Sobre Métodos Variacionales y Topológicos en Espacios de Hilbert Parcialmente Ordenados.

Paola Andrea Ropero Rueda

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.

2011

Sobre Métodos Variacionales y Topológicos en Espacios de Hilbert Parcialmente Ordenados.

Paola Andrea Ropero Rueda

Trabajo de grado para optar al título de
Magister en Ciencias, Matemáticas

Director
José Francisco Caicedo C.
Profesor
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá D.C.

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
2011

Título en español

Sobre Métodos Variacionales y Topológicos en Espacios de Hilbert Parcialmente Ordenados.

Title in English

On Variational and Topological Methods in Partially Ordered Hilbert Spaces

Resumen: Este trabajo presenta conexiones entre los métodos variacionales y topológicos en el estudio de ecuaciones de Problemas a Valor Frontera, por ejemplo, un problema de Dirichlet. Se estudiarán operadores que admitan una estructura variacional y que la clasificación de sus puntos críticos permitan obtener resultados de existencia y multiplicidad.

Abstract: This work presents connections between variational and topological methods in the study of equations of boundary value problems, for example, a Dirichlet problem. We study operators which admit a variational structure and such that the classification of his critical points allows to obtain results of existence and multiplicity.

Palabras clave: Hilbert, Métodos variacionales, Métodos topológicos, Espacios parcialmente ordenados, Ecuaciones diferenciales parciales.

Keywords: Hilbert, Variational Methods, Topological Methods, Partially Ordered Spaces, Partial Differential Equations

Índice general

Introducción

En el artículo [6] el profesor Helmut Hofer muestra algunas relaciones que existen entre los métodos variacionales y topológicos en el estudio de ecuaciones de Problema a Valor Frontera (PVF), como por ejemplo, el de un problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

Donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N (N \geqq 1)$ con frontera suave $\partial\Omega$, Δ es el operador de Laplace y $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función suficientemente suave con propiedades adecuadas. Primero, se tiene el principio del máximo para $-\Delta$. Aplicando este hecho, el problema (1) se vuelve equivalente a una ecuación de punto fijo para un operador adecuado que preserva el orden (parcial) en un espacio de Banach ordenado E.

Por otro lado, si f satisface algunas condiciones de crecimiento (1) tiene una estructura variacional. Las soluciones débiles de (1) son los puntos críticos de un cierto funcional $\Phi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ y estas soluciones se vuelven clásicas si $f$es suficientemente suave.

Estas observaciones estimularon la investigación de los métodos variacionales abstractos en espacios de Banach ordenados. Posteriormente argumentos de teoría de grado fueron usados para estudiar estos problemas (1). Para información y más referencias sobre estos métodos ver los artículos tratados de Amann [2] y Nirenberg [11], entre otros.

En este trabajo se estudiarán operadores potenciales $T : U \subset H \to H$, donde H es un espacio de Hilbert real ordenado, orden inducido en H por un cono cerrado P. T será el gradiente de un funcional $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R})$ el cual admite la descomposición $T = I - K$, donde K es un operador compacto que preserva el orden, I es el operador Identidad. Se clasificarán los puntos críticos de Φ y se probará la existencia y multiplicidad de las soluciones en las cuales la clasificación juega un papel muy importante. Si Φ es de clase C^2 usaremos una variante especial que tiene el teorema de Krein-Rutman [5, pag

100.] para el problema lineal de valores propios $\Phi''(v)u = \lambda u$. Aplicando esto es posible calcular los grados locales de puntos críticos aislados de Φ dependiendo de su clase. Se usarán estos resultados para obtener información sobre el grado local de un punto crítico, obtenido por una variante del lema de deformación de Ambrosetti-Rabinowitz [1] [14, Teorema 1.9]

El trabajo estará organizado de la siguiente manera:

1. En el primer capítulo se desarrollarán los preliminares. En este capítulo se darán las notaciones y definiciones de cresta, cono, $E-$regularidad con algunos resultados en los que se aplican dichas notaciones y definiciones. También enunciaremos algunos resultados conocidos del análisis funcional y teoría de grado que se utilizaran en el desarrollo del trabajo.

2. En el segundo capítulo se estudiará la teoría abstracta. El capítulo estará dividido en dos secciones. En la primera sección se dará una clasificación de puntos críticos y se probarán algunos resultados de existencia y multiplicidad para el caso C^1. En la segunda sección se estudiará el caso C^2. Aquí, se determinará el grado local, esto dará una herramienta en el estudio de operadores potenciales de la forma descrita($I - K$ donde K es compacto y preserva el orden). Entonces, se probarán algunos resultados de existencia y multiplicidad, los cuales mostrarán la conexión entre los métodos variacionales y topológicos dada por la clasificación de los puntos críticos.

3. En el capítulo tres se ilustrarán los métodos abstractos con una aplicación a ecuaciones diferenciales parciales del tipo (PVF). Aquí se obtienen resultados y/o extensiones de trabajos dados por Amann [2], [4]y Zehnder [3], Chang [10] y Struwe [12].

CAPÍTULO 1

Preliminares.

En este capítulo se darán las notaciones, definiciones, algunos resultados conocidos de análisis funcional y teoría de grado que serán de utilidad en la construcción de este trabajo.

Comenzaremos con algunas definiciones y proposiciones en los cuales no es requerida una estructura de orden.

Definición 1.1. Sea $(H, (\cdot, \cdot))$ un espacio real de Hilbert y $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R})$ donde $U \neq \emptyset$, es abierto en H. Para números reales c, d definimos un subconjunto cerrado $C \neq \emptyset$ de H, $C \subset U$:

$$C_r(\Phi, C, d) := \{u \in C \mid \Phi(u) = d, \Phi'(u) = 0\}$$

que llamaremos la Cresta de Φ en C a nivel d y la Cresta de Φ en C será:

$$C_r(\Phi, C) := \bigcup_{e \in \mathbb{R}} C_r(\Phi, C, e) \tag{1.1}$$

$$\Phi^d := \Phi^{-1}((-\infty, d]), \qquad \Phi_c := \Phi^{-1}([c, +\infty))$$

$$\Phi_c^d := \Phi^d \cap \Phi_c, \qquad \overset{\circ}{\Phi^d} = \mathrm{int}(\Phi^d)$$

Diremos que Φ satisface las condiciones de Palais-Smale sobre C si:

$(\mathbf{PS})_C$ $\quad$ $\Phi'(u_n) \to 0$ y $\Phi(u_n) \to d \in \mathbb{R}$ para alguna sucesión $(u_n) \subset C$ implica que (u_n) es precompacto

es decir, u_n posee una subsucesión convergente.

Introducimos el conjunto $D = D(\Phi, C)$, llamado la $\Phi-$familia en C, por:

$$D := \{\sigma : [0,1] \times C \to C \text{ continua } \mid \sigma(0,.) = I \text{ y la función } t \to \Phi(\sigma(t,u)) \text{ es no creciente para todo } u \in C\}$$

Veamos que dados σ, $\widehat{\sigma} \in D$ la aplicación $\sigma * \widehat{\sigma}$ definida por:

$$\sigma * \widehat{\sigma}(t,u) := \begin{cases} \widehat{\sigma}(2t,u) & t \in [0,1/2] \\ \sigma(2t-1, \widehat{\sigma}(1,u)) & t \in [1/2,1] \end{cases}$$

está en D. Entonces $*$ define una aplicación $D \times D \longrightarrow D$

Primero $*$ está en D porque para t entre 0 y $1/2$ se tiene que $\widehat{\sigma}(2t,u) \in C$. Para t mayor que $1/2$ también cumple y en $t = 1/2$ se tiene que los dos pedazos coinciden en $\widehat{\sigma}(1,u)$ y sus límites tanto por izquierda como por derecha son iguales a $\widehat{\sigma}(1,u)$.

Ahora la compuesta de $\Phi \circ (\sigma * \widehat{\sigma})$ Es continua puesto que las aplicaciones son continuas y compuesta de continuas es continua, además es no creciente, si $t \in (0,1/2)$ es $\Phi \circ \widehat{\sigma}(2t,u))$ y para $t \in (1/2,1)$ se tiene $\Phi \circ \sigma(2t-1, \widehat{\sigma}(1,u))$ no creciente. Ahora en $t = 1/2$ los valores coinciden $\Phi(\sigma * \widehat{\sigma}(1/2,u)) = \Phi(\widehat{\sigma}(1,u))$ es no creciente por definición.

El siguiente lema es una variante conocida del lema de deformación de Rabinowitz, [14, Teorema 1.9]

Lema 1.1. *Sea H un espacio real de Hilbert, $\emptyset \neq C \subset U$, C cerrado y convexo, U abierto. Supongamos que $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R})$ satisface $(PS)_C$ y su gradiente Φ' admite la descomposición $I - K$ tal que $KC \subset C$. Entonces la $\Phi - familia$ sobre $C, D = D(\Phi, C)$, tiene la siguiente propiedad:*

Dados los números reales $d \in \mathbb{R}, \epsilon_0 > 0$, y la vecindad $W \subset C$ de $C_r(\Phi, C, d)$ existe un $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ y una aplicación $\sigma \in D$ tal que:

$$\sigma(\{1\} \times ((\Phi^{d+\epsilon} \cap C) \setminus W)) \subset \Phi^{d-\epsilon} \cap C. \tag{1.2}$$

Su prueba se puede encontrar en [14, Teorema 1.9] y [8, Teorema 5.2]

Observación 1.1. Si $\bigcup_{e \in [c,d]} Cr(\Phi, C, e) = \emptyset$ y se tiene la hipótesis del lema 1.1 existe un $\sigma \in E = D(\Phi, C)$ tal que $\sigma(\{1\} \times (\Phi^d \cap C)) \subset \Phi^c \cap C$. En efecto, por la compacidad de $[c,d]$ encontramos $d_i, c \leqq d_1 < d_2 < d_3 ... < d_k \leqq d$ y $\epsilon_i > 0, i = 1, ..., k$, tal que $([d_i - \epsilon_i, d_i + \epsilon_i])_{i=1,...,k}$ cubre $[c,d]$ y correspondientemente $\sigma_i \in D$ con

$$\sigma_i(\{1\} \times (\Phi^{d_i+\epsilon_i} \cap C)) \subset \Phi^{d_i-\epsilon_i} \cap C.$$

Define $\sigma \in D$ por $\sigma := (...((\sigma_1 * \sigma_2) * \sigma_3) * ... * \sigma_k)$.

Usando el lema1.1 tenemos un primer resultado de existencia para puntos críticos.

Proposición 1.1. *Sea H un espacio real de Hilbert, $C \subset H$ no vacío, cerrado y convexo. $C \subset U$, U abierto. Suponemos que $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R})$ satisface PS_C y su gradiente admite la descomposición $I - K$ tal que $KC \subset C$ y $\Phi|C$ es acotado inferiormente. Entonces $C_r(\Phi, C, d) = \Phi^d_d \cap C \neq \emptyset$, donde $d = inf \Phi(C)$*

Demostración. Si $C_r := C_r(\Phi, C, d) = \emptyset$. Entonces encontramos un $\epsilon > 0$ y un $\sigma \in D := D(\Phi, C)$ con $\sigma(\{1\} \times (\Phi^{d+\epsilon} \cap C)) \subset \Phi^{d-\epsilon} \cap C = \emptyset$, lo cual es contradictorio puesto que $\Phi \mid C$ es acotada inferiormente por hipótesis y esto hace que $\Phi^{d+\epsilon} \cap C \neq \emptyset$. Esto implica que $\Phi_d^d \cap C \supset C_r \neq \emptyset$. Para mostrar la inclusión opuesta, es decir, $\Phi_d^d \cap C \subset C_r$ suponemos que $u \in (\Phi_d^d \cap C) \setminus C_r)$ existe. Veamos que existe una vecindad $W \subset C$ de C_r tal que $u \notin W$ aplicando el lema 1.1, existe un $\sigma \in D$ y un $\epsilon > 0$ con $\sigma(1, u) \in \Phi^{d-\epsilon} \cap C = \emptyset$ lo cual es contradictorio. □

Hasta el momento no hemos usado ninguna estructura de orden, introduciremos este concepto.

Definición 1.2. Un espacio real ordenado de Banach es un par (F, P), donde F es un espacio real de Banach y un cono P subconjunto cerrado, convexo de F tal que $(-P) \cap P = \{0\}$ y $\mathbb{R}^+ \cdot P \subset P$. Dado un cono $P \subset F$ definimos un orden (parcial) con respecto a P por:

$$x \geqq y :\Longleftrightarrow x - y \in P$$

Nosotros escribimos

$$x > y :\Longleftrightarrow x \geqq y, \text{ pero, } x \neq y$$

$$x \gg y :\Longleftrightarrow x - y \in int(P). \quad \text{Si} \quad int(P) \neq \emptyset$$

Un operador $T : U \subset F \longrightarrow F$ preserva el orden si y sólo si:

$$x \geqq y \Longrightarrow Tx \geqq Ty$$

Preserva el orden estrictamente si y sólo si:

$$x > y \Longrightarrow Tx > Ty,$$

y preserva el orden fuertemente si y sólo si:

$$x > y \Longrightarrow Tx \gg Ty.$$

Definición 1.3. Sea F un espacio de Banach, $P \subset F$ un cono, se tiene un orden definido por P como en la defininición 1.2. Entonces
(i) P es generante si $P - P = F$, y total si $\overline{P - P} = F$;
(ii) P es llamado normal si $inf\{|x + y| : \quad x, y \in P \cap \partial B_1(0)\} > 0$;
(iii) La norma sobre F es llamada monotona si $0 \leqq x \leqq y$ implica $|x| \leqq |y|$; y semimonotona si $|x| \leqq \gamma|y|$ para algún γ y para todo x, y tal que $0 \leqq x \leqq y$;

Proposición 1.2. *Sea F un espacio de Banach y $P \subset F$ un cono, Entonces se tiene lo siguiente:*
(i)$intP \neq \emptyset$ entonces P es generante.
(ii) P es normal si y sólo si $|\cdot|$ es semimonotona.
(iii) P es normal si y sólo si $(B + P) \cap (B - P)$ es acotado, donde $B = \overline{B}_1(0) \subset F$.
(iv) P es generante si y sólo si $\overline{C - C} \supset \varrho B$ para algún $\varrho > 0$ si y sólo si $C - C \supset \delta B$ para algún $\delta > 0$, donde $B = \overline{B}_1(0)$ y $C = B \cap P$.

