UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Polinomios Ortogonales de Tipo Laguerre-Sobolev: Caso Diagonal

Luis Alejandro Molano Molano

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2012

Polinomios Ortogonales de Tipo Laguerre-Sobolev: Caso Diagonal

Luis Alejandro Molano Molano

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias Matemáticas

Director(a):
Ph.D. Herbert Alonso Dueñas Ruiz

Línea de Investigación:
Polinomios Ortogonales
Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2012

Con gran aprecio

A mis padres y a Liliana; a Camila, Shara y Juan David.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres, por su apoyo incondicional, de ellos es este gran esfuerzo. Al profesor Herbert Dueñas por su inmenso soporte y orientación, fue él quien me mostró el camino para hacer posible la conclusión de este trabajo. Y a Liliana Bastidas, por su compania, afecto e infinita paciencia, por estar siempre en los momentos difíciles.

Resumen

En este trabajo estudiamos la sucesión de polinomios ortogonales con respecto al producto interno de tipo Sobolev

$$\langle p, q\rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x}x^\alpha dx + Mp(a)q(a) + Np'(a)q'(a),$$

donde $\alpha > -1$, $M \geq 0$, $N \geq 0$ y $a < 0$, además p y q son polinomios con coeficientes reales. Deducimos una ecuación diferencial de segundo orden satisfecha por cada uno de los polinomios de la sucesión y su representación como serie hipergeométrica. El comportamiento de sus ceros es también analizado, en terminos de sus propiedades de entrelazamiento y la variación de las masas M y N.. Finalmente se hace un estudio numérico de los resultados obtenidos a través del uso del Software Matlab.

Palabras clave: Polinomios Ortogonales tipo Laguerre-Sobolev Ecuación Holonómica, representación Hipergeométrica, Ceros.

Abstract

In this work we study the sequence of monic polynomials orthogonal with respect to the Sobolev type inner product

$$\langle p, q\rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x}x^\alpha dx + Mp(a)q(a) + Np'(a)q'(a),$$

where $\alpha > -1$, $M \geq 0$, $N \geq 0$, $a < 0$, and p and q are polynomials with real coefficients. We find their representation as an hypergeometric function. Some interlacing properties of their zeros are obtained, as well as their behavior in terms of the variation of M and N. Finally we deduce a second order linear differential equation satisfied by this sequence of orthogonal polynomials. Finally, some numerical experiments using Matlab are presented.

Keywords: Orthogonal Polynomials Laguerre-Sobolev type, Holonomic Equation, Hipergeometric Representation the zeros

Contenido

1. Introducción

1.1. Introducción histórica y estado del arte

En los últimos 60 años se ha prestado atención a un campo de los polinomios ortogonales que involucra un producto interno de la forma:

$$\langle f, g\rangle_S = \sum_{i=0}^{\infty} \int_a^b f^{(i)}(x) g^{(i)}(x) d\psi_i(x), \tag{1-1}$$

donde (a, b) es un intervalo finito, o infinito, y cada ψ_j representa una función no decreciente, acotada en $[a, b]$, tal que el conjunto

$$\vartheta(\psi_j) = \{x |\, \psi_j(x+\epsilon) - \psi_j(x-\epsilon) > 0, \text{ para todo } \epsilon > 0\},$$

es infinito y

$$\mu_k = \int_a^b x^k d\psi_j < \infty, \text{ para todo } k \in N,$$

es decir, que cada ψ_j es una función de distribución. Este producto es conocido como de tipo Sobolev. Gran parte de las investigaciones se han centrado en el estudio particular de los casos

$$\langle f, g\rangle_S = \int_a^b f(x) g(x) d\psi(x) + M f'(c) g'(c), \quad M \geq 0,$$

el *caso discreto*, y

$$\langle f, g\rangle_S = \int_a^b f(x) g(x) d\psi_0(x) + M \int_a^b f'(x) g'(x) d\psi_1(x), \quad M \geq 0,$$

que es el *caso no discreto*.
En 1947 se sientan las bases para la construcción de la teoría de polinomios ortogonales en espacios de Sobolev con una publicación de D.C. Lewis (ver [19]) . En dicha publicación, Lewis propuso el siguiente problema de mínimos:

Dadas k funciones $\alpha_i(x)$, $(i = 0, 1, 2, \cdots, k-1)$, monótonas, no decrecientes definidas en un intervalo $[a, b]$ y una función f que satisface ciertas condiciones de regularidad, determinar un polinomio Q_n de grado no mayor que n tal que:

$$\sum_{i=0}^{p} \int_a^b \left[f^{(i)}(x) - Q_n^{(i)}(x)\right]^2 d\alpha_i(x),$$

sea mínimo.
A comienzos de los años 60, Althammer presentó su primer trabajo (ver [3]) basado en los resultados de Lewis en el cual, reformuló el problema de Lewis en los siguientes términos:
Dado el producto (1-1), y dada una función f determinar

$$\text{mín} \left\| f - Q \right\|_S ,$$

donde Q representa un polinomio de grado no mayor a n.
La solución de dicho problema se basa en considerar una sucesión de polinomios ortogonales respecto al producto (1-1), digamos $\{P_n(x)\}_{n\in N}$, y el polinomio Q en el que se alcance el mínimo tendrá la forma:

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x), \text{ con } a_k = \langle f, P_k \rangle_S .$$

Aunque Lewis no atacó el problema a través de polinomios ortogonales, sino en términos de un sistema de ecuaciones con los $n+1$ coeficientes de Q como incógnitas, su trabajo fue un punto de partida para que autores posteriores empezaran a trabajar con productos de tipo Sobolev.
Althammer fue el primero que se percató de una condición propia de la sucesión de polinomios ortogonales relativa al producto

$$\langle f, g \rangle_S = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx + \lambda \int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)dx, \qquad \lambda > 0, \tag{1-2}$$

que es una generalización del producto interno de Legendre, y es que un cero puede no estar en el intervalo de ortogonalidad. El trabajo de este matemático es motivo nuevamente del estudio de autores posteriores, convirtiéndose el tema de los ceros de los polinomios ortogonales en un tema recurrente en tales trabajos.

En el mismo tiempo W. Grobner trabajó específicamente con el intervalo de ortogonalidad $(0,1)$ en (1-2), y además dio una generalización de la fórmula de Rodrígues. J. Brenner considero el producto interno:

$$\langle f,g\rangle_S=\int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx+\lambda\int_0^\infty f'(x)g'(x)e^{-x}dx,\quad \lambda>0,$$

que es una generalización del producto interno de Laguerre con parámetro $\alpha=0$.

En 1973 F. W. Schafke y G. Wolf trabajaron con un producto de Legendre (1-2) , (ver [26]) que les permitió simplificar notablemente los resultados de Althammer, basados en la normalización de la sucesión de polinomios ortogonales respecto al producto no discreto, con intervalo de ortogonalidad $(-1,1)$, suponiendo que tales polinomios toman el valor de 1 al evaluarlos en este mismo punto.

En 1975, E. A. Cohen es quien acuña el nombre espacio de Sobolev, y en su trabajo (ver [5]) demuestra que los ceros de un polinomio de grado n con respecto al producto (1-2) están entrelazados con los ceros del polinomio de Legendre de grado $n-1$ siempre y cuando se tenga que $\lambda\geq\frac{2}{n}$. De aquí en adelante los trabajos se centran en el estudio de ciertos tipos especiales de productos internos en los que se destaca, en principios de los años 70, el de Schafke y Wolf quienes estudian el producto:

$$\langle f,g\rangle_S=\sum_{\upsilon,\mu=0}^{\infty}\int_a^b w(x)v_{\upsilon\mu}(x)p^{(\upsilon)}(x)q^{(\mu)}(x)dx,$$

donde (a,b) y $w(x)$ representan los intervalos de ortogonalidad y la función de peso para los casos clásicos de Jacobi, Laguerre y Hermite. Los resultados de este trabajo soportan teóricamente una gran cantidad de productos internos incluyendo los trabajos anteriores de Althammer y Brenner.

En principio de la década de los noventa, los autores A. Iserles, P. E. Koch, S. P. Norsett y J. M. Sanz-Serna estudiaron, (ver [15]) polinomios ortogonales con respecto al producto:

$$\langle f,g\rangle_S=\int_a^b f(x)g(x)d\psi_0(x)+\lambda\int_a^b f'(x)g'(x)d\psi_1(x),\quad \lambda\geq 0,$$

donde lo novedoso es el uso de funciones de distribución, $\psi_0(x)$ y $\psi_1(x)$, y no funciones de peso, cuyo tratamiento hace que la integración por partes sea fundamental. Es entonces que se introduce la definición de **pares coherentes** haciendo referencia al par $\{d\psi_0, d\psi_1\}$ siempre y cuando existan constantes no nulas A_n y B_n tales que $Q_n = A_n P'_{n+1} + B_n P'_n$, con $n > 0$, donde $\{P_n\}_{n\in N}$ y $\{Q_n\}_{n\in N}$ son las sucesiones de polinomios ortogonales respecto a $d\psi_0$ y $d\psi_1$ respectivamente. Esta concepción tiene sorprendentes alcances y renueva el interés en el estudio de polinomios ortogonales en espacios de Sobolev no discretos.

El problema que siguió a la teoría desarrollada en términos de pares coherentes, fue determinar casos particulares de dichas parejas, o si era posible, determinarlas todas. Este problema fue atacado por Francisco Marcellan y J. C. Petronilho, [11], en el sentido en que una de las dos sucesiones de polinomios sea clásica. Además trabajaron desde el punto de vista de un funcional lineal y no desde el de un producto interno definido por una función de distribución. Por otra parte, la normalización empleada se basaba en considerar polinomios mónicos, aquellos cuyo coeficiente principal es 1. A partir de esto, parece que el trabajo respecto a pares coherentes ha sido completado salvo la escases de resultados asintóticos y el desconocimiento de representaciones en términos de series hipergeométricas. En este sentido podemos citar el trabajo de H. G. Meijer, [24], en el producto:

$$\langle f, g\rangle_S = \int_{-1}^{3} fg dx + \lambda \int_{-1}^{1} f'g'dx + \int_{1}^{3} f'g'dx, \quad con \ \ \lambda \geq 0,$$

a través del cual demostró que si $\left\{S_n^\lambda\right\}_{n\in N}$ es la sucesión de polinomios asociada a este, con λ suficientemente grande, S_n^λ contiene exactamente 2 ceros reales si n es par, o solamente uno si n es impar.[1].

A puertas y comienzos del siglo XXI se lleva a cabo una amplia serie de investigaciones referentes a productos de tipo Laguerre-Sobolev en las que se puede destacar el trabajo (ver [21]) respecto al producto:

$$\langle f, g\rangle_S = \int_{0}^{\infty} f(x)g(x)x^\alpha e^{-x}dx + \lambda \int_{0}^{\infty} f'(x)g'(x)x^\alpha e^{-x}dx, \quad con \ \ \lambda > 0,$$

en donde se estudia las propiedades analíticas de los polinomios relativos a este producto y propiedades de sus ceros.

En el mismo sentido se tiene la publicación (ver [14]) en el que se estudia el comportamiento de los ceros de polinomios ortogonales respecto a perturbaciones de Uvarov y Christoffel, y la aplicación a medidas clásicas, además de la respectiva interpretación electrostática de los ceros.

[1]Para ver en detalle los aspectos mencionados hasta este punto, se sugiere ver [22].

Otro importante producto interno de tipo Laguerre-Sobolev que se ha estudiado en las últimas décadas es de la forma:
con $r \geq 0$, $M_i \geq 0$. En esta dirección, los trabajos [17] y [18] estudian el producto (**??**) y casos particulares cuando $r = 0$ y $M_0 > 0$, cuando $r = 1$ y $M_0, M_1 > 0$. H. Dueñas y F. Marcellán hacen un estudio (ver [9]) de los polinomios ortogonales respecto al producto tipo Laguerre-Sobolev

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x}dx + Mp'(0)q'(0), \quad \text{con} \;\; M > 0,$$

en el cual encuentran la respectiva ecuación diferencial de segundo orden que satisfacen y hacen una interpretación electrostática de sus ceros. Posteriormente, (ver [8]) estudian una generalización del anterior producto enfocándolo en la forma:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x}dx + Mp^{(j)}(0)q^{(j)}(0), \quad \text{con} \;\; M > 0,$$

para analizar sus propiedades asintóticas con respecto a los polinomios de Laguerre clásicos. Un estudio (ver [23]) de carácter mucho más general es presentado por H. G. Meijer quién analiza un producto de la forma:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x}dx + \sum_{i=1}^{r} M_i p^{(i)}(0)q^{(i)}(0), \quad \text{con} \;\; M > 0,$$

y en esta misma vía, también el trabajo (ver [2]) relativo a las propiedades de los ceros que es hecho por M. Alfaro, G. Lopez y M. Rezola.
Finalmente en el sentido de lo que con la presente se propone, se destacan los trabajos que se han hecho teniendo en cuenta los productos de tipo Laguerre-Sobolev tomando como referencias puntos de masa fuera del soporte de la medida, y de acuerdo a esto, se menciona lo hecho por H. Dueñas, E. Huertas y F. Marcellán respecto a las propiedades analíticas (ver [7]), (fórmula de conexión, representación hipergeométrica, ecuación holonómica, etc.) de los polinomios ortogonales respecto al producto:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x}x^\alpha dx + Mp(a)q(a), \text{ con } a < 0 \text{ y } M > 0,$$

y las propiedades asintóticas (ver [6]) de los polinomios ortogonales respecto al producto:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x}x^\alpha dx + Np'(a)q'(a), \text{ con } a < 0 \text{ y } N > 0.$$

1.2. Estructura del Trabajo

Nuestro propósito en el presente trabajo es estudiar algunas propiedades analíticas y algebraicas de los polinomios $\left\{\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right\}_{n\in N}$ que son ortogonales respecto al producto:

$$\langle p,q\rangle=\int_0^{\infty}p(x)q(x)d\mu+\sum_{k=0}^{j}M_kp^{(k)}(a)q^{(k)}(a), \tag{1-3}$$

donde $M_k\geq 0$, $a<0$, y $d\mu=e^{-x}x^{\alpha}dx$. Este tipo de producto se denomina *diagonal* debido a que si denotamos

$$\mathbf{P}_a=\left(p(a),\ p'(a),\cdots,\ p^{(j)}(a)\right),$$

y

$$\mathbf{Q}_a=\left(q(a),\ q'(a),\cdots,\ q^{(j)}(a)\right),$$

el producto se puede reescribir como

$$\langle p,q\rangle=\int_0^{\infty}p(x)q(x)e^{-x}x^{\alpha}dx+\mathbf{P}_aA\left(\mathbf{Q}_a\right)^t,$$

donde A es una matriz diagonal de orden $j+1$ que tiene la forma

$$A=diag\left(M_{0,}M_1,\cdots,M_j\right).$$

La diferencia con trabajos previos que estudian productos de la forma (1-3), radica en que el punto masa a está fuera del soporte de la medida, es decir, $a<0$. Tal consideración se ha estudiado en algunos casos particulares: cuando $j=0$ se tienen los trabajos [7] y [14]; cuando $j=1$, $M_0=0$, se puede ver [6]. Y un estudio de las propiedades asintóticas cuando $j=1$ y μ es una medida de Borel positiva cualquiera, soportada en un subconjunto infinito de la recta real, se puede ver en [13].
La estructura de la presentación de los temas tratados en este trabajo es la siguiente: en el capítulo 1 se hace un recuento de las propiedades analíticas y algebraicas fundamentales de los polinomios ortogonales clásicos de Laguerre que son claves en la deducción de las propiedades asociadas a los polinomios perturbados. En el capítulo 2 se halla una fórmula

de conexión entre estos polinomios y la sucesión de polinomios ortogonales de Laguerre, además representamos estos polinomios como una función hipergeométrica . En el capítulo 3 se determina la ecuación diferencial holonómica, y en el Capítulo 5 se estudian algunas propiedades de los ceros de estos polinomios. Finalmente, como anexo, se muestran algunos experimentos de tipo numérico para ver la validez de algunos de los resultados obtenidos, en algunos casos particulares.

2. Preeliminares

Sea μ una medida de Borel positiva soportada en un subconjunto Ω infinito de la recta real tal que

$$\int_\Omega |x|^n \, d\mu(x) < \infty,$$

para todo n. Se define el producto interno

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to R,$$

por

$$\langle p, q \rangle_\mu = \int_\Omega p(x) q(x) d\mu(x),$$

donde $\mathcal{P}$ es el espacio de los polinomios con coeficientes reales. Además, como es usual, se define la norma asociada $\|\cdot\|_\mu : \mathcal{P} \to R^+ \cup \{0\}$, por

$$\|p\|_\mu = \left[\int_\Omega |p(x)|^2 \, d\mu(x) \right]^{1/2}.$$

Una sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}_{n\in N}$ es llamada sucesión de polinomios ortogonales con respecto al producto $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$ si para toda pareja de enteros no negativos n y m se satisfacen las condiciones:

1. El grado de $P_n(x)$ es n.
2. $\langle P_n, P_m \rangle_\mu = 0$, si $m \neq n$.
3. $\|P_n\|_\mu^2 \neq 0$

Si el coeficiente principal de $P_n(x)$ es 1 para todo n, se dice que $\{P_n(x)\}_{n\in N}$ es una *sucesión de polinomios ortogonales mónicos, (SPOM)*. Los siguientes resultados pueden verse en [4], [16], [20], [1] o [25].

Teorema 1 *Cada medida de Borel positiva μ determina una única SPOM.*

Proposición 2 *Sea μ una medida de Borel positiva y sea $\{P_n(x)\}_{n\in N}$ la correspondiente SPOM. Entonces se tienen los siguientes estamentos:*

1. Satisfacen una relación de recurrencia a tres términos

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)P_n(x) - \beta_n P_{n-1}(x),$$

definiendo $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$, y donde

$$\alpha_n = \frac{\langle xP_n, P_n\rangle_\mu}{\|P_n\|_\mu^2}, \quad n \geq 0,$$

y

$$\beta_n = \frac{\|P_n\|_\mu^2}{\|P_{n-1}\|_\mu^2}, \quad n \geq 1.$$

2. Cada polinomio $P_n(x)$ tiene n ceros reales y simples en el interior de la cobertura convexa de Ω.

3. Entre 2 ceros de $P_n(x)$ hay un cero de $P_{n-1}(x)$.

Una sucesión de polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}_{n\in N}$ se denomina *clásica* si los polinomios de la sucesión satisfacen una ecuación diferencial de segundo orden de la forma:

$$\sigma(x)\phi''(x) + \tau(x)\phi'(x) + \lambda_n\phi(x) = 0,$$

donde $\sigma(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo 2, $\tau(x)$ es un polinomio de grado exactamente 1 y λ_n representa un número real. Los polinomios ortogonales de tipo clásico (Hermite, Laguerre, Jacobi y Bessel) se destacan por su amplia gama de aplicaciones a la física cuántica, las aproximaciones racionales, las ecuaciones diferenciales, etc, y un estudio detallado de los mismos se puede ver por ejemplo en [10] o en [16].
En particular, los *polinomios ortogonales mónicos de Laguerre* $\{L_n^\alpha(x)\}_{n\in N}$ (en honor al matemático francés Edmond Nicolas Laguerre (1834-1886)), son los polinomios ortogonales mónicos con respecto al producto interno:

$$\langle P,Q\rangle_\alpha = \int_0^\infty P(x)Q(x)e^{-x}x^\alpha dx, \text{ con } \alpha > -1.$$

A continuación se mencionan algunas propiedades útiles de este tipo de polinomios, cuya demostración se puede encontrar por ejemplo en [10], [4], [16] o [25].

Proposición 3 *Para todo $n \in N$, los polinomios ortogonales mónicos de Laguerre $\{L_n^\alpha(x)\}_{n\in N}$, satisfacen:*

1. (*Fórmula de Recurrencia a 3 Términos*). Para todo $n \in \mathbb{N}$

$$xL_n^\alpha(x) = L_{n+1}^\alpha(x) + (2n+1+\alpha)L_n^\alpha(x) + n(n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x). \tag{2-1}$$

   con $L_0^\alpha(x) = 1$ y $L_1^\alpha(x) = x - (\alpha+1)$.

