \\
=& (id - a^{-k} y)(id + c^{-s} a^q z + a^{-k} y + c^{-s} a^{q-k} z y) \\
=& id + c^{-s} a^q z + a^{-k} y + c^{-s} a^{q-k} z y - a^{-k} y - c^{-s} a^{q-k} y z - c^{-s} a^{q-2k} y z y \\
=& id + c^{-s} a^q z + c^{-s} a^{q-k} z y - c^{-s} a^{q-k} y z - c^{-s} a^{q-2k} y z y.
\end{aligned}$$

Tenemos tres casos:

1. $i' \neq j$: De esta manera $yz = 0$ y

$$u^{-1} v u = id + c^{-s} a^q z + c^{-s} a^{q-k} z y = (id + c^{-s} a^q z)(id + c^{-s} a^{q-k} z y)$$

$$= (id + c^{-s}a^{q-k}a^k z)(id + c^{-s}a^{q-k}zy).$$

2. $j' \neq i$: En este caso $zy = 0$ y

$$u^{-1}vu = id + c^{-s}a^q z - c^{-s}a^{q-k}yz = (id + c^{-s}a^q z)(id - c^{-s}a^{q-k}yz)$$

$$= (id + c^{-s}a^{q-k}a^k z)(id - c^{-s}a^{q-k}yz)$$

3. $i' = j$ y $j' = i$: Como $n \geq 3$, existe $i_0 \neq i, i'$, $1 \leq i_0 \leq n$. Dado que P_{i_0} es estrictamente proyectivo, existe $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $P_{i_0}^{k_0}$ tiene como sumando directo a A_0. Así, existe $t \in \mathbb{Z}^+$ tal que hay un A_0-homomorfismo sobreyectivo

$$\alpha' : P_{i_0}^t \longrightarrow P_{i'}$$

por ser $P_{i'}$ proyectivo, y por tanto tenemos un A-homomorfismo sobreyectivo

$$\alpha : (A \otimes_{A_0} P_{i_0})^t \longrightarrow A \otimes_{A_0} P_{i'}.$$

Además, como $A \otimes P_i$ es A-proyectivo tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & A \otimes_{A_0} P_i \arrow[dl, dotted, "\exists\beta"'] \arrow[d, "z"] \\ (A \otimes_{A_0} P_{i_0})^t \arrow[r, "\alpha"] & A \otimes_{A_0} P_{i'} \end{tikzcd},$$

donde $\beta = [\beta_1, \ldots, \beta_t]^T$, $\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_t]$. Así $z = \sum_{r=1}^t \alpha_r \beta_r$, y por tanto,

$$\begin{aligned} v =& id + c^{-s}a^q z = id + c^{-s}a^q(\sum_{r=1}^t \alpha_r \beta_r) \\ =& id + \sum_{r=1}^t c^{-s}a^q \alpha_r \beta_r \\ =& \prod_{r=1}^t (id + c^{-s}a^q \alpha_r \beta_r) \\ =& \prod_{r=1}^t [id + c^{-s}a^{\frac{q}{2}}\alpha_r, id + a^{\frac{q}{2}}\beta_r] && \text{[lema 1.3.24]} \\ =& \prod_{r=1}^t (id + c^{-s}a^{\frac{q}{2}}\alpha_r)(id + a^{\frac{q}{2}}\beta_r)(id - c^{-s}a^{\frac{q}{2}}\alpha_r)(id - a^{\frac{q}{2}}\beta_r). \end{aligned}$$

De esta manera, $u^{-1}vu$ es producto de elementos de la forma:

$$u^{-1}(id \mp a^{\frac{q}{2}}\beta_r)u = (id \mp a^{\frac{q}{2}-k}\beta_r')(id \mp a^{\frac{q}{2}-k}\beta_r y),$$

y

$$u^{-1}(id \mp c^{-s}a^{\frac{q}{2}}\alpha_r)u = (id \mp c^{-s}a^{\frac{q}{2}-k}\alpha_r')(id \pm c^{-s}a^{\frac{q}{2}-k}y\alpha_r),$$

por los casos 1:($i_0 \neq j$) y 2:($j' \neq i_0$) respectivamente.

□

Teorema 3.2.20. *Sean $a, b \in Z_n \backslash \{0\}$ con $a+b \neq 0$, y $P_1, \ldots, P_r$ A_0-módulos estrictamente proyectivos. Si*

$$u \in E(A_a^+ \otimes_{A_0} P_1, \ldots, A_a^+ \otimes_{A_0} P_r) \text{ para } r \geq 3,$$

entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y divisible por 2^l, donde l es el número de factores elementales de u,

$$u^{-1} \circ u(\xi) \in E(A_{a+b}^+ \otimes_{A_0} P_1, \ldots, A_{a+b}^+ \otimes_{A_0} P_r),$$

con $\xi = \xi(m) = (a+b)^{-2m}b^m h_2$, y $h_2 = h_2(a,b)$ como en el lema 3.2.1.

Demostración. Primero notemos que gracias a la observación 3.2.17 podemos asumir que $u \in E := End(A_Z^+ \otimes_{A_0} P_1 \oplus \cdots \oplus A_Z^+ \otimes_{A_0} P_r)$, así tiene sentido $u(\xi) \in E$ por la proposición 3.1.7 ya que $\xi \in Z(A_Z^+)(0)$. En lo que sigue haremos nuestros cálculos en E, y estará implícito el uso de la inclusión loc_Z relativa a a. Probaremos que $u^{-1} \circ u(\xi)$ es producto de automorfismos elementales de la forma

$$id + (a+b)^{-s}a^{\frac{m}{2^{l_0-1}}-(2-(\frac{1}{2})^{l_0-1})k}x \in E(A_{a+b}^+ \otimes_{A_0} P_1, ..., A_{a+b}^+ \otimes_{A_0} P_r),$$

con $x \in Hom_A(A \otimes_{A_0} P_*, A \otimes_{A_0} P_{**})$ y $l_0 \leq l$, por inducción sobre el número l de factores de una descomposición de u como producto de automorfismos elementales de la forma

$$id + a^{-k}y \in E(A_a^+ \otimes_{A_0} P_1, ..., A_a^+ \otimes_{A_0} P_r),$$

con $y \in Hom_A(A \otimes_{A_0} P_*, A \otimes_{A_0} P_{**})$. Nótese que es posible tomar el mismo k -divisible por 2^l- para todos los factores de u y que u considerada como elemento de E es también elemental por la proposición 3.2.17.