La demostración de esta proposición se encuentra en [9, pag 219.].

Recordemos aquí algunas definiciones y resultados de análisis funcional que se utilizan para la prueba de la siguiente proposición y que se pueden encontrar en [5]

Definición 1.4. Se consideran funciones φ definidas sobre un espacio topológico E de la siguiente manera $\varphi : E \to (-\infty, +\infty]$. Su dominio $D(\varphi)$ y su epigrafo $epi\varphi$ se define: $D(\varphi) := \{x \in E| \quad \varphi(x) < +\infty\}$ y $epi\varphi := \{[x, \lambda] \in E \times \mathbb{R}| \quad \varphi(x) \leqq \lambda\}$.

φ se dice **semicontinua inferiormente** (**s.c.i.**) si para todo $x \in E$ se tiene

$$\lim_{y \to x} inf \varphi(y) \geqq \varphi(x)$$

A continuación algunas propiedades de las funciones $s.c.i.$ que están en [5, pag 8.]
a. Si φ es $s.c.i. \Leftrightarrow epi\varphi$ es cerrado en $E \times \mathbb{R}$.
b. Si φ es $s.c.i. \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto $[\varphi \leqq \lambda] = \{x \in E| \quad \varphi(x) \leqq \lambda\}$ es cerrado.
c. Si φ_1 y φ_2 son $s.c.i. \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2$ es $s.c.i.$.
d. Si $(\varphi_i)_{i \in I}$ es una familia de funciones $s.c.i. \Rightarrow$ la envolvente superior de las (φ_i) es $s.c.i.$, es decir, la función φ definida por $\varphi(x) = \underset{i \in I}{Sup} \varphi_i(x)$ es $s.c.i.$.
e. Si E es compacto y φ es $s.c.i. \Rightarrow \varphi$ alcanza su cota inferior en E.

Ahora suponemos que E es un **espacio vectorial**.

Definición 1.5. Una función $\varphi : E \to (-\infty, +\infty]$ se dice **convexa** si

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leqq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \qquad \forall x, y \in E, \quad \forall t \in (0,1).$$

Algunas propiedades elementales de las funciones **convexas**, ver [5, pag 8-9] son:
a. Si φ es una función convexa $\Leftrightarrow epi\varphi$ es un conjunto conexo en $E \times \mathbb{R}$.
b. Si φ es una función convexa $\Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto $[\varphi \leqq \lambda]$ es convexo.
c. Si φ_1 y φ_2 son funciones convexas $\Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2$ es convexa.
d. Si $(\varphi_i)_{i \in I}$ es una familia de funciones convexas $\Rightarrow$ la envolvente superior de las (φ_i) es convexa.

La siguiente proposición será muy útil para las demostraciones del segundo capítulo.

Proposición 1.3. *Sea (H, P) un espacio de Hilbert real ordenado, $U \neq \emptyset$ y $U \subset H$ abierto, $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R})$ con un gradiente $\Phi'(x)$ de la forma $I - K$, donde, K es un operador compacto y preserva el orden. Además, suponemos que $u_0 \in U$ y es un punto crítico de Φ. Entonces, dado $\epsilon > 0$ tal que $\overline{B_\epsilon} := \{u \in H| \quad \|u - u_0\| \leqq \epsilon\} \subset U$ existe $u^+ \geqq u_0$ y $u^- \leqq u_0$, $u^\pm \in \overline{B_\epsilon}$ y $\lambda^\pm \in \mathbb{R}^+$ tal que:*

$$\Phi'(u^\pm) + \lambda^\pm(u^\pm - u_0) = 0$$

$$inf \Phi(\overline{B_\epsilon} \cap \{u \in H | u \overset{\geqq}{\leqq} u_0\}) = \Phi(u^\pm)$$

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $u_0 = 0$ ya que se puede hacer una traslación $\tau_{u_0}(x) = x - u_0$, es difeomorfismo de clase infinito y $\tau'_{u_0} = I$ y sólo considerar el caso de u^+ ya que para el caso u^- es análogo. Por hipótesis se tiene que Φ es debilmente semicontinua inferiormente por sucesiones (DISC) porque Φ es continua y toda función continua es semicontinua inferiormente, tiene inf de acuerdo, a la definición 1.4 propiedad **e**. Por lo tanto, encontraremos un $u^+ \in \overline{B_\epsilon} \cap P$ tal que:

$$\Phi(u^+) = inf \Phi(\overline{B_\epsilon} \cap P) \tag{1.3}$$

ya que $\overline{B_\epsilon} \cap P$ es cerrado y convexo, ver definición 1.5.

Si $u^+ = 0$ entonces, lo anterior es cierto ya que $0 \in P$ y $0 \in \overline{B_\epsilon}$, entonces $\Phi(u^+) = inf \Phi(u^+ = 0)$. Por lo tanto vamos a suponer que $u^+ > 0$ y que $\rho := \|u^+\| > 0$ Definimos

$$w := -(\Phi'(u^+) - (\Phi'(u^+), u^+)\rho^{-2}u^+)$$

y encontramos un $\widehat{\rho} > 0$ tal que

$$u^+ + tw \neq 0$$

$$t((\Phi'(u^+), u^+)\rho^{-2} - 1) + 1 \geqq 0 \quad \forall t \in [0, \widehat{\rho}]$$

Tenemos

$$u^+ + tw = (1 - t(1 - (\Phi'(u^+), u^+)\rho^{-2}))u^+ + tku^+ \geqq 0 \quad \forall t \in [0, \widehat{\rho}]$$

Se define $a \in C^1([0, \widehat{\rho}], H)$ por

$$a(t) = \|u^+ + tw\|^{-1}\rho(u^+ + tw) \text{ también expresado } a(t) = \frac{\rho(u^+ + tw)}{\|u^+ + tw\|}$$

y veamos que su derivada en $t = 0$ es $-\|w\|^2$, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(a(t))|_{t=0} = -\|w\|^2$$

$$[\Phi(a(t))]'|_{t=0} = \Phi'(a(t))a'(t)|_{t=0}$$

Resolviendo por separado se tiene que:

$$\Phi'(a(t))|_{t=0} = \Phi'(u^+) \tag{1.4}$$

y para $a'(t)|_{t=0}$ se tiene que:

$$a'(t)|_{t=0} = \frac{\rho w\|u^+ + tw\| - \frac{\rho u^+(w, u^+ + tw)}{\|u^+ + tw\|}}{\|u^+ + tw\|}|_{t=0}$$

$$a'(t)|_{t=0} = \frac{\rho^2 w - \rho u^+ \frac{(w, u^+)}{\|u^+\|}}{\|u^+\|^2} \tag{1.5}$$

Entonces, aplicando 1.4 y 1.5 tenemos que:

$$\Phi'(a(t))|_{t=0} = (\Phi'(u^+), w - \frac{u^+}{\rho^2}(w, u^+))$$

$$\Phi'(a(t))|_{t=0} = (\Phi'(u^+), w) - \frac{(w, u^+)}{\rho^2}(\Phi'(u^+), u^+)$$

y como se tiene que w es

$$w := -(\Phi'(u^+) - (\Phi'(u^+), u^+)\rho^{-2}u^+)$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}\Phi'(a(t))|_{t=0} = (\Phi'(u^+), -(\Phi'(u^+) - (\Phi'(u^+), u^+)\rho^{-2}u^+))\\ - (-(\Phi'(u^+) - (\Phi'(u^+), u^+)\rho^{-2}u^+), u^+)(\Phi'(u^+), u^+)\rho^{-2}\end{aligned}$$

$$\Phi'(a(t))|_{t=0} = (w, (\Phi'(u^+) - \rho^{-2}(\Phi'(u^+), u^+)u^+))$$

$$\Phi'(a(t))|_{t=0} = (w, -w) = -(w, w)$$

entonces

$$\Phi'(a(t))|_{t=0} = -\|w\|^2$$

Si $w \neq 0$ se obtiene una contradicción ya que la aplicación $t \longrightarrow \Phi(a(t))$ es continuamente diferenciable y

$$\Phi(u^+) = \Phi(a(0)) \leqq \Phi(a(t)), \forall t \in [0, \widehat{\rho}]$$

Por lo tanto $w = 0$, lo cual implica que para $\lambda^+ := -(\Phi'(u^+), u^+)\rho^{-2}$ se tiene

$$\Phi'(u^+) + \lambda^+ u^+ = 0 \tag{1.6}$$

Usando que u^+ satisface 1.3 y la convexidad de $\overline{B_\epsilon} \cap P$ se tiene que

$$(\Phi'(u^+), u - u^+) \geqq 0, \forall u \in \overline{B_\epsilon} \cap P \tag{1.7}$$

Tomando que $u = 0$ y usando 1.6 y 1.7 se obtiene

$$0 = (\Phi'(u^+) + \lambda^+ u^+, u^+) \leqq \lambda^+ \rho^2 \tag{1.8}$$

y $\Phi'(u^+) = -\lambda^+ u^+$ se tiene que

$$(-\lambda^+ u^+, -u^+) \geqq 0 \tag{1.9}$$

$$(\lambda^+ u^+, u^+) = \lambda^+ \|u^+\|^2 \geqq 0 \tag{1.10}$$

Dado que $\|u^+\|^2 = \rho$ es positivo, entonces $\lambda^+ \geqq 0$ $\square$

A partir de este momento se introducirá la definición de $E-regularidad$ para un operador $T : U \subset H \to H$. Sea E, F Espacios de Banach Reales. Si los conjuntos subyacentes satisfacen $E \subset F$ y la aplicación $E \to F : u \to u$ es continua se notará $E \hookrightarrow F$

Definición 1.6. (E-regularidad) $T : U \subset H \to H$ un operador E-regular si existe una sucesión finita $(E_i)_{i=0,1,...,n+1}$ de Espacios de Banach reales tal que:
(i)$E = E_0 \hookrightarrow E_1 \hookrightarrow ... \hookrightarrow E_n \hookrightarrow E_{n+1} = H$.
(ii)El operador T induce operadores continuos $T_i \in C(U_i, E_{i-1})$ para $i = 1, ..., n+1$, donde $U_i := E_i \cap U$ equipado con la E_i-Topología.

Como consecuencia inmediata de la definición se tiene el siguiente lema.

Lema 1.2. *Sea $T : U \subset H \to H$ un operador E-regular. Sea $(u_k) \subset U$, $(v_k) \subset E$, $(w_k) \subset E$ y $(\lambda_k) \subset [1, \infty)$ son sucesiones, y $w_0 \in E$, $u_0 \in U \cap E$ tal que*

$$Tu_k + w_k = \lambda_k(u_k - v_k)$$

y

$$u_k \to u_0 \text{ en } H, v_k \to v_0 \text{ en } E, w_k \to w_0 \text{ en } E$$

entonces $(u_k) \subset E \cap U$ y $u_k \to u_0$ en E

Corolario 1.1. *Bajo las Hipótesis de la proposición 1.3 y K es E-regular para algún espacio de Banach real $E \hookrightarrow H$, suponemos que $u_0 \in E$, es un punto crítico de Φ que no es un mínimo local de:*

$$\Phi_+ := \Phi \mid U_+ \quad y \quad U_+ := \{u \in U | u \geqq u_0\} \tag{1.11}$$

Entonces, existe una sucesión $(u_n) \subset U_+ \cap E$, tal que, $\Phi(u_n) < \Phi(u_0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $u_n \to u_0$ en E. Un resultado similar se tiene para Φ_- si u_0 no es un mínimo local de Φ_-

Demostración. Aplicando la proposición 1.3 encontramos una suceción $(u_n) \subset U_+$ tal que $\| u_n - u_0 \| \leqq n^{-1}$,

$$\Phi(u_n) = inf \Phi(\partial \mathbb{B}_{\|u_n\|}(u_0) \cap U_+) < \Phi(u_0)$$
$$\Phi'(u_n) + \lambda_n(u_n - u_0) = 0, \quad \lambda_n \geqq 0. \tag{1.12}$$

y $\Phi'(u_0) = 0$. Aplicando que el gradiente de Φ es de la forma $I - K$ se tiene que $\Phi'(u_n) = u_n - Ku_n$ y reemplazando en la ecuación 1.12 tenemos:

$$u_n - Ku_n + \lambda_n u_n - \lambda_n u_0 = 0$$
$$-u_n + Ku_n - \lambda_n u_n + \lambda_n u_0 = 0$$
$$Ku_n + \lambda_n u_0 - u_n(\lambda_n + 1) = 0$$

Con $\mu_n := 1 + \lambda_n$ $(\geqq 1)$

$$Ku_n + \lambda_n u_0 - u_n \mu_n = 0$$

$$Ku_n + \lambda_n u_0 - u_n\mu_n + u_0 - u_0 = 0$$
$$Ku_n - u_n\mu_n + u_0(\lambda_n + 1) - u_0 = 0$$
$$Ku_n - u_n\mu_n + u_0\mu_n - u_0 = 0$$
$$Ku_n - u_0 = \mu_n u_n - \mu_n u_0$$
$$Ku_n - u_0 = \mu_n(u_n - u_0)$$

Por la $E-regularidad$ $u_0 \in E$. Aplicando el lema 1.2 se tiene $u_n \to u_0$ en E. □

Recordemos aquí algunas definiciones y resultados de análisis funcional que serán de ayuda en los siguientes capítulos.