2. Para todo $n \in \mathbb{N}$

$$L_n^\alpha(x) = L_n^{\alpha+1}(x) + nL_{n-1}^{\alpha+1}(x). \tag{2-2}$$

3. Para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\|L_n^\alpha\|_\alpha^2 = n!\Gamma(n+\alpha+1). \tag{2-3}$$

4. Para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\left(L_n^\alpha\right)'(x) = nL_{n-1}^{\alpha+1}(x). \tag{2-4}$$

5. Para todo $n \in \mathbb{N}$

$$x\left(L_n^\alpha(x)\right)' = nL_n^\alpha(x) + n(n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x). \tag{2-5}$$

6. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $L_n^\alpha(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)\, y' = -ny. \tag{2-6}$$

7. (*Fórmula de Christoffel-Darboux*). Si $K_n(x,y) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{L_k^\alpha(x)L_k^\alpha(y)}{\left\|L_k^\alpha\right\|_\alpha^2}$

denota el n-ésimo Polinomio Núcleo, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$K_n(x,y) = \frac{L_{n+1}^\alpha(x)L_n^\alpha(y) - L_{n+1}^\alpha(y)L_n^\alpha(x)}{\left\|L_n^\alpha\right\|_\alpha^2 (x-y)}. \tag{2-7}$$

Para las derivadas parciales del Núcleo $K_n(x,y)$ se usará la siguiente notación:

$$\frac{\partial^{j+k}\left(K_n(x,y)\right)}{\partial^j x \partial^k y} = K_n^{(j,k)}(x,y),$$

y en este sentido se tiene la siguiente propiedad del Núcleo y sus derivadas parciales, cuya demostración se puede ver en [9] o en [8]:
Dado un polinomio $p(x)$ de grado no mayor que n se satisface

$$\left\langle K_n^{(0,k)}(x,y), p(x)\right\rangle_\alpha = p^{(k)}(y). \tag{2-8}$$

Definición 4 ***Series hipergeométricas y símbolo de Pochhammer***

Se define el símbolo de Pochhammer o factorial trasladado, como

$$(a)_k = a\,(a+1)\,(a+2)\cdots(a+k-1)\,,$$

para $k > 0$, y $(a)_0 = 1$, donde a es un número complejo cualquiera. Por otra parte se considera la serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{r=1}^{p}(\alpha_r)_k}{\prod_{s=1}^{q}(\gamma_r)_k}\frac{x^k}{k!} \tag{2-9}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_p)_k}{(\gamma_1)_k \cdots (\gamma_q)_k} \frac{x^k}{k!}, \tag{2-10}$$

con $p, q \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, además $p \leq q+1$; $x, \alpha_r, \gamma_r \in \mathbb{R}$, y $\gamma_r \notin \mathbb{R}^-$.
Es natural aplicar el criterio de convergencia del cociente para determinar el radio de convergencia de la serie, así que usando el símbolo de Pochhammer, se tiene: Se concluye que la serie converge absolutamente para todo x si $p \leq q$, y para $|x| < 1$ si $p = q+1$. La serie diverge para todo x no nulo si $p > q+1$. La serie (2-10) se denomina *hipergeométrica,* y usualmente es notada como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_p)_k}{(\gamma_1)_k \cdots (\alpha_q)_k} \frac{x^k}{k!} =: {}_pF_q \left(\begin{array}{c} \alpha_1, \cdots, \alpha_p \\ \gamma_1, \cdots, \gamma_q \end{array} \middle| \, x \right),$$

o para más brevedad:

$${}_pF_q\left(\alpha_r; \gamma_s; x\right).$$

Para mayor información respecto a las series hipergeométricas, puede ver [10].
En particular, para todo $n \in \mathbb{N}$, la representación de $L_n^\alpha(x)$ como serie hipergeométrica es la siguiente:

$$L_n^\alpha(x) = (-1)^n (\alpha+1)_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k} \frac{x^k}{k!}, \tag{2-11}$$

cuya deducción se puede ver en [10], [4], [16] o [25].

3. Fórmula de conexión y y Representación Hipergeométrica

3.1. Introducción

En este capítulo se establece una fórmula que relacionará los polinomios $\left\{\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortogonales con respecto al producto, (1-3), con los polinomios de Laguerre clásicos de parámetro α, inicialmente para el caso en que $j=1$, y después se discutirá brevemente el caso general, cuyo tratamiento es análogo al proceso ya seguido. Esta fórmula permitirá expresar los polinomios perturbados en términos de tales polinomios clásicos de Laguerre, y será importante para estudiar las principales propiedades analíticas de los nuevos polinomios ortogonales heredadas por tal representación. En particular encontraremos una representación como función hipergeométrica de los polinomios $\left\{\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, similar a la que ya es conocida en los polinomios de Laguerre y que se ve en (2-11). Adicionalmente se expondrán los principales detalles y las condiciones necesarias que conducirán a la obtención de la Representación Hipergeométrica en el caso general

3.2. Fórmula de conexión

Definimos el producto interno:

$$\langle p,q\rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x}x^\alpha dx + Mp(a)q(a) + Np'(a)q'(a), \tag{3-1}$$

con p, q polinomios de coeficientes reales, $M,N\in\mathbb{R}_+$, y $a<0$ y denotaremos $\left\{\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ a la sucesión de polinomios mónicos ortogonales con respecto a este producto. Teniendo en cuenta que la sucesión $\{L_n^\alpha(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto de polinomios linealmente independiente, expresamos cada $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$ como combinación de polinomios de Laguerre clásicos de parámetro α asi:

$$\widetilde{L}_n^\alpha(x) = L_n^\alpha(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k}L_k^\alpha(x), \tag{3-2}$$

para algunos $a_{n,k} \in \mathbb{R}$, y para su determinación explícita, se calcularán los siguientes n productos (usando el producto usual de los Laguerre clásicos notado como $\langle , \rangle_\alpha$)

$$\left\langle L_k^\alpha, \widetilde{L}_n^\alpha \right\rangle_\alpha = \langle L_k^\alpha, L_n^\alpha \rangle_\alpha + \sum_{j=0}^{n-1} a_{n,j} \left\langle L_k^\alpha(x), L_j^\alpha(x) \right\rangle_\alpha \qquad \text{con } \ 0 \leq k < n.$$

El primer producto del miembro de la derecha es nulo por la ortogonalidad de L_n^α teniendo en cuenta la variación de k; y en la suma, por la ortogonalidad de los L_m^α se anulan todos los términos excepto cuando $j = k$. Es decir

$$\left\langle L_k^\alpha, \widetilde{L}_n^\alpha \right\rangle_\alpha = a_{n,k} \left\langle L_k^\alpha(x), L_k^\alpha(x) \right\rangle_\alpha = a_{n.k} \left\| L_k^\alpha \right\|_\alpha^2,$$

o lo que es lo mismo,

$$a_{n,k} = \frac{\left\langle L_k^\alpha, \widetilde{L}_n^\alpha \right\rangle_\alpha}{\left\| L_k^\alpha \right\|_\alpha^2}. \tag{3-3}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \left\langle L_k^\alpha, \widetilde{L}_n^\alpha \right\rangle &= \int_0^\infty L_k^\alpha(x) \widetilde{L}_n^\alpha(x) e^{-x} x^\alpha dx + M L_k^\alpha(a) \widetilde{L}_n^\alpha(a) + N \left(L_k^\alpha\right)'(a) \left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a) \\ &= \left\langle L_k^\alpha, \widetilde{L}_n^\alpha \right\rangle_\alpha + M L_k^\alpha(a) \widetilde{L}_n^\alpha(a) + N \left(L_k^\alpha\right)'(a) \left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a). \end{aligned}$$

El producto en el miembro de la izquierda es nulo por la ortogonalidad de los $\widetilde{L}_n^\alpha$ así que resulta:

$$\left\langle L_k^\alpha, \widetilde{L}_n^\alpha \right\rangle_\alpha = -M L_k^\alpha(a) \widetilde{L}_n^\alpha(a) - N \left(L_k^\alpha\right)'(a) \left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a),$$

y sustituyendo en (3-3) obtenemos:

$$a_{n,k} = \frac{-M L_k^\alpha(a) \widetilde{L}_n^\alpha(a) - N \left(L_k^\alpha\right)'(a) \left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)}{\left\| L_k^\alpha \right\|_\alpha^2}.$$

Reemplazando esta última expresión en (3-2) se llega a

$$\widetilde{L}_n^\alpha(x) = L_n^\alpha(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M L_k^\alpha(a) \widetilde{L}_n^\alpha(a)}{\left\| L_k^\alpha \right\|_\alpha^2} L_k^\alpha(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N \left(L_k^\alpha\right)'(a) \left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)}{\left\| L_k^\alpha \right\|_\alpha^2} L_k^\alpha(x),$$

y usando (2-7)

$$\widetilde{L}_n^\alpha(x) = L_n^\alpha(x) - M \widetilde{L}_n^\alpha(a) K_{n-1}(x,a) - N \left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a) K_{n-1}^{(0,1)}(x,a). \tag{3-4}$$

Con la idea de poder expresar $K_{n-1}^{(0,1)}(x,a)$ de forma más simple en términos de polinomios de Laguerre clásicos para simplificar las posteriores manipulaciones algebraicas, se multiplica (3-4) por $(x-a)^2$ y tenemos

$$(x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x) = (x-a)^2 L_n^\alpha(x) - (x-a)M\widetilde{L}_n^\alpha(a)(x-a)K_{n-1}(x,a) - N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)(x-a)^2 K_{n-1}^{(0,1)}(x,a). \tag{3-5}$$

Ahora buscaremos expresar $(x-a)K_{n-1}(x,a)$ y $(x-a)^2K_{n-1}^{(0,1)}(x,a)$ como combinación de polinomios de Laguerre clásicos de parámetro α. Usando (2-7) con grado $n-1$ y derivándola con respecto a y :

$$K_{n-1}^{(0,1)}(x,y) = \frac{L_n^\alpha(x)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{L_{n-1}^\alpha(y)}{(x-y)}\right)\right] - \frac{L_{n-1}^\alpha(x)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{L_n^\alpha(y)}{(x-y)}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{L_n^\alpha(x)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}\left[\frac{L_{n-1}^\alpha(y) + (x-y)\left(L_{n-1}^\alpha\right)'(y)}{(x-y)^2}\right] \\
&\quad - \frac{L_{n-1}^\alpha(x)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}\left[\frac{L_n^\alpha(y) + (x-y)\left(L_n^\alpha\right)'(y)}{(x-y)^2}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}\left(\frac{L_n^\alpha(x)L_{n-1}^\alpha(y)}{(x-y)^2} + \frac{(x-y)L_n^\alpha(x)\left(L_{n-1}^\alpha\right)'(y)}{(x-y)^2}\right. \\
&\quad \left. - \frac{L_{n-1}^\alpha(x)L_n^\alpha(y)}{(x-y)^2} - \frac{(x-y)L_{n-1}^\alpha(x)\left(L_n^\alpha\right)'(y)}{(x-y)^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}\left(\frac{L_n^\alpha(x)L_{n-1}^\alpha(y)}{(x-y)^2} - \frac{L_{n-1}^\alpha(x)L_n^\alpha(y)}{(x-y)^2}\right. \\
&\quad \left. + \frac{(x-y)L_n^\alpha(x)\left(L_{n-1}^\alpha\right)'(y)}{(x-y)^2} - \frac{(x-y)L_{n-1}^\alpha(x)\left(L_n^\alpha\right)'(y)}{(x-y)^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}\left(\frac{L_n^\alpha(x)L_{n-1}^\alpha(y) - L_{n-1}^\alpha(x)L_n^\alpha(y)}{(x-y)^2}\right. \\
&\quad \left. + \frac{L_n^\alpha(x)\left(L_{n-1}^\alpha\right)'(y) - L_{n-1}^\alpha(x)\left(L_n^\alpha\right)'(y)}{(x-y)}\right).
\end{aligned}$$

Finalmente, haciendo $y=a$ y multiplicando en ambos miembros por $(x-a)^2$:

$$(x-a)^2K_{n-1}^{(0,1)}(x,a) =$$

$$= \frac{L_n^\alpha(x)L_{n-1}^\alpha(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2} - \frac{L_{n-1}^\alpha(x)L_n^\alpha(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2} + (x-a)\frac{L_n^\alpha(x)\left(L_{n-1}^\alpha\right)'(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2} - (x-a)\frac{L_{n-1}^\alpha(x)\left(L_n^\alpha\right)'(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2} \quad (3\text{-}6)$$

Usando (2-7) con grado $n-1$ y (3-6) en (3-4) se obtiene:

$$(x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x) =$$

$$\begin{aligned}
= \ & (x-a)^2L_n^\alpha(x) - (x-a)M\widetilde{L}_n^\alpha(a)\left(\frac{L_n^\alpha(x)L_{n-1}^\alpha(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2} - \frac{L_n^\alpha(a)L_{n-1}^\alpha(x)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}\right) - \\
& N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\left(\frac{L_n^\alpha(x)L_{n-1}^\alpha(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2} - \frac{L_{n-1}^\alpha(x)L_n^\alpha(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2} + (x-a)\frac{L_n^\alpha(x)\left(L_{n-1}^\alpha\right)'(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}\right. \\
& \left. -(x-a)\frac{L_{n-1}^\alpha(x)\left(L_n^\alpha\right)'(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \ & (x-a)^2L_n^\alpha(x) - (x-a)M\widetilde{L}_n^\alpha(a)\frac{L_n^\alpha(x)L_{n-1}^\alpha(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2} \\
& +(x-a)M\widetilde{L}_n^\alpha(a)\frac{L_n^\alpha(a)L_{n-1}^\alpha(x)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2} - N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\frac{L_n^\alpha(x)L_{n-1}^\alpha(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2} \\
& +N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\frac{L_{n-1}^\alpha(x)L_n^\alpha(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2} - (x-a)N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\frac{L_n^\alpha(x)\left(L_{n-1}^\alpha\right)'(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2} \\
& +(x-a)N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\frac{L_{n-1}^\alpha(x)\left(L_n^\alpha\right)'(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \ & \left[(x-a)^2 - (x-a)M\widetilde{L}_n^\alpha(a)\frac{L_{n-1}^\alpha(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2} - N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\frac{L_{n-1}^\alpha(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}\right. \\
& \left. -(x-a)N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\frac{\left(L_{n-1}^\alpha\right)'(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}\right] L_n^\alpha(x) + \left[(x-a)M\widetilde{L}_n^\alpha(a)\frac{L_n^\alpha(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}\right. \\
& \left. +N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\frac{L_n^\alpha(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2} + (x-a)N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\frac{\left(L_n^\alpha\right)'(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}\right] L_{n-1}^\alpha(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \ & \left[(x-a)^2 - (x-a)\left(M\widetilde{L}_n^\alpha(a)\frac{L_{n-1}^\alpha(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2} + N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\frac{\left(L_{n-1}^\alpha\right)'(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}\right)\right. \\
& \left. -N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\frac{L_{n-1}^\alpha(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}\right] L_n^\alpha(x) + \left[(x-a)\left(M\widetilde{L}_n^\alpha(a)\frac{L_n^\alpha(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2} + N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\frac{\left(L_n^\alpha\right)'(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}\right)\right. \\
& \left. +N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\frac{L_n^\alpha(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}\right] L_{n-1}^\alpha(x)
\end{aligned}$$

luego:

$$(x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x)=p(x)L_n^\alpha(x)+q(x)L_{n-1}^\alpha(x)\ , \tag{3-7}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios de segundo y primer grado respectivamente y están representados por las fórmulas:

$$p(x)=(x-a)^2+A_{n-1}(x-a)+B_{n-1}, \tag{3-8}$$

donde

$$A_{n-1}=\frac{-N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\left(L_{n-1}^\alpha\right)'(a)-M\widetilde{L}_n^\alpha(a)L_{n-1}^\alpha(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}, \qquad B_{n-1}=\frac{-N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)L_{n-1}^\alpha(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}$$

y

$$q(x)=C_{n-1}(x-a)+D_{n-1} \tag{3-9}$$

con

$$C_{n-1}=\frac{M\widetilde{L}_n^\alpha(a)L_n^\alpha(a)+N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\left(L_n^\alpha\right)'(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2} \quad \text{y} \quad D_{n-1}=\frac{N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)L_n^\alpha(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}$$

Ahora se quiere encontrar expresiones para $\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)$ y $\widetilde{L}_n^\alpha(a)$. Derivando con respecto a x (3-4) y haciendo $x=a$ se obtiene

$$\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)=\left(L_n^\alpha\right)'(a)-M\widetilde{L}_n^\alpha(a)K_{n-1}^{(1,0)}(a,a)-N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)K_{n-1}^{(1,1)}(a,a), \tag{3-10}$$

además, haciendo $x=a$ en (3-4) también:

$$\widetilde{L}_n^\alpha(a)=L_n^\alpha(a)-M\widetilde{L}_n^\alpha(a)K_{n-1}(a,a)-N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)K_{n-1}^{(0,1)}(a,a), \tag{3-11}$$

es decir se tiene el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $\left(\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\ \ y \quad \widetilde{L}_n^\alpha(a)\right)$:

$$\begin{cases} \left[1+MK_{n-1}(a,a)\right]\widetilde{L}_n^\alpha(a)+\left[NK_{n-1}^{(0,1)}(a,a)\right]\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)=L_n^\alpha(a) \\ \\ \left[MK_{n-1}^{(1,0)}(a,a)\right]\widetilde{L}_n^\alpha(a)+\left[1+NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\right]\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)=\left(L_n^\alpha\right)'(a). \end{cases}$$

Para solucionarlo, tomamos

$$\begin{aligned} D_{n,\alpha,a}^{M,N} &= \det\begin{pmatrix} 1+MK_{n-1}(a,a) & NK_{n-1}^{(0,1)}(a,a) \\ MK_{n-1}^{(1,0)}(a,a) & 1+NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a) \end{pmatrix} \\ &= \left(1+MK_{n-1}(a,a)\right)\left(1+NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\right)-MN\left(K_{n-1}^{(1,0)}\right)^2(a,a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\widetilde{L}_n^\alpha(a)} &= \det\begin{pmatrix} L_n^\alpha(a) & NK_{n-1}^{(0,1)}(a,a) \\ (L_n^\alpha)'(a) & 1+NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a) \end{pmatrix} \\ &= L_n^\alpha(a)\left(1+NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\right) - (L_n^\alpha)'(a)NK_{n-1}^{(0,1)}(a,a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{(\widetilde{L}_n^\alpha)'(a)} &= \det\begin{pmatrix} 1+MK_{n-1}(a,a) & L_n^\alpha(a) \\ MK_{n-1}^{(1,0)}(a,a) & (L_n^\alpha)'(a) \end{pmatrix} \\ &= (1+MK_{n-1}(a,a))\,(L_n^\alpha)'(a) - MK_{n-1}^{(1,0)}(a,a)L_n^\alpha(a). \end{aligned}$$

De esta forma

$$\widetilde{L}_n^\alpha(a) = \frac{W_{\widetilde{L}_n^\alpha(a)}}{W} = \frac{L_n^\alpha(a)\left(1+NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\right) - (L_n^\alpha)'(a)NK_{n-1}^{(0,1)}(a,a)}{(1+MK_{n-1}(a,a))\left(1+NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\right) - MN\left(K_{n-1}^{(1,0)}\right)^2(a,a)}, \tag{3-12}$$

$$\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a) = \frac{W_{(\widetilde{L}_n^\alpha)'(a)}}{W} = \frac{(1+MK_{n-1}(a,a))\,(L_n^\alpha)'(a) - MK_{n-1}^{(1,0)}(a,a)L_n^\alpha(a)}{(1+MK_{n-1}(a,a))\left(1+NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\right) - MN\left(K_{n-1}^{(1,0)}\right)^2(a,a)}, \tag{3-13}$$

siempre que

$$(1+MK_{n-1}(a,a))\left(1+NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\right) - MN\left(K_{n-1}^{(1,0)}\right)^2(a,a) \neq 0, \tag{3-14}$$

lo cual se tiene, por ejemplo, en los casos en que $M>0$ y $N=0$, o cuando $M=0$ y $N>0$, como se muestra, respectivamente, en [7] y [6]. De hecho, mostraremos la siguiente:

Proposición 5 *Definiendo*

$$D_{n,\alpha,a}^{M,N} = (1+MK_{n-1}(a,a))\left(1+NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\right) - MN\left(K_{n-1}^{(1,0)}\right)^2(a,a),$$

para M y N no negativos, se tiene que

$$(1+MK_{n-1}(a,a))\left(1+NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\right) - MN\left(K_{n-1}^{(1,0)}\right)^2(a,a) \geq 1. \tag{3-15}$$

Demostración. En efecto, nótese que $D_{n,\alpha,a}^{M,N}$ puede ser escrito como:

$$D_{n,\alpha,a}^{M,N} = 1 + NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a) + MK_{n-1}(a,a) + MN\left[K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)K_{n-1}(a,a) - \left(K_{n-1}^{(1,0)}\right)^2(a,a)\right],$$

de acuerdo a la representación de $K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)$, $K_{n-1}(a,a)$, se sabe que estos son positivos, y por tanto:

$$1 + NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a) + MK_{n-1}(a,a) \geq 1,$$

así que bastaría mostrar que $K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)K_{n-1}(a,a) - \left(K_{n-1}^{(1,0)}\right)^2(a,a)$, es no negativo, o lo que es igual:

$$\left|K_{n-1}^{(1,0)}(a,a)\right| \leq \left(K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\right)^{1/2}(K_{n-1}(a,a))^{1/2},$$

y de acuerdo a las representaciones de $K_{n-1}(x,y)$ y sus derivadas parciales evaluadas en a, es equivalente a demostrar que:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(L_k^\alpha)'(a)L_k^\alpha(a)}{\|L_k^\alpha\|_\alpha^2}\right| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{((L_k^\alpha)'(a))^2}{\|L_k^\alpha\|_\alpha^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(L_k^\alpha(a))^2}{\|L_k^\alpha\|_\alpha^2}\right)^{1/2}. \tag{3-16}$$

Para mostrar esta última, si se definen los vectores

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \left(\frac{(L_0^\alpha)'(a)}{\|L_0^\alpha\|_\alpha}, \frac{(L_1^\alpha)'(a)}{\|L_1^\alpha\|_\alpha}, \cdots, \frac{(L_{n-1}^\alpha)'(a)}{\|L_{n-1}^\alpha\|_\alpha}\right),\\
\mathbf{v} &= \left(\frac{L_0^\alpha(a)}{\|L_0^\alpha\|_\alpha}, \frac{L_1^\alpha(a)}{\|L_1^\alpha\|_\alpha}, \cdots, \frac{L_{n-1}^\alpha(a)}{\|L_{n-1}^\alpha\|_\alpha}\right),
\end{aligned}$$

y se usa la desigualdad de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz obtenemos:

$$|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|,$$

que es precisamente (3-16). ■ Finalmente los resultados obtenidos en el presente capítulo se resumen en el siguiente

Teorema 6 *Sea* $\left\{\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *la sucesión mónica de polinomios ortogonales con respecto al producto (3-1). Entonces*

$$(x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x) = p(x)L_n^\alpha(x) + q(x)L_{n-1}^\alpha(x),\ n \geq 1,$$

donde $q(x)$ *y* $p(x)$ *son polinomios de grado 1 y 2 respectivamente y están dados por*

$$p(x) = (x-a)^2 + A_{n-1}(x-a) + B_{n-1},$$

y

$$q(x) = C_{n-1}(x-a) + D_{n-1},$$

con

$$A_{n-1} = \frac{-N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\left(L_{n-1}^\alpha\right)'(a) - M\widetilde{L}_n^\alpha(a)L_{n-1}^\alpha(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}, \qquad B_{n-1} = \frac{-N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)L_{n-1}^\alpha(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2} \tag{3-17}$$

$$C_{n-1}=\frac{M\widetilde{L}_n^{\alpha}(a)L_n^{\alpha}(a)+N\left(\widetilde{L}_n^{\alpha}\right)'(a)\left(L_n^{\alpha}\right)'(a)}{\left\|L_{n-1}^{\alpha}\right\|_{\alpha}^{2}}\quad y\quad D_{n-1}=\frac{N\left(\widetilde{L}_n^{\alpha}\right)'(a)L_n^{\alpha}(a)}{\left\|L_{n-1}^{\alpha}\right\|_{\alpha}^{2}},\tag{3-18}$$

donde

$$\widetilde{L}_n^{\alpha}(a)=\frac{L_n^{\alpha}(a)\left(1+NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\right)-\left(L_n^{\alpha}\right)'(a)NK_{n-1}^{(0,1)}(a,a)}{\left(1+MK_{n-1}(a,a)\right)\left(1+NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\right)-MN\left(K_{n-1}^{(1,0)}\right)^{2}(a,a)},\tag{3-19}$$

y

$$\left(\widetilde{L}_n^{\alpha}\right)'(a)=\frac{\left(1+MK_{n-1}(a,a)\right)\left(L_n^{\alpha}\right)'(a)-MK_{n-1}^{(1,0)}(a,a)L_n^{\alpha}(a)}{\left(1+MK_{n-1}(a,a)\right)\left(1+NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\right)-MN\left(K_{n-1}^{(1,0)}\right)^{2}(a,a)}.\tag{3-20}$$

3.3. Caso general

A continuación se considerará el producto (1-3), y la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales $\left\{\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. El procedimiento para encontrar la fórmula de conexión es igual al seguido para obtener (3-7), y esbozaremos los principales detalles del mismo. Se supone que $\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)$ puede ser escrito como combinación de Laguerre clásicos como en (3-2), y se obtiene la fórmula:

$$\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)=L_n^{\alpha}(x)-\sum_{k=0}^{j}M_k\left(\widetilde{L}_n^{\alpha}\right)^{(k)}(a)K_{n-1}^{(0,k)}(x,a),\tag{3-21}$$

que es similar a (3-4) cuando $j=1$. Para hallar las $j+1$ incógnitas $\left(\widetilde{L}_n^{\alpha}\right)^{(k)}(a)$, se deriva j veces (3-21) y se hace $x=a$ en las $j+1$ ecuaciones. Definiendo la matriz (c_{ij}) así:

$$c_{ik}=\begin{cases}1+M_{k-1}K_{n-1}^{(i-1,k-1)}(a,a), & \text{si } i=k\\ M_{k-1}K_{n-1}^{(i-1,k-1)}(a,a), & \text{si } i\neq k,\end{cases}$$

el sistema de ecuaciones tendrá solución siempre y cuando:

$\det(c_{ik})\neq 0.$

Suponiendo lo último y usando el hecho (ver [8] para detalles) que:

$$(x-a)^{j+1}K_{n-1}^{(0,j)}(x,a)=\frac{j!}{\left\|L_{n-1}^{\alpha}\right\|_{\alpha}^{2}}\left[L_n^{\alpha}(x)T_j\left(L_{n-1}^{\alpha}(x;a)\right)-L_{n-1}^{\alpha}(x)T_j\left(L_n^{\alpha}(x;a)\right)\right],$$

donde $T_j\left(L_{n-1}^{\alpha}(x;a)\right)$ y $T_j\left(L_n^{\alpha}(x;a)\right)$ son los polinomios de Taylor de grado j de $L_{n-1}^{\alpha}(x)$ y $L_n^{\alpha}(x)$ respectivamente alrededor de $x=a$, se puede obtener la fórmula de conexión:

$$(x-a)^{j+1}\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)=f_1(x)L_n^{\alpha}(x)+f_2(x)L_{n-1}^{\alpha}(x),\tag{3-22}$$

donde f_1 es un polinomio de grado $j+1$ y f_2 es un polinomio de grado j, y sus expresiones están dadas en términos de los polinomios de Taylor cuyo grado varía de 0 a j, alrededor de $x=a$.

3.4. Representación hipergeométrica

Los polinomios (3-8) y (3-9) en la fórmula de conexión pueden ser escritos como:

$p(x) = x^2 + bx + c,$

donde

$b = A_{n-1} - 2a, \qquad c = a^2 - A_{n-1}a + B_{n-1},$

y

$q(x) = C_{n-1}x + d,$

donde el coeficiente d está representado por la expresión:

$d = D_{n-1} - C_{n-1}a.$

Teniendo en cuenta esta nueva perspectiva de $p(x)$ y $q(x)$, se sustituyen en la fórmula (3-7) para obtener:

$$(x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x) = x^2 L_n^\alpha(x) + bxL_n^\alpha(x) + cL_n^\alpha(x) + C_{n-1}xL_{n-1}^\alpha(x) + dL_{n-1}^\alpha(x),$$

y ahora recurriendo a (2-1), usándola repetidamente y haciendo las simplificaciones necesarias, tenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
(x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x) &= x\left[L_{n+1}^\alpha(x) + (2n+1+\alpha)L_n^\alpha(x) + n(n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x)\right] \\
&\quad + bxL_n^\alpha(x) + cL_n^\alpha(x) + C_{n-1}xL_{n-1}^\alpha(x) + dL_{n-1}^\alpha(x) \\
&= xL_{n+1}^\alpha(x) + (2n+1+\alpha)xL_n^\alpha(x) + n(n+\alpha)xL_{n-1}^\alpha(x) \\
&\quad + bxL_n^\alpha(x) + cL_n^\alpha(x) + C_{n-1}xL_{n-1}^\alpha(x) + dL_{n-1}^\alpha(x) \\
&= xL_{n+1}^\alpha(x) + \left[(2n+1+\alpha)+b\right]xL_n^\alpha(x) \\
&\quad + \left[n(n+\alpha)+C_{n-1}\right]xL_{n-1}^\alpha(x) + cL_n^\alpha(x) + dL_{n-1}^\alpha(x),
\end{aligned}$$

una vez más usamos (2-1) y se factorizan los Laguerre clásicos de los diferentes grados que aparecen y se obtiene:

$$\begin{aligned}
(x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x) &= \left[L_{n+2}^\alpha(x) + (2n+3+\alpha)L_{n+1}^\alpha(x) + (n+1)(n+1+\alpha)L_n^\alpha(x)\right] \\
&\quad + \left[(2n+1+\alpha)+b\right]\left[L_{n+1}^\alpha(x) + (2n+1+\alpha)L_n^\alpha(x)\right. \\
&\quad \left. + n(n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x)\right] + \left[n(n+\alpha)+C_{n-1}\right]\left[L_n^\alpha(x) + (2n-1+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x)\right. \\
&\quad \left. + (n-1)(n-1+\alpha)L_{n-2}^\alpha(x)\right] + cL_n^\alpha(x) + dL_{n-1}^\alpha(x).
\end{aligned}$$

o lo que es igual:

$$\begin{aligned}
(x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x) &= L_{n+2}^\alpha(x) + \left[(2n+3+\alpha)+(2n+1+\alpha)+b\right]L_{n+1}^\alpha(x) \\
&\quad + L_n^\alpha(x)\left[(n+1)(n+1+\alpha) + (2n+1+\alpha+b)(2n+1+\alpha)\right. \\
&\quad \left. + n(n+\alpha) + C_{n-1} + c\right] + L_{n-1}^\alpha(x)\left[((2n+1+\alpha)+b)\,n(n+\alpha)\right. \\
&\quad \left. + (n(n+\alpha)+C_{n-1})(2n-1+\alpha) + d\right] \\
&\quad + (n(n+\alpha)+C_{n-1})(n-1)(n-1+\alpha)L_{n-2}^\alpha(x),
\end{aligned}$$

finalmente,

$$(x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x) = L_{n+2}^{\alpha}(x) + E_n L_{n+1}^{\alpha}(x) + F_n L_n^{\alpha}(x) + G_n L_{n-1}^{\alpha}(x) + H_n L_{n-2}^{\alpha}(x), \tag{3-23}$$

donde,

$$E_n = 4n + 4 + 2\alpha + b,$$

$$F_n = (n+1)(n+1+\alpha) + (2n+1+\alpha+b)(2n+1+\alpha) + n(n+\alpha) + C_{n-1} + c,$$

$$G_n = ((2n+1+\alpha)+b)\, n(n+\alpha) + (n(n+\alpha)+C_{n-1})(2n-1+\alpha) + d,$$

$$H_n = (n(n+\alpha)+C_{n-1})(n-1)(n-1+\alpha).$$

Ahora, usando (2-11) en (3-23) se tiene:

$$\begin{aligned}(x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x) &= (-1)^n(\alpha+1)_{n+2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n-2)_k}{(\alpha+1)_k}\frac{x^k}{k!} - E_n(-1)^n(\alpha+1)_{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n-1)_k}{(\alpha+1)_k}\frac{x^k}{k!}\\ &\quad + F_n(-1)^n(\alpha+1)_n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k}\frac{x^k}{k!} - G_n(-1)^n(\alpha+1)_{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n+1)_k}{(\alpha+1)_k}\frac{x^k}{k!}\\ &\quad + H_n(-1)^n(\alpha+1)_{n+2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n+2)_k}{(\alpha+1)_k}\frac{x^k}{k!}.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el comportamiento del símbolo de Pochhammer y sus propiedades (para $n \geq 2$) se pueden sustituir las siguientes igualdades

$$(\alpha+1)_{n+2} = (\alpha+1)_n\,(\alpha+n+1)\,(\alpha+n+2)\,,$$

$$(\alpha+1)_{n+1} = (\alpha+1)_n\,(\alpha+n+1)\,,$$

$$(\alpha+1)_{n-1} = \frac{(\alpha+1)_n}{(\alpha+n)},$$

$$(\alpha+1)_{n-2} = \frac{(\alpha+1)_n}{(\alpha+n-1)(\alpha+n)},$$

$$(-n-2)_k = \frac{(-n-2)(-n-1)}{(-n+k-2)(-n+k-1)}(-n)_k\,,$$

$$(-n-1)_k = \frac{(-n-1)}{(-n+k-1)}(-n)_k\,,$$

$$(-n+1)_k = \frac{(-n+k)}{-n}(-n)_k\,,$$

$$(-n+2)_k = \frac{(-n+k)(-n+k++1)}{(-n+1)(-n)}(-n)_k\,,$$

para obtener lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
(x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x) &= (-1)^n(\alpha+1)_n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k}\frac{x^k}{k!}\left[\frac{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)(-n-2)(-n-1)}{(-n+k-2)(-n+k-1)}\right.\\
&\quad -E_n\frac{(-n-1)(\alpha+n+1)}{(-n+k-1)}+F_n-G_n\frac{(-n+k)}{-n(\alpha+n)}\\
&\quad \left.+H_n\frac{(-n+k)(-n+k+1)}{(-n+1)(-n)(\alpha+n-1)(\alpha+n)}\right].
\end{aligned}
$$

La idea ahora es expresar el factor dentro de la suma en términos de factores expresados como símbolos de Pochhammer de cierto tipo, y en ese sentido, después de engorrosas operaciones, se puede escribir como un único cociente el cual tiene como numerador la siguiente expresión:

$$
H_nk^4+L_{n1}k^3+L_{n2}k^2+L_{n3}k+L_{n4},
$$

donde la representación de cada coeficiente se describe a continuación:

$$
L_{n1}=G_n(n-1)(n+\alpha-1)-H_n(4n+2),
$$

$$
\begin{aligned}
L_{n2} &= H_n((2n-1)(n+1)+n(n-1)+3n(n+2))\\
&\quad -G_n(3n+3)(n-1)(n+\alpha-1)+nF_n(n+\alpha)(n-1)(n+\alpha-1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{n3} &= G_n((2n+1)(n+2)+n(n+1))(n-1)(n+\alpha-1)\\
&\quad -H_n(((2n-1)(n+1)+n(n-1))(n+2)+n(n-1)(n+1))\\
&\quad -nF_n(n+\alpha)(2n+3)(n-1)(n+\alpha-1)\\
&\quad +nE_n(n+\alpha)(n-1)(n+1)(n+\alpha-1)(n+\alpha+1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{n4} &= nH_n(n-1)(n+1)(n+2)-nG_n(n-1)(n+1)(n+2)(n+\alpha-1)\\
&\quad +nF_n(n+\alpha)(n-1)(n+1)(n+2)(n+\alpha-1)\\
&\quad -nE_n(n+\alpha)(n-1)(n+1)(n+2)(n+\alpha-1)(n+\alpha+1)\\
&\quad +(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)(-n-2)(-n-1)(-n+1)(-n)(\alpha+n-1)(\alpha+n),
\end{aligned}
$$

y el denominador se puede escribir de la siguiente forma:

$$
d_{n,k}=(-n+k-2)(-n+k-1)(-n+1)(-n)(\alpha+n-1)(\alpha+n),
$$

así que finalmente se obtiene el siguiente resultado

$$
(x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)=(-1)^n(\alpha+1)_n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k}\frac{x^k}{k!}\left[\frac{H_nk^4+L_{n1}k^3+L_{n2}k^2+L_{n3}k+L_{n4}}{d_{n,k}}\right] \tag{3-24}
$$

$$= H_n(-1)^n(\alpha+1)_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k} \frac{x^k}{k!} \left[\frac{k^4 + \frac{L_{n1}}{H_n}k^3 + \frac{L_{n2}}{H_n}k^2 + \frac{L_{n3}}{H_n}k + \frac{L_{n4}}{H_n}}{d_{n,k}} \right].$$

El polinomio de grado 4 y variable k se puede factorizar (ver [12] por ejemplo) y tenemos:

$$\begin{aligned}(x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x) &= H_n(-1)^n(\alpha+1)_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k} \frac{x^k}{k!} \\ &\times \left[\tfrac{(k-e_1)(k-e_2)(k-e_3)(k-e_4)}{(-n+k-2)(-n+k-1)(-n+1)(-n)(\alpha+n-1)(\alpha+n)} \right],\end{aligned} \tag{3-25}$$

con

$$e_i = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 - 4(P-R)}}{2} - \frac{L_{n1}}{4H_n}, \qquad i = 1, 2,$$

y

$$e_j = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - 4(P+R)}}{2} - \frac{L_{n1}}{4H_n}, \qquad j = 3, 4,$$

si definimos l, t, y r como:

$$l = \frac{8\frac{L_{n2}}{H_n} - 3\left(\frac{L_{n1}}{H_n}\right)^2}{8}, \qquad t = \frac{8\frac{L_{n3}}{H_n} - 4\frac{L_{n1}L_{n2}}{(H_n)^2} + \left(\frac{L_{n1}}{H_n}\right)^3}{8},$$

$$r = \frac{256\frac{L_{n4}}{H_n} - 64\frac{L_{n1}L_{n3}}{(H_n)^2} + 16\frac{(L_{n1})^2 L_{n2}}{(H_n)^3} - 3\left(\frac{L_{n1}}{H_n}\right)^4}{256}$$

P es una raíz de la ecuación

$$P^3 - \frac{l}{2}P^2 - rP + \frac{4lr - t^2}{8} = 0,$$

y Q y R se obtienen a partir de las ecuaciones

$$-2QR = t, \quad \text{y} \qquad P^2 - R^2 = r.$$

Se puede mostrar a través de ciertas manipulaciones algebraicas que:

$$\frac{(k-e_1)(k-e_2)}{k-(n+1)} = \left(\frac{e_1 e_2 (1-e_1)_k (1-e_2)_k (-1-n)_k}{(n+1)(-e_1)_k(-e_2)_k(-n)_k} \right),$$

y

$$\frac{(k-e_3)(k-e_4)}{k-(n+2)} = \left(\frac{e_3 e_4 (1-e_3)_k (1-e_4)_k (-2-n)_k}{(n+2)(-e_3)_k(-e_4)_k(-n-1)_k} \right),$$

luego (3-25) queda expresado de la siguiente manera:

$$(x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x) = C_{n,\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(1-e_1)_k\,(1-e_2)_k\,(1-e_3)_k\,(1-e_4)_k\,(-2-n)_k}{(\alpha+1)_k(-e_1)_k(-e_2)_k(-e_3)_k(-e_4)_k}\right)\frac{x^k}{k!},$$

o lo que es igual:

$$\widetilde{L}_n^{\alpha}(x) = \left(\frac{C_{n,\alpha}}{(x-a)^2}\right)\ {}_5F_5\left(1-e_1,1-e_2,1-e_3,1-e_4,-2-n;\alpha+1,-e_1,-e_2,-e_3,-e_4;x\right), \tag{3-26}$$

con

$$C_{n,\alpha} = \frac{e_1e_2e_3e_4H_n(-1)^n(\alpha+1)_n}{(-n+1)\,(-n)\,(\alpha+n-1)\,(\alpha+n)\,(n+1)\,(n+2)}.$$

Los anteriores resultados se resumen en el siguiente

Teorema 7 *Para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$\widetilde{L}_n^{\alpha}(x) = \left(\frac{C_{n,\alpha}}{(x-a)^2}\right)\ {}_5F_5\left(\left.\begin{array}{c}1-e_1,1-e_2,1-e_3,1-e_4,-2-n\\ \alpha+1,-e_1,-e_2,-e_3,-e_4\end{array}\right|x\right),$$

donde

$$C_{n,\alpha} = \frac{e_1e_2e_3e_4H_n(-1)^n(\alpha+1)_n}{(-n+1)\,(-n)\,(\alpha+n-1)\,(\alpha+n)\,(n+1)\,(n+2)}.$$

En el caso particular en que $N=0$, se obtiene una representación en términos de una función hipergeométrica de la forma

$$\widetilde{L}_n^{\alpha}(x) = \left(\frac{C_{n,\alpha}}{(x-a)}\right)\ {}_3F_3\left(a,b,c_n;d,e,f_{\alpha};x\right),$$

cuya deducción puede verse en [**?**].