- Caso $l = 1$: En este caso $u = id + a^{-k}\mu_a(u')$ con $o(\mu_a(u')) \geq nk$ según 3.2.9. De esta manera,

$$\begin{aligned} u^{-1} \circ u(\xi) =& (id - a^{-k}(\mu_a(u'))) \circ (id + a^{-k}(\mu_a(u')))(\xi) \\ =& (id - a^{-k}(\mu_a(u'))) \circ (id(\xi) + (a^{-k}(\mu_a(u')))(\xi)) \\ =& (id - a^{-k}(\mu_a(u'))) \circ (id + a^{-k}\xi^{-nk}(\mu_a(u')(\xi))) \\ =& id + a^{-k}(-\mu_a(u') + \xi^{-nk}(\mu_a(u')(\xi))). \end{aligned}$$

Nótese que por la proposición 3.1.7 la evaluación por ξ es un $\mathbb{Z}$-homomorfismo y $id(\xi) = id$. Por otro lado, podemos escribir $\phi_a(\mu_a(u')) = \sum_{i=nk}^{t} u'_i$ con $u'_i \in Hom_{A_0}(P_j, A(i) \otimes_{A_0} P_{j'})$ y $j \neq j'$ fijos. De esta manera:

$$\mu_a(u') = \theta_a\phi_a(\mu_a(u')) = \sum_{i=nk}^{t} \theta_a(u'_i).$$

Así,

$$\begin{aligned} -\theta_a(u'_i) + \xi^{-nk}(\theta_a(u'_i)(\xi)) =& -\theta_a(u'_i) + \xi^{-nk+i}\theta_a(u'_i) \\ =& (-1 + \xi^{-nk+i})\theta_a(u'_i) \\ =& (-1 + ((a+b)^{-2m}b^m h_2)^{i-nk})\theta_a(u'_i) \\ =& -(a+b)^{-2m(i-nk)}a^m h_1\theta_a(u'_i), \qquad \text{[prop. 3.2.2]} \end{aligned}$$

donde, $h_1 = h_1(a, b)$ es como en 3.2.1. Lo anterior implica que

$$\begin{aligned} u^{-1} \circ u(\xi) =& id + a^{-k}(-\mu_a(u') + \xi^{-nk}(\mu_a(u')(\xi))) \\ =& id + a^{-k}\sum_{i=nk}^{t}(-\theta_a(u'_i) + \xi^{-nk}(\theta_a(u'_i)(\xi))) \\ =& id - \sum_{i=nk}^{t}(a+b)^{-2m(i-nk)}a^{m-k}h_1\theta_a(u'_i) \end{aligned}$$

$$= \prod_{i=nk}^{t} (id - (a+b)^{-2m(i-nk)} a^{m-k} h_1 \theta_a(u_i')) \in E(A^+_{a+b} \otimes_{A_0} P_1, \ldots, A^+_{a+b} \otimes_{A_0} P_r).$$

Aquí, $(a+b)^{-2m(i-nk)} a^{m-k} h_1 \theta_a(u_i') \in Hom_{A^+_{a+b}}(A^+_{a+b} \otimes_{A_0} P_j, A^+_{a+b} \otimes_{A_0} P_{j'})$ para m suficientemente grande.

- Supongamos ahora nuestro resultado para automorfismos con descomposición como producto de l automorfismos elementales, y veamos para $l+1$. Sea $w = vu = v(id + a^{-k}\mu_a(u'))$, donde v es un producto de l automorfismos elementales y u es un automorfismo elemental como en el caso $l=1$. Por hipótesis de inducción

$$v^{-1} \circ v(\xi) = \prod_{i=1}^{t} (id + (a+b)^{-s_i} a^{\frac{m}{2^{l_i-1}} - (2-(\frac{1}{2})^{l_i-1})k} z_i),$$

con

$$z_i : A \otimes_{A_0} P_{j_i} \longrightarrow A \otimes_{A_0} P_{j_i'},$$

y

$$o(z_i) \geq n(s_i - (\frac{m}{2^{l_i-1}} - (2 - (\frac{1}{2})^{l_i-1})k)).$$

Tenemos entonces que

$$w^{-1} \circ w(\xi) = u^{-1} v^{-1} \circ v(\xi) \circ u(\xi) =$$

$$[\prod_{i=1}^{t} u^{-1}(id + (a+b)^{-s_i} a^{\frac{m}{2^{l_i-1}} - (2-(\frac{1}{2})^{l_i-1})k} z_i)u] u^{-1} \circ u(\xi),$$

pero, por el lema 3.2.19, cada morfismo $u^{-1}(id + (a+b)^{-s_i} a^{\frac{m}{2^{l_i-1}} - (2-(\frac{1}{2})^{l_i})k} z_i)u$ es producto de automorfismos de la forma

$$id + (a+b)^{-s} a^{\frac{m}{2^{l_i}} - (2-(\frac{1}{2})^{l_i})k} x \text{ con } l_i + 1 \leq l + 1,$$

y como en el caso $l = 1$:

$$u^{-1} \circ u(\xi) = \prod_{i=nk}^{t'} (id - (a+b)^{-2m(i-nk)} a^{m-k} h_1 \theta_{a+b}(u_i')).$$

□

Observación 3.2.21. Supongamos que $Q \in \mathfrak{P}(A_0)$, $P \in \mathfrak{P}(A)$ y que

$$(A \otimes_{A_0} Q) \oplus Ae' = P \oplus Ae,$$

donde e, e' son bases de los módulos cíclicos Ae y Ae' respectivamente. Nótese que la igualdad anterior induce una igualdad

$$A_a^+ \otimes_A ((A \otimes_{A_0} Q) \oplus Ae') = A_a^+ \otimes_A (P \oplus Ae).$$

Pero

$$\begin{aligned} A_a^+ \otimes_A ((A \otimes_{A_0} Q) \oplus Ae') &\cong (A_a^+ \otimes_A (A \otimes_{A_0} Q)) \oplus (A_a^+ \otimes_A Ae') \\ &\cong (A_a^+ \otimes_{A_0} Q) \oplus A_a^+ e' \end{aligned}$$

y

$$A_a^+ \otimes_A (P \oplus Ae) \cong (A_a^+ \otimes_A P) \oplus (A_a^+ \otimes_A Ae) \cong (A_a^+ \otimes_A P) \oplus A_a^+ e.$$

Además estos isomorfismos pueden verse como igualdades, pues por ejemplo el segundo isomorfismo está dado por (véase [8]):

$$\begin{array}{ccc} (A_a^+ \otimes_A P) \oplus A_a^+ e & \longrightarrow & A_a^+ \otimes_A (P \oplus Ae) \\ n \otimes p + me & \longmapsto & n \otimes p + m \otimes e. \end{array}.$$

De lo anterior podemos considerar la igualdad

$$(A_a^+ \otimes_{A_0} Q) \oplus A_a^+ e' = (A_a^+ \otimes_A P) \oplus A_a^+ e.$$

La observación anterior nos permite formular la siguiente definición.