Definición 1.7. Se dice que una forma bilineal $a(u,v) : H \times H \to \mathbb{R}$ es:
(i) **continua** si existe una constante C tal que

$$|a(u,v)| \leqq C|u||v| \qquad \forall u,v \in H,$$

(ii) **coerciva** si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(v,v) \geqq \alpha|v|^2 \qquad \forall v \in H.$$

El siguiente teorema se puede ver en [5, pag 100]

Teorema 1.1. ***Krein-Rutman***. *Sea E un espacio de Banach y sea P un cono convexo de vértice 0 (es decir $\lambda x + \lambda y \in C$, $\forall \lambda \geqq 0, \mu \geqq 0$; $x \in P, y \in P$). Supongamos que P es cerrado, $intP \neq \emptyset$ y $P \cap (-P) = \{0\}$. Sea $T \in \mathcal{K}(E)$ tal que $T(P \setminus \{0\}) \subset intP$. Entonces, existe $u \in intP$ y $\lambda > 0$ tales que $Tu = \lambda u$; además λ es el único valor propio asociado a un vector propio de T en P (es decir, $Tv = \mu v$ con $v \in P$, $v \neq \emptyset$, implica $\mu = \lambda$). Finalmente,*

$$\lambda = Max\{|\mu| : \quad \mu \in \sigma(T)\} \quad \text{donde } \sigma(T) \text{ es el espectro de } T$$

y la multiplicidad (geométrica y algebraica) de λ es igual a uno.

Teorema 1.2. *Sea $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ que verifica*

$$-\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_i a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f \quad \text{en } \Omega, \text{ donde } a_{ij} = \begin{cases} 0, & si\ i \neq j \\ 1, & si\ i = j \end{cases}$$

Supongamos que $f \geqq 0$ en Ω. Si existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \mathbf{Min}_{\overline{\Omega}}\,\mathbf{u}$ y si $u(x_0) \leqq 0$, entonces u es constante en Ω.

Ver [5, pag 200-201]

A partir de este momento se enunciaran algunas definiciones y resultados de teoría de grado que se encuentra en [8, pag 12-17] que serán de gran utilidad en el desarrollo de los siguientes capítulos.

Sea $C^k(\Omega)$ el conjunto de $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable $k - veces$ en Ω, mientras $\overline{C}^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Si $f'(x_0)$ existe entonces $J_f(x_0) = det f'(x_0)$ es el Jacobiano de f en x_0, y x_0 es llamado un punto crítico de f si $J_f(x_0) = 0$ y sea $S_f(\Omega) = \{x \in \Omega| \quad J_f(x_0) = 0\}$. Además, un punto $y \in \mathbb{R}^n$ es llamado valor regular de $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ si $f^{-1}(y) \cap S_f(\Omega) = \emptyset$, de lo contrario es un valor singular.

Definición 1.8. De grado. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $f \in \overline{C}^1(\Omega)$ y $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega \cup S_f(\Omega))$. Entonces definimos

$$deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sgn J_f(x) \qquad \left(acordamos \sum_{\emptyset} = 0 \right)$$

Entonces $deg(f, \Omega, y) = v$, con v entero.

Definición 1.9. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $f \in \overline{C}^2(\Omega)$ y $y \notin f(\partial\Omega)$. Entonces definimos $deg(f, \Omega, y) = deg(f, \Omega, y^1)$, donde y^1 es algún valor regular de f tal que $|y^1 - y| < \varrho(y, f(\partial\Omega))$ y $deg(f, \omega, y^1)$ está dado por la definición 1.8.

Definición 1.10. Sea $f \in C(\overline{\Omega})$ y $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Entonces, definimos

$$deg(f, \Omega, y) := deg(g, \Omega, y),$$

donde $g \in \overline{C}^2(\Omega)$ es una aplicación tal que $|g - f|_0 < \varrho(y, f(\partial\Omega))$ y $deg(g, \Omega, y)$ está dado por la definición 1.9.

El siguiente teorema lista las propiedades básicas del grado.

Teorema 1.3. *Sea $M = \{(f, \Omega, y) : \Omega \subset \mathbb{R}^n,$ abierto acotado, $f \in C(\overline{\Omega})$ y $y \notin f(\partial\Omega)\}$ y $deg : M \to \mathbb{Z}$ el grado topológico definido por la definición 1.10. Entonces, deg tiene las siguientes propiedades.*

1. *$deg(id, \Omega, y) = 1$ para $y \in \Omega$.*

2. *$deg(f, \Omega, y) = deg(f, \Omega_1, y) + deg(f, \Omega_2, y)$ donde Ω_1 y Ω_2 son subconjuntos abiertos disyuntos de Ω tal que $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$.*

3. *$deg(h(t, \cdot), \Omega, y(t))$ es independiente de t donde $h : [0, 1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ y $y : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ son continuas y $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ para cada $t \in [0, 1]$. Esta propiedad se conoce con el nombre de **invariancia homotópica**.*

4. *$deg(f, \Omega, y) \neq 0$ implica que $f^{-1}(y) = \emptyset$.*

5. *Si $k \subset \overline{\Omega}$ es cerrado y $y \notin f(k)$, entonces $deg(f, \Omega, y) = deg(f, \Omega \setminus K, y)$. Esta propiedad se conoce con el nombre de* ***excisión***

6. *$deg(\cdot, \Omega, y)$ y $deg(f, \Omega, \cdot)$ son constantes sobre $\{g \in C(\overline{\Omega}) : \quad |g - f|_0 < r\}$ y $B_r(y) \subset \mathbb{R}^n$, respectivamente, donde $r = \varrho(y, f(\partial\Omega))$. Por otra parte $deg(f, \Omega, \cdot)$ es constante sobre cada componente conectado de $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$.*

7. *$deg(g, \Omega, y) = deg(f, \Omega, y)$ donde $g|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}$.*

8. *$deg(f, \Omega, y) = deg(f, \Omega_1, y)$ para cada subconjunto abierto Ω_1 de Ω tal que $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$.*

Para la siguiente definición y teorema ver [13, pag 28.].
Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C(\overline{\Omega})$ y x es un p-punto aislado de f en Ω. Se sabe que un punto x para el cual $f(x) = p$ es llamado un p-punto de f. Sea $\mathcal{U}$ la colección de todas las vecindades abiertas de x_0 que no contienen otro p-punto de f.

Definición 1.11. El índice $i(f, x_0, p)$ de x_0 es el valor común del $deg(f, U, p)$ para $U \in \mathcal{U}$.

Teorema 1.4. *1. Si $f \in C(\overline{\Omega})$, $p \notin f(\partial\Omega)$ y $f^{-1}(p)$ es finita, entonces*

$$deg(f, \Omega, p) = \sum_{a \in f^{-1}(p)} i(f, a, p).$$

2. Si $f \in C^1(\overline{\Omega})$, $a \in f^{-1}(p)$ y $J_f(a) \neq 0$, entonces $i(f, a, p) = (-1)^v$, donde v es el número de valores propios reales no negativos de $f'(a)$ (contando la multiplicidad algebraica).

Los siguientes resultados se encuentran demostrados en [4] y serán de gran utilidad en la segunda sección del siguiente capítulo.

Sea U un subconjunto abierto de un espacion real de Hilbert H y supongamos que el gradiente $\nabla f : U \to H$ de una función dada $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ es un campo vectorial compacto, que es, $\nabla f = id - F$, donde $F \in C(U; \mathbb{R})$ aplicaciones de conjuntos acotados en conjuntos compactos. Para el siguiente teorema se denota $B(x_0, r)$ como la bola abierta en H de centro x_0 y radio r, y su clausura en H se nota $\overline{B}(x_0, r)$.

Teorema 1.5. *Supongamos que para cada $\beta \in \mathbb{R}$, el conjunto $V := f^{-1}(-\infty, \beta)$ es acotado y $\overline{V} \subset U$. Aún más, supongamos que existen números $\alpha < \beta$ y $r > 0$, y un punto $x_0 \in U$ tal que*

$$f^{-1}(-\infty, \alpha) \subset \overline{B}(x_0, r) \subset V$$

y

$$\nabla f(x) \neq 0, \quad \forall x \in f^{-1}[\alpha, \beta].$$

Entonces, $deg(\nabla f, V, 0) = 1$.

Corolario 1.2. *Supongamos que* $U = H$ *y* $f(x) \to \infty$ *cuando* $\|x\| \to \infty$. *Por otra parte, supongamos que* $\nabla f(x) \neq 0$ *para* $\|x\| \geqq 0$ *y algún* $r_0 > 0$. *Entonces, existe un número* $r_1 \geqq r_0$ *tal que*

$$deg(\nabla f, B(0,r), 0) = 1 \quad \forall r \geqq r_1.$$

Corolario 1.3. *Supongamos que* $x_0 \in U$ *y es un punto crítico aislado de* $f(x)$ *en el que* f *tiene un mínimo local. Entonces,* $i(\nabla f, x_0) = 1$

Corolario 1.4. *Se tienen las hipótesis del teorema1.5 y supongamos que* $x_1 \in V$ *es un punto crítico de* f, *el cual no es un mínimo global de* f *en* V. *Además, supongamos ya sea que* F *es diferenciable en* x_1 *y 1 no es un valor propio de la derivada* $F'(x_1) \in \mathcal{L}(H)$, *o que* x_1 *es un mínimo local. Entonces,* f *tiene al menos tres puntos críticos en* V.

Corolario 1.5. *Supongamos que* $U = H$ *y* $f(x) \to \infty$ *cuando* $\|x\| \to \infty$. *Además, supongamos que* x_1 *es punto crítico de* f, *el cual no es un mínimo global. Si ya sea que* F *es diferenciable en* x_1 *y 1 no es un valor propio de la derivada o que* x_1 *es un mínimo local. Entonces,* f *tiene al menos tres puntos críticos.*

$$deg(\nabla f, B(0,r), 0) = 1 \quad \forall r \geqq r_1.$$

CAPÍTULO 2

Clasificación de Puntos críticos y Grado.

2.1. Clasificación de Puntos Críticos y Resultados de Existencia y Multiplicidad para el caso C^1

En esta sección suponemos la siguiente hipótesis.

$\mathfrak{P}$ (H,P) es un espacio real ordenado de Hilbert, $U \subset H$ abierto y no vacío y $\Phi \in C^1(U,\mathbb{R})$ con un gradiente de la forma $I-K$, donde K es compacto, preserva el orden y es $E-regular$ para cada espacio de Banach real $E \hookrightarrow H$ tal que $int_E(P \cap E) \neq \emptyset$. El potencial b de K aplica intervalos ordenados $[u,v] \subset U$ en conjuntos acotados y el operador $K_0 : U \cap E \to E$ inducido por K preserva fuertemente el orden.

Note que $\mathfrak{P}$ implica que la condición $(PS)_{[u,v]}$ se tiene para todo intervalo en U.

Observación 2.1. Sea $\Phi \in C^1(U,\mathbb{R})$ satisface $\mathfrak{P}$ y supongamos que $C := [u_0, \overline{u}] \subset U$ es un intervalo ordenado, tal que $KC \subset C$ y $\overline{u} > u_0$. Más aún, $\Phi'(u_0) = 0$ y $\overline{u} \in E$. Entonces, si u_0 es un mínimo local de $\Phi|C$, es un mínimo local de $\Phi|U_+$ (aplicando el corolario 1.1)

En lo que sigue llamaremos al conjunto $W \subset H$ una $E-vecindad$ de algún $u_0 \in E$ si y sólo si $u_0 \in int_E(E \cap W)$. Ahora damos la clasificación de puntos críticos para funcionales que satisfacen $\mathfrak{P}$.

Definición 2.1. (Clasificación) Sea $\Phi \in C^1$ satisface $\mathfrak{P}$. Suponga que u_0 es un punto crítico de Φ en U. Definimos $U_+ := \{u \in U | u \geqq u_0\}$ y $U_- := \{u \in U | u \leqq u_0\}$ y $\Phi_\pm := \Phi|U_\pm$. Decimos que u_0 es del tipo:

I $:\Leftrightarrow$ u_0 es un mínimo local de Φ_+ y Φ_-.

$\mathbf{0}_+$ $:\Leftrightarrow$ u_0 es un mínimo local de Φ_+ pero no de Φ_-.

$\mathbf{0}_-$:$\Leftrightarrow$ u_0 es un mínimo local de Φ_- pero no de Φ_+.

$\mathbf{X}$:$\Leftrightarrow$ u_0 no es un mínimo local de Φ_- ni de Φ_+ y para toda $E-vecindad$ W de u_0 existe una aplicación continua $\gamma : [0,1] \to H$, $|\gamma| \subset W \cap U$, con $\gamma(0) < u_0 < \gamma(1)$ y $sup\Phi(|\gamma|) < \Phi(u_0)$, donde $|\gamma| := \gamma([0,1])$.

$-\mathbf{I}$:$\Leftrightarrow$ u_0 no es del tipo $I, 0_+, 0_-$ o X.

Diremos que $t(u_0) \in \Xi_0 := \{I, 0_+, 0_-, X, -I\}$ el tipo de puntos críticos. También, definimos para un subconjunto $\Xi \subset \Xi_0$ los conjuntos:

$$C_r(\Phi, C, d)_\Xi := \{u \in C_r(\Phi, C, d) | t(u) \in \Xi\}.$$

y

$$C_r(\Phi, C)_\Xi := \{u \in C_r(\Phi, C) | t(u) \in \Xi\}.$$

Si $\Xi = \{a\}$ para algún $a \in \Xi_0$ definimos:

$$C_r(\Phi, C)_a := C_r(\Phi, C)_\Xi \quad \text{y} \quad C_r(\Phi, C, d)_a := C_r(\Phi, C, d)_\Xi.$$

El resultado principal de esta sección es:

Teorema 2.1. *Sea $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R})$ satisface $\mathfrak{P}$.*

(A) Supongamos que $\underline{u} < \overline{u}$ son puntos críticos de Φ en U, tal que $C := [\underline{u}, \overline{u}] \subset U$ y $C_r(\Phi, C)$ es finita, entonces:

i) Si $(t(\underline{u}), t(\overline{u})) \in \{-I, X, 0_-\} \times \{-I, X, 0_+\}$, existe $w \in C_r(\Phi, C)_I$.

ii)Si $(t(\underline{u}), t(\overline{u})) \in \{I, 0_+\} \times \{I, 0_-\}$, existe $w \in C_r(\Phi, C)_{-I}$.