3.5. Caso general

Para deducir la representación hipergeométrica en el caso general el procedimiento a seguir es el mismo que antes, teniendo en cuenta lo siguiente: los polinomios f_1 y f_2 en (3-22) deben ser escritos en la forma:

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{j+1} a_k x^k,$$

y

$$f_2(x) = \sum_{k=0}^{j} b_k x^k.$$

Usando reiteradamente (2-1) se puede obtener una expresión, análoga a (3-23), de la forma:

$$(x-a)^{j+1}\widetilde{L}_n^{\alpha}(x) = L_{n+j+1}^{\alpha}(x) + A_{n+j}L_{n+j}^{\alpha}(x) + \cdots + A_{n-j}L_{n-j}^{\alpha}(x) + A_{n-(j+1)}L_{n-(j+1)}^{\alpha},$$

donde se espera que los coeficientes A_i dependan de α, n, y los coeficientes a_k y b_k. Después de esto se hacen manipulaciones algebraicas similares a las hechas luego de obtener (3-23) para obtener una expresión como:

$$(x-a)^{j+1}\widetilde{L}_n^{\alpha}(x) = V_n(-1)^n(\alpha+1)_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k}\frac{x^k}{k!} t_{n,k} \frac{P(k)}{\prod_{i=1}^{j+1}[k-(n+i)]},$$

que es similar a la obtenida en (3-24), donde V_n y $t_{n,k}$ son coeficientes que son consecuencia directa de las manipulaciones algebraicas ya descritas, y $P(k)$ es un polinomio de variable k y de grado $2(j{+}1)$. Ahora, si $P(k)$ tiene $2(j{+}1)$ ceros reales, se pueden hacer las manipulaciones ya hechas en el caso del polinomio de grado 4 obtenido antes, o de grado 2 como se ve en [7], para escribirlo en la forma:

$$P(k) = \prod_{i=1}^{2(j+1)} (k - e_i),$$

donde e_l es el $l-$ésimo cero de $P(k)$, y así la expresión

$$\frac{P(k)}{\prod_{i=1}^{j+1}[k-(n+i)]},$$

podría verse como un único producto de $j+1$ factores h_l, y nuevamente después de usar la definición y propiedades del símbolo de Pochhammer, cada uno de ellos tendría la forma:

$$h_l = e_{2l-1}e_{2l}\frac{(1-e_{2l-1})_k(1-e_{2l})_k(-l-n)_k}{(n+l)(e_{2l-1})_k(e_{2l})_k(-n-l+1)}, \qquad l = 1, 2, \cdots, j+1.$$

Y finalmente así se podría obtener una representación hipergeométrica cuya estructura será la siguiente:

$$\widetilde{L}_n^{\alpha}(x) = \left(\frac{D_{n,\alpha}}{(x-a)^{j+1}}\right) {}_{2j+3}F_{2j+3}\left(\begin{array}{c} (1-e_1), \cdots, \left(1-e_{2(j+1)}\right), \left(-(j+1)-n\right) \\ (\alpha+1), (-e_1), \cdots, \left(-e_{2(j+1)}\right) \end{array} \middle| \, x\right).$$

4. Ecuación holonómica

4.1. Introducción

Es bien sabido que los polinomios ortogonales clásicos, (Jacobi, Laguerre y Hermite), son los únicos que satisfacen una ecuación diferencial de segundo orden de la forma:

$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda_n y = 0,$

donde $\sigma(x)$ es un polinomio de grado no mayor a 2, $\tau(x)$ es un polinomio de grado 1 y λ_n es un número real. Dado que los polinomios perturbados se construyen a partir de los polinomios de Laguerre clásicos, en esta sección deduciremos una ecuación diferencial de segundo orden, (conocida en la literatura como *ecuación holonómica),* que satisfagan, y en la cual los coeficientes conservarán su carácter polinómico. Al final del capítulo se esbozará el procedimiento análogo ha seguir en el caso general.

4.2. Ecuación holonómica

Para encontrar la ecuación diferencial holónomica empezaremos buscando ecuaciones diferenciales satisfechas por los polinomios:

$u(x) = p(x)L_n^{\alpha}(x),$

y

$v(x) = q(x)L_{n-1}^{\alpha}(x).$

Derivando $u(x)$ se tiene lo siguiente:

$u'(x) = p'(x)L_n^{\alpha}(x) + p(x)\left(L_n^{\alpha}\right)'(x),$

y para su segunda derivada

$u''(x) = p''(x)L_n^{\alpha}(x) + 2p'(x)\left(L_n^{\alpha}\right)'(x) + p(x)\left(L_n^{\alpha}\right)''(x).$

Entonces multiplicando a $u(x)$, su primera y segunda derivada por n, $(\alpha + 1 - x)$ y x respectivamente, se tienen las igualdades:

$$\begin{aligned}
nu(x) &= np(x)L_n^{\alpha}(x) \\
(\alpha+1-x)\,u'(x) &= (\alpha+1-x)\,p'(x)L_n^{\alpha}(x) + (\alpha+1-x)\,p(x)\left(L_n^{\alpha}\right)'(x) \\
xu''(x) &= xp''(x)L_n^{\alpha}(x) + 2xp'(x)\left(L_n^{\alpha}\right)'(x) + xp(x)\left(L_n^{\alpha}\right)''(x),
\end{aligned}$$

las cuales sumamos miembro a miembro para obtener:

$$xu''(x) + (\alpha+1-x)\,u'(x) + nu(x) =$$

$$xp''(x)L_n^\alpha(x) + 2xp'(x)\left(L_n^\alpha\right)'(x) + xp(x)\left(L_n^\alpha\right)''(x) + (\alpha+1-x)\,p'(x)L_n^\alpha(x)$$
$$+ (\alpha+1-x)\,p(x)\left(L_n^\alpha\right)'(x) + np(x)L_n^\alpha(x).$$

Usando (2-6) se tiene:

$$xp(x)\left(L_n^\alpha\right)''(x) + (\alpha+1-x)\,p(x)\left(L_n^\alpha\right)'(x) + np(x)L_n^\alpha(x) = 0,$$

por tanto

$$xu''(x)+(\alpha+1-x)\,u'(x)+nu(x) = xp''(x)L_n^\alpha(x)+2xp'(x)\left(L_n^\alpha\right)'(x)+(\alpha+1-x)\,p'(x)L_n^\alpha(x),$$

y teniendo en cuenta la representación de $u(x)$, se hace la respectiva sustitución para obtener finalmente

$$\begin{aligned} & x\left(p(x)L_n^\alpha(x)\right)'' + (\alpha+1-x)\left(p(x)L_n^\alpha(x)\right)' + np(x)L_n^\alpha(x) \\ = \ & xp''(x)L_n^\alpha(x) + 2xp'(x)\left(L_n^\alpha\right)'(x) + (\alpha+1-x)\,p'(x)L_n^\alpha(x). \end{aligned} \tag{4-1}$$

Por otra parte teniendo en cuenta la representación de $v(x)$, se tiene que sus dos primeras derivadas son:

$$v'(x) = q'(x)L_{n-1}^\alpha(x) + q(x)\left(L_{n-1}^\alpha\right)'(x),$$

y

$$v''(x) = 2q'(x)\left(L_{n-1}^\alpha\right)'(x) + q(x)\left(L_{n-1}^\alpha\right)''(x),$$

(q es un polinomio de grado 1, según (3-9), por tanto su segunda derivada es nula) y entonces multiplicando por $n-1$, $(\alpha+1-x)$ y x, respectivamente, se tienen las igualdades:

$$\begin{aligned} (n-1)\,v(x) &= (n-1)\,q(x)L_{n-1}^\alpha(x) \\ (\alpha+1-x)\,v'(x) &= (\alpha+1-x)\,q'(x)L_{n-1}^\alpha(x) + (\alpha+1-x)\,q(x)\left(L_{n-1}^\alpha\right)'(x) \\ xv''(x) &= 2xq'(x)\left(L_{n-1}^\alpha\right)'(x) + xq(x)\left(L_{n-1}^\alpha\right)''(x). \end{aligned}$$

Sumándolas miembro a miembro se obtiene:

$$xv''(x) + (\alpha+1-x)\,v'(x) + (n-1)\,v(x) =$$

$$\begin{aligned} = \ & (n-1)\,q(x)L_{n-1}^\alpha(x) + (\alpha+1-x)\,q'(x)L_{n-1}^\alpha(x) + (\alpha+1-x)\,q(x)\left(L_{n-1}^\alpha\right)'(x) \\ & +2xq'(x)\left(L_{n-1}^\alpha\right)'(x) + xq(x)\left(L_{n-1}^\alpha\right)''(x) \end{aligned}$$

y de nuevo, por (2-6) se tiene que:

$$xq(x)\left(L_{n-1}^{\alpha}\right)''(x)+(\alpha+1-x)\,q(x)\left(L_{n-1}^{\alpha}\right)'(x)+(n-1)\,q(x)L_{n-1}^{\alpha}(x)=0,$$

luego haciendo la respectiva cancelación resulta:

$$xv''(x)+(\alpha+1-x)\,v'(x)+(n-1)\,v(x)=(\alpha+1-x)\,q'(x)L_{n-1}^{\alpha}(x)+2xq'(x)\left(L_{n-1}^{\alpha}\right)'(x),$$

o lo que es igual

$$\begin{aligned}&x\left(q(x)L_{n-1}^{\alpha}(x)\right)''+(\alpha+1-x)\left(q(x)L_{n-1}^{\alpha}(x)\right)'+(n-1)\,q(x)L_{n-1}^{\alpha}(x)\\ =\;&(\alpha+1-x)\,q'(x)L_{n-1}^{\alpha}(x)+2xq'(x)\left(L_{n-1}^{\alpha}\right)'(x).\end{aligned}\tag{4-2}$$

Sumando (4-1) y (4-2) se obtiene la igualdad:

$$\begin{aligned}&x\left(p(x)L_{n}^{\alpha}(x)+q(x)L_{n-1}^{\alpha}(x)\right)''+(\alpha+1-x)\left(p(x)L_{n}^{\alpha}(x)+q(x)L_{n-1}^{\alpha}(x)\right)'\\ =\;&-np(x)L_{n}^{\alpha}(x)+xp''(x)L_{n}^{\alpha}(x)+2xp'(x)\left(L_{n}^{\alpha}\right)'(x)\\ &+(\alpha+1-x)\,p'(x)L_{n}^{\alpha}(x)-(n-1)\,q(x)L_{n-1}^{\alpha}(x)\\ &+(\alpha+1-x)\,q'(x)L_{n-1}^{\alpha}(x)+2xq'(x)\left(L_{n-1}^{\alpha}\right)'(x),\end{aligned}$$

y usando (3-7) tenemos:

$$\begin{aligned}&x\left((x-a)^2\widetilde{L}_{n}^{\alpha}(x)\right)''+(\alpha+1-x)\left((x-a)^2\widetilde{L}_{n}^{\alpha}(x)\right)'\\ =\;&L_{n}^{\alpha}(x)\left(-np(x)+xp''(x)+(\alpha+1-x)\,p'(x)\right)+L_{n-1}^{\alpha}(x)\left(-(n-1)\,q(x)+(\alpha+1-x)\,q'(x)\right)\\ &+2xq'(x)\left(L_{n-1}^{\alpha}\right)'(x)+2xp'(x)\left(L_{n}^{\alpha}\right)'(x).\end{aligned}\tag{4-3}$$

La idea ahora es expresar $L_{n}^{\alpha}(x)$, $L_{n-1}^{\alpha}(x)$ y sus primeras derivadas en términos de $\widetilde{L}_{n}^{\alpha}(x)$ y sus derivadas de primer y segundo orden si es el caso. Para tal fin derivamos (3-7) y multiplicando por x para obtener:

$$x\left((x-a)^2\widetilde{L}_{n}^{\alpha}(x)\right)'=xp'(x)L_{n}^{\alpha}(x)+xp(x)\left(L_{n}^{\alpha}\right)'(x)+xq'(x)L_{n-1}^{\alpha}(x)+xq(x)\left(L_{n-1}^{\alpha}\right)'(x).$$

Ahora usando (2-5) resulta:

$$\begin{aligned}&x\left((x-a)^2\widetilde{L}_{n}^{\alpha}(x)\right)'=\\ \\ =\;&xp'(x)L_{n}^{\alpha}(x)+p(x)\left[nL_{n}^{\alpha}(x)+n(n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x)\right]\\ &+xq'(x)L_{n-1}^{\alpha}(x)+q(x)\left[(n-1)L_{n-1}^{\alpha}(x)+(n-1)(n-1+\alpha)L_{n-2}^{\alpha}(x)\right]\\ =\;&L_{n-1}^{\alpha}(x)\left[p(x)n(n+\alpha)+xq'(x)+q(x)(n-1)\right]\\ &+q(x)(n-1)(n-1+\alpha)L_{n-2}^{\alpha}(x)+L_{n}^{\alpha}(x)\left[xp'(x)+p(x)n\right],\end{aligned}$$

y usando (2-1) obtenemos la relación:

$$(n-1)(n-1+\alpha)L_{n-2}^{\alpha}(x)=xL_{n-1}^{\alpha}(x)-L_{n}^{\alpha}(x)-(2n-1+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x),$$

luego,

$$\begin{aligned} x\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)' &= L_{n-1}^\alpha(x)\left[p(x)n(n+\alpha)+xq'(x)+q(x)(n-1)\right] \\ &\quad +q(x)\left(xL_{n-1}^\alpha(x)-L_n^\alpha(x)-(2n-1+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x)\right) \\ &\quad +L_n^\alpha(x)\left[xp'(x)+p(x)n\right], \end{aligned}$$

o lo que es igual:

$$\begin{aligned} x\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)' &= L_n^\alpha(x)\left[xp'(x)+p(x)n-q(x)\right] \\ &\quad +L_{n-1}^\alpha(x)\left[p(x)n(n+\alpha)+xq'(x)+q(x)(n-1)\right. \\ &\quad \left. +xq(x)-q(x)(2n-1+\alpha)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)' &= L_n^\alpha(x)\left[xp'(x)+p(x)n-q(x)\right] \\ &\quad +L_{n-1}^\alpha(x)\left[p(x)n(n+\alpha)+xq'(x)-q(x)\left(n-x+\alpha\right)\right]. \end{aligned} \tag{4-4}$$

La ecuación (4-4) junto a (3-7) constituyen un sistema de 2 ecuaciones, dos incógnitas, $L_n^\alpha(x)$ y $L_{n-1}^\alpha(x)$. Si se tienen en cuenta los siguientes determinantes:

$$\begin{aligned} Q_{n,\alpha}(x) &= \det\begin{pmatrix} xp'(x)+p(x)n-q(x) & p(x)n(n+\alpha)+xq'(x)-q(x)\left(n-x+\alpha\right) \\ p(x) & q(x) \end{pmatrix} \\ &= xp'(x)q(x)+p(x)q(x)n-q^2(x)-p^2(x)n(n+\alpha)-xp(x)q'(x)+p(x)q(x)\left(n-x+\alpha\right) \\ &= x(p'(x)q(x)-p(x)q'(x))-q^2(x)-p^2(x)n(n+\alpha)+p(x)q(x)(2n-x+\alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{L_n^\alpha(x)} &= \det\begin{pmatrix} x\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)' & p(x)n(n+\alpha)+xq'(x)-q(x)\left(n-x+\alpha\right) \\ (x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x) & q(x) \end{pmatrix} \\ &= x\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)'q(x)-(x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x)\left(p(x)n(n+\alpha)+xq'(x)-q(x)\left(n-x+\alpha\right)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{L_{n-1}^\alpha(x)} &= \det\begin{pmatrix} xp'(x)+p(x)n-q(x) & x\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)' \\ p(x) & (x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x) \end{pmatrix} \\ &= \left(xp'(x)+p(x)n-q(x)\right)(x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x)-xp(x)\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)', \end{aligned}$$

y si se supone que

$$Q_{n,\alpha}(x)\neq 0, \tag{4-5}$$

$L_n^\alpha(x)$ se puede representar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} L_n^\alpha(x) &= \frac{x\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)' q(x) - (x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x)\left(p(x)n(n+\alpha) + xq'(x) - q(x)\left(n-x+\alpha\right)\right)}{Q_{n,\alpha}(x)} \\ &= \frac{x\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)' q(x)}{Q_{n,\alpha}(x)} \\ &\quad - \frac{(x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x)\left(p(x)n(n+\alpha) + xq'(x) - q(x)\left(n-x+\alpha\right)\right)}{Q_{n,\alpha}(x)}, \end{aligned}$$

que también podemos escribir como:

$$L_n^\alpha(x) = S_1(x;n)\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)' + S_2(x;n)(x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x) \tag{4-6}$$

donde las funciones $S_1(x;n)$ y $S_2(x;n)$ vienen dadas por las expresiones:

$$S_1(x;n) = \frac{xq(x)}{Q_{n,\alpha}(x)}, \tag{4-7}$$

y

$$S_2(x;n) = -\frac{\left(p(x)n(n+\alpha) + xq'(x) - q(x)\left(n-x+\alpha\right)\right)}{Q_{n,\alpha}(x)}. \tag{4-8}$$