Definición 3.2.22. *Supongamos que $Q \in \mathfrak{P}(A_0)$, $P \in \mathfrak{P}(A)$ y que*

$$(A \otimes_{A_0} Q) \oplus Ae' = P \oplus Ae,$$

donde e, e' son bases de los módulos cíclicos Ae y Ae' respectivamente. Para cada natural n, denotemos por V_n al subconjunto que consiste del cero y todos los elementos a no nulos *de Z_n para los que existe un automorfismo*

$$u \in Aut_{A_a^+}((A_a^+ \otimes_{A_0} Q) \oplus A_a^+ e'),$$

con $u(e') = e$. Definimos

$$V := \sum_{n \in \mathbb{N}} \oplus V_n.$$

Observación 3.2.23. Supongamos que $Q \in \mathfrak{P}(A_0)$.

1. Tomemos $M := Q \oplus A_0 e'$, entonces

   $$A \otimes_{A_0} M = A \otimes_{A_0} (Q \oplus A_0 e') \cong (A \otimes_{A_0} Q) \oplus Ae'.$$

   Este isomorfismo identifica a $1 \otimes e' \in A \otimes_{A_0} M$ con $e' \in (A \otimes_{A_0} Q) \oplus Ae'$. También, M es A_0-plano y finitamente presentado por ser proyectivo. Recordemos que si $a \in V_n$, de la observación 3.2.7, tenemos las inyecciones canónicas

   $$\psi_a : A \longrightarrow A_a^+,$$

   $$\psi_a \otimes id_M : A \otimes_{A_0} M \longrightarrow A_a^+ \otimes_{A_0} M.$$

   Esto nos permitirá restringir automorfismos de

   $$G_a := Aut_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M),$$

   a automorfismos de

   $$G := Aut_A(A \otimes_{A_0} M).$$

   Precisamente, el proceso de restricción, tiene como proceso inverso la inclusión 3.2.14:

   $$loc_a : End_A(A \otimes_{A_0} M) \longrightarrow End_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M).$$

2. Gracias a la proposición 3.1.3 y 3.2.5 tenemos isomorfismos ϕ y ϕ_a, con inversos θ y θ_a respectivamente:

   $$\phi : E := End_A(A \otimes_{A_0} M) \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} Hom_{A_0}(M, A_i \otimes_{A_0} M)$$

$$\phi_a : E_a := End_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M) \longrightarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} Hom_{A_0}(M, A_a^+(i) \otimes_{A_0} M),$$

para cada $a \in Z$.

Definición 3.2.24. *Sea*

$$I_n := \sum_{i\geq n} \oplus A_i.$$

Es claro que I_n es un ideal bilátero de A.

Teorema 3.2.25. *Supongamos que $Q \in \mathfrak{P}(A_0)$, $P \in \mathfrak{P}(A)$,*

$$(A \otimes_{A_0} Q) \oplus Ae' = P \oplus Ae,$$

y que $V \neq \{0\}$. Sea $M := Q \oplus A_0 e'$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $Q \cong P/I_1 P$.

ii) *Existe $\gamma \in Aut_{A_0}(M)$ tal que $\gamma(e') = e_0$, donde e_0 es la componente de grado 0 de e en la descomposición $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i \otimes_{A_0} M$.*

iii) *Si $v \in Aut_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M)$ con $a \in Z_n \setminus \{0\}$, es tal que $v(e') = e$, entonces existe $u \in Aut_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M)$ tal que $u(e') = e$, y $u_0 \in Aut_{A_0}(M)$.*

iv) *Si $v \in Aut_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M)$ con $a \in Z_n \setminus \{0\}$, es tal que $v(e') = e$, entonces existen $u \in Aut_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M)$ tal que $u(e') = e$, y $s \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $r \geq s$, $u(a^r) \in Aut_A(A \otimes_{A_0} M)$.*

Demostración. Primero notemos que la igualdad

$$(A \otimes_{A_0} Q) \oplus Ae' = P \oplus Ae$$

induce los isomorfismos:

$$((A \otimes_{A_0} Q) \oplus Ae')/((I_1 \otimes_{A_0} Q) \oplus I_1 e') = (P \oplus Ae)/(I_1 P \oplus I_1 e),$$

$$(A \otimes_{A_0} Q)/(I_1 \otimes_{A_0} Q) \oplus Ae'/I_1 e' \cong P/I_1 P \oplus Ae/I_1 e,$$

y

$$Q \oplus A_0 e' \cong (A_0 \otimes_{A_0} Q) \oplus Ae' \cong P/I_1 P \oplus A_0 e.$$

Tenemos entonces un isomorfismo

$$\beta : P/I_1P \oplus A_0e \longrightarrow M = Q \oplus A_0e',$$

con $\beta(e) = e_0$.

- $i) \Rightarrow ii)$: Como $Q \cong P/I_1P$, tenemos un isomorfismo

$$\alpha : M = Q \oplus A_0e' \longrightarrow P/I_1P \oplus A_0e,$$

con $\alpha(e') = e$. De lo anterior, $\gamma := \beta\alpha \in Aut_{A_0}(M)$, con $\gamma(e') = e_0$.