(B) Supongamos que $\underline{u} < \overline{u}_i$, $i = 1, 2$, son puntos críticos de Φ en U y $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$ no son comparables. Además, supongamos que $C := [\underline{u}, \overline{u}_1] \cap [\underline{u}, \overline{u}_2] \subset U$. $C_r(\Phi, C)$ es finita y $t(\underline{u}) \in \{-I, 0_-, X\}$. Entonces, existe $w \in C_r(\Phi, C)_I$.
Resultados similares se tienen si $\overline{u} > \underline{u}_i$, $i = 1, 2$, y $t(\overline{u}) \in \{-I, 0_+, X\}$.

(C) Supongamos $\underline{u} \in U$ es un punto crítico de Φ con $t(\underline{u}) \in \{O_+, I\}$,

$$C := [\underline{u}, +\infty] := \{u \in H | u \geqq \underline{u}\} \subset U, \quad y \quad C_r(\Phi, C)_{\{I, O_+\}} = \{\underline{u}\}.$$

Más aún, $C_r(\Phi, C)$ es finita, $(PS)_C$ se tiene y existe un punto $e > \underline{u}$ con $\Phi(e) < \Phi(\underline{u})$. Entonces, existe $w \in C_r(\Phi, C)_{-I}$.
Resultados similares se tienen si $e < \underline{u}$ y $t(\underline{u}) \in \{0_-, I\}$, etc.

(D) Supongamos que $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, son dos puntos críticos no comparables, tal que $t(\underline{u}_i) \in \{0_+, I\}$. Más aún, $C_i := [\underline{u}_i, +\infty] \subset U$ para $i = 1, 2$ y $C_r(\Phi, C_i)$ es finita. Además, se tiene $(PS)_{C_i}$. Entonces, existen puntos críticos u_3, u_4 del tipo $-I$ tal que $\underline{u}_1 < u_3$ y $\underline{u}_2 < u_4$, y $\underline{u}_1$ no es comparable con u_4 y $\underline{u}_2$ no es comparable con u_3.

Para la prueba del teorema 2.1 se necesita el siguiente lema.

Lema 2.1. *Sea* $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R})$ *satisface* $\mathfrak{P}$. *Entonces:*

(i) Supongamos $\underline{u} < w < \overline{u}$ *son tres puntos críticos en* U, *tal que* $C := [\underline{u}, \overline{u}] \subset U$. *Además,* $(t(\underline{u}), t(\overline{u})) \in \{0_+, I\} \times \{0_-, I\}$, $C_r(\Phi, C)$ *es finita,* $C_r(\Phi, C)_{\{0_+, 0_-, I\}} \subset \{\underline{u}, \overline{u}\}$, *y* $t(w) \in X$. *Entonces existe una aplicación continua* $\gamma : [0,1] \to \dot{\Phi}^{\Phi(w)} \cap C$ *con* $\gamma(0) = \underline{u}$, $\gamma(1) = \overline{u}$.

(ii) Supongamos que $\underline{u}$ *es un punto crítico de* Φ *con* $t(\underline{u}) \in \{0_+, I\}$. *Más aún supongamos que* $C := [\underline{u}, +\infty] \subset U$, Φ *satisface* $(PS)_C$ *y* $w > \underline{u}$ *es un punto crítico del tipo* X, $C_r(\Phi, [w, +\infty]) = \{w\}$ *y* $C_r(\Phi, [\underline{u}, w]) = \{\underline{u}, w\}$. *Entonces, para algún número real* $a < \Phi(w)$ *existe una aplicación continua* $\gamma : [0,1] \to \dot{\Phi}^{\Phi(w)} \cap C$ *tal que* $\gamma(0) = \underline{u}$ *y* $\gamma(1) \in \Phi^a$.

La prueba del Lema 2.1 será dada en el apéndice de este trabajo.

Demostración. (A)(i) Aplicando el corolario 1.1, observación 2.1 tenemos que

$$inf\Phi(C) < min\{\Phi(\underline{u}), \Phi(\overline{u})\}.$$

aplicando la proposición 1.1 encontramos que $w \in C_r(\Phi, C)$ tal que

$$inf\Phi(C) = \Phi(w)$$

además, $\underline{u} < w < \overline{u}$. Por $\mathfrak{P}$ $\underline{u}, w, \overline{u} \in E$ y

$$\underline{u} \ll w \ll \overline{u}, \text{en E}.$$

Como una consecuencia del corolario 1.1 encontramos que $t(w) \in I$.

(A)(ii) Sea $u_0 = \underline{u} < u_1 < u_2 < ... < u_k = \overline{u}$ una sucesión de puntos críticos en C con $t(u_i) \in \{0_+, 0_-, I\}$ y la propiedad que $C_i := [u_i, u_{i+1}]$, $i = 0, ..., k-1$ no tiene puntos críticos $\widetilde{u}$ con $t(\widetilde{u}) \in \{0_+, 0_-, I\}$ y $u_i < \widetilde{u} < u_{i+1}$. Una sucesión que puede ser construida inductivamente ya que $C_r(\Phi, C)$ es finita. Nosotros mostraremos que $(t(u_{i_0}), t(u_{i_0+1})) \in \{0_+, I\} \times \{0_-, I\}$ para algún $i_0 \in \{0, 1, ..., k-1\}$. Probaremos esto inductivamente con respecto a k.

Si $k = 1$, es inmediato ya que por hipótesis sobre $\underline{u}$ y $\overline{u}$ la cresta tendrá sólo dos puntos entonces,$\widetilde{u}$ estará en ella pero no es punto crítico.

Supongamos cierto para k. Si $t(u_k) \in \{0_-, I\}$ por nuesta hipótesis de inducción podemos aplicar que $u_0 = \underline{u} < u_1 < u_2 < ... < u_k$ y estaría hecho. Por otro lado $t(u_k) \in 0_+$. En este caso, sea $i_0 = k$. Para simplificar la notación podemos suponer que $C = C_{i_0}$ y $\underline{u} = u_{i_0}$, $\overline{u} = u_{i_0+1}$. Donde $\underline{u}$ y $\overline{u}$ son estrictamente mínimos locales para $\Phi|C$ encontramos una bola cerrada $\overline{B}_\epsilon(\underline{u})$ y $\overline{B}_\epsilon(\overline{u})$ con $\underline{u}$ y $\overline{u}$ tal que:

$$\overline{B}_\epsilon(\underline{u}) \cap \overline{B}_\epsilon(\overline{u}) = \emptyset,$$

$$\Phi(\underline{u}) < \Phi(u), \quad \forall u \in (C \cap \overline{B}_\epsilon(\underline{u}))\backslash\{\underline{u}\},$$
$$\Phi(\overline{u}) < \Phi(u), \quad \forall u \in (C \cap \overline{B}_\epsilon(\overline{u}))\backslash\{\overline{u}\},$$

Lo anterior se dá por ser mínimos locales y su desigualdad es estricta ya que se le quita el centro.

$$\underline{a} := inf\Phi(\partial\overline{B}_\epsilon(\underline{u}) \cap C) > \Phi(\underline{u}),$$
$$\overline{a} := inf\Phi(\partial\overline{B}_\epsilon(\overline{u}) \cap C) > \Phi(\overline{u}).$$

Vemos que $\underline{a} > \Phi(\underline{u})$ y $\overline{a} > \Phi(\overline{u})$ esto se tiene aplicando el procedimiento en el artículo [4].

Se define un conjunto Σ por:

$$\Sigma := \{\gamma : [0,1] \to C \quad \text{continua, tal que:} \quad \gamma(0) = \underline{u}, \gamma(1) = \overline{u}\}$$

y un número real $d > máx\{\underline{a}, \overline{a}\}$ definido por:

$$d := inf_{\gamma\in\Sigma} sup\Phi(|\gamma|).$$

Observe que para todo $\sigma \in D := D(\Phi, C)$ y todo $\gamma \in \Sigma$ se tiene por discusiones previas que $\sigma(1,\cdot) \circ \gamma \in \Sigma$. Si $Cr(\Phi, C, d) = \emptyset$ encontraremos un $\sigma \in D$ y un $\epsilon > 0$ tal que:

$$\sigma(\{1\} \times (\Phi^{d+\epsilon} \cap C)) \subset \Phi^{d-\epsilon} \cap C.$$

Existe $\gamma \in \Sigma$ con $|\gamma| \subset \Phi^{d+\epsilon} \cap C$. De ahí que $\hat{\gamma} := \sigma(1,\cdot) \circ \gamma$ satisface $|\hat{\gamma}| \subset \Phi^{d-\epsilon} \cap C$, lo cual implica la contradicción:

$$d - \epsilon \geqq sup\Phi(|\hat{\gamma}|) \geqq d.$$

Por tanto $Cr(\Phi, C, d) \neq \emptyset$. Luego $Cr(\Phi, C, d)_{\{0+,0-,I\}} = \emptyset$ tenemos:

$$Cr(\Phi, C, d) = Cr(\Phi, C, d)_{\{-I,X\}} \neq \emptyset.$$

Sea $w \in Cr(\Phi, C, d)_{\{-I,X\}}$ y supongamos $t(w) = X$. Por el lema 2.1 existe $\gamma \in \Sigma$ con $sup\Phi(|\gamma|) < \Phi(w)$ lo cual implica una contradicción. De ahí que:

$$Cr(\Phi, C, d)_{-I} = Cr(\Phi, C, d) \neq \emptyset.$$

(B) Por $\mathfrak{P}$ y aplicando el corolario 1.1 deducimos que $inf\Phi(C) < \Phi(\underline{u})$. Por la proposición 1.1 existe $w \in Cr(\Phi, C)$ con $inf\Phi(C) = \Phi(w)$. Nosotros tenemos que $\underline{u} \overset{E}{\ll} w \overset{E}{\ll} \overline{u}_i$, $i = 1, 2$. Asimismo, por el corolario 1.1 se tiene que $t(w) \in I$.

(C) Podemos suponer que existen puntos no críticos $\overline{u} > \underline{u}$ con $t(\overline{u}) \in 0_-$ ya que en este caso podemos aplicar (A)(ii). Por consiguiente, se tiene por hipótesis que

$$Cr(\Phi, C)\ \{\underline{u}\} = Cr(\Phi, C)_{\{-I,X\}}$$

Se define un conjunto Σ por

$$\Sigma := \{\gamma : [0,1] \to C \quad \text{continua, tal que} \quad \gamma(0) = \underline{u}, \Phi(\gamma(1)) < \Phi(\underline{u})\}.$$

Nótese que $\Sigma \neq \emptyset$ por la hipótesis. Posteriormente define un número real $d < \Phi(\underline{u})$ por $d := inf_{\gamma\in\Sigma}$. (Usando el argumento de [4] tenemos que $d > \Phi(\underline{u})$ de ahí que $\underline{u}$ es un mínimo aislado de $\Phi|C$). Como en (A)(ii) nosotros concluimos que $Cr(\Phi, C, d) \neq \emptyset$. De ahí que $\underline{u} \notin Cr(\Phi, C, d)$ nosotros inferimos que:

$$Cr(\Phi, C, d)_{\{-I,X\}} = Cr(\Phi, C, d) \neq \emptyset.$$

Mostraremos que $Cr(\Phi, C, d)_{-I} = Cr(\Phi, C, d)_{\{-I,X\}}$. Argumentado indirectamente nosotros podemos suponer que existe $w \in Cr(\Phi, C, d)$ con $t(w) \in X$. Consideremos $A_1 := Cr(\Phi, [\underline{u}, w])$ y $A_2 := Cr(\Phi, [w, +\infty])$. Si $A_1 \neq \{\underline{u}, w\}$ encontramos un punto crítico v, $\underline{u} < v < w$. Por nuestra hipótesis $t(v) \in \{O_-, X, -I\}$. De ahí que $t(w) \in X$ aplicando (A)(i) encontramos un punto crítico u del tipo I con $v < u < w$ el cual fue excluido. De aquí $A_1 = \{\underline{u}, w\}$. De forma similar se puede mostrar que $A_2 = \{w\}$. Ahora aplicaremos el lema 2.1 (ii). Encontramos $\gamma \in \Sigma$ tal que

$$sup\Phi(|\gamma|) < \Phi(w) = d$$

lo cual implica una contradicción.