Análogamente podemos encontrar una expresión para $L_{n-1}^\alpha(x)$ de la forma:

$$L_{n-1}^\alpha(x) = \frac{\left(xp'(x) + p(x)n - q(x)\right)(x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x) - xp(x)\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)'}{Q_{n,\alpha}(x)},$$

o lo que es igual:

$$L_{n-1}^\alpha(x) = T_1(x;n)(x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x) + T_2(x;n)\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)', \tag{4-9}$$

donde las funciones $T_1(x;n)$ y $T_2(x;n)$ están dadas por las siguientes expresiones:

$$T_1(x;n) = \frac{\left(xp'(x) + p(x)n - q(x)\right)}{Q_{n,\alpha}(x)}, \tag{4-10}$$

y

$$T_2(x;n) = \frac{-xp(x)}{Q_{n,\alpha}(x)}. \tag{4-11}$$

Sustituyendo (4-6), (4-9) y sus derivadas en (4-3) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
& x\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)''+(\alpha+1-x)\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)' \\
= & \left(S_1(x;n)\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)'\right. \\
& \left.+S_2(x;n)(x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)\left(-np(x)+xp''(x)+(\alpha+1-x)\,p'(x)\right) \\
& +\left(T_1(x;n)(x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)+T_2(x;n)\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)'\right)\left((1-n)q(x)+(\alpha+1-x)\,q'(x)\right) \\
& +2xq'(x)\left(T_1(x;n)\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)'+(T_1)'(x;n)(x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right. \\
& \left.+T_2(x;n)\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)''+(T_2)'(x;n)\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)'\right) \\
& +2xp'(x)\left(S_1(x;n)\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)''+(S_1)'(x;n)\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)'\right. \\
& \left.+S_2(x;n)\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)'+(S_2)'(x;n)(x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right).
\end{aligned}
$$

Factorizando,

$$
\begin{aligned}
& \left((x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)''\left(x-2xq'(x)T_2(x;n)-2xp'(x)S_1(x;n)\right) \\
& +\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)'\left[(\alpha+1-x)-S_1(x;n)\left(-np(x)+xp''(x)+(\alpha+1-x)\,p'(x)\right)\right. \\
& -T_2(x;n)\left((1-n)q(x)+(\alpha+1-x)\,q'(x)\right)-2xq'(x)\,(T_2)'(x;n) \\
& \left.-2xq'(x)T_1(x;n)-2xp'(x)\,(S_1)'(x;n)-2xp'(x)S_2(x;n)\right] \\
= & (x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\left[\left(-np(x)+xp''(x)+(\alpha+1-x)\,p'(x)\right)S_2(x;n)\right. \\
& +T_1(x;n)\left((1-n)q(x)+(\alpha+1-x)\,q'(x)\right)+2xq'(x)\,(T_1)'(x;n) \\
& \left.+2xp'(x)\,(S_2)'(x;n)\right].
\end{aligned}
$$

Dado que:

$$
\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)'=2(x-a)\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)+(x-a)^2\left(\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)', \tag{4-12}
$$

y

$$
\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)''=2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)+4(x-a)\left(\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)'+(x-a)^2\left(\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)'', \tag{4-13}
$$

se obtiene finalmente la ecuación diferencial de segundo orden satisfecha por los polinomios $\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)$

$$
a(x;n)\,(\phi(x))''+b(x;n)\,(\phi(x))'+c(x;n)\phi(x)=0 \tag{4-14}
$$

donde los coeficientes de la ecuación están dados por las siguientes fórmulas:

$$a(x;n) = (x-a)^2\left[x - 2xq'(x)T_2(x;n) - 2xp'(x)S_1(x;n)\right]$$

$$\begin{aligned}
b(x;n) \;=\; & (x-a)^2\left[(\alpha+1-x) - S_1(x;n)\left(-np(x) + xp''(x) + (\alpha+1-x)\,p'(x)\right)\right.\\
& -T_2(x;n)\left((1-n)q(x) + (\alpha+1-x)\,q'(x)\right) - 2xq'(x)\left(T_2\right)'(x;n)\\
& \left.-2xq'(x)T_1(x;n) - 2xp'(x)\left(S_1\right)'(x;n) - 2xp'(x)S_2(x;n)\right]\\
& +4(x-a)\left(x - 2xq'(x)T_2(x;n) - 2xp'(x)S_1(x;n)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(x;n) \;=\; & (x-a)^2\left[\left(np(x) - xp''(x) - (\alpha+1-x)\,p'(x)\right)S_2(x;n)\right.\\
& -T_1(x;n)\left((1-n)q(x) + (\alpha+1-x)\,q'(x)\right) - 2xq'(x)\left(T_1\right)'(x;n)\\
& \left.-2xp'(x)\left(S_2\right)'(x;n)\right] + 2(x-a)\left[(\alpha+1-x)\right.\\
& -S_1(x;n)\left(-np(x) + xp''(x) + (\alpha+1-x)\,p'(x)\right)\\
& -T_2(x;n)\left((1-n)q(x) + (\alpha+1-x)\,q'(x)\right)\\
& \left.-2xq'(x)T_1(x;n) - 2xq'(T_2)'(x;n) - 2xp'(x)\left(S_1\right)'(x;n) - 2xp'(x)S_2(x;n)\right]\\
& +2\left(\left(x - 2xq'(x)T_2(x;n) - 2xp'(x)\right)S_1(x;n)\right)).
\end{aligned}$$

Ahora encontraremos una forma simplificada para los coeficientes de la ecuación diferencial de segundo orden obtenida, en el sentido que se desea conocer su naturaleza polinómica, así que se trabajará en las expresiones de $a(x;n)$, $b(x;n)$ y $c(x;n)$ que ya se tienen. En primer lugar, usando las fórmulas (4-7) y (4-11), $a(x;n)$ puede ser reescrito de la siguiente manera:

$$a(x;n) = (x-a)^2\left[x - 2xq'(x)\left[\frac{-xp(x)}{Q_{n,\alpha}(x)}\right] - 2xp'(x)\left[\frac{xq(x)}{Q_{n,\alpha}(x)}\right]\right],$$

que a continuación simplificaremos

$$\begin{aligned}
a(x;n) &= (x-a)^2\left[x + \frac{2x^2q'(x)p(x)}{Q_{n,\alpha}(x)} - \frac{2x^2p'(x)q(x)}{Q_{n,\alpha}(x)}\right]\\
&= (x-a)^2\left[\frac{xQ_{n,\alpha}(x) + 2x^2q'(x)p(x) - 2x^2p'(x)q(x)}{Q_{n,\alpha}(x)}\right],
\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta la representación de $Q_{n,\alpha}(x)$, el término $xQ_{n,\alpha}(x)$ puede reescribirse de la forma:

$$xQ_{n,\alpha}(x) = x^2p'(x)q(x) - x^2p(x)q'(x) - xq^2(x) - xp^2(x)n(n+\alpha) + xp(x)q(x)(2n-x+\alpha),$$

por tanto $a(x;n)$ se puede reducir a:

$$\begin{aligned}
a(x;n) \;=\; & \frac{(x-a)^2}{Q_{n,\alpha}(x)}\left[x^2p(x)q'(x) - x^2p'(x)q(x) - xq^2(x)\right.\\
& \left.-xp^2(x)n(n+\alpha) + xp(x)q(x)(2n-x+\alpha)\right]
\end{aligned} \tag{4-15}$$

Por otra parte, buscaremos reducir $b(x;n)$, de la misma forma en que se simplificó $a(x;n)$. Para esto, primero encontramos expresiones para $(S_1)'(x;n)$ y $(T_2)'(x;n)$ usando (4-7) y (4-11):

$$(S_1)'(x;n) = \frac{Q_{n,\alpha}(x)\left(q(x)+xq'(x)\right) - \left(Q_{n,\alpha}\right)'(x)xq(x)}{\left[Q_{n,\alpha}(x)\right]^2},$$

y

$$(T_2)'(x;n) = \frac{\left(Q_{n,\alpha}\right)'(x)xp(x) - Q_{n,\alpha}(x)\left(p(x)+xp'(x)\right)}{\left[Q_{n,\alpha}(x)\right]^2}.$$

Ahora, usando también las expresiones establecidas para S_1, S_2, T_1, T_2 y lo obtenido para $a(x;n)$, el coeficiente $b(x;n)$ puede ser escrito como se describe a continuación:

$$\begin{aligned}
b(x;n) \;=\;& (x-a)^2\Bigg[(\alpha+1-x) - \left[\frac{xq(x)}{Q_{n,\alpha}(x)}\right]\left(-np(x)+xp''(x)+(\alpha+1-x)\,p'(x)\right)\\
&-\left[\frac{-xp(x)}{Q_{n,\alpha}(x)}\right]\left((1-n)q(x)+(\alpha+1-x)\,q'(x)\right)\\
&-2xq'(x)\left[\tfrac{(Q_{n,\alpha})'(x)xp(x)-Q_{n,\alpha}(x)(p(x)+xp'(x))}{[Q_{n,\alpha}(x)]^2}\right] - 2xq'(x)\left[\tfrac{(xp'(x)+p(x)n-q(x))}{Q_{n,\alpha}(x)}\right]\\
&-2xp'(x)\left[\tfrac{Q_{n,\alpha}(x)(q(x)+xq'(x))-(Q_{n,\alpha})'(x)xq(x)}{[Q_{n,\alpha}(x)]^2}\right]\\
&+2xp'(x)\left[\tfrac{(p(x)n(n+\alpha)+xq'(x)-q(x)(n-x+\alpha))}{Q_{n,\alpha}(x)}\right]\Bigg]\\
&+4(x-a)\left[\tfrac{xQ_{n,\alpha}(x)+2x^2q'(x)p(x)-2x^2p'(x)q(x)}{Q_{n,\alpha}(x)}\right],
\end{aligned}$$

y expresando en términos de un denominador común se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned}
b(x;n) \;=\;& \frac{1}{\left[Q_{n,\alpha}(x)\right]^2}(x-a)^2\left[(\alpha+1-x)\left[Q_{n,\alpha}(x)\right]^2\right.\\
&-Q_{n,\alpha}(x)xq(x)\left(-np(x)+xp''(x)+(\alpha+1-x)\,p'(x)\right)\\
&+xp(x)Q_{n,\alpha}(x)\left((1-n)q(x)+(\alpha+1-x)\,q'(x)\right)\\
&-2xq'(x)\left[\left(Q_{n,\alpha}\right)'(x)xp(x)-Q_{n,\alpha}(x)\left(p(x)+xp'(x)\right)\right]\\
&-2xq'(x)\left(xp'(x)+p(x)n-q(x)\right)Q_{n,\alpha}(x)\\
&-2xp'(x)\left[Q_{n,\alpha}(x)\left(q(x)+xq'(x)\right)-\left(Q_{n,\alpha}\right)'(x)xq(x)\right]\\
&\left.+2xp'(x)\left(p(x)n(n+\alpha)+xq'(x)-q(x)\left(n-x+\alpha\right)\right)Q_{n,\alpha}(x)\right]\\
&+4(x-a)\frac{1}{\left[Q_{n,\alpha}(x)\right]^2}\left[xQ_{n,\alpha}(x)+2x^2q'(x)p(x)-2x^2p'(x)q(x)\right]Q_{n,\alpha}(x),
\end{aligned}$$

factorizando $Q_{n,\alpha}(x)$ y su derivada se obtiene:

$$\begin{aligned} b(x;n) &= \frac{1}{[Q_{n,\alpha}(x)]^2}(x-a)^2 \left[Q_{n,\alpha}(x)\left(xnqp - x^2p''q - x(\alpha+1-x)p'q + x(1-n)pq\right.\right. \\ & +x(\alpha+1-x)pq' + 2xq'p + 2x^2p'q' - 2x^2p'q' - 2xpq'n + 2xqq' - 2xp'q - 2x^2p'q' \\ & \left.\left. + 2xp'pn(n+\alpha) + 2x^2p'q' - 2xp'q(n-x+\alpha)\right) + (Q_{n,\alpha})'(x)\left(\left[2x^2pq - 2x^2q'p\right]\right)\right] \\ & +4(x-a)\frac{1}{[Q_{n,\alpha}(x)]^2}\left[xQ_{n,\alpha}(x) + 2x^2q'(x)p(x) - 2x^2p'(x)q(x)\right]Q_{n,\alpha}(x), \end{aligned}$$

y reduciendo algunos términos semejantes se obtiene:

$$\begin{aligned} b(x;n) &= \frac{1}{[Q_{n,\alpha}(x)]^2}(x-a)^2 \left[Q_{n,\alpha}(x)\left(-x^2p''q - x(\alpha+1-x)p'q + xpq\right.\right. \\ & +x(\alpha+1-x)pq' + 2xpq' - 2xpq'n + 2xqq' - 2xp'q \\ & +2xp'pn(n+\alpha) - 2xp'q(n-x+\alpha))] \\ & +4(x-a)\frac{1}{[Q_{n,\alpha}(x)]^2}\left[xQ_{n,\alpha}(x) + 2x^2q'(x)p(x) - 2x^2p'(x)q(x)\right]Q_{n,\alpha}(x). \end{aligned} \tag{4-16}$$

Por último, repetimos lo hecho anteriormente para simplificar el coeficiente $c(x;n)$ usando las expresiones ya obtenidas para S_1, S_2, T_1, T_2, $(S_1)'$, $(T_2)'$ y conociendo las siguientes derivadas:

$$(T_1)'(x;n) = \frac{Q_{n,\alpha}(x)\left(xp''(x) + p'(x)(n+1) - q'(x)\right) - (Q_{n,\alpha})'(x)\left(xp'(x) + p(x)n - q(x)\right)}{[Q_{n,\alpha}(x)]^2},$$

y

$$\begin{aligned} (S_2)'(x;n) &= \frac{1}{[Q_{n,\alpha}(x)]^2}\left[(Q_{n,\alpha})'(x)\left(p(x)n(n+\alpha) + xq'(x) - q(x)(n-x+\alpha)\right)\right. \\ & \left. -Q_{n,\alpha}(x)\left(p'(x)n(n+\alpha) + q'(x) + xq''(x) - q'(x)(n-x+\alpha) + q(x)\right)\right] \end{aligned}$$

se hacen las sustituciones respectivas en la fórmula que se tiene para $c(x;n)$, para obtener los siguientes resultados:

$$
\begin{aligned}
c(x;n) &= (x-a)^2 \left[(np - xp'' - (\alpha+1-x)\,p') \left[-\tfrac{(pn(n+\alpha)+xq'-q(n-x+\alpha))}{Q_{n,\alpha}(x)} \right] \right. \\
&\quad - \left[\tfrac{(xp'+pn-q)}{Q_{n,\alpha}(x)} \right] ((1-n)q + (\alpha+1-x)\,q') \\
&\quad -2xq' \left[\tfrac{Q_{n,\alpha}(x)(xp''+p'(n+1)-q') - (Q_{n,\alpha})'(x)(xp'+pn-q)}{[Q_{n,\alpha}(x)]^2} \right] \\
&\quad \left. -2xp' \left[\tfrac{(Q_{n,\alpha})'(pn(n+\alpha)+xq'-q(n-x+\alpha)) - Q_{n,\alpha}(x)(p'n(n+\alpha)+q'+xq''-q'(n-x+\alpha)+q)}{[Q_{n,\alpha}(x)]^2} \right] \right] \\
&\quad +2(x-a) \left[(\alpha+1-x) - \left[\tfrac{xq}{Q_{n,\alpha}(x)} \right] (-np + xp'' + (\alpha+1-x)\,p') \right. \\
&\quad + \left[\tfrac{xp}{Q_{n,\alpha}(x)} \right] ((1-n)q + (\alpha+1-x)\,q') - 2xq' \left[\tfrac{(xp'+pn-q)}{Q_{n,\alpha}(x)} \right] \\
&\quad -2xq' \left[\tfrac{(Q_{n,\alpha})'(x)xp - Q_{n,\alpha}(x)(p+xp')}{[Q_{n,\alpha}(x)]^2} \right] - 2xp' \left[\tfrac{Q_{n,\alpha}(x)(q+xq') - (Q_{n,\alpha})'(x)xq}{[Q_{n,\alpha}(x)]^2} \right] \\
&\quad \left. +2xp' \left[\tfrac{(pn(n+\alpha)+xq'-q(n-x+\alpha))}{Q_{n,\alpha}(x)} \right] \right] \\
&\quad +2 \left(\frac{1}{[Q_{n,\alpha}(x)]^2} \left[xQ_{n,\alpha}(x) + 2x^2q'p - 2x^2p'q \right] Q_{n,\alpha}(x) \right),
\end{aligned}
$$

haciendo manipulaciones algebraicas resulta:

$$
\begin{aligned}
c(x;n) &= \frac{(x-a)^2}{[Q_{n,\alpha}(x)]^2} \left[Q_{n,\alpha}(x)\,(np - xp'' - (\alpha+1-x)\,p')\,(q\,(n-x+\alpha) - pn(n+\alpha) - xq') - \right. \\
&\quad Q_{n,\alpha}(x)\,(xp'+pn-q)\,((1-n)q + (\alpha+1-x)\,q') - Q_{n,\alpha}(x)2xq'\,(xp'' + p'\,(n+1) - q') \\
&\quad - (Q_{n,\alpha})'\,(x)2xq'\,(xp'+pn-q) - (Q_{n,\alpha})'\,2xp'\,(pn(n+\alpha) + xq' - q\,(n-x+\alpha)) \\
&\quad \left. +Q_{n,\alpha}(x)2xp'\,(p'n(n+\alpha) + q' + xq'' - q'\,(n-x+\alpha) + q) \right] \\
&\quad +\frac{2(x-a)}{[Q_{n,\alpha}(x)]^2} \left[[Q_{n,\alpha}(x)]^2\,(\alpha+1-x) - Q_{n,\alpha}(x)xq\,(-np + xp'' + (\alpha+1-x)\,p') \right. \\
&\quad +Q_{n,\alpha}(x)xp\,((1-n)q + (\alpha+1-x)\,q') - Q_{n,\alpha}(x)2xq'\,(xp'+pn-q) \\
&\quad -2xq'\,\big((Q_{n,\alpha})'\,(x)xp - Q_{n,\alpha}(x)\,(p+xp')\big) - 2xp'\,\big(Q_{n,\alpha}(x)\,(q+xq') - (Q_{n,\alpha})'\,(x)xq\big) \\
&\quad \left. +2xp'Q_{n,\alpha}(x)\,(pn(n+\alpha) + xq' - q\,(n-x+\alpha)) \right] \\
&\quad +\frac{2}{[Q_{n,\alpha}(x)]^2} \left[x\,[Q_{n,\alpha}(x)]^2 + \big(2x^2q'p - 2x^2p'q\big)\,Q_{n,\alpha}(x) \right].
\end{aligned}
$$

o lo que es igual:

$$
\begin{aligned}
c(x;n) &= \frac{(x-a)^2}{[Q_{n,\alpha}(x)]^2}\left[Q_{n,\alpha}(x)\left[pqn\left(2n+\alpha-x-1\right)-pq'\left(n(\alpha+1)+2x(n+1)\right)\right.\right. \\
&\quad -p^2n(n+\alpha)-p\acute{}q\left(x(n+1)-(\alpha+1-x)\left(n+\alpha\right)\right)+q^2(1-n) \\
&\quad +p'q'\left(x^2+x(3-\alpha-2n)\right)+2x\left(q'\right)^2+2x\left(p'\right)^2n(n+\alpha)+pp'n(n+\alpha)(\alpha+1-x) \\
&\quad \left.-qq'(\alpha+1-x)-2x^2p''q'\right] \\
&\quad \left.+2\left(Q_{n,\alpha}\right)'(x)\left[x\left(pq'n-qq'+p'q\left(n-x+\alpha\right)-pp'n\left(n+\alpha\right)\right)\right]\right] \\
&\quad +\frac{2(x-a)}{[Q_{n,\alpha}(x)]^2}\left[[Q_{n,\alpha}(x)]^2\left(\alpha+1-x\right)-Q_{n,\alpha}(x)\left[x^2p''q-xpq-p'q\left(x^2+x\left(\alpha+1+2n\right)\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left.-pq'\left(x^2-x\left(\alpha+3-2n\right)\right)+2xp'n(n+\alpha)\right]+\left(Q_{n,\alpha}\right)'(x)\left[2x^2p'q-2x^2pq'\right]\right] \\
&\quad +\frac{2}{[Q_{n,\alpha}(x)]^2}\left[x\left[Q_{n,\alpha}(x)\right]^2+\left(2x^2q'p-2x^2p'q\right)Q_{n,\alpha}(x)\right].
\end{aligned} \tag{4-17}
$$