- $ii) \Rightarrow iii)$: Sea $v \in Aut_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M)$, con $v(e') = e$. Como γ es un automorfismo, entonces

$$id_{A_a^+} \otimes \gamma : A_a^+ \otimes_{A_0} M \longrightarrow A_a^+ \otimes_{A_0} M$$

es un automorfismo. Así

$$u := v \circ \theta_a((v^{-1})_0) \circ (id_{A_a^+} \otimes \gamma) \in Aut_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M),$$

$$u(e') = v \circ \theta_a((v^{-1})_0) \circ (id_{A_a^+} \otimes \gamma)(e') = v \circ \theta_a((v^{-1})_0)(e_0) = v(e') = e,$$

y

$$u_0 = 1 \otimes \gamma \in Aut_{A_0}(M),$$

pues

$$\theta_a(u_0) = \theta_a(v_0)\theta_a((v^{-1})_0)\theta_a(1 \otimes \gamma) = \theta_a(1 \otimes \gamma).$$

- $iii) \Rightarrow iv)$: Mostremos que existe tal $s \in \mathbb{Z}^+$. Escribamos $\phi_a(u) = u_0 + \cdots + u_n$. Por la hipótesis $iii)$,

$$u_0 \in Aut_{A_0}(M).$$

Ahora notemos que para $1 \leq i \leq n$

$$u_i \in Hom_{A_0}(M, A_a^+(i) \otimes_{A_0} M).$$

Pero como M es finitamente generado, existe k_i tal que

$$a^r u_i \in Hom_{A_0}(M, A_j \otimes_{A_0} M)$$

para cierto j y cada $r \geq k_i$. Así, si $r_0 = \text{máx}_{1\leq i\leq n}\{k_i\}$, para $r \geq r_0$, tenemos:

$$u(a^r)|_{A\otimes_{A_0}M} = \theta_a(u_0 + a^r u_1 + \cdots + a^{rn} u_n)|_{A\otimes_{A_0}M} \in End_A(A \otimes_{A_0} M).$$

Finalmente, sea u^{-1} el inverso de u en G_a. Podemos tomar r_1 tal que para $r \geq r_1$

$$u^{-1}(a^r) \in End_A(A \otimes_{A_0} M).$$

De esta manera, para $r \geq s := \text{máx}\{r_1, r_0\}$

$$u(a^r)u^{-1}(a^r) = uu^{-1}(a^r) = id_{A_a^+\otimes M}(a^r) = id_{A_a^+\otimes M},$$

y

$$u^{-1}(a^r)u(a^r) = u^{-1}u(a^r) = id_{A_a^+\otimes M}(a^r) = id_{A_a^+\otimes M},$$

en $End_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M)$. Esto implica adicionalmente que $u^{-1}(a^r)$ es la inversa de $u(a^r)$ en

$$End_A(A \otimes_{A_0} M).$$

- $iv) \Rightarrow ii)$: Basta tomar $\gamma := u_0$, para algún v correspondiente a $a \in V$ homogéneo no nulo.

- $ii) \Rightarrow i)$: Tenemos un isomorfismo

$$\beta^{-1}\gamma : M = Q \oplus Ae' \longrightarrow P/I_1P \oplus A_0 e,$$

con $\beta^{-1}\gamma(e') = e$. Luego $Q \cong P/I_1P$.

$\square$

Recordemos que A es un álgebra graduada positivamente con estructura de Z-módulo sobre un subanillo graduado Z contenido en el centro $Z(A)$. Estamos asumiendo que Z no tiene divisores de cero en A. A_a^+ es la parte no negativa de la localización $\mathbb{Z}$-graduada A_a, para a un elemento homogéneo y no nulo de Z.

Teorema 3.2.26. *Supongamos que* $Q \in \mathfrak{P}(A_0)$, $P \in \mathfrak{P}(A)$, $Q \cong P/I_1P$, *y que*

$$(A \otimes_{A_0} Q) \oplus Ae' = P \oplus Ae,$$

donde e, e' *son bases de los módulos cíclicos* Ae *y* Ae' *respectivamente. Para cada natural* n, *denotemos por* V_n *al subconjunto que consiste del cero y todos los elementos* a *no nulos de* Z_n *para los que existe un automorfismo*

$$u \in Aut_{A_a^+}((A_a^+ \otimes_{A_0} Q) \oplus A_a^+ e'),$$

tal que $u(e') = e$. *Entonces*

$$V := \sum_{n \in \mathbb{N}} \oplus V_n$$

es un ideal graduado de Z.

Demostración.

1. $ZV \subseteq V$:

   Sean $a \in V$ y $u_a \in G_a$ su automorfismo respectivo, con $u_a(e') = e$. Sea $b \in Z \setminus \{0\}$ homogéneo. Por la observación 3.2.10, A_{ba}^+ es un A_a^+-módulo derecho. Tenemos que u_a induce

   $$id \otimes u_a : A_{ba}^+ \otimes_{A_a^+} A_a^+ \otimes_{A_0} M \longrightarrow A_{ba}^+ \otimes_{A_a^+} A_a^+ \otimes_{A_0} M,$$

   pero

   $$A_{ba}^+ \otimes_{A_a^+} A_a^+ \cong A_{ba}^+.$$

   Tenemos entonces un automorfismo

   $$\begin{array}{rccc} u_{ba} : & A_{ba}^+ \otimes_{A_0} M & \longrightarrow & A_{ba}^+ \otimes_{A_0} M \\ & \frac{x}{(ba)^n} \otimes m & \longmapsto & \frac{x}{(ba)^n} u_a(1 \otimes m) = \frac{1}{(ba)^n} u_a(x \otimes m), \end{array}$$

   el cual cumple $u_{ba}(1 \otimes e') = u_a(1 \otimes e') = e$.

2. En los numerales 3-9 veremos que si $a, b \in V_n \setminus \{0\}$ y $a + b \neq 0$, entonces $a + b \in V_n$. Sean $u_a \in G_a$ y $u_b \in G_b$ los correspondientes automorfismos. Veamos que existe $w \in G_{a+b}$ tal que $w(e') = e$.

3. Según 3.2.17, para $a \in Z \setminus \{0\}$ homogéneo, tenemos una inclusión natural que es un homomorfismo de anillos:

$$loc_Z : End_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M) \longrightarrow End_{A_Z^+}(A_Z^+ \otimes_{A_0} M).$$

4. Gracias a la proposición 3.1.3, tenemos un isomorfismo ϕ_1 con inverso θ_1:

$$\phi_1 : End_{A_Z^+}(A_Z^+ \otimes_{A_0} M) \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} Hom_{A_0}(M, A_Z^+(i) \otimes_{A_0} M).$$

5. Por el lema 3.2.1, $(a + b)^{2n} = h_1(a, b)a^n + h_2(a, b)b^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ ya que $a, b \in Z(A)$.