(D) Supongamos primero que existe un punto crítico $\widetilde{u} \in Cr(\Phi, C, d)$, donde, $C = C_1 \cap C_2$. Ya que $Cr(\Phi, C)$ es finita, encontramos un punto crítico $u^* \in C$, $u^* \leqq \widetilde{u}$ tal que $u \in Cr(\Phi, C)$ y $u \leqq u^*$ implica $u = u^*$. Sea $C^* = [\underline{u}_1, u^*] \cap [\underline{u}_2, u^*]$, $C^* \neq \emptyset$ y por la proposición 1.1 encontramos $\overline{u} \in Cr(\Phi, C^*)$ tal que

$$\Phi(\overline{u}) = inf\Phi(C^*).$$

De ahí que $\overline{u} = u^*$. Aplicando el corolario 1.1 inferimos que $t(u^*) \in \{0_-, I\}$. Por (A)(ii) tenemos para $[\underline{u}_1, u^*]$ y $[\underline{u}_2, u^*]$ puntos críticos $u_{i+2} \in Cr(\Phi, [\underline{u}_i, u^*])_{-I}$ $i = 1, 2$. Observamos que u_3 y u_4 tiene la propiedad deseada. De aquí podemos suponer en lo siguiente que $Cr(\Phi, C) = \emptyset$. Nosotros encontramos $u_1^* \geqq \underline{u}_1$ y $u_2^* \geqq \underline{u}_2$ tal que $t(u_2^*) \in \{I, 0_+\}$ y $t(v) \notin \{0_+, I\}$ para todo $v \in Cr(\Phi, C_1) \cup Cr(\Phi, C_2)$, $v \geqq u_i^*$ para $i = 1$ o $i = 2$. Sea $C_i^* := [u_i^*, +\infty]$. Nosotros podemos tener $inf\Phi(C_1^* \cap C_2^*) = -\infty$ porque de otra forma un punto crítico $v > \underline{u}_i$ para $i = 1$ y $i = 2$ por la proposición 1.1. Aplicando (C) a C_1^* y C_2^* da los puntos críticos desados u_3 y u_4. □

Como consecuencia del teorema 2.1 probaremos algunos resultados de multiplicidad.

Teorema 2.2. *Sea* $\Phi \in C^1(U,\mathbb{R})$ *verifica* (Ω). *Suponga* $\underline{u} < \overline{u}$ *son puntos críticos de* Φ *en* U *tal que* $(t(\underline{u}), t(\overline{u}) \in \{I, 0_+\} \times \{I, 0_-\}$ *y* $C := [\underline{u}, \overline{u}] \subset U$. *Supongamos además,* $Cr(\Phi, C)$ *es finita. Introduciremos un conjunto* Γ *definido por* $\Gamma := \{(u,v) \in (Cr(\Phi,C)_I \cup \{\underline{u},\overline{u}\})^2 | u < v$ *tal que para todo* $w \in Cr(\Phi, C)$ *con la siguiente condición: si* $u < w < v$ *entonces,* $t(w) \neq I\}$. *Entonces, existe una aplicación inyectiva* $\Theta : \Gamma \to Cr(\Phi, C)_{-I}$ *tal que* $u < \Theta(u,v) < v$ *para todo* $(u,v) \in \Gamma$. *Además,* $q := \sharp Cr(\Phi,C)_{-I}$ *y* $p := \sharp(Cr(\Phi, C)_I \cup \{\underline{u},\overline{u}\})$ *tenemos* $q \geqq \sharp\Gamma \geqq p-1$ *y por consiguiente,* $\sharp Cr(\Phi, C) \geqq 2p-1$. *Si* $q = p-1$ *tenemos* $u_1 < v_1 < u_2 < v_2 ... v_{p-1} < u_p$, *donde,* $Cr(\Phi,C)_I \cup \{\underline{u},\overline{u}\} = \{u_1 < u_2 < ... < u_p$ *y* $Cr(\Phi,C)_{-I} = \{v_1 < v_2 < ... < u_p\}$

Demostración. Sea $(u,v) \in \Gamma$. Por el teorema 2.1 (A)(ii) existe un punto crítico w con $t(w) \in -I$ y $u < w < v$. Definido

$$\Theta(u,v) := w.$$

Escogemos para todo $(u,v) \in \Gamma$ de tal manera que sea un punto del tipo $-I$. Esto define una aplicación $\Theta : \Gamma \to Cr(\Phi, C)_{-I}$. Debemos mostrar que Θ es inyectiva. Supongamos $\Theta(u,v) = \Theta(u',v') = w$ para cada (u,v) y $(u',v') \in \Gamma$. Supongamos, por ejemplo $v \neq v'$. Si para cualquier caso $v < v'$ o $v' < v$ nosotros inmediatamente obtenemos la contradicción

$$u' < w < v < v' \qquad \text{o} \qquad u < w < v' < v$$

ya que (u,v) y (u',v') estan en Γ. Por consiguiente, v y v' no son comparables. Por el teorema 2.1(B) encontramos puntos crítico $\widehat{u}$ con $t(\widehat{w}) \in I$ tal que:

$$w < \widehat{w} < v \qquad \text{y} \qquad w < \widehat{w} < v'$$

Esto nuevamente implica una contradicción

$$u < \widehat{w} < v \qquad \text{y} \qquad u' < \widehat{w} < v'$$

Similarmente se muestra que $u = u'$. Esto prueba la inyectividad de Θ. Trivialmente $q := \sharp Cr(\Phi, C)_{-I} \geqq \sharp\Gamma$. Estimemos $\sharp\Gamma$. Para $u \in Cr(\Phi,C)_I \cup \{\underline{u},\overline{u}\}$ consideremos el conjunto:

$$S(u) := \{(w,w') \in \Gamma | w = u \quad \text{o} \quad w' = u\}.$$

Por supuesto $\sharp S(u) \geqq 1$ para $u \in \{\underline{u},\overline{u}\}$ y $\sharp S(u) \geqq 2$ para $u \in Cr(\Phi, C)_I \backslash \{\underline{u},\overline{u}\}$. Más aún, si $Cr(\Phi,C)_I \cup \{\underline{u},\overline{u}\}$ contiene 2 puntos críticos no comparables, existe u_1 y u_2 se ve facilmente que $\sharp S(\underline{u}) = 1$ o $\sharp S(\overline{u}) = 1$ implica que por lo menos existe un u tal que $\sharp S(u) \geqq 3$. Adicionalmente, si $\sharp S(\overline{u}) = \sharp S(\underline{u}) = 1$ entonces, $\sharp S(u) \geqq 3$ por lo menos existen dos diferentes de u. Por consiguiente deducimos en forma general:

$$\begin{aligned} \sharp\Gamma &= \frac{1}{2} \sum_{u \in Cr(\Phi,C)_I \cup \{\underline{u},\overline{u}\}} \sharp S(u) \\ &\geqq \frac{1}{2}(2(p-2)+2) \end{aligned}$$

$$= p - 1 \tag{2.1}$$

y finalmente,

$$\sharp Cr(\Phi, C) \geqq p + q \geqq p + p - 1 = 2p - 1.$$

Si $Cr(\Phi, C)_I \cup \{\underline{u}, \overline{u}\}$ contiene por lo menos dos puntos críticos no comparables, obtenemos por el proceso anterior en lugar de (2.1) la estimación sería $\sharp\Gamma \geqq p$. Por tanto, asumiendo que $q = p - 1$ esto implica una contradicción. De ahí, $Cr(\Phi, C)_I \cup \{\underline{u}, \overline{u}\}$ es totalmente ordenado por el orden inducido a partir de (H, P) y nuestra afirmación sigue aplicando las propiedades de Θ. □

Proposición 2.1. *Sean las hipótesis del teorema 2.2 y* Γ *como en el teorema 2.2, y supongamos que* $\Theta : \Gamma \to Cr(\Phi, C)_{-I}$ *es una aplicación tal que* $u < \Theta(u, v) < v$ *para todo* $(u, v) \in \Gamma$. *Entonces,* Θ *es inyectiva y las siguientes afirmaciones son equivalentes para* (u, v), $(u', v') \in \Gamma$
(i) $\Theta(u, v) < \Theta(u', v')$,
(ii) $v \leqq u'$.

Demostración. La prueba de la inyectividad es como en el teorema 2.2.
(i)⇒ (ii) Si $\Theta(u, v) < \Theta(u', v')$ por el teorema 2.1(A)(i). $\widetilde{u} \in Cr(\Phi, C)$ con

$$\Theta(u, v) < \widetilde{w} < \Theta(u', v'),$$

$$t(\widetilde{w}) \in I$$

$u' < \widetilde{u}$ es imposible. Usando el teorema 2.1(B) inferimos que tenemos $u' \geqq \widetilde{w}$ y de forma similar $v \leqq \widetilde{w}$. De ahí que $v \leqq \widetilde{w} \leqq u'$
La afirmación (ii)⇒ (i) es trivial. □

2.2. Clasificación de Puntos Críticos y Grado y Resultados de Existencia y Multiplicidad para el caso C^2

Para esta segunda sección suponemos la siguiente hipótesis.

$\mathfrak{PP}$ (H, P) es un espacio real ordenado de Hilbert, $U \subset H$ abierto y no vacío y $\Phi \in C^2(U, \mathbb{R})$ con un gradiente de la forma $I - K$, donde K es compacto, preserva el orden y es $E - regular$ para cada espacio de Banach real $E \hookrightarrow H$ tal que $int_E(P \cap E) \neq \emptyset$. El operador $K_0 : U \cap E \to E$ inducido por K preserva fuertemente el orden y $K_0 \in C^1(U \cap E, E)$. Además, Para todo $v \in U \cap E$ su derivada $K_0'(v) := DK_0(v) \in \mathcal{L}(H)$ es $E - regular$. El potencial b de K aplica intervalos ordenados $[u, v] \subset U$ en conjuntos acotados.

De aquí en adelante tendremos que $K_0'(v)h = K'(v)h$ para todo $v \in E \cap U$ y toda $h \in E$.

El resultado principal de este capítulo es:

Teorema 2.3. *Sea $\Phi \in C^2(U,\mathbb{R})$ satisface $\mathfrak{PP}$ y supongamos que $u_0 \in U$ es un punto crítico aislado de Φ. Tenemos que $d := deg_{loc}(\Phi', u_0, 0)$.*

(i) $t(u_0) \in I \Rightarrow d = 1$.

(ii) $t(u_0) \in \{0_+, 0_-\} \Rightarrow d = 0$.

(iii) $t(u_0) \in -I \Rightarrow d = -1$.

Antes de dar la prueba del teorema 2.3 se mostraran algunos resultados de multiplicidad que aplican teoremas desde 2.1 hasta el 2.3.

Teorema 2.4. *Sea $\Phi \in C^2(H,\mathbb{R})$ satisface $\mathfrak{PP}$. Supongamos $u_1 < u_2$ puntos críticos aislados de Φ tal que $t(u_1) \in I$ y $t(u_2) \in X$ y $d := deg_{loc}(\Phi', B_R(u_2), 0) \neq 0$. Aún más, existe una constante $R_0 > 0$ tal que, para todo $R \geqq R_0$: $deg(\Phi', B_R, 0) = 0$ y $(PS)_{[}u_1, +\infty]$ se tiene para Φ. Entonces, $\sharp C_r(\Phi, H) \geqq 4$.*

Demostración. Supongamos primero que existen puntos críticos $u_3 > u_4$ tal que $t(u_3) \in 0_+$. Podemos suponer que $C_r(\Phi, H) = \{u_1, u_2, u_3\}$, porque de lo contrario estaría hecho.

(i) Si $u_3 > u_2$ aplicando el teorema 2.1 (A)(i) encontramos un punto crítico u_4 del tipo I tal que $u_2 < u_4 < u_3$. De aquí tenemos que $u_3 < u_2$ o u_2 y u_3 no son comparables.

(ii) Si $u_3 < u_2$ podemos aplicara el teorema 2.1 (C) y encontrar un punto crítico $u_4 > u_3$ del tipo $-I$.

(iii) Si u_2 y u_3 no son comparables, definimos $\hat{C} := [u_2, +\infty] \cap [u_3, +\infty]$ y un número $\hat{d} := inf \Phi(\hat{C})$. Si $\hat{d} > -\infty$ aplicando la proposición 1.1 y la observación 2.1 encontramos un punto crítico $u_4 \in \hat{C}$ del tipo I. De lo anterior tenemos que $d = -\infty$. Por tanto existe $e > u_2$ tal que $\Phi(e) < \Phi(u_2)$. Aplicando el teorema 2.1 (C) encontramos un punto crítico $u_4 > u_2$ del tipo $-I$.

Ahora, supongamos que $t(u) \notin 0_+$ para todos los puntos críticos $u \geqq u_1$. Aplicando el teorema 2.1 (C) encontramos un punto crítico $u_3 > u_1$ del tipo $-I$. De nuevo supongamos que $C_r(\Phi, H) = \{u_1, u_2, u_3\}$. Para $R > R_0 + \|u_1\| + \|u_2\| + \|u_3\|$ deducimos por la propiedad de excisión y adición de grado que:

$$0 = deg(\Phi', B_R, 0) = 1 - 1 + d = d \neq 0.$$

Esta contradicción prueba el teorema. □

Teorema 2.5. *Sea $\Phi \in C^2(H,\mathbb{R})$ satisface $\mathfrak{PP}$ y supongamos que 0 es un punto crítico aislado de Φ con $t(0) \in X$ y $d := deg_{loc}(\Phi', B_R(0), 0) \neq 0$. Mas aún Φ es coerciva, definición 1.7 ($\Rightarrow (PS)_H$). Entonces, $\sharp C_r(\Phi, H) \geqq 5$.*

Demostración. Usando la proposición 1.1 y la observación 2.1 encontramos $u_i \in C_r(\Phi, H)$, $i = 1, 2$, tal que

$$u_1 < 0 < u_2, \qquad t(u_i) \in I.$$

Aplicando el teorema 2.1(A)(ii) da un punto crítico u_3 con

$$u_1 < u_3 < u_2, \qquad t(u_3) \in -I.$$

En particular $u_3 \neq 0$ ya que $t(0) \in X$. Supongamos $C_r(\Phi, H) = \{0, u_1, u_2, u_3\}$. Por el teorema de Amann 1.5[4], tenemos que para todo $R > \sum_{i=1}^{3} \|u_i\|$ tal que $deg(\Phi', B_R, 0) = 1$. Por el teorema 2.3 haciendo uso de la propiedad de excisión y adición de grado (teorema 1.3 propiedades 2. y 5.) tenemos que:

$$1 = deg(\Phi', B_R, 0)$$

$$1 = d + 1 + 1 - 1$$

$$1 = d + 1$$

Lo que contradice la hipótesis $d \neq 0$. □

Daremos un último teorema con el fin de mostrar lo bueno de la teoría.