Para terminar el análisis de los coeficientes de la ecuación obtenida en (4-14), la multiplicaremos por $[Q_{n,\alpha}(x)]^2$, y teniendo en cuenta las expresiones obtenidas en (4-15), (4-16), y (4-17) se obtiene la siguiente ecuación:

$$
A(x;n)\left(\phi(x)\right)''+B(x;n)\left(\phi(x)\right)'+C(x;n)\phi(x)=0. \tag{4-18}
$$

Los resultados anteriores pueden ser resumidos en el siguiente:

Teorema 8 *Sea $\{L_n^\alpha(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonales de Laguerre y sea $\left\{\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonales con respecto al producto*

$$
\langle p,q\rangle=\int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x}x^\alpha dx+Mp(a)q(a)+Np'(a)q'(a),
$$

donde p y q son polinomios reales. Entonces para cada $n\in\mathbb{N}$, $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$ satisface:

$$
A(x;n)\left(\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)''+B(x;n)\left(\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)'+C(x;n)\widetilde{L}_n^\alpha(x)=0,
$$

donde:

$$
\begin{aligned}
A(x;n) &= (x-a)^2Q_{n,\alpha}(x)\left(\left(x^2p(x)q'(x)-x^2p'(x)q(x)\right)\right. \\
&\quad \left.-xq^2(x)-xp^2(x)n(n+\alpha)+xp(x)q(x)(2n-x+\alpha)\right),
\end{aligned} \tag{4-19}
$$

$$
\begin{aligned}
B(x;n) &= (x-a)^2Q_{n,\alpha}(x)\left[-x^2p''q-x\left(\alpha+1-x\right)p'q+xpq+x\left(\alpha+1-x\right)pq'\right. \\
&\quad +2xpq'-2xpq'n+2xqq'-2xp'q \\
&\quad \left.+2xp'pn(n+\alpha)-2xp'q\left(n-x+\alpha\right)\right] \\
&\quad +4(x-a)\left[x\left[Q_{n,\alpha}(x)\right]^2+\left(2x^2q'(x)p(x)-2x^2p'(x)q(x)\right)Q_{n,\alpha}(x)\right],
\end{aligned} \tag{4-20}
$$

$$\begin{aligned}
C(x;n) &= (x-a)^2 \left[Q_{n,\alpha}(x) \left[pqn\,(2n+\alpha-x-1) - pq'\,(n(\alpha+1)+2x(n+1))\right.\right. \\
&\quad -p^2 n(n+\alpha) - p\acute{}q\,(x(n+1)-(\alpha+1-x)\,(n+\alpha)) + q^2(1-n) \\
&\quad +p'q'\left(x^2+x(3-\alpha-2n)\right) + 2x\,(q')^2 + 2x\,(p')^2\, n(n+\alpha) \\
&\quad \left.+pp'n(n+\alpha)(\alpha+1-x) - qq'(\alpha+1-x) - 2x^2p''q'\right] \\
&\quad \left.+2\,(Q_{n,\alpha})'\,(x)\left[x\,(pq'n - qq' + p'q\,(n-x+\alpha) - pp'n\,(n+\alpha))\right]\right] \\
&\quad +2(x-a)\left[[Q_{n,\alpha}(x)]^2\,(\alpha+1-x)\right. \\
&\quad -Q_{n,\alpha}(x)\left[x^2p''q - xpq - p'q\left(x^2+x\,(\alpha+1+2n)\right)\right. \\
&\quad \left.-pq'\left(x^2-x\,(\alpha+3-2n)\right) + 2xp'n(n+\alpha)\right] \\
&\quad \left.+(Q_{n,\alpha})'\,(x)\left[2x^2p'q - 2x^2pq'\right]\right] \\
&\quad +2\left[x\,[Q_{n,\alpha}(x)]^2 + \left(2x^2q'p - 2x^2p'q\right) Q_{n,\alpha}(x)\right].
\end{aligned} \tag{4-21}$$

Finalmente cabe resaltar que de la forma como se determinó $Q_{n,\alpha}(x)$, se puede ver que es un polinomio de grado 4, y por lo tanto se puede notar que $A(x;n)$ es un polinomio de grado 11, mientras $B(x;n)$ es un polinomio de grado 10.

4.3. Caso general

Para encontrar la ecuación diferencial de segundo orden satisfecha por los polinomios $\left\{\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortogonales con respecto a (1-3), se puede seguir el mismo procedimiento usado para obtener (4-18). En efecto, se considera la fórmula (3-22) en lugar de (3-7), luego se buscan ecuaciones diferenciales satisfechas por las expresiones:

$$u(x) = f_1(x)L_n^{\alpha}(x),$$

$$v(x) = f_2(x)L_{n-1}^{\alpha}(x).$$

Y bajo las mismas manipulaciones algebraicas tales ecuaciones serán:

$$\begin{aligned}
& x\,(f_1(x)L_n^{\alpha}(x))'' + (\alpha+1-x)\,(f_1(x)L_n^{\alpha}(x))' + nf_1(x)L_n^{\alpha}(x) \\
=\; & xf_1''(x)L_n^{\alpha}(x) + 2xf_1'(x)\,(L_n^{\alpha})'\,(x) + (\alpha+1-x)\,f_1'(x)L_n^{\alpha}(x).
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& x\,(f_2(x)L_n^{\alpha}(x))'' + (\alpha+1-x)\,(f_2(x)L_n^{\alpha}(x))' + (n-1)\,f_2(x)L_n^{\alpha}(x) \\
=\; & xf_2''(x)L_n^{\alpha}(x) + 2xf_2'(x)\,(L_n^{\alpha})'\,(x) + (\alpha+1-x)\,f_2'(x)L_n^{\alpha}(x).
\end{aligned}$$

Y de la misma forma sumando estás dos ecuaciones diferenciales y usando (3-22) se obtendrá:

$$x\left((x-a)^{j+1}\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)'' + (\alpha+1-x)\left((x-a)^{j+1}\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)' = \tag{4-22}$$
$$L_n^{\alpha}(x)\left(-nf_1(x)+xf_1''(x)+(\alpha+1-x)\,f_1'(x)\right)+L_{n-1}^{\alpha}(x)\left(-(n-1)\,f_2(x)+xf_2''+\right.$$
$$\left.(\alpha+1-x)\,f_2'(x)\right)+2xf_2'(x)\left(L_{n-1}^{\alpha}\right)'(x)+2xf_1'(x)\left(L_n^{\alpha}\right)'(x).$$

Siguiendo las mismas ideas, se deriva (3-22) y se obtiene

$$\begin{aligned} x\left((x-a)^{j+1}\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)' &= L_n^{\alpha}(x)\left[xf_1'(x)+f_1(x)n-f_2(x)\right] \\ &\quad +L_{n-1}^{\alpha}(x)\left[f_1(x)n(n+\alpha)+xf_2'(x)-f_2(x)\left(n-x+\alpha\right)\right], \end{aligned}$$

constituyendo un sistema de 2 ecuaciones y dos incógnitas $L_n^{\alpha}(x)$ y $L_{n-1}^{\alpha}(x)$, y para solucionarlo se considera la expresión:

$$Q_{n,\alpha}(x)=x(f_1'(x)f_2(x)-f_1(x)f_2'(x))-f_2^2(x)-f_1^2(x)n(n+\alpha)+f_1(x)f_2(x)(2n-x+\alpha),$$

que si se supone no nula, permite encontrar:

$$L_n^{\alpha}(x)=S_1(x;n)\left((x-a)^{j+1}\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)'+S_2(x;n)(x-a)^{j+1}\widetilde{L}_n^{\alpha}(x) \tag{4-23}$$

donde $S_1(x;n)$ y $S_2(x;n)$ vienen dadas por las expresiones:

$$S_1(x;n)=\frac{xf_2(x)}{Q_{n,\alpha}(x)},$$

y

$$S_2(x;n)=-\frac{\left(f_1(x)n(n+\alpha)+xf_2'(x)-f_2(x)\left(n-x+\alpha\right)\right)}{Q_{n,\alpha}(x)},$$

además

$$L_{n-1}^{\alpha}(x)=T_1(x;n)(x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)+T_2(x;n)\left((x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)', \tag{4-24}$$

donde $T_1(x;n)$ y $T_2(x;n)$ están dadas por:

$$T_1(x;n)=\frac{(xp'(x)+p(x)n-q(x))}{Q_{n,\alpha}(x)},$$

y

$$T_2(x;n)=\frac{-xp(x)}{Q_{n,\alpha}(x)}.$$

Luego se sustituyen (4-23) y (4-24) en (4-22), se factorizan los factores $\left((x-a)^{j+1}\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)''$, $\left((x-a)^{j+1}\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right)'$ y $(x-a)^{j+1}\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)$ de la misma forma, y se obtiene nuevamente la ecuación diferencial holonómica satisfecha por $\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)$, haciendo simplificaciones algebraicas necesarias para obtener los coeficientes de dicha ecuación tal como se hizo previamente.

5. Los Ceros

5.1. Introducción

Para los polinomios ortogonales $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$, estudiados hasta ahora, si $N = 0$, o $M = 0$, respectivamente, se puede mostrar que, en cada caso, sus ceros se entrelazan con los de $L_n^\alpha(x)$. Sin embargo, en general, si M y N no son nulos, no se tiene esta propiedad de entrelazamiento. En este capítulo buscaremos una sucesión de polinomios ortogonales cuyos ceros tengan las propiedades de entrelazamiento deseadas y veremos que su existencia dependerá de la localización del primer cero del polinomio perturbado. Como parte del estudio, también veremos qué propiedades atractoras tiene el punto masa cuando M y N varian, también consideraremos condiciones sobre las masas para que cualquier polinomio perturbado pueda tener uno o dos ceros negativos y finalmente se harán algunos experimentos numéricos con la ayuda del software Matlab. Un hecho fundamental que se usará a lo largo de esta sección es que la cantidad de ceros que se encuentren en el interior del soporte de la medida dependerá del número de términos que puedan aparecer en la parte discreta del producto, y en esta dirección, se pude asegurar la existencia de ceros negativos para $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$. La demostración de este hecho puede ser encontrada en [2] y lo enunciamos en la siguiente:

Proposición 9 *A lo sumo dos de los ceros de* $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$ *pueden ser negativos.*

Aún más, es posible demostrar que fijado $a < 0$, a lo sumo uno de los ceros de $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$ es menor que el punto masa a. Este resultado puede verse en [13] y lo enunciamos formalmente en la siguiente:

Proposición 10 *A lo sumo un cero de* $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$ *está en el exterior del intervalo* $[a, \infty]$.

Más adelante daremos una prueba alternativa de este hecho.

5.2. Propiedades atractoras del punto masa.

A continuación veremos como el punto masa a atrae las raíces negativas del polinomio perturbado $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$ cuando alguna de las masas se fija y la otra tiende a infinito. En efecto, siguiendo las idea expresada en [7], que consiste en expresar $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$ en términos de los momentos generalizados usando la ortonormalización de Gram-Schmidt en la familia de polinomios

$\left\{(x-a)^k\right\}_{k=0}^{n}$. Para tal fin si consideramos

$$\Omega_n(d\mu) = \begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1} & \xi_n & \cdots & \xi_{2n-1} \\ \xi_n & \xi_{n+1} & \cdots & \xi_{2n} \end{vmatrix}$$

donde $\xi_{j+k} = \xi_{k+j} = \left\langle (x-a)^j, (x-a)^k \right\rangle_\alpha$, y $d\mu = x^\alpha e^{-x} dx$ entonces los polinomios de Laguerre clásicos pueden escribirse como:

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{\Omega_{n-1}(d\mu)} \begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1} & \xi_n & \cdots & \xi_{2n-1} \\ 1 & (x-a) & \cdots & (x-a)^n \end{vmatrix}.$$

Luego si definimos

$$\eta_{i+j} = \int_0^\infty (x-a)^{i+j} e^{-x} x^\alpha + M \left.(x-a)^{i+j}\right|_{x=a} + N\,(i+j)\left.(x-a)^{i+j-1}\right|_{x=a}, \qquad 0 \leq i,j \leq n-1,$$

se tiene que

$$\eta_{i+j} = \begin{cases} \xi_0 + M, & i+j = 0 \\ \xi_1 + N, & i+j = 1 \\ \xi_{i+j}, & i+j > 1, \end{cases}$$

y por tanto los polinomios $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$ se pueden escribir como:

$$\widetilde{L}_n^\alpha(x) = \frac{1}{\Omega_{n-1}(d\widetilde{\mu})} \begin{vmatrix} \xi_0 + M & \xi_1 + N & \cdots & \xi_n \\ \xi_1 + N & \xi_2 & \cdots & \xi_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1} & \xi_n & \cdots & \xi_{2n-1} \\ 1 & (x-a) & \cdots & (x-a)^n \end{vmatrix}.$$

Daremos una nueva expresión para $\Omega_{n-1}(d\widetilde{\mu})$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\Omega_{n-1}(d\widetilde{\mu}) &= \begin{vmatrix} \eta_0 & \eta_1 & \cdots & \eta_{n-1} \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{n-2} & \eta_{n-1} & \cdots & \eta_{2n-2} \\ \eta_{n-1} & \eta_n & \cdots & \eta_{2n-1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \xi_0 + M & \xi_1 + N & \cdots & \xi_{n-1} \\ \xi_1 + N & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-2} & \xi_{n-1} & \cdots & \xi_{2n-2} \\ \xi_{n-1} & \xi_n & \cdots & \xi_{2n-1} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 + N & \cdots & \xi_{n-1} \\ \xi_1 + N & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-2} & \xi_{n-1} & \cdots & \xi_{2n-2} \\ \xi_{n-1} & \xi_n & \cdots & \xi_{2n-1} \end{vmatrix} + M \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 & \cdots & \xi_n \\ \xi_3 & \xi_4 & \cdots & \xi_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1} & \xi_n & & \xi_{2n-2} \\ \xi_n & \xi_{n+1} & \cdots & \xi_{2n-1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_{n-1} \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-2} & \xi_{n-1} & \cdots & \xi_{2n-2} \\ \xi_{n-1} & \xi_n & \cdots & \xi_{2n-1} \end{vmatrix} - 2N \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{n-1} \\ \xi_3 & \xi_4 & \cdots & \xi_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1} & \xi_n & \cdots & \xi_{2n-2} \\ \xi_n & \xi_{n+1} & \cdots & \xi_{2n-1} \end{vmatrix} \\
&\quad -N^2 \begin{vmatrix} \xi_4 & \xi_5 & \cdots & \xi_{n+1} \\ \xi_5 & \xi_6 & \cdots & \xi_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n & \xi_{n+1} & \cdots & \xi_{2n-2} \\ \xi_{n+1} & \xi_{n+2} & \cdots & \xi_{2n-1} \end{vmatrix} + M \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 & \cdots & \xi_n \\ \xi_3 & \xi_4 & \cdots & \xi_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1} & \xi_n & & \xi_{2n-2} \\ \xi_n & \xi_{n+1} & \cdots & \xi_{2n-1} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 & \cdots & \xi_n \\ \xi_3 & \xi_4 & \cdots & \xi_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1} & \xi_n & & \xi_{2n-2} \\ \xi_n & \xi_{n+1} & \cdots & \xi_{2n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_{0+2} & \xi_{1+2} & \cdots & \xi_{n-2+2} \\ \xi_{1+2} & \xi_{2+2} & \cdots & \xi_{n-1+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-3+2} & \xi_{n-2+2} & & \xi_{2n-4+2} \\ \xi_{n-2+2} & \xi_{n-1+2} & \cdots & \xi_{2n-3+2} \end{vmatrix} = \Omega_{n-2}((x-a)^2 d\mu).$$

$$\begin{vmatrix} \xi_4 & \xi_5 & \cdots & \xi_{n+1} \\ \xi_5 & \xi_6 & \cdots & \xi_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n & \xi_{n+1} & \cdots & \xi_{2n-2} \\ \xi_{n+1} & \xi_{n+2} & \cdots & \xi_{2n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_{0+4} & \xi_{1+4} & \cdots & \xi_{n-3+4} \\ \xi_{1+4} & \xi_{2+4} & \cdots & \xi_{n-2+4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-4+4} & \xi_{n-3+4} & \cdots & \xi_{2n-6+4} \\ \xi_{n-3+4} & \xi_{n-2+4} & \cdots & \xi_{2n-5+4} \end{vmatrix} = \Omega_{n-3}\left((x-a)^4 d\mu\right),$$

y notando

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{n-1} \\ \xi_3 & \xi_4 & \cdots & \xi_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1} & \xi_n & \cdots & \xi_{2n-2} \\ \xi_n & \xi_{n+1} & \cdots & \xi_{2n-1} \end{vmatrix},$$

obtenemos

$$\Omega_{n-1}(d\widetilde{\mu}) = \Omega_{n-1}(d\mu) - 2N\Delta_1 - N^2\Omega_{n-3}\left((x-a)^4 d\mu\right) + M\Omega_{n-2}((x-a)^2 d\mu).$$

Por otra parte daremos una expresión para

$$\begin{vmatrix} \xi_0 + M & \xi_1 + N & \cdots & \xi_n \\ \xi_1 + N & \xi_2 & \cdots & \xi_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1} & \xi_n & \cdots & \xi_{2n-1} \\ 1 & (x-a) & \cdots & (x-a)^n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1+N & \cdots & \xi_n \\ \xi_1+N & \xi_2 & \cdots & \xi_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1} & \xi_n & \cdots & \xi_{2n-1} \\ 1 & (x-a) & & (x-a)^n \end{vmatrix} + M \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 & \cdots & \xi_{n+1} \\ \xi_3 & \xi_4 & \cdots & \xi_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n & \xi_{n+1} & \cdots & \xi_{2n-1} \\ (x-a) & (x-a)^2 & & (x-a)^n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1} & \xi_n & \cdots & \xi_{2n-1} \\ 1 & (x-a) & & (x-a)^n \end{vmatrix} - N \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \xi_3 & \xi_4 & \cdots & \xi_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n & \xi_{n+1} & \cdots & \xi_{2n-1} \\ (x-a) & (x-a)^2 & & (x-a)^n \end{vmatrix}$$

$$-N \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_3 & \cdots & \xi_{n+1} \\ \xi_2 & \xi_4 & \cdots & \xi_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1} & \xi_{n+1} & \cdots & \xi_{2n-1} \\ 1 & (x-a)^2 & & (x-a)^n \end{vmatrix} - N^2 \begin{vmatrix} \xi_4 & \xi_5 & \cdots & \xi_{n+2} \\ \xi_5 & \xi_6 & \cdots & \xi_{n+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n+1} & \xi_{n+2} & \cdots & \xi_{2n-1} \\ (x-a)^2 & (x-a)^3 & & (x-a)^n \end{vmatrix}$$

$$+M \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 & \cdots & \xi_{n+1} \\ \xi_3 & \xi_4 & \cdots & \xi_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n & \xi_{n+1} & \cdots & \xi_{2n-1} \\ (x-a) & (x-a)^2 & & (x-a)^n \end{vmatrix}.$$

Ahora

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 & \cdots & \xi_{n+1} \\ \xi_3 & \xi_4 & \cdots & \xi_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n & \xi_{n+1} & \cdots & \xi_{2n-1} \\ (x-a) & (x-a)^2 & & (x-a)^n \end{vmatrix} &= (x-a) \begin{vmatrix} \xi_{0+2} & \xi_{1+2} & \cdots & \xi_{n-1+2} \\ \xi_{1+2} & \xi_{2+2} & \cdots & \xi_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-2+2} & \xi_{n-1+2} & \cdots & \xi_{2n-3+2} \\ 1 & (x-a) & & (x-a)^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= (x-a)\Omega_{n-2}\left((x-a)^2 d\mu\right) Q_{n-1}^{(1)}(x), \end{aligned}$$

donde $Q_{n-1}^{(1)}(x)$ es un polinomio ortogonal con respecto al producto interno asociado a la medida $(x-a)^2 d\mu$, y