6. $u_a \circ (u_a^{-1}(\xi)) \in G_{a+b}$, para $m \geq 2s$, donde s está dado por $iv)$ en el teorema 3.2.25:

   El siguente cálculo es posible gracias a la inclusión loc_Z de 3. De esta manera, en lo que sigue no haremos distinción entre $loc_Z(u_a)$ y u_a. Sea $m \geq 2s$. Si $\phi_a(u_a^{-1}) = v_0 + \cdots + v_n$ y $\xi := h_2(a, b)b^m(a + b)^{-2m} \in Z(A_Z^+)(0)$, entonces

$$u_a \circ (u_a^{-1}(\xi)) = u_a\theta_1(v_0 + \xi v_1 + \cdots + \xi^n v_n) =$$

$$u_a\theta_1[\phi_1(u_a^{-1}) + \sum_{i=1}^{n}(\xi^i - 1)v_i] = id_{G_a} + u_a\theta_1[\sum_{i=1}^{n}(\xi^i - 1)v_i] =$$

$$id_{G_a} + u_a\theta_1[\sum_{i=1}^{n}((1 - h_1(a, b)a^m(a + b)^{-2m})^i - 1)v_i] =$$

$$id_{G_a} + u_a\theta_1[\sum_{i=1}^{n}((\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(-1)^j h_1(a, b)^j a^{jm}(a + b)^{-2mj}) - 1)v_i] =$$

$$id_{G_a} + u_a\theta_1[\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}(-1)^j h_1(a, b)^j a^{jm}(a + b)^{-2mj})v_i] =$$

$$id_{G_a} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\left(\binom{i}{j}(-1)^j h_1(a, b)^j a^{jm}(a + b)^{-2mj}u_a\theta_1(v_i)\right) \in E_{a+b},$$

pues, para $n \geq i \geq j \geq 1$:

$$a^{jm} u_a \theta_1(v_i)|_{A\otimes_{A_0} M} = a^{jm}\theta_1(u_0 + \cdots + u_n)\theta_1(v_i)|_{A\otimes_{A_0} M} \in End(A \otimes_{A_0} M).$$

Nótese que $jm \geq 2s$. Además, $u_a \circ u_a^{-1}(\xi)$ tiene inverso $u_a(\xi) \circ u_a^{-1}$ en E_{a+b}. Nótese que un cálculo análogo al anterior muestra que $u_a(\xi) \circ u_a^{-1} \in E_{a+b}$.

7. Análogamente al punto $iv)$ del teorema 3.2.25, posiblemente reemplazando a u_b , existe t tal que para $m \geq t$:

$$loc_Z(u_b)(h_2(a,b)b^m(a+b)^{-2m}) \in G_{a+b}.$$

8. De 6. y 7., obtenemos que para $m \geq \max\{2s, t\}$:

$$w = (u_a \circ u_a^{-1}(\xi)) \circ u_b(\xi) \in G_{a+b}.$$

9. $w(e') = e$:

Dado que $u_a(e') = e$, basta ver que

$$u_a^{-1}(\xi)u_b(\xi)(e') = e' :$$

Escribamos $\phi_1(u_b) = u_0 + \cdots + u_n$, $\phi_1(u_a^{-1}) = v_0 + \cdots + v_n$. Tenemos:

$$u_a^{-1}(\xi)u_b(\xi)(1 \otimes e') = u_a^{-1}(\xi)(u_0(e') + \xi u_1(e') + \cdots + \xi^n u_n(e')) =$$

$$u_a^{-1}(\xi)(e_0 + \xi e_1 + \cdots + \xi^n e_n) = \theta_1(v_0 + \xi v_1 + \cdots + \xi^n v_n)(e_0 + \xi e_1 + \cdots + \xi^n e_n) =$$

$$\theta_1(v_0)(e_0) + \xi(\theta_1(v_1)(e_0) + \theta_1(v_0)(e_1)) + \cdots + \xi^n \sum_{k=0}^{n} \theta_1(v_k)(e_{n-k}) =$$

$$\theta_1(v_0)(e_0) = 1 \otimes e'.$$

Nótese que

$$u_a^{-1}(e) =$$

$$u_a^{-1}(e_0 + \cdots + e_n) = \theta_1(v_0)(e_0) + (\theta_1(v_1)(e_0) + \theta_1(v_0)(e_1)) + \cdots + \sum_{k=0}^{n} \theta_1(v_k)(e_{n-k}) =$$

$$\theta_1(v_0)(e_0) = 1 \otimes e' \in A_Z^+(0) \otimes_{A_0} M,$$

donde $e_i \in A_Z^+(i) \otimes_{A_0} M$ es la componente homogénea de e en $A_Z^+ \otimes_{A_0} M$.

10. El siguiente diagrama muestra un esquema de la obtención de w:

$$\begin{tikzcd}
u_a \arrow[d, mapsto] & G_a \arrow[d, hook, "loc_Z"] & u_a^{-1} \arrow[d, mapsto] & G_a \arrow[d, hook, "loc_Z"] & u_b \arrow[d, mapsto] & G_b \arrow[d, hook, "loc_Z"] \\
u_a \arrow[dr, mapsto, "id"] & G_Z & u_a^{-1} \arrow[dl, mapsto] & G_Z \arrow[d, "_(\xi)"] & u_b \arrow[d, mapsto] & G_Z \arrow[d, "_(\xi)"] \\
& u_a, u_a^{-1}(\xi) \arrow[d, mapsto] & & G_Z \arrow[d, "comp."] & u_b(\xi) \arrow[d, mapsto] & G_Z \arrow[d, "restr."'] \\
& u_a \circ (u_a^{-1}(\xi)) \arrow[dr, mapsto, "restr."] & & G_Z & u_b(\xi) \arrow[dl, mapsto] & G_{a+b} \arrow[d, "id"] \\
& & u_a \circ (u_a^{-1}(\xi)), & u_b(\xi) & & G_{a+b} \arrow[d, "comp."'] \\
& w = & u_a \circ (u_a^{-1}(\xi)) \circ & u_b(\xi) & & G_{a+b}
\end{tikzcd}$$

Aquí,

$$G_a := Aut_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M) \subseteq E_a := End_{A_a^+}(A_a^+ \otimes_{A_0} M),$$

y

$$G_Z := Aut_{A_Z^+}(A_Z^+ \otimes_{A_0} M) \subseteq E_Z := End_{A_Z^+}(A_Z^+ \otimes_{A_0} M).$$

11. V es graduado:

Nótese que $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una graduación de V por definición de V y los puntos anteriores. Para la definición de ideal graduado véase [8].