Teorema 2.6. *Sea $\Phi \in C^2(H, \mathbb{R})$ satisface $\mathfrak{P}\mathfrak{P}$. Supongamos que Φ es coerciva y u_1 y u_2 son dos puntos críticos no comparables del tipo I. Entonces, $\sharp C_r(\Phi, H) \geqq 9$.*

Demostración. Por la proposición 1.1 y observación 2.1 aplicado a $[-\infty, u_1] \cap [-\infty, u_2]$ y $[u_1, +\infty] \cap [u_2, +\infty]$ nosotros encontramos puntos críticos u_3 y u_4 tal que

$$u_3 < u_i < u_u, \qquad i = 1, 2, \quad \text{y} \quad t(u_3) = t(u_4) \in I.$$

Podemos suponer que $C_r(\Phi, H)$ es finita. Sea $\underline{u} := u_3$ y $\overline{u} := u_4$ y $\Theta : \Gamma \to C_r(\Phi, [\underline{u}, \overline{u}])_{-I}$ la aplicación definida en el teorema 2.2. Nosotros tenemos $\sharp\Gamma \geqq 4$. Esto implica que

$$\sharp C_r(\Phi, H)_{-I} \geqq 4.$$

Si $\sharp C_r(\Phi, H)_{-I} > 4$ podemos hacer

$$\sharp C_r(\Phi, H) \geqq \sharp C_r(\Phi, H)_I + \sharp C_r(\Phi, H)_{-I} \geqq 4 + 5.$$

Por tanto podemos concluir que

$$\sharp C_r(\Phi, H)_I = \sharp C_r(\Phi, H)_{-I} = 4 \quad \text{y} \quad \sharp C_r(\Phi, H) = \sharp C_r(\Phi, H)_{\{I, -I\}}$$

Aplicando el teorema 1.5 de Amman [4] , para $R > 0$ suficientemente grande y usando el teorema 2.3 podemos inferir que:

$$1 = deg(\Phi', B_R, 0)$$

$$1 = \sharp C_r(\Phi, H)_I - \sharp C_r(\Phi, H)_{-I}$$

$$1 = 4 - 4$$

$$1 = 0.$$

Lo cual es una contradicción. □

La prueba del teorema 2.3 está basada en los siguientes dos lemas.

Lema 2.2. *Sea H, P un espacio real ordenado de Hilbert y $T : H \to H$ un operador compacto autoadjunto que preserva el orden y es $E-regular$ para cada espacio real de Banach $E \hookrightarrow H$ con $int_E(P \cap E) \neq \emptyset$. Supongamos el operador inducido $T_0 \in \mathcal{L}(E)$ que preserva fuertemente el orden, donde E está equipado con el cono $P_E = P \cap E$.*

Entonces $\|T\|$ es un valor propio de T y le corresponde un espacio propio unidimensional y generado por algún $u_1 \in int_E P_E$.

Demostración. Como T es autoadjunto el radio espectral es $r := r(T) = \|T\|$. Usando que $T_0 \neq 0$ inferimos que $T \neq 0$ y por tanto $r > 0$. Definimos el subespacio lineal cerrado $\widehat{H}$ de H por $\widehat{H} := c|_H(E)$. T induce un operador compacto autoadjunto $\widehat{T} \in \mathcal{L}(H)$ con $T\widehat{H} \subset \widehat{H}$.

Por otra parte usando que $P_E - P_E = E$ tenemos que $P_{\widehat{H}} := \widehat{H} \cap P$ es total en $\widehat{H}$. De ahí tenemos que $\sigma(\widehat{T}) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$ por la $E-regularidad$ y en consecuencia $r(\widehat{T}) = r$. Por un resultado dado en [7, Corolario pag. 256], existe $u_1 \in \widehat{H}$, $u_1 > 0$, tal que $\widehat{T}u_1 = ru_1$. Por la $E-regularidad$ $u_1 \in E$ y como el operador inducido T_0 preserva fuertemente el orden podemos inferir que $u_1 \overset{E}{\gg} 0$. Consideremos $N := Ker(T - rI)$ y supongamos que existe $u \in N \setminus \mathbb{R}u_1$ con $Tu = ru$. De nuevo $u \in E$ y encontramos $\delta > 0$ tal que $w := u_1 + \delta u \in \partial_E P_E$. Observando que $w \neq 0$ concluimos

$$0 \overset{E}{\ll} r^{-1}T_0 w = r^{-1}Tw = w \in \partial_E P_E,$$

lo cual es una contradicción. □

Por supuesto, el lema 2.2 es aplicado a $K'(u)$ para todo $u \in E \cap U$) si $\mathfrak{PP}$ se tiene. Por consiguiente, si denotamos por $(\lambda_i)_{i=1\ldots}$ la suceción creciente de valores propios del problema de valor propio lineal $\Phi''(u)v = \lambda v$, $u \in U \cap E$, con multiplicidades correspondientes m_i, tenemos que $m_1 = 1$. Más aún, el espacio propio está generado por algún $u_1 \in int_E P_E$.

Lema 2.3. *Sea H un espacio real de Hilbert que admite la descomposición ortogonal $H = H_1 \oplus H_2$, con proyecciones ortogonales correspondientes $P_i : H \to H_i$, y sea $U_1 \subset H_1$, $U_2 \subset H_2$ son conjutos abiertos relativos, no vacíos,convexos acotados. Supongamos $h : \overline{U}_1 \oplus \overline{U}_2 \to H$ es una aplicación de la forma $I - T$, donde T es compacto, tal que $0 \notin h(\partial(U_1 \oplus U_2))$. Además supongamos que para todo $y \in \overline{U}_2$ existe un único $x(y) \in U_1$ tal que $P_1 h(x(y) + y) = 0$ y por otro lado $P_1 h(x + y) \neq 0$, $\forall x \in \partial U_1$, $\forall y \in \partial \overline{U}_2$.*

Entonces, la aplicación $\beta : \overline{U}_2 \to u_1 : y \to x(y)$ es compacta y dado arbitrariamente $y_0 \in U_2$ tenemos que:

$$deg(h, U_1 \oplus U_2, 0) = deg(h_1, U_1, 0) deg(h_2, U_2, 0),$$

donde,

$$h_1 : \overline{U}_1 \to H_1 : h_1(x) = x - P_1 T(x + y_0) \quad y \quad h_2 : \overline{U}_2 \to H_2 : h_2(y) = y - P_2 T(\beta y + y).$$

Demostración. Ya que T es compacto y U_1 y U_2 son acotados, inferimos que el conjunto $\beta\overline{U}_2$ es precompacto. Usando esto y la unicidad de $x(y)$ para un determinado y, se tiene una aplicación continua β. Con el fin de calcular el grado de $(\Phi', U_1 \oplus U_2, 0)$ definimos una homotopía $h^* : [0,2] \times (U_1 \oplus U_2) \to H$ por:

$$h^*(t, x \oplus y) := \begin{cases} P_1 h(x+y) + P_2 h(t\beta y + (1-t)x + y) & t \in [0,1] \\ P_1 h(x + (2-t)y + (t-1)y_0) + P_2 h(\beta y + y) & t \in [1,2] \end{cases}$$

Para un arbitrario punto fijo $y_0 \in U_2$. Por la convexidad de U_1 y U_2 está bien definido y la homotopía es de la forma Identidad + Compacto ($I = P_1 \oplus P_2$).
Además, $0 \notin h^*([0,1] \times \partial(U_1 \oplus U_2))$. Por consiguiente por la propiedad de invariancia homotópica del grado (Teorema 1.3 propiedad 3.)observamos que $h^*(2, x \oplus y) = h_1(x) \oplus h_2(y)$:

$$\begin{aligned} & deg(h, U_1 \oplus U_2, 0) \\ &= deg(h^*(2, \cdot), U_1 \oplus U_2, 0) \\ &= deg(h_1, U_1, 0) deg(h_2, U_2, 0). \end{aligned}$$

□

Demostración. del Teorema 2.3

(iii) Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u_0 = 0$ y $\Phi(0) = 0$. Por hipótesis $t(0) \in -I$. Notamos por m^- el negativo y por m^0 el índice de Morse, es decir, m^-=sum de multiplicidades de los valores propios $\lambda < 0$ de $\Phi''(0)$ y $m^0 = \dim\ker(\Phi''(0))$. Sea $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ y $\mathbb{N} := \mathbb{N}^* \cup \{0\}$.

Paso 1. $(m^-, m^0) \in (\{1\} \times \mathbb{N}) \cup \{0, 1\}$.

Para ver esto es suficiente demostrar que $m^- \leqq 1$. De hecho, si $m^- \leqq 1$ y $(m^-, m^0) \notin \{1\} \times \mathbb{N}$ tenemos $m^- = 0$. Por el lema 2.2 $m^0 \leqq 1$. Si $m^0 = 0$ entonces 0 es un mínimo local de Φ y en consecuencia $t(0) \in I$. Por tanto $m^0 = 1$ y tenemos $(m^-, m^0) = (0, 1)$. Queda por demostrar que $m^- \leqq 1$. Aplicando el método del absurdo, podemos suponer que $m^- > 1$. Denotamos por $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ la sucesión creciente de los valores propios pertenecientes a $\Phi''(0)$, con correspondientes multiplicidades $m_i = m(\lambda_i)$. Sea $T = k'(0)$. Por la hipótesis $\mathfrak{P}\mathfrak{P}$ encontramos un vector propio positivo $u \overset{E}{\gg} 0$, $\|u_1\| = 1$, con multiplicidad 1 asociado a $\|T\|$. Ya que $\sigma(\Phi''(0)) = 1 - \sigma(T)$ tenemos $\lambda_1 = 1 - \|T\|$ y $m_1 = 1$. Además $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Denotamos por H_1 la correspondiente $(1 + m_2)$-dimensión del subespacio de H. Notemos que $\mathbb{R}u_1 \subset H_1 \subset E$. Sea $W \subset U$ una $E - vecindad$ arbitraria de 0. Encontramos una $\delta > 0$ tal que $B_\delta := \{u \in H_1 | \|u\| < \delta\}$ verifica $\overline{B}_\delta \subset W$ y $sup\Phi(\partial_{H_1} B_\delta) < \Phi(0) = 0$. Como $dimH_1 \geqq 2$ el conjunto $Z := \partial_{H_1} B_\delta$ es arcoconexo. Por consiguiente existe una aplicación continua $\gamma : [0,1] \to Z \subset W$ tal que $\gamma(0) = -\delta u_1$ y $\gamma(1) = 1$. Por tanto, $\gamma(0) < 0 < \gamma(1)$ y $|\gamma| \subset \Phi^0$ lo cual contradice nuestra hipótesis ya que W es una vecindad arbitraria dada y $t(0) = -I$. Por lo tanto, $(m^-, m^0) \in (\{1\} \times \mathbb{N}) \cup \{0, 1\}$.

Paso 2. $(m^-, m^0) \in (\{1\} \times \mathbb{N}) \Rightarrow d = -1$.

Definimos $H_1 = \mathbb{R}u_1$ y $H_2 = H_1^{\perp}$, donde u_1 denota el vector propio positivo, $\|u_1\| = 1$, correspondiente al principal valor propio λ_1 de $\Phi''(0)$. Sea W una $E-vecindad$ de 0, $\overline{W} \subset U$, tal que existe una aplicación no continua $\gamma : [0,1] \to W$ con $\gamma(0) < 0 < \gamma(1)$ y $|\gamma| \subset \dot{\Phi}^0$. Por el teorema de la función implicita, encontramos bolas abiertas relativas $U_i \subset H_i$, $i = 1, 2$, alrededor de 0 y una aplicación $\beta : \overline{U}_2 \to U_1$ con $\beta \in C^1(U_2, U_1)$

$$P_1\Phi'(\beta y + y) = 0 \qquad \forall y \in \overline{U}_2,$$
$$P_1\Phi'(x + y) \neq 0 \qquad \forall x \in \partial U_1, \quad \forall y \in \overline{U}_2,$$
$$\sigma(P_1\Phi''(z)|H_1) \subset (-\infty, -\varrho] \qquad \forall z \in \overline{U}_1 \oplus \overline{U}_2$$

Para algún $\varrho > 0$ fijo,

$$\Phi'(z) = 0 \qquad para \qquad z \in \overline{U}_1 \oplus \overline{U}_2 \Rightarrow z = 0.$$

Aplicando el lema 2.3 para

$$h_1 : \overline{U}_1 \to H_1 : h_1(x) = x - P_1Kx$$

$$h_2 : \overline{U}_2 \to H_2 : h_2(y) = y - P_2K(\beta y + y)$$

Encontramos,

$$deg(\Phi', U_1 \oplus U_2, 0) = deg(h_1, U_1, 0)deg(h_2, U_2, 0) = -deg(h_2, U_2, 0)$$

Como $h_1|U_1$ es el gradiente del funcional $\Phi|U_1 \in C^2(U_1, \mathbb{R})$ y $x = 0$ es un máximo local, $dimH_1 = 1$. Define $\Phi^* \in C^2(U_2, \mathbb{R})$ por

$$\Phi^*(y) = \Phi(\beta y + y) = sup_{x \in U_1}\Phi(x + y).$$

Tenemos que $(\Phi^*)'(y) = P_2\Phi'(\beta y + y)$. Con el fin de mostrar que $deg(h_2, V_2, 0) = 1$ es suficiente ver que 0 es un mínimo local, [4]. Suponemos lo contrario. Notamos por $\overline{B}_n$ la bola cerrada en H_2 alrededor de 0 con radio $\frac{\epsilon}{n}$ para algún $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $\overline{B}_n \subset U_2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Por nuestra hipótesis se tiene

$$inf\Phi(\overline{B}_n) < \Phi^*(0) = \Phi(0) = 0$$

Como $(\Phi^*)'$ es (DISC) y $\overline{B}_n$ es cerrado, convexo y acotado, encontramos que $y_n \in \overline{B}_n$ tal que $\Phi^*(y_n) = inf\Phi^*(\overline{B}_n)$. Por tanto existe $\lambda_n \geqq 0$ tal que

$$(\Phi^*)'(y_n) + \lambda_n y_n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Por tanto tenemos que $0 = P_2\Phi'(\beta y_n + y_n) + \lambda_n y_n = (1 + \lambda_n)y_n - P_2K(\beta y_n + y_n)$. Notemos que $\beta : \overline{U}_2 \to E$ es continua ya que $im(\beta) \subset \mathbb{R}u_1 \subset E$ y la topología inducida por E y H en $\mathbb{R}u_1$ coinciden. Más aún ${}_2E_i \subset E_i$ para todo espacio real de Banach E_i tal que $E \hookrightarrow E_i \hookrightarrow H$ y la aplicación inducida por $P_2 : E_i \to E_i$ es continua. Por la $E-regularidad$ se tiene que $y_n \to 0$ en E ya que $y_n \to 0$ en H. Encontramos $\delta_0 > 0$ tal que el conjunto $[-\delta_0, \delta_0]$ está contenido en $U_1 \cap W$. Para algún $N \in \mathbb{N}^*$ suficientemente grande inferimos usando que $y_n \to 0$ en E y $u_1 \in int_E P_E$

$$-\delta_0 u_1 < y_N < \delta_0 u_1$$

$$y_N + tu_1 \in W \cap (U_1 \oplus U_2) \qquad \forall t \in [-\delta_0, \delta_0].$$

Definimos $\gamma : [0,1] \to W \cap U$ por $\gamma(t) := y_N + (2t-1)\delta_0 u_1$. Tenemos la siguiente estimación:

$$sup\Phi(|\gamma|) = \Phi^*(y_N) < \Phi^*(0) = \Phi(0) = 0.$$

Por consiguiente $t(0) \notin -I$ lo cual contradice nuestra hipótesis. Esto demuestra que $d = -1$ para el caso $(m^-, m^0) \in \{1\} \times \mathbb{N}$.