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \xi_4 & \xi_5 & \cdots & \xi_{n+2} \\ \xi_5 & \xi_6 & \cdots & \xi_{n+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n+1} & \xi_{n+2} & \cdots & \xi_{2n-1} \\ (x-a)^2 & (x-a)^3 & & (x-a)^n \end{vmatrix} &= (x-a)^2 \begin{vmatrix} \xi_{0+4} & \xi_{1+4} & \cdots & \xi_{n-2+4} \\ \xi_{1+4} & \xi_{2+4} & \cdots & \xi_{n-1+4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-4+4} & \xi_{n-3+4} & \cdots & \xi_{2n-6+4} \\ \xi_{n-3+4} & \xi_{n-2+4} & \cdots & \xi_{2n-5+4} \\ 1 & (x-a) & & (x-a)^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (x-a)^2\Omega_{n-3}((x-a)^4 d\mu) Q_{n-2}^{(2)}(x), \end{aligned}$$

donde $Q_{n-2}^{(2)}(x)$ es un polinomio ortogonal con respecto a la medida $(x-a)^4 d\mu$. Y por último

$$P(x) = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \xi_3 & \xi_4 & \cdots & \xi_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n & \xi_{n+1} & \cdots & \xi_{2n-1} \\ (x-a) & (x-a)^2 & & (x-a)^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_3 & \cdots & \xi_{n+1} \\ \xi_2 & \xi_4 & \cdots & \xi_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1} & \xi_{n+1} & \cdots & \xi_{2n-1} \\ 1 & (x-a) & & (x-a)^n \end{vmatrix},$$

es un polinomio de grado n. Luego en resumen

$\widetilde{L}_n^{\alpha}(x) =$

$$= \frac{\Omega_{n-1}(d\mu)L_n^{\alpha}(x) - NP(x) - N^2(x-a)^2\Omega_{n-3}((x-a)^4 d\mu)Q_{n-2}^{(2)}(x) + M(x-a)\Omega_{n-2}((x-a)^2 d\mu)Q_{n-1}^{(1)}(x}{\Omega_{n-1}(d\mu) - 2N\Delta_1 - N^2\Omega_{n-3}((x-a)^4 d\mu) + M\Omega_{n-2}((x-a)^2 d\mu).} \tag{5-1}$$

Si se fija N y $M \longrightarrow \infty$ en (5-1) aplicando L´Hopital se obtiene:

$$\lim_{M \longrightarrow \infty} \widetilde{L}_n^{\alpha}(x) = (x-a)Q_{n-1}^{(1)}(x), \tag{5-2}$$

luego si $x \longrightarrow \widetilde{x}_{n,k}$ entonces $(x-a)Q_{n-1}^{(1)}(x) \longrightarrow 0$, luego a atrae un cero de $\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)$, y cada uno de los ceros de $Q_{n-1}^{(1)}(x)$ atrae al menos uno de los restantes. Por otra parte si se fija M y $N \longrightarrow \infty$ en (5-1) aplicando L´Hopital se obtiene:

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} \widetilde{L}_n^{\alpha}(x) = (x-a)^2 Q_{n-2}^{(2)}(x), \tag{5-3}$$

luego si $x \longrightarrow \widetilde{x}_{n,k}$ entonces $(x-a)^2 Q_{n-2}^{(2)}(x) \longrightarrow 0$, luego a atrae dos de los ceros de $\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)$, y cada uno de los ceros de $Q_{n-2}^{(2)}(x)$ atrae al menos uno de los restantes. Resumimos los resultados en la siguiente

Proposición 11 *Existen dos polinomios $Q_{n-1}^{(1)}(x)$ y $Q_{n-2}^{(2)}(x)$ ortogonales con respecto a las medidas $(x-a)^2 x^{\alpha} e^{-x} dx$ y $(x-a)^4 x^{\alpha} e^{-x} dx$ respectivamente, tales que si N se fija y $M \longrightarrow \infty$, el punto masa a atrae uno de los ceros de $\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)$, y cada uno de los ceros de $Q_{n-1}^{(1)}(x)$ atrae uno de los restantes, y cuando M se fija y $N \longrightarrow \infty$ el punto masa a atrae al menos uno de los ceros de $\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)$ y cada uno de los ceros de $Q_{n-2}^{(2)}(x)$ atrae uno de los restantes.*

5.3. Entrelazamiento de los ceros

Dada la sucesión de polinomios mónicos $\left\{\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$, ortogonales con respecto a (3-1), y notando como $\{\widetilde{x}_{n,k}\}_{k=1}^{n}$ a los ceros del $n-$*ésimo* polinomio $\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)$ de dicha sucesión, queremos determinar como se entrelazan estos ceros con respecto a ciertos polinomios mónicos ortogonales. En principio mostraremos que si $\widetilde{x}_{n,1} < a$ los signos de $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$ y su derivada evaluadas en a son el mismo, situación que no ocurre si $\widetilde{x}_{n,1} > a$. Este resultado auxiliar lo proponemos formalmente en el siguiente:

Lema 12 *Si* $\widetilde{x}_{n,1} < a$ *entonces*

$$sign\left[\widetilde{L}_n^\alpha(a) \times \left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\right] = 1.$$

Si $\widetilde{x}_{n,1} > a$ *entonces*

$$sign\left[\widetilde{L}_n^\alpha(a) \times \left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\right] = -1.$$

Demostración. Supongamos que $\widetilde{L}_n^\alpha(a) > 0$, y $\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a) < 0$, (de la misma forma se procede si $\widetilde{L}_n^\alpha(a) < 0$, y $\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a) > 0$), y lleguemos a una contradicción. Notando

$$\phi(x) = \frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x)}{x - \widetilde{x}_{n,1}},$$

observamos que $a - \widetilde{x}_{n,1} > 0$, y por tanto $\phi(a) > 0$, además se tiene que $\phi(x)\widetilde{L}_n^\alpha(x) \geq 0$, para todo $x \geq 0$. De esta forma, sabiendo que $\deg(\phi) = n - 1$, y por la ortogonalidad de $\left\{\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, se tiene que:

$$\left\langle \phi(x), \widetilde{L}_n^\alpha(x)\right\rangle = \int_0^\infty \phi(x)\widetilde{L}_n^\alpha(x)e^{-x}x^\alpha dx + M\phi(a)\widetilde{L}_n^\alpha(a) + N\phi'(a)\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a) = 0.$$

Dado que $\int_0^\infty \phi(x)\widetilde{L}_n^\alpha(x)e^{-x}x^\alpha dx \geq 0$, se debe tener que $M\phi(a)\widetilde{L}_n^\alpha(a) + N\phi'(a)\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a) \leq 0$, sin embargo se tiene que $M\phi(a)\widetilde{L}_n^\alpha(a) > 0$, y teniendo que

$$\phi'(a) = \frac{\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\left(a - \widetilde{x}_{n,1}\right) - \widetilde{L}_n^\alpha(a)}{\left(a - \widetilde{x}_{n,1}\right)^2} < 0,$$

necesariamente $N\phi'(a)\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a) > 0$, luego se tiene una contradicción. Así que necesariamente $sign\left[\widetilde{L}_n^\alpha(a) \times \left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\right] = 1$. Ahora si suponemos $\widetilde{x}_{n,1} > a$, teniendo en cuenta la representación de $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$:

$$\widetilde{L}_n^\alpha(x) = \prod_{k=1}^n \left(x - \widetilde{x}_{nk}\right),$$

y su derivada:

$$\left(\widetilde{L}_n^{\alpha}\right)'(x) = \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} (x - \widetilde{x}_{nk}),$$

es claro que $a - \widetilde{x}_{nk} < 0$, para $k = 1, 2, 3, \cdots, n$; luego si n es par $\widetilde{L}_n^{\alpha}(a) > 0$ y $\left(\widetilde{L}_n^{\alpha}\right)'(a) < 0$, ya que este último sería suma de términos donde cada uno es el producto de $n-1$ factores; de la misma forma si n es impar $\widetilde{L}_n^{\alpha}(a) < 0$ y $\left(\widetilde{L}_n^{\alpha}\right)'(a) > 0$. De cualquier modo $sign\left[\widetilde{L}_n^{\alpha}(a) \times \left(\widetilde{L}_n^{\alpha}\right)'(a)\right] = -1$. ∎

Ahora vamos a considerar el caso en que el polinomio perturbado $\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)$ tiene 2 ceros negativos lo cual puede ocurrir según proposición 6, y entonces probaremos que tales ceros no pueden ser mayores que a. Esto, además de constituir una prueba alternativa de la proposición 10, permite mostrar que a lo más uno de los ceros de $\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)$ está en $(a, 0)$. Formalmente:

Proposición 13 *Si $\widetilde{x}_{n,1}$ y $\widetilde{x}_{n,2}$ son negativos, necesariamente*

$$\widetilde{x}_{n,1} < a < \widetilde{x}_{n,2}. \tag{5-4}$$

Demostración. Por la proposición 7, no puede ocurrir el caso en que $\widetilde{x}_{n,1} < \widetilde{x}_{n,2} < a$. Así que supondremos que

$$a < \widetilde{x}_{n,1} < \widetilde{x}_{n,2} < 0,$$

y llegaremos a una contradicción. Definamos

$$\varphi(x) = \prod_{i=3}^{n} (x - \widetilde{x}_{n,i}),$$

y de esta manera

$$\varphi'(x) = \sum_{j=3}^{n} \prod_{\substack{i=3 \\ i\neq j}}^{n} (x - \widetilde{x}_{n,i}).$$

Se tiene que

$$\varphi(x)\widetilde{L}_n^{\alpha}(x) \geq 0, \qquad \text{para todo } x \geq 0,$$

ya que $(x - \widetilde{x}_{n,1})(x - \widetilde{x}_{n,2}) \geq 0$, para todo $x \geq 0$, además si n es par, $\varphi(a) > 0$ y $\varphi'(a) < 0$, y si n es impar $\varphi(a) < 0$ y $\varphi'(a) > 0$. Se tiene que

$$\left\langle \varphi(x), \widetilde{L}_n^{\alpha}(x) \right\rangle = \int_0^{\infty} \varphi(x)\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)e^{-x}x^{\alpha}dx + M\varphi(a)\widetilde{L}_n^{\alpha}(a) + N\varphi'(a)\left(\widetilde{L}_n^{\alpha}\right)'(a) = 0,$$

debido a que $\deg(\varphi(x)) = n-2$. De esta forma $M\varphi(a)\widetilde{L}_n^\alpha(a) + N\varphi'(a)\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)$ debería ser negativo, sin embargo si n es par $\widetilde{L}_n^\alpha(a) > 0$ y $\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a) < 0$, o si n es impar $\widetilde{L}_n^\alpha(a) < 0$ y $\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a) > 0$, de cualquier modo $M\varphi(a)\widetilde{L}_n^\alpha(a) + N\varphi'(a)\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a) > 0$ lo cual es contradictorio, así que necesariamente debe tenerse (5-4). ■

Ahora demostraremos el siguiente lema que será una herramienta para demostrar algunas propiedades de entrelazamiento:

Lema 14 *Dado el $n-$ésimo polinomio de Laguerre clásico $L_n^\alpha(x)$, y notando $\{x_{n,k}\}_{k=1}^n$ a sus ceros, se tiene que para todo $k = 1, 2, 3, \cdots, n$,*

$$\frac{\left(L_n^\alpha\right)'(a)}{L_n^\alpha(a)} < \frac{1}{(a - x_{n,k})}. \tag{5-5}$$

Demostración. En efecto, si $\left\{x'_{n,k}\right\}$, $(k = 1, 2, 3, \cdots, n-1)$, representan los ceros de $\left(L_n^\alpha\right)'(x)$, y tomando $x \neq x_{n,k}$, se tiene la expresión:

$$\frac{\left(L_n^\alpha\right)'(x)}{L_n^\alpha(x)} = n\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(x - x'_{n,k})}{\prod\limits_{k=1}^{n}(x - x_{n,k})},$$

y en particular

$$\frac{\left(L_n^\alpha\right)'(a)}{L_n^\alpha(a)} = n\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a - x'_{n,k})}{\prod\limits_{k=1}^{n}(a - x_{n,k})} < \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a - x'_{n,k})}{\prod\limits_{k=1}^{n}(a - x_{n,k})}, \tag{5-6}$$

ya que $\left(L_n^\alpha\right)'(a)$ y $L_n^\alpha(a)$ deben tener signos opuestos porque sus ceros son simples y están en $(0, \infty)$. Ahora sabiendo que los ceros de $L_n^\alpha(x)$ y $\left(L_n^\alpha\right)'(x)$ están entrelazados de la forma $x_{n,i} < x'_{n,i} < x_{n,i+1}$, (ver [4]), se tiene que:

$$\frac{(a - x'_{n,i})}{(a - x_{n,i+1})} < 1, \qquad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \cdots, n-1,$$

y usando (5-6) se obtiene

$$\frac{\left(L_n^\alpha\right)'(a)}{L_n^\alpha(a)} < \frac{1}{(a - x_{n,1})}.$$

Dado que $x_{n,1} \leq x_{n,k}$, para $(k = 1, 2, 3, \cdots, n-1)$, se tiene que:

$$\frac{1}{(a - x_{n,1})} \leq \frac{1}{(a - x_{n,k})}.$$

De esta forma obtenemos:

$$\frac{(L_n^\alpha)'(a)}{L_n^\alpha(a)} < \frac{1}{(a - x_{n,k})}.$$

■

Por una parte se tiene la siguiente proposición cuya demostración puede encontrarse en [?], en donde $\left\{L_k^{\alpha,[2]}(x)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ representa la sucesión de polinomios mónicos ortogonales con respecto a la función de peso $(x-a)^2 e^{-x} x^\alpha$, y $\left\{x_{n,k}^{[2]}\right\}_{k=1}^{n}$ son sus respectivos ceros. La ortogonalidad de tales polinomios está asociada a una perturbación de Christoffel sobre los polinomios de Laguerre clásicos, y su estudio se puede ver en [14].

Proposición 15 *Suponga que $M \geq 0$, $N > 0$, que los ceros de $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$ están ordenados de forma creciente, y suponga que $\widetilde{x}_{n,1} < a$. Entonces*

$$a < \widetilde{x}_{n,2} < x_{n-1,1}^{[2]} < \cdots < \widetilde{x}_{n,n} < x_{n-1,n-1}^{[2]}. \tag{5-7}$$

Por la anterior proposición, se tiene en particular que, si $M = 0$, y $N > 0$, y si se denota $\widetilde{L}_n^{\alpha,N}(x)$ al $n - ésimo$ polinomio de la sucesión y $\left\{x_{n,k}^N\right\}_{k=1}^n$ a sus ceros:

$$a < x_{n,2}^N < x_{n-1,1}^{[2]} < \cdots < x_{n,n}^N < x_{n-1,n-1}^{[2]} \tag{5-8}$$

Por otra parte si en (3-1), $N = 0$, $M > 0$ y si en este caso notamos como $\widetilde{L}_n^{\alpha,M}(x)$ al $n - ésimo$ polinomio de la sucesión y $\left\{x_{n,k}^M\right\}_{k=1}^n$ a sus ceros, se puede mostrar (ver [7] y [14]) la siguiente propiedad de entrelazamiento:

$$a < x_{n,1}^M < x_{n,1} < x_{n-1,1}^{[2]} < x_{n,2}^M < x_{n,2} < \cdots < x_{n-1,n-1}^{[2]} < x_{n,n}^M < x_{n,n}, \tag{5-9}$$

donde $\{x_{n,k}\}_{k=1}^n$, denotan los ceros de $L_n^\alpha(x)$.
También probaremos que los ceros de $L_n^\alpha(x)$ y $\widetilde{L}_n^{\alpha,N}(x)$ están entrelazados, en efecto tenemos la siguiente:

Proposición 16 *Para cualquier $N > 0$, los ceros de $L_n^\alpha(x)$ y $\widetilde{L}_n^{\alpha,N}(x)$ están entrelazados de la siguiente forma*

$$x_{n,1}^N < x_{n,1} < x_{n,2}^N < x_{n,2} < \cdots < x_{n,n}^N < x_{n,n}. \tag{5-10}$$

Demostración. Según [6] el polinomio $\widetilde{L}_n^{\alpha,N}(x)$, viene representado por la fórmula

$$\begin{aligned}(x-a)^2 \widetilde{L}_n^{\alpha,N}(x) &= L_n^\alpha(x)\left[(x-a)^2 - \frac{N\,(L_n^\alpha)'(a)}{1 + NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a)} \times \frac{L_{n-1}^\alpha(a) + (x-a)\left(L_{n-1}^\alpha\right)'(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}\right] \\ &\quad + L_{n-1}^\alpha(x)\left[\frac{N\,(L_n^\alpha)'(a)}{1 + NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a)} \times \frac{L_n^\alpha(a) + (x-a)\,(L_n^\alpha)'(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}\right].\end{aligned}$$

Sustituimos un cero del polinomio $L_n^\alpha(x)$ para obtener

$$(x_{n,k}-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha,N}(x_{n,k}) = L_{n-1}^\alpha(x_{n,k})\left[\frac{N\left(L_n^\alpha\right)'(a)}{1+NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a)} \times \frac{L_n^\alpha(a)+(x_{n,k}-a)\left(L_n^\alpha\right)'(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}\right].$$

Mostraremos que

$$L_n^\alpha(a)\left(L_n^\alpha\right)'(a)+(x_{n,k}-a)\left[\left(L_n^\alpha\right)'(a)\right]^2, \tag{5-11}$$

es un número positivo, y para tal fin usaremos (5-5). Si suponemos que $L_n^\alpha(a)>0$, (n par, analogamente si n es impar), multiplicando (5-5) por $L_n^\alpha(a)$, por el negativo $(a-x_{n,k})$, y después por $\left(L_n^\alpha\right)'(a)$ y N se obtiene que (5-11) es positivo. De esta forma

$$\frac{N\left(L_n^\alpha\right)'(a)}{1+NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a)} \times \frac{L_n^\alpha(a)+(x_{n,k}-a)\left(L_n^\alpha\right)'(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2} > 0,$$

y por tanto $\widetilde{L}_n^{\alpha,N}(x_{n,k})$ y $L_{n-1}^\alpha(x_{n,k})$ tienen el mismo signo, y sabiendo que los ceros de $L_{n-1}^\alpha(x)$ y $L_n^\alpha(x)$ se entrelazan, entonces los ceros positivos de $\widetilde{L}_n^{\alpha,N}(x)$ se entrelazan de la misma forma con los ceros de $L_n^\alpha(x)$. ■

Finalmente, usando (5-8), (5-9) y (5-10) se tiene el siguiente:

Corolario 17 *Dado cualquier $M>0$, y $N>0$ es tal que $x_{n,1}^N<a$, entonces se tiene que*

$$x_{n,1}^N < a < x_{n,1}^M < x_{n,2}^N < x_{n,2}^M < \cdots < x_{n,n}^N < x_{n,n}^M. \tag{5-12}$$

Por otra parte supondremos que $\widetilde{x}_{n,k}>a$, para $k=1,2,3\cdots,n$. Demostraremos la siguiente:

Proposición 18 *Si $\widetilde{x}_{n,k}>a$, para $k=1,2,3\cdots,n$, se tiene que los ceros de $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$ y $L_n^\alpha(x)$ se entrelazan así:*

$$\widetilde{x}_{n,1} < x_{n,1} < \widetilde{x}_{n,2} < x_{n,2} < \cdots < \widetilde{x}_{n,n} < x_{n,n}.$$

Demostración. Sea $x_{n,k}$ cualquier cero de $L_n^\alpha(x)$, el cual sustituimos en (3-7), para obtener:

$$(x_{n,k}-a)^2\widetilde{L}_n^\alpha(x_{n,k}) = q(x_{n,k})L_{n-1}^\alpha(x_{n,k}).$$