$\square$

Teorema 3.2.27 (**Principio de localización-globalización no conmutativo**). *Supongamos que $Q \in \mathfrak{P}(A_0)$, $P \in \mathfrak{P}(A)$, $Q \cong P/I_1P$, y que*

$$(A \otimes_{A_0} Q) \oplus Ae' = P \oplus Ae,$$

donde e, e' son bases de los módulos cíclicos Ae y Ae' respectivamente. Para cada natural n, denotemos por V_n al subconjunto que consiste del cero y todos los elementos a no nulos de Z_n para los que existe un automorfismo

$$u \in Aut_{A_a^+}((A_a^+ \otimes_{A_0} Q) \oplus A_a^+ e'),$$

cuya imagen en $K_1(A_a^+)$ *es trivial, y tal que* $u(e') = e$. *Entonces*

$$V := \sum_{n \in \mathbb{N}} \oplus V_n$$

es un ideal graduado de Z.

Demostración. Continuaremos con la notación y los resultados del teorema 3.2.26. Sólo nos queda completar la parte relativa al K_1.

1. $ZV \subseteq V$:

   Supongamos que $[u_a] = 1$ en $K_1(A_a^+)$ y veamos que $[u_{ba}] = 1$ en $K_1(A_{ba}^+)$. En efecto, como $[u_a] = 1$ en $K_1(A_a^+)$, por el teorema 1.4.8 tenemos que existe $n \geq 0$ tal que

   $$u_a \oplus id \in E((A_a^+ \otimes_{A_0} Q) \oplus A_a^+, A_a^+ \otimes_{A_0} P_1, \ldots, A_a^+ \otimes_{A_0} P_n),$$

   donde id es la idéntica en $F_a := A_a^+ \otimes_{A_0} P_1 \oplus \cdots \oplus A_a^+ \otimes_{A_0} P_n$, y los A_0-módulos son proyectivos. Sea $L_a := E((A_a^+ \otimes_{A_0} Q) \oplus A_a^+, A_a^+ \otimes_{A_0} P_1, \ldots, A_a^+ \otimes_{A_0} P_n)$. Por el isomorfismo del lema 3.2.12 y la observación 3.2.15 con $S_2 := \{1, b, b^2, \ldots\}$, tenemos una inclusión natural de anillos

   $$\begin{array}{cccc} loc_b : & L_a & \longrightarrow & L_{ba} \\ & u_a \oplus id & \longmapsto & u_{ba} \oplus id_{F_{ba}} \end{array}.$$

   Efectivamente, es posible probar que $loc_b(u_a \oplus id) = u_{ba} \oplus id_{F_{ba}}$. Luego

   $$[u_{ba}] = [u_{ba} \oplus id_{F_{ba}}] = [loc_b(u_a \oplus id)] = 1$$

   en $K_1(A_{ba}^+)$, por el teorema 1.4.3.

2. La imagen de w en $K_1(A_{a+b}^+)$ es trivial:

Como $[u_a]=1$ y $[u_b]=1$ en $K_1(A_a^+)$ y $K_1(A_b^+)$ respectivamente, por el teorema 1.4.8 y la observación 1.4.9, tenemos que existe $n\geq 2$ tal que

$$u_a\oplus id\in E((A_a^+\otimes_{A_0}Q)\oplus A_a^+,A_a^+\otimes_{A_0}P_1,\dots,A_a^+\otimes_{A_0}P_n),$$

y

$$u_b\oplus id\in E((A_b^+\otimes_{A_0}Q)\oplus A_b^+,A_b^+\otimes_{A_0}P_1,\dots,A_b^+\otimes_{A_0}P_n),$$

donde los A_0-módulos P_i son estrictamente proyectivos y id denota la identidad en $M_a:=(A_a^+\otimes_{A_0}P_1)\oplus\cdots\oplus(A_a^+\otimes_{A_0}P_n)$. Por el teorema 3.2.20, podemos tomar el natural m obtenido en el teorema 3.2.26 suficientemente grande, de tal manera que para $\xi=\xi(m)$:

$$w_1:=(u_a\oplus id)\circ(u_a^{-1}\oplus id)(\xi)=(u_a\oplus id)\circ(u_a^{-1}(\xi)\oplus id)=$$

$$(u_a\circ u_a^{-1}(\xi))\oplus id_{M_{a+b}}$$

$$\in E((A_{a+b}^+\otimes_{A_0}Q)\oplus A_{a+b}^+,A_{a+b}^+\otimes_{A_0}P_1,\dots,A_{a+b}^+\otimes_{A_0}P_n).$$

También,

$$w_2:=(u_b\oplus id)(\xi)=u_b(\xi)\oplus id_{M_{a+b}}$$

$$\in E((A_{a+b}^+\otimes_{A_0}Q)\oplus A_{a+b}^+,A_{a+b}^+\otimes_{A_0}P_1,\dots,A_{a+b}^+\otimes_{A_0}P_n),$$

por la proposición 3.1.7. De esta manera

$$w_1w_2\in E((A_{a+b}^+\otimes_{A_0}Q)\oplus A_{a+b}^+,A_{a+b}^+\otimes_{A_0}P_1,\dots,A_{a+b}^+\otimes_{A_0}P_n),$$

y por tanto, $[w]=[w_1w_2]=1$ en $K_1(A_{a+b}^+)$ por el teorema 1.4.3.

3. Como en el teorema 3.2.26, V es graduado.

□

Sea R un anillo conmutativo, recordemos que un ideal I de R es un ***ideal radical*** si dado $r\in R$, $r^n\in I$ para algún $n\geq 1$ implica $r\in I$.