Paso 3. $(m^-, m^0) = (0,1) \Rightarrow d = -1$.

Definimos $H_2 = \mathbb{R}u_1$ y $H_1 = H_2^{\perp}$. Por el teorema de la función implícita bolas abiertas alrededor de 0, $U_i \subset H_i$, tal que $\overline{U}_1 \oplus \overline{U}_2 \subset U$ y $C_r(\Phi, \overline{U}_1 \oplus \overline{U}_2) = \{0\}$, y una aplicación continua $\beta : \overline{U}_2 \to U_1$, $\beta|U_2 \in C^1(U_2, \mathbb{R})$, tal que

$$P_1\Phi'(\beta y + y) = 0 \qquad \forall y \in \overline{U}_2$$

$$P_1\Phi'(x+y) \neq 0 \qquad \forall x \in \partial\overline{U}_1, \quad \forall y \in \overline{U}_2$$

$$\sigma(P_1\Phi''(z)|H_1) \subset [\varrho, +\infty) \qquad \forall z \in \overline{U}_1 \oplus \overline{U}_2$$

para algún $\varrho > 0$ fijo.

Por el lema 2.3 con

$$h_1 : \overline{U}_1 \to H_1 : h_1(x) = x - P_1Kx \quad \text{y} \quad h_2 : \overline{U}_2 \to H_2 : h_2(y) = y - P_2K(\beta y + y)$$

$$deg(\Phi', U_1 \oplus U_2, 0) = deg(h_2, U_2, 0),$$

Donde hemos utilizado que 0 es la única solución en $\overline{U}_1$ de $h_1(x) = 0$ y un mínimo local del funcional $\Phi|U_1 \in C^2(U_1, \mathbb{R})$. Observemos que h_2 es una aplicación entre conjuntos unidimensionales. Como en el anterior caso h_2 es el gradiente de una aplicación C^2 $\Phi^* \in C^2(U_2, \mathbb{R})$

$$\Phi^*(y) = \Phi(\beta y + y) = inf_{x \in U_1}\Phi(x+y)$$

Por la construcción de Φ^* existe exactamente una solución de $h_2(y) = 0$ en $\overline{U}_2$ la cual es $y = 0$. Si podemos mostrar que 0 es un mínimo local la demostración queda hecha. En tal caso $deg(h_2, U_2, 0) = -1$ ya que $dim H_2 = 1$. Por nuestra hipótesis $t(0) \in -I$. Encontramos $z_1, z_2 \in U_1 \oplus U_2$ tal que $\Phi(z_i) < 0$ y $z_1 < 0 < Z_2$. Por $y_i := P_2 z_i \in U_2$ de lo que concluimos que $\Phi^*(y_i) \leqq \Phi(y_i + P_1 z_i) = \Phi(z_i) < 0$.

Esto prueba que $d = -1$ para el caso $(m^-, m^0) = (0,1)$.

(i) y **(ii)**. Con el fin de mostrar que **(i)** y **(ii)** son equivalentes, se hace $H_2 = \mathbb{R}u_1$ y $H_1 = H_2^{\perp}$, donde u_1 está dado como en **(iii)**. Haciendo uso de nuestras hipótesis encontramos como en **(iii) Paso 3** bolas abiertas relativas alrededor de 0, $U_i \subset H_i$, tal que $C_r(\Phi, \overline{U}_1 \oplus \overline{U}_2) = \{0\}$, $\overline{U}_1 \oplus \overline{U}_2 \subset U$ y una aplicación continua $\beta : \overline{U}_2 \to U_1$ con $\beta | U_1$ de clase C^1 y

$$P_1\Phi'(\beta y + y) = 0 \qquad \forall y \in \overline{U}_2$$

$$P_1\Phi'(x + y) \neq 0 \qquad \forall x \in \partial\overline{U}_1, \quad \forall y \in \overline{U}_2$$

$$\sigma(P_1\Phi''(z)|H_1) \subset [\varrho, +\infty) \qquad \forall z \in \overline{U}_1 \oplus \overline{U}_2$$

para algún $\varrho > 0$ fijo.

Derivando $P_1\Phi'(\beta y + y) = 0$ con respecto a y y evaluando en $y = 0$ se obtiene

$$P_1\Phi''(0)(P_2 \oplus \beta'(0)) = 0.$$

Ya que $P_1\Phi''(0)|H_1$ es una biyección y $P_1\Phi''(0)P_2 = P_1P_2\Phi''(0) = 0$ se concluye que $\beta'(0) = 0$. Haciendo uso de la $E - regularidad$ de K la imagen de β es un subconjunto de E.

Más aún, por nuestra hipótesis sobre $K_0'(u)$ y $K'(u)$ la aplicación $\beta_0 : U_2 \to E$ inducidad por β está en $C^1(U_2, E)$. Ovservemos que $\beta_0'(0) = \beta'(0) = 0$. Tenemos

$$y + \beta y = y + \int_0^1 \beta_0'(ty)y dt := y + A(y)y.$$

Ya que $A(y) \to 0$ en $\mathcal{L}(\mathbb{R}u_1, E)$ para $y \to 0$ y $y \overset{E}{\gg} 0$ o $y \overset{E}{\ll} 0$ si $y \neq 0$ encontramos $\delta_0 > 0$ tal que $[-\delta_0, \delta_0]u_1 \subset U_2$ y

$$y + \beta y \geqq 0 \qquad \forall y \geqq 0, \quad \|y\| < \delta_0$$

y

$$y + \beta y \leqq 0 \qquad \forall y \leqq 0, \quad \|y\| < \delta_0$$

Esto describe el comportamiento de $\Phi^* \in C^2(U_2, \mathbb{R})$. Es decir,en el caso $t(0) = I$, 0 es un mínimo local de Φ^* y siguiendo el proceso como en **(iii) Paso 3** $d = 1$, y en el caso $t(0) \in \{0_+, 0_-\}$, 0 no es un mínimo local ni un máximo local de Φ^*. Por tanto, ya que $dimH_2 = 1$, $d = 0$. $\square$

CAPÍTULO 3

Aplicación.

En este capítulo estudiaremos ecuaciones elípticas de segundo orden de la forma de Problema a Valor Frontera (PVF). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqq 1$, un dominio acotado con frontera suave $\partial\Omega$. Denotamos por H el espacio real de Hilbert $H_0^1(\Omega)$. Dependiendo del (PVF) H está provisto con el producto interno

$$(u, v) := (u, v)_\lambda := \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \int_\Omega uv, \qquad \lambda > 0.$$

Sea $E := \{u \in C^1(\overline{\Omega})| \quad u|_{\partial\Omega} = 0\}$. Entonces, $E \hookrightarrow H$. Dotamos a H con el orden inducido por $P := \{u \in H| \quad u(x) \geqq 0 \quad \text{para casi todo} \quad x \in \Omega\}$. Se sabe que P es generante, es decir, $P - P = H$, y que $int_E(P \cap E) \neq \emptyset$.

Denotemos por $(\lambda_i)_{i \in N^*}$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_{i+1}$, la sucesión creciente de valores propios del problema lineal a valor propio.

$$-\triangle u = \lambda u \quad \text{en} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \tag{3.1}$$

con multiplicidades correspondientes $m_i := m(\lambda_i)$. Observemos que $m_1 = 1$ como una consecuencia del teorema clásico de Krein-Rutman, ver teorema 1.1

Comencemos con estudiar el (PVF) no lineal

$$-\triangle u = f(u) \quad \text{en} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \tag{3.2}$$

Imponemos la siguiente hipótesis sobre f:

$$f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) \in (\lambda_i, \lambda_{i+1}) \tag{3.3}$$

$$\text{para cada} \quad i \geqq 2, \quad \text{y} \quad \limsup_{|s| \to +\infty} \frac{f(s)}{s} < \lambda_1.$$

Bajo estas hipótesis estudiaremos el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Supongamos que f verifica 3,3. Entonces, 3,2 posee al menos cuatro soluciones no triviales.*

Demostración. Por nuestras hipótesis sobre f encontramos una constante $c > 0$ y $\mu \in (0, \lambda_i)$ tal que

$$f(s) \leqq \mu s + c \qquad \forall s \in \mathbb{R}^+$$

$$f(s) \geqq \mu s - c \qquad \forall s \in \mathbb{R}^-.$$

Supongamos $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 tal que:

$$\widetilde{f}(s) \leqq \mu s + 2c \qquad \forall s \in \mathbb{R}^+$$

$$\widetilde{f}(s) \geqq \mu s - 2c \qquad \forall s \in \mathbb{R}^-.$$

Supongamos $u \in H$ es una solución de clase C^2 de

$$-\triangle u = \widetilde{f}(u) \quad \text{en} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega.$$

Denotamos por u_+ y u_- las soluciones de

$$-\triangle u_\pm - \mu u_\pm = \pm 2c \quad \text{en} \quad \Omega, \quad u_\pm = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega.$$

Por el principio del máximo(Teorema 1.2) tenemos que

$$u_- \leqq u \leqq u_+.$$

Por los argumentos anteriores encontramos una modificación $\widetilde{f}$ de f de clase C^1 tal que $|\widetilde{f}'(s)| \leqq M \ \forall s \in \mathbb{R}$ tal que las soluciones del correspondiente (PVF) son exactamente las soluciones de (PVF) 3.2. Por tanto suponemos sin pérdida de generalidad que $|f'(s)| \leqq M \ \forall s \in \mathbb{R}$. Se Define $\Phi \in C^2(H, \mathbb{R})$ por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}(u,u)_\lambda - \int_\Omega F_\lambda(u),$$

donde $\lambda > M$ es una constante fija y

$$F_\lambda(s) = \int_0^s (f(\tau) + \lambda\tau) d\tau.$$

Φ cumple con la condición $\mathfrak{PP}$, para la $E - regularidad$ se usaron $L^p - estimaciones$, se obtiene una sucesión de la forma

$$E \hookrightarrow H_0^{1,p_1}(\Omega) \hookrightarrow H_0^{1,p_2} \hookrightarrow ... \hookrightarrow ... \hookrightarrow H_0^{1,p_k}(\Omega) = H$$

Para una sucesión adecuada $p_1 > p_2 > ... > p_k = 2$.