Teorema 3.2.28. *En el teorema anterior, si $Z\subseteq A_0$, entonces V es un ideal radical de Z.*

Demostración. Por el teorema anterior, sólo falta ver que V es radical. Seguiremos con la notación de la prueba del teorema anterior. Supongamos que $a^n \in V$ y sea $u_{a^n} \in G_{a^n}$ su automorfismo respectivo, con $u_{a^n}(e') = e$ y $[u_{a^n}] = 1$ en $K_1(A^+_{a^n})$. Por el isomorfismo del lema 3.2.13, tenemos un A^+_a-automorfismo u_a dado por el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A^+_{a^n} \otimes_{A_0} M \arrow[r, "u_{a^n}"] & A^+_{a^n} \otimes_{A_0} M \arrow[d, "\cong"', "\beta\otimes id_M"] \\ A^+_a \otimes_{A_0} M \arrow[u, "\alpha\otimes id_M", "\cong"'] \arrow[r, dotted, "u_a"] & A^+_a \otimes_{A_0} M \end{tikzcd} .$$

- $u_a(e') = e$: Dado que $\alpha \otimes id$ se restringe a la idéntica en A, y $e \in A \otimes_{A_0} M$

$$u_a(1 \otimes e') = (\beta \otimes id)u_{a^n}(\alpha \otimes id)(1 \otimes e') = (\beta \otimes id)u_{a^n}(1 \otimes e') =$$

$$(\beta \otimes id)e = e.$$

- La imagen de u_a en $K_1(A^+_a)$ es trivial: Como $[u_{a^n}] = 1$ en $K_1(A^+_{a^n})$, por el teorema 1.4.8 tenemos que existe $k \geq 0$ tal que

$$u_{a^n} \oplus id \in E((A^+_{a^n} \otimes_{A_0} Q) \oplus A^+_{a^n}, A^+_{a^n} \otimes_{A_0} P_1, \ldots, A^+_{a^n} \otimes_{A_0} P_k),$$

  donde id es la idéntica en $F_{a^n} := (A^+_{a^n} \otimes_{A_0} P_1) \oplus \cdots \oplus (A^+_{a^n} \otimes_{A_0} P_k)$ y los A_0-módulos P_i son proyectivos. Es posible probar que el conjugado

$$u_a \oplus id_{F_a} = y^{-1}(u_{a^n} \oplus id)y$$

  pertenece a

$$E((A^+_a \otimes_{A_0} Q) \oplus A^+_a, (A^+_a \otimes_{A_0} P_1), \ldots, (A^+_a \otimes_{A_0} P_k)),$$

  con

$$y = (\alpha \otimes id_M) \oplus (\alpha \otimes id_{P_1}) \oplus \cdots \oplus (\alpha \otimes id_{P_k}),$$

  y

$$y^{-1} = (\beta \otimes id_M) \oplus (\beta \otimes id_{P_1}) \oplus \cdots \oplus (\beta \otimes id_{P_k}).$$

Por tanto, por 1.4.3,

$$[u_a] = [u_a \oplus id_{F_a}] = 1.$$

$\square$

Observación 3.2.29. En los enunciados de los teoremas 3.2.26 y 3.2.27, hemos añadido la hipótesis

$$Q \cong P/I_1 P.$$

Este requerimiento no aparece en los artículos de Artamonov [1, 2, 3], que tuvimos disponibles. Dicha hipótesis es equivalente a la afirmación *iv*) del teorema 3.2.25. A su vez, *iv*) es análoga al numeral 7. en la prueba de 3.2.26. La importancia de nuestra hipótesis en la prueba de 7., radica en que ella nos asegura que luego de reemplazar posiblemente a u_b, $(u_b)_0$ es un automorfismo de M, y así podemos afirmar que

$$loc_Z(u_b)(h_2(a,b)b^m(a+b)^{-2m})$$

efectivamente se restringe a un automorfismo en G_{a+b}. Nótese que en principio esto no es claro pues

$$loc_Z(u_b)(h_2(a,b)b^m(a+b)^{-2m})_0 = (u_b)_0 \in Hom_{A_0}(M, A_b^+(0) \otimes_{A_0} M).$$

Esto muestra la necesidad de tal hipótesis. Véase también el teorema 3.2.25.

3.3. Comparación con el caso conmutativo

Sean $R' \subseteq R$ dos anillos. Decimos que un R-módulo M es extendido desde R' si $M = R \otimes_{R'} N$ para algún R'-módulo N.

Teorema 3.3.1 (**Teorema de pegamiento de Quillen-principio de localización–globalización**). *Sea R un anillo conmutativo y M un $R[x]$-módulo finitamente presentado. Entonces:*

i)

$$Q(M) := \{a \in R \text{ t.q. el } R_a[x]\text{-módulo } M_a \text{ es extendido desde } R_a\} \cup \{0\},$$

*es un ideal de R, llamado el **ideal de Quillen de** M.*

ii) *M es extendido desde R si y sólo si, para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R, el $R_{\mathfrak{m}}[x]$-módulo $P_{\mathfrak{m}}$ es extendido desde $R_{\mathfrak{m}}$.*

Demostración. Véase [5], capítulo V, teorema 1.6. □

A continuación presentamos un cuadro comparativo entre los objetos usados en la prueba del teorema de pegamiento de Quillen y el principio de localización-globalización de Artamonov.

Caso conmutativo	**Caso no conmutativo**
R anillo	$Z \subseteq Z(A)$ subanillo graduado de A sin divisores de cero en A
$A = R[x]$ anillo de polinomios usual	A Z-álgebra graduada positivamente
$a \in R$	$a \in Z$
$A_a \cong R_a[x]$	A_a^+ parte no negativa de la localización $\mathbb{Z}$-graduada A_a
N R-módulo finitamente presentado	N A_0-módulo finitamente presentado
$End_A(A \otimes_R N) \cong End_R(N)[x]$ R-álgebra graduada	$End_A(A \otimes_{A_0} N) \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} Hom(N, A_i \otimes N)$ Z-álgebra graduada
$xR[x] = (x)$ ideal de $R[x]$	I_1 ideal de A
${}_{R[x]}M$ extendido desde M/xM	${}_AM$ extendido desde M/I_1M
$Q(M)$ ideal de R (Quillen)	V ideal graduado de Z (Artamonov)

3.4. Observaciones finales

1.La distancia entre los teoremas centrales de este trabajo y sus versiones clásicas conmutativas se explica por la diferencia en los enfoques de Artamonov y Quillen al abordar el problema de Serre. La técnica usada por Artamonov es la cancelación, la cual comentaremos a grandes rasgos enseguida. Supongamos que A es un anillo y que P es un A-módulo proyectivo finitamente generado, los cuales cumplen ciertas hipótesis lo bastantemente fuertes para poder usar los teoremas que enunciaremos enseguida (véanse las hipótesis del teorema 5.37. de [1]). El primer paso es el chequeo de la propiedad PSF (proyectivos finitamente generados son establemente libres), a través del cálculo del funtor K_0:

Teorema. *Supongamos que $K_0(A) \cong \mathbb{Z}$, entonces existen naturales d y r tales que*

$$P \oplus A^d \cong A^r. \tag{1}$$

Luego, para ver que P es libre, debemos garantizar que

$$P \oplus A^{d-1} \cong A^{r-1}. \tag{2}$$

La implicación 1) $\Rightarrow$ 2) es conocida como el teorema de cancelación. Finalmente, a partir del teorema de Horrocks y el principio de localización-globalización es posible probar dicho teorema en una versión un poco más general:

Teorema. *Si existe un epimorfismo de A-módulos*

$$\pi : (A \otimes_B Q) \oplus A^{r+1} \longrightarrow A,$$

entonces, existe un automorfismo

$$u \in Aut_A((A \otimes_B Q) \oplus A^{r+1}),$$

tal que πu es la proyección sobre A como último sumando directo. En particular, si

$$(A \otimes_B Q) \oplus A^{r+s} \cong P \oplus A^s, \ \text{con } s \geq 1,$$

es un isomorfismo de A-módulos, entonces, existe un A-isomorfismo:

$$(A \otimes_B Q) \oplus A^r \cong P.$$

Aquí, B es cierto anillo graduado, y $Q \in \mathfrak{P}(B_0)$.

2. Teniendo en cuenta que el teorema de Horrocks y el principio de localización-globalización desarrollados por Artamonov son herramientas para demostrar el teorema de cancelación comentado en 1., daremos una interpretación del teorema 3.2.27 que nos permite relacionarlo con el método de la cancelación. Primero, con la ayuda de 1.5.3, enseguida escribiremos un par de corolarios de 3.2.27:

Corolario 3.4.1. *Supongamos que* $Q \in \mathfrak{P}(A_0)$, $P \in \mathfrak{P}(A)$, $Q \cong P/I_1P$, *y que*

$$(A \otimes_{A_0} Q) \oplus Ae' = P \oplus Ae,$$

donde e, e' *son bases de los módulos cíclicos* Ae *y* Ae' *respectivamente. La igualdad anterior induce la igualdad:*

$$A_a^+ \otimes_{A_0} Q \oplus A_a^+ e' = (A_a^+ \otimes_A P) \oplus A_a^+ e.$$

Para cada natural n, *denotemos por* V_n *al subconjunto que consiste del cero y todos los elementos* a *no nulos de* Z_n *para los que*

$$A_a^+ \otimes_{A_0} Q \cong A_a^+ \otimes_A P,$$

mediante un isomorfismo inducido por un automorfismo u_a *como en el teorema 3.2.27. Entonces*

$$V := \sum_{n \in \mathbb{N}} \oplus V_n$$

es un ideal graduado de Z.

En particular si Q es libre, es decir, $Q := A_0^n$; por la construcción de $E(A)$ (véase la observación 1.3.7) y el isomorfismo del teorema 1.4.12, tenemos:

Corolario 3.4.2. *Supongamos que* $P \in \mathfrak{P}(A)$, $A_0^n \cong P/I_1P$ *y que*

$$A^n \oplus Ae' = P \oplus Ae,$$

donde e, e' *son bases de los módulos cíclicos* Ae *y* Ae' *respectivamente. La igualdad anterior induce la igualdad:*

$$(A_a^+)^n \oplus A_a^+ e' = (A_a^+ \otimes_A P) \oplus A_a^+ e.$$

Para cada natural n, *denotemos por* V_n *al subconjunto que consiste del cero y todos los elementos* a *no nulos de* Z_n *para los que*

$$(A_a^+)^n \cong A_a^+ \otimes_A P,$$

mediante un isomorfismo inducido por un automorfismo $u_a \in E(n+1, A_a^+)$. *Entonces*

$$V := \sum_{n \in \mathbb{N}} \oplus V_n$$

es un ideal graduado de Z.

Intuitivamente, el corolario anterior nos dice que los elementos a homogéneos de Z para los que podemos cancelar el sumando A_a^+ en ambos lados del isomorfismo

$$(A_a^+)^n \oplus A_a^+ \cong (A_a^+ \otimes_A P) \oplus A_a^+,$$

forman un ideal de Z. Luego, si queremos cancelar el sumando A en ambos lados de la igualdad

$$A^n \oplus A = P \oplus A,$$

debemos ver que $1 \in V$. Esta es precisamente la estrategia de Artamonov para demostrar el teorema de cancelación.

Bibliografía

[1] **Artamonov, Vyacheslav**, *Serre's quantum problem*, Russian Mathematical Surveys **53**:4 657-730, 1998.

[2] **Artamonov, Vyacheslav**, *Projective modules over crossed products*, Journal of algebra **173** pp.696-714, 1995.

[3] **Artamonov, Vyacheslav**, *Quantum polynomial algebras*, Journal of Mathematical Sciences **87**:3 pp.3441-3462, 1997.

[4] **Bass, Hyman**, *Algebraic K-theory*, W. A. Benjamin, New York, 1968.

[5] **Lam, Tsit Yuen**, *Serre's Problem on Projective Modules*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2005.

[6] **Lezama, Oswaldo**, *Cuadernos de Álgebra, No. 3: Módulos*, SAC2, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá.

[7] **Lezama, Oswaldo**, *Cuadernos de Álgebra, No. 6: Anillos y Módulos*, SAC2, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá.

[8] **Lezama, Oswaldo**, *Cuadernos de Álgebra, No. 8: Álgebra homológica*, en preparación.

[9] **Lezama, Oswaldo et. al,**, *Constructive Homological Algebra over skew PBW Extensions*, in preparation.

[10] **Nastasescu Constantin and Van Oystaeyen F.**, *Methods of Graded Rings*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 2004.

[11] **Quillen, Daniel**, *Proyective modules over polynomial rings*, Invent. Math., 36, 1976, 167-171.

[12] **Rotman, Joseph**, *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, 1979.

[13] **Rotman, Joseph**, *An Introduction to Homological Algebra*, Springer, 2009.

[14] **Serre, Jean-Pierre**, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. Math. 61 (1955), 191-278.

[15] **Suslin, A.A.**, *Proyective modules over polynomial rings are free*, Soviet Math. Dokl., 17, 1976, 1160-1164.

[16] **Swam, Richard**, *Algebraic K-theory*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1968.