Veamos que los puntos críticos de Φ son exactamente las soluciones clásicas de clase C^2 del (PVF) 3.2,

$$
\begin{aligned}
\Phi'(u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(u+tv)-\Phi(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left\{\frac{1}{2}(u+tv,u+tv)_\lambda - \int_\Omega F_\lambda(u+tv) - \frac{1}{2}(u,u)_\lambda + \int_\Omega F_\lambda(u)\right\} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left\{\frac{1}{2}\Big[\int_\Omega \langle\nabla(u+tv),\nabla(u+tv)\rangle + \lambda\int_\Omega (u+tv)(u+tv)\Big]\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \int_\Omega F_\lambda(u+tv) - \frac{1}{2}\Big[\int_\Omega \langle\nabla u,\nabla u\rangle + \lambda\int_\Omega u\cdot u\Big] + \int_\Omega F_\lambda(u)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi'(u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left\{\frac{1}{2}\Big[\int_\Omega \langle\nabla u+t\nabla v,\nabla u+t\nabla v\rangle + \lambda\int_\Omega (u^2+2tuv+t^2v^2)\Big]\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \int_\Omega F_\lambda(u+tv) - \frac{1}{2}\Big[\int_\Omega ||\nabla u||^2 + \lambda\int_\Omega u^2\Big] + \int_\Omega F_\lambda(u)\right\} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left\{\frac{1}{2}\Big[\int_\Omega ||\nabla u||^2 + 2t\nabla u\nabla v + t^2||\nabla v||^2 + \lambda\int_\Omega (u^2+2tuv+t^2v^2)\Big]\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \int_\Omega F_\lambda(u+tv) - \frac{1}{2}\Big[\int_\Omega ||\nabla u||^2 + \lambda\int_\Omega u^2\Big] + \int_\Omega F_\lambda(u)\right\}
\end{aligned}
$$

Simplificando las operaciones obtenemos

$$
\Phi'(u)v = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2}\Big[\int_\Omega 2\nabla u\nabla v + t||\nabla v||^2 + \lambda\int_\Omega (2uv+tv^2)\Big] + \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big[\int_\Omega F_\lambda(u) - \int_\Omega F_\lambda(u+tv)\Big]
$$

Evaluando el límite en el primer término se tiene

$$
\begin{aligned}
\Phi'(u)v &= \int_\Omega \nabla u\nabla v + \lambda\int_\Omega uv + \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big[\int_\Omega F_\lambda(u) - \int_\Omega F_\lambda(u+tv)\Big] \\
&= \int_\Omega \nabla u\nabla v + \lambda\int_\Omega uv + \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big[\int_\Omega\int_0^u (f(\tau)+\lambda\tau)\,d\tau - \int_\Omega\int_0^{u+tv} (f(\tau)+\lambda\tau)\,d\tau\Big] \\
&= \int_\Omega \nabla u\nabla v + \lambda\int_\Omega uv + \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big[\int_\Omega\int_0^u (f(\tau)+\lambda\tau)\,d\tau \\
&\qquad\qquad - \int_\Omega\int_0^u (f(\tau)+\lambda\tau)\,d\tau - \int_\Omega\int_u^{u+tv} (f(\tau)+\lambda\tau)\,d\tau\Big] \\
&= \int_\Omega \nabla u\nabla v + \lambda\int_\Omega uv - \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big[\int_\Omega\int_u^{u+tv} (f(\tau)+\lambda\tau)\,d\tau\Big]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\Phi'(u)v &= \int_\Omega \nabla u \nabla v + \lambda \int_\Omega uv - \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega \int_u^{u+tv} f(\tau)\, d\tau - \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega \int_u^{u+tv} \lambda\tau\, d\tau \\
&= \int_\Omega \nabla u \nabla v + \lambda \int_\Omega uv - \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega \int_u^{u+tv} f(\tau)\, d\tau - \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega \Big[\frac{\lambda(u+tv)^2}{2} - \frac{\lambda u^2}{2} \Big] \\
&= \int_\Omega \nabla u \nabla v + \lambda \int_\Omega uv - \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega \int_u^{u+tv} f(\tau)\, d\tau - \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega \Big[\frac{\lambda(u+tv)^2}{2} - \frac{\lambda u^2}{2} \Big] \\
&= \int_\Omega \nabla u \nabla v + \lambda \int_\Omega uv - \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega \int_u^{u+tv} f(\tau)\, d\tau - \lim_{t\to 0} \int_\Omega \Big[\frac{\lambda(2uv+tv^2)}{2} \Big] \\
&= \int_\Omega \nabla u \nabla v + \lambda \int_\Omega uv - \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega \int_u^{u+tv} f(\tau)\, d\tau - \int_\Omega \lambda uv \\
&= \int_\Omega \nabla u \nabla v - \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega \int_u^{u+tv} f(\tau)\, d\tau
\end{aligned}$$

Separando los límites tenemos

$$\Phi'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega \Big[\int_0^{u+tv} f(z)\, dz - \int_0^{u} f(z)\, dz \Big]$$

Sea $g(u+tv) = \int_0^{u+tv} f(z)\, dz$ y $g(u) = \int_0^u f(z)\, dz$, Entonces

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(u+tv)-g(u)}{t} = g'(u)v = f(u)v$$

Por consiguiente tenemos

$$\Phi'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega f(u)v$$

Para hallar los puntos críticos se hace $\Phi'(u)v = 0$, entonces

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f(u)v$$

Esto significa que u es solución débil del (PVF) 3.2.

Para aplicar el teorema 2.5 observamos que 0 es un punto crítico no degenerado, para esto hallamos la segunda derivada

$$\begin{aligned}
\phi''(u) &= \lim_{t\to 0} \frac{\phi'(u+tv)-\phi'(u)}{t} = \Big\{ \lim_{t\to 0} \frac{\phi(u+tv)-\phi(u)}{t} \Big\} v \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \Big\{ \int_\Omega \nabla(u+tw)\nabla v - \int_\Omega f(u+tw)v - \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega f(u)v \Big\} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \Big\{ \int_\Omega \big(\nabla u + t\nabla w\big)\nabla v - \int_\Omega \big(f(u+tw)-f(u)\big)v - \int_\Omega \nabla u \nabla v \Big\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left\{ \int_\Omega \nabla u \nabla v + t\nabla w \nabla v - \int_\Omega \big(f(u+tw) - f(u)\big)v - \int_\Omega \nabla u \nabla v \right\} \\
&= \int_\Omega \nabla w \nabla v - \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega \big(f(u+tw) - f(u)\big)v \\
&= \int_\Omega \nabla w \nabla v - f(u) w v = \phi''(u) w v
\end{aligned}
$$

Ahora, $u = 0$ y $w = v$, tenemos que:

$$\Phi''(0)ww = \int_\Omega \|\nabla w\|^2 - f(0)w^2,$$

$$\Phi''(0)ww = \int_\Omega \|\nabla w\|^2 > 0 \quad \text{si y sólo si} \quad w \neq 0.$$

teniendo un índice de Morse negativo, $m^- \geqq 2$ el cual es suficiente para $t(0) \in X$ y para $V(0)$ una vecindad de 0, $d := deg_{loc}(\Phi', V(0), 0) = \pm 1 \neq 0$. Además Φ es coerciva por el comportamiento asintótico de f. Una aplicación del teorema 2.5 da el resultado esperado. $\square$

Si f en adición es asintoticamente lineal un resultado de Amann y Zehnder [3] da al menos una solución no trivial. Un resultado de Chang [10], motivado por [3] nos da al menos dos soluciones no triviales. Además, este resultado está relacionado con el trabajo de Struwe [12] sobre problemas elípticos coercivos de valor frontera. La no linealidad en [12] tiene la forma $f_\lambda(s) = f(s) + \lambda s$ donde, $f(s)/s \to -\infty$ si $s \to \pm\infty$ y $f(s)/s$ es decreciente en $|s|$ y $\lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{s} = 0$. Struwe muestra la existencia de una constante $\lambda^* > 0$ tal que la afirmación del teorema 3.1 se tiene para todo $\lambda > \lambda^*$. Nuestro resultado es más preciso: Escojamos $\lambda^* = \lambda_2$ si f es diferenciable. Observemos, sin embargo que Struwe no necesita la condición de no resonancia en 0 en (3.3)

APÉNDICE A

Apéndice

En este apéndice demostramos el lema 2.1

Lema A.1. *Sea* $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R})$ *satisface* $\mathfrak{P}$. *Entonces:*

(i) Supongamos $\underline{u} < w < \overline{u}$ *son tres puntos críticos en* U*, tal que* $C := [\underline{u}, \overline{u}] \subset U$*. Suponemos también que* $(t(\underline{u}), t(\overline{u})) \in \{0_+, I\} \times \{0_-, I\}$*,* $C_r(\Phi, C)$ *es finita,* $C_r(\Phi, C)_{\{0_+, 0_-, I\}} \subset \{\underline{u}, \overline{u}\}$*, y* $t(w) \in X$*. Entonces, existe una aplicación continua* $\gamma : [0,1] \to (\overset{\circ}{\Phi^{\Phi(w)}}) \cap C$ *con* $\gamma(0) = \underline{u}$ *,* $\gamma(1) = \overline{u}$*.*

(ii) Supongamos que $\underline{u}$ *es un punto crítico de* Φ *con* $t(\underline{u}) \in \{0_+, I\}$*. Más aún, supongamos que* $C := [\underline{u}, +\infty] \subset U$*,* Φ *satisface* $(PS)_C$ *y* $w > \underline{u}$ *es un punto crítico del tipo* X*,* $C_r(\Phi, [w, +\infty]) = \{w\}$ *y* $C_r(\Phi, [\underline{u}, w]) = \{\underline{u}, w\}$*. Entonces, para un número real* a *dado,* $a < \Phi(w)$ *existe una aplicación continua* $\gamma : [0,1] \to (\overset{\circ}{\Phi^{\Phi(w)}}) \cap C$ *tal que* $\gamma(0) = \underline{u}$ *y* $\gamma(1) \in \Phi^a$*.*

Demostración. Haremos solamente la demostración de (ii).

Por la condición $\mathfrak{P}$ nosotros tenemos que $\underline{u} \overset{E}{\ll} w$. Usando que $t(w) \in X$ encontramos w_-, w_+, v_-, v_+ en E y $\widehat{\gamma} : [0,1] \to C$ continua tal que $sup\Phi(|\widehat{\gamma}|) < \Phi(w)$, y

$$\underline{u} \overset{E}{\ll} v_- \leqq \widehat{\gamma}(0) \leqq w_- \overset{E}{\ll} w \overset{E}{\ll} w_+ \leqq \widehat{\gamma}(1) \leqq v_+.$$

Haciendo uso de la proposición 1.3 y $\mathfrak{P}$ encontramos u_+ , u_- en E y $\lambda^{\pm} > 0$ tal que

$$\Phi'(u_\pm) + \lambda^{\pm}(u_\pm - w) = 0$$

$$w_- \leqq u_- < w < u_+ \leqq w_+$$

Aqui hemos usado que w es un punto crítico aislado ($\Rightarrow \lambda^{\pm} > 0$, si $\|u_\pm - w\|$ es pequeño) lo cual implica que

$$Ku_- < u_- \qquad \text{y} \qquad Ku_+ > u_+$$

debido a que K es un operador compacto que preserva el orden. Por consiguiente $C_+ := [u_+, +\infty]$ y $C_- := [\underline{u}, u_-]$ son invariantes con respecto a K. Por nuestra hipótesis $Cr(\Phi, C_+) = \emptyset$ y $Cr(\Phi, C_-) = \{\underline{u}\}$. Más aún, $\widehat{\gamma}(0) \in C_-$ y $\widehat{\gamma}(1) \in C_+$. Observemos que

$$inf\Phi([\underline{u}, w]) = \Phi(\underline{u})$$

$$\Phi(\underline{u}) < \Phi(u), \qquad \forall u \in [\underline{u}, w] \setminus \{\underline{u}\}$$

y

$$inf\Phi(C_+) = -\infty.$$

Sea $\gamma^- : [0,1] \to C_-$ una aplicación continua tal que $\gamma^-(0) = \underline{u}$ y $\gamma^-(1) = \widehat{\gamma}(0)$. Si $c := sup\Phi(|\gamma^-|)$ y se escoge un número arbitrario $c' \in (\Phi(\underline{u}), min\{\Phi(w), c\})$ encontramos por la observación 1.1 $\sigma \in D(\Phi, C_-)$ tal que $\sigma(\{1\} \times (C_- \cap \Phi^c)) \subset C_- \cap \Phi^{c'}$. Definimos $\underline{\gamma} : [0,1] \to C_-$ por

$$\underline{\gamma}(t) := \begin{cases} \sigma(1, \gamma^-(2t)) & t \in [0, 1/2] \\ \sigma(2 - 2t, \gamma^-(1)) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Notemos que $\quad \underline{\gamma}(0) = \underline{u}, \quad \underline{\gamma}(1) = \gamma^-(1) = \widehat{\gamma}(0) \quad$ y $\quad sup\Phi(|\underline{\gamma}|) < \Phi(w)$.
De manera similar construimos $\overline{\gamma} : [0,1] \to C_+$ con

$$\overline{\gamma}(0) = \widehat{\gamma}(1), \quad \Phi(\overline{\gamma}(1)) < a$$

$$sup\Phi(|\overline{\gamma}|) < \Phi(w).$$

Finalmente, definimos $\gamma : [0,1] \to C$ por

$$\gamma(t) := \begin{cases} \underline{\gamma}(3t) & t \in [0, 1/3] \\ \widehat{\gamma}(3t - 1) & t \in [1/3, 2/3] \\ \overline{\gamma}(3t - 2) & t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

Entonces γ tiene la propiedad deseada. $\square$

La prueba de (i) es similar a (ii)

Bibliografía

[1] Ambrosetti A. and Rabinowitz P.H., *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Functional Analysis **14** (1973), 349–381.

[2] Amann H., *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*, SIAM Rev. **18** (1976), no. 4, 620–709.

[3] Amann H. and Zehnder. E., *Nontrivial solutions for a class of nonresonance problems and applications to nonlinear differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **7** (1980), no. 4, 539–603.

[4] Amman H., *A note on degree theory for gradient mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. **85** (1982), no. 4, 591–595.

[5] Brézis H, *Análisis funcional teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[6] Hofer H., *Variational and topological methods in partially ordered Hilbert spaces*, Math. Ann. **261** (1982), no. 4, 493–514.

[7] Schaefer H.H., *Topological vector spaces*, Springer-Verlag, New York, 1971, Third printing corrected, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 3.

[8] Deimling K., *Ordinary differential equations in Banach spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 596, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[9] ———, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[10] Chang K.C., *Solutions of asymptotically linear operator equations via Morse theory*, Comm. Pure Appl. Math. **34** (1981), no. 5, 693–712.

[11] Nirenberg. L., *Variational and topological methods in nonlinear problems*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **4** (1981), no. 3, 267–302.

[12] Struwe M., *A note on a result of Ambrosetti and Mancini*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **131** (1982), 107–115.

[13] Lloyd N. G., *Degree theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1978, Cambridge Tracts in Mathematics, No. 73.

[14] Rabinowitz P. H., *Variational methods for nonlinear eigenvalue problems*, Eigenvalues of non-linear problems (Centro Internaz. Mat. Estivo (C.I.M.E.), III Ciclo, Varenna, 1974), Edizioni Cremonese, Rome, 1974, pp. 139–195.