Se mostrará que $q(x_{n,k})>0$. En efecto, usando (3-18)

$$q(x_{n,k}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left[M\widetilde{L}_n^\alpha(a)L_n^\alpha(a)+N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\left(L_n^\alpha\right)'(a)\right](x_{n,k}-a)+N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)L_n^\alpha(a)}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}\\
&= \frac{M\widetilde{L}_n^\alpha(a)L_n^\alpha(a)(x_{n,k}-a)+N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\left[\left(L_n^\alpha\right)'(a)(x_{n,k}-a)+L_n^\alpha(a)\right]}{\left\|L_{n-1}^\alpha\right\|_\alpha^2}.
\end{aligned}$$

Si suponemos que $\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a) > 0$, (que implica que $\widetilde{L}_n^\alpha(a) < 0$, ver Lema 14), se esperará que

$(L_n^\alpha)'(a)(x_{n,k} - a) + L_n^\alpha(a) > 0,$

lo cuál es igual a

$\dfrac{(L_n^\alpha)'(a)}{L_n^\alpha(a)} < \dfrac{1}{(a - x_{n,k})},$

y este resultado se tiene en (5-5). De la misma forma si $\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a) < 0$, (que implica que $L_n^\alpha(a) > 0$), se debe mostrar que

$(L_n^\alpha)'(a)(x_{n,k} - a) + L_n^\alpha(a) < 0,$

o lo que nuevamente es lo igual que

$\dfrac{(L_n^\alpha)'(a)}{L_n^\alpha(a)} < \dfrac{1}{(a - x_{n,k})}.$

Así, de cualquier modo, se tiene que

$M\widetilde{L}_n^\alpha(a)L_n^\alpha(a)(x_{n,k} - a) + N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)\left[(L_n^\alpha)'(a)(x_{n,k} - a) + L_n^\alpha(a)\right] > 0,$

o lo que es igual:

$q(x_{n,k}) > 0,$

y esto implica que $\widetilde{L}_n^\alpha(x_{n,k})$ y $L_{n-1}^\alpha(x_{n,k})$ tienen el mismo signo luego como los ceros de $L_{n-1}^\alpha(x)$ se entrelazan con los de $L_n^\alpha(x)$, se tiene que los ceros de $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$ también se entrelazan con los de $L_n^\alpha(x)$. ■

5.4. Masas Mínimas

En esta sección analizaremos los ceros del polinomio $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$ en el sentido en que se desea conocer si fijando cierto valor para M, o para N , qué valores mínimos para N o para M se necesitan para que uno de los 2 posibles ceros negativos sea positivo, y para que el otro cero negativo no sea menor que el punto masa a.
Así que en primer lugar fijaremos una masa N_0, (análogamente se procederá si se fija una masa M_0), y a partir de esta masa buscaremos el valor mínimo para M de tal manera que el cero atraído por derecha sea no negativo. Para tal fin se usará la ecuación (3-4), la cuál será evaluada en $x = 0$ e igualada a 0 para obtener:

$\widetilde{L}_n^\alpha(0) = L_n^\alpha(0) - M\widetilde{L}_n^\alpha(a)K_{n-1}(0, a) - N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(a)K_{n-1}^{(0,1)}(0, a) = 0.$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (3-12) y (3-13), se tiene:

$$\begin{aligned}
&\left[(1+MK_{n-1}(a,a))\left(1+NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\right)-MN\left(K_{n-1}^{(1,0)}\right)^2(a,a)\right]L_n^{\alpha}(0)\\
&-MK_{n-1}(0,a)\left[L_n^{\alpha}(a)\left(1+NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\right)-\left(L_n^{\alpha}\right)'(a)NK_{n-1}^{(0,1)}(a,a)\right]\\
&-NK_{n-1}^{(0,1)}(0,a)\left[(1+MK_{n-1}(a,a))\left(L_n^{\alpha}\right)'(a)-MK_{n-1}^{(1,0)}(a,a)L_n^{\alpha}(a)\right]\\
=\;&0.
\end{aligned}$$

Ahora factorizando los valores MN, M, y N, se obtiene la ecuación:

$$A_1MN+B_1M+C_1N+D_1=0, \tag{5-13}$$

donde

$$\begin{aligned}
A_1 \;=\;& L_n^{\alpha}(a)\left(K_{n-1}^{(0,1)}(0,a)K_{n-1}^{(1,0)}(a,a)-K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)K_{n-1}(0,a)\right)+\left(L_n^{\alpha}\right)'(a)\left(K_{n-1}(0,a)K_{n-1}^{(1,0)}(a,a)\right.\\
&\left.-K_{n-1}(a,a)K_{n-1}^{(0,1)}(0,a)\right)+L_n^{\alpha}(0)\left[K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)K_{n-1}(a,a)-\left(K_{n-1}^{(1,0)}\right)^2(a,a)\right],
\end{aligned}$$

$$B_1=-L_n^{\alpha}(a)K_{n-1}(0,a)+L_n^{\alpha}(0)K_{n-1}(a,a),$$

$$C_1=-\left(L_n^{\alpha}\right)'(a)K_{n-1}^{(0,1)}(0,a)+L_n^{\alpha}(0)K_{n-1}^{(1,1)}(a,a),$$

$$D_1=\left[(1+MK_{n-1}(a,a))\left(1+NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\right)-MN\left(K_{n-1}^{(1,0)}\right)^2(a,a)\right]L_n^{\alpha}(0).$$

Y despejando M de (5-13) se obtiene la ecuación:

$$M(N)=-\frac{C_1N+D_1}{A_1N+B_1}.$$

Esta función tiene una asíntota horizontal y vertical en $M=-\frac{B_1}{A_1}$, y $N=-\frac{D_1}{C_1}$ respectivamente, y además se tiene $M>0$ cuando $N\in S$, con

$$S=\{x, C_1x>-D_1 \;\wedge\; A_1x<-B_1\}\cup\{x, C_1x<-D_1 \;\wedge\; A_1x>-B_1\}.$$

De acuerdo a esto, si se fija $N_0\in S$, para $M<M(N_0)$, se tendrá que a los sumo un cero sea negativo y posiblemente menor que a y que si $M<M(N_0)$ ocurrirá lo contrario. Resumimos en la siguiente:

Proposición 19 *Fijada una masa $N_0\in S$, con*

$$S=\{x, C_1x>-D_1 \;\wedge\; A_1x<-B_1\}\cup\{x, C_1x<-D_1 \;\wedge\; A_1x>-B_1\},$$

la ecuación

$$M(N)=-\frac{C_1N+D_1}{A_1N+B_1}, \tag{5-14}$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= L_n^\alpha(a)\left(K_{n-1}^{(0,1)}(0,a)K_{n-1}^{(1,0)}(a,a) - K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)K_{n-1}(0,a)\right) + \left(L_n^\alpha\right)'(a)\left(K_{n-1}(0,a)K_{n-1}^{(1,0)}(a,a)\right. \\ &\quad \left. -K_{n-1}(a,a)K_{n-1}^{(0,1)}(0,a)\right) + L_n^\alpha(0)\left[K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)K_{n-1}(a,a) - \left(K_{n-1}^{(1,0)}\right)^2(a,a)\right], \end{aligned}$$

$$B_1 = -L_n^\alpha(a)K_{n-1}(0,a) + L_n^\alpha(0)K_{n-1}(a,a),$$

$$C_1 = -\left(L_n^\alpha\right)'(a)K_{n-1}^{(0,1)}(0,a) + L_n^\alpha(0)K_{n-1}^{(1,1)}(a,a),$$

$$D_1 = \left[(1 + MK_{n-1}(a,a))\left(1 + NK_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\right) - MN\left(K_{n-1}^{(1,0)}\right)^2(a,a)\right]L_n^\alpha(0).$$

permitirá encontrar la masa $M_0 = M(N_0)$*, de tal forma que si* $M > M_0$*, se garantiza que el polinomio* $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$ *tendrá 2 ceros negativos, mientras si* $M < M_0$*, a lo sumo se tendrán un cero negativo. (Análogamente se obtienen resultados similares si se fija la masa* M_0*).*

6. Conclusiones y recomendaciones

6.1. Conclusiones

1. Se ha demostrado que la sucesión de polinomios mónicos $\left\{\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortogonales con respecto al producto

$$\langle p,q\rangle = \int_0^{\infty} p(x)q(x)e^{-x}x^{\alpha}dx + Mp(a)q(a) + Np'(a)q'(a), \tag{6-1}$$

donde $a<0$, puede ser representados a través de polinomios de Laguerre clásicos de grados n y $n-1$ de la forma

$$(x-a)^2\widetilde{L}_n^{\alpha}(x) = p(x)L_n^{\alpha}(x) + q(x)L_{n-1}^{\alpha}(x), \tag{6-2}$$

siendo p y q polinomios de grados 2 y 1 respectivamente. En general los polinomios mónicos $\left\{\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortogonales con respecto al producto

$$\langle p,q\rangle = \int_0^{\infty} p(x)q(x)e^{-x}x^{\alpha}dx + \sum_{k=0}^{j} M_k p^{(k)}(a)q^{(k)}(a), \tag{6-3}$$

pueden ser representados de la misma forma a través de una fórmula que también establece una conexión con los polinomios de Laguerre clásicos, la cual tiene la forma

$$(x-a)^{j+1}\widetilde{L}_n^{\alpha}(x) = f_1(x)L_n^{\alpha}(x) + f_2(x)L_{n-1}^{\alpha}(x), \tag{6-4}$$

donde $f_1(x)$ es un polinomio de grado $j+1$ y $f_2(x)$ es un polinomio de grado j. La deducción detallada de (6-2) y un bosquejo de la obtención de (6-4) se encuentran en el capítulo 1. Tal deducción es un resultado nuevo y sigue las ideas y generaliza casos particulares estudiados en [7] y en [6] en donde se estudian los casos en que $M>0$, $N=0$ y $M=0$, $N>0$ respectivamente.

2. A través de la fórmula de conexión (6-2) se ha obtenido una familia de ecuaciones diferencial de segundo orden (ecuación holonómica) satisfechas, respectivamente, por los polinomios $\left\{\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, y cada miembro de esta familia tiene la siguiente representación:

$$A(x;n)\left(\phi(x)\right)'' + B(x;n)\left(\phi(x)\right)' + C(x;n)\phi(x) = 0,$$

y su deducción es un resultado nuevo el cual se puede ver en el capítulo 3. Igualmente es posible construir la ecuación diferencial holonómica satisfecha por los polinomios mónicos ortogonales con respecto al producto (6-3), y esta se esboza también al final del mismo capítulo.

3. Se ha demostrado que los polinomios perturbados $\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)$, pueden ser representados a través de funciones hipergeométricas. La deducción de ésta representación se consignó en el capítulo 4 al igual que un bosquejo de la forma en que se puede obtener tal representación en el caso general. Estas deducciones también son resultados nuevos y siguen algunas de las ideas de la representación obtenida en [**?**] cuando se tiene $M > 0$, $N = 0$.

4. Cada polinomio perturbado $\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)$ tienen n ceros simples $\{\widetilde{x}_{n,k}\}_{k=1}^{n}$, y por lo menos $n-2$ de ellos están en el intervalo $(0, \infty)$. También se tiene que si el primer cero es negativo es posible entrelazar sus ceros con los del $n-ésimo$ polinomio Laguerre clásico sometido a una perturbación de Christoffel. Tales resultados y su fuente bibliográfica son consignados en en capítulo 5.

   Los siguientes son otros resultados nuevos respecto a los ceros de los polinomios perturbados que se consignan también en el capítulo 5.

5. Si $\widetilde{x}_{n,1} < a$, se demostró que los ceros de los polinomios $\widetilde{L}_n^{\alpha,M}(x)$ y $\widetilde{L}_n^{\alpha,N}(x)$, (que corresponden respectivamente a los casos particulares del problema de estudio en que $M > 0$, $N = 0$ y $M = 0$, $N > 0$), están entrelazados, además que en el caso en que los dos ceros del polinomio $\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)$ sean negativos, necesariamente el punto masa a debe estar entre ellos.

6. También se ha demostrado que si $\widetilde{x}_{n,1} > 0$, los ceros de $\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)$ están entrelazados con los del $n - ésimo$ polinomio clásico de Laguerre $L_n^{\alpha}(x)$.

7. Adicionalmente siguiendo las ideas de [7], se se ha demostrado que el punto masa a atrae hasta dos de los ceros de $\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)$ cuando se fija una de las masas y la otra tiende a infinito, en este sentido se demuestra también la existencia de polinomios tales que cada uno de sus ceros atrae uno de los ceros restantes del polinomio perturbado.

8. Se han deducido condiciones que permiten, fijado n, encontrar valores mínimos para las masas de tal forma que se pueda garantizar que existan 2 ceros negativos para $L_n^{\alpha}(x)$, o que exista un único cero negativo que no será menor que a.

.

6.2. Recomendaciones

Los alcances del trabajo obedecen a una dinámica investigativa que actualmente se viene desarrollando en términos de productos de tipo Laguerre-Sobolev, y por tanto tales resultados representan material suficiente para una publicación en una revista especializada. No obstante, en términos del caso

$$\langle p, q\rangle = \int_0^{\infty} p(x)q(x)d\mu + Mp(a)q(a) + Np'(a)q'(a),$$

aún falta establecer la interpretación electrostática de los ceros de cada polinomio de la sucesión, tópico que puede ser abordado de forma relativamente simple gracias a la previa obtención de la ecuación holonómica. Por otra parte falta establecer una fórmula de recurrencia a tres términos, herramienta que posiblemente pueda servir para investigar profundamente la monotonicidad de los ceros en función de las masas M y N. A lo largo del trabajo se ha esbozado la forma en que se podrían obtener los mismos resultados analíticos para el producto

$$\langle p, q\rangle = \int_0^{\infty} p(x)q(x)d\mu + \sum_{k=0}^{j} M_k p^{(k)}(a)q^{(k)}(a),$$

sin embargo se hace necesario abordar en detalle y de forma minuciosa tal tópico..

A. Anexo:Experimentos Numéricos

En esta sección haremos algunos experimentos de tipo numérico[1] para apreciar algunas de las propiedades estudiadas en el presente trabajo para casos particulares, y otras que usualmente satisfacen los polinomios de Laguerre clásicos.

Inicialmente, queremos mostrar que en general los ceros $\widetilde{L}_n^{\alpha}(x)$ no se entrelazan con los de $L_n^{\alpha}(x)$. Para tal fin usamos $\widetilde{L}_{15}^{\alpha}(x)$ y $L_{15}^{\alpha}(x)$, con $\alpha = 2$ y $a = -3$; además $M = 0{,}0005$ y $N = 0{,}0001$

k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$x_{15,k}$	0,4006	1,0799	2,068	3,376	5,017	7,0096	9,378	12,156
$\widetilde{x}_{15,k}$	−3,133	−2,616	0,757	1,92	3,48	5,424	7,761	10,516

k	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
$x_{15,k}$	15,381	19,12	23,455	28,518	34,522	41,8798	51,641
$\widetilde{x}_{15,k}$	13,728	17,456	21,783	26,839	32,839	40,191	49,948

Se observa que entre $x_{15,3}$ y $x_{15,4}$ no hay ningún cero de $\widetilde{L}_{15}^{2}(x)$.

De otro lado queremos observar como el punto masa localizado en a atrae los ceros negativos cuando $n \longrightarrow \infty$, al igual que cuando M o N tienden a infinito. En la siguiente tabla

[1]La programación para obtener la información de tipo numérico registrada a continuación se llevó a cabo gracias al software Matlab.

fijaremos $M = 10^{-3}$ y $N = 10^{-4}$, y usaremos $a = -2$ y $\alpha = 1$.

	$\widetilde{x}_{n,1}$	$\widetilde{x}_{n,2}$
$n = 5$	0,086306	1,5104728
$n = 6$	1,023622	$-0{,}781691$
$n = 8$	0,664532	$-1{,}858445$
$n = 12$	0,143778	$-2{,}112072$
$n = 13$	$-0{,}2562004$	$-2{,}118572$
$n = 14$	$-0{,}784222$	$-2{,}120145$
$n = 16$	$-1{,}5279004$	$-2{,}1091102$
$n = 17$	$-1{,}7057323$	$-2{,}097237$
$n = 20$	$-1{,}912797$	$-2{,}055523$
$n = 25$	$-1{,}9816882$	$-2{,}016435$
$n = 27$	$-1{,}9893643$	$-2{,}009981$
$n = 30$	$-1{,}9950583$	$-2{,}004797$

y en la siguiente tabla localizamos el punto masa en $a = -5$.

	$\widetilde{x}_{n,1}$	$\widetilde{x}_{n,2}$
$n = 3$	2,4600696	0,344209
$n = 4$	$-2{,}845493$	1,275366
$n = 5$	$-4{,}630008$	0,951881
$n = 8$	$-5{,}060594$	0,039294
$n = 9$	$-5{,}068006$	$-2{,}230544$
$n = 11$	$-5{,}064821$	$-4{,}679768$
$n = 13$	$-5{,}034884$	$-4{,}943352$
$n = 16$	$-5{,}008277$	$-4{,}990998$
$n = 20$	$-5{,}001182$	$-4{,}998806$
$n = 25$	$-5{,}000126$	$-4{,}999873$
$n = 27$	$-5{,}000053$	$-4{,}999946.$

Y en la siguientes tablas se fijará $N = 0{,}001$ y $M = 0{,}0004$ respectivamente, con $\alpha = 2$, $a = -3$ y $n = 15$, para observar como los ceros negativos son atraídos por a.

M	$\widetilde{x}_{15,1}$	$\widetilde{x}_{15,2}$
0,001	$-3{,}139$	$-2{,}81$
0,1	$-3{,}009$	$-2{,}9706$
0,5	$-3{,}002$	$-2{,}9775$
10	$-3{,}0001$	$-2{,}97987$
$\mathbf{10^3}$	$-3{,}0000013$	$-2{,}9800009$
$\mathbf{10^5}$	$-3{,}00000001$	$-2{,}980002$

N	$\widetilde{x}_{15,1}$	$\widetilde{x}_{15,2}$
0,00001	$-3{,}031$	$-1{,}457$
0,001	$-3{,}2124$	$-2{,}6917$
0,1	$-3{,}22089$	$-2{,}7024874$
10	$-3{,}220978$	$-2{,}7025937$
10^3	$-3{,}2209798$	$-2{,}7025948$
10^7	$-3{,}2209798$	$-2{,}7025948$

A continuación se fijará la masa M y luego estimaremos el mínimo valor que debe asumir la segunda masa N para encontrar un cero negativo. Para tal propósito se usará $a = -1$, y $\alpha = 1$.

Comenzamos con una masa fija de $M = 10^{-3}$, y $n = 7$.

	$N = 10^{-5}$	$N = 10^{-4}$	$N = 3 \times 10^{-4}$	$N = 4 \times 10^{-4}$	$N = 7 \times 10^{-4}$
$\widetilde{x}_{7,1}$	0,19318	0,14506	0,03474	−0,02061	−0,180373
$\widetilde{x}_{7,2}$	1,233731	1,18784	1,104727	1,07167	0,99779.

De donde se deduce que el valor N_0 satisface $3 \times 10^{-4} < N_0 < 4 \times 10^{-4}$.
Ahora si se fija de la misma forma $M = 10^{-3}$, y con $n = 6$, se tiene

	$N = 10^{-4}$	$N = 10^{-3}$	$N = 2 \times 10^{-3}$	$N = 3 \times 10^{-4}$
$\widetilde{x}_{6,1}$	0,367195	0,16453	−0,07283	−0,28677
$\widetilde{x}_{6,2}$	1,55599	1,32996	1,18508	1,10495,

y se estima que $10^{-3} < N_0 < 2 \times 10^{-3}$
Por otra parte, fijando $N = 10^{-3}$, se tiene la siguiente tabla:

	$M = 10^{-4}$	$M = 10^{-3}$	$M = 2 \times 10^{-3}$	$M = 3 \times 10^{-3}$	$M = 4 \times 10^{-3}$
$\widetilde{x}_{6,1}$	0,303286	0,1645256	0,0323046	−0,07739	−0,16817
$\widetilde{x}_{6,2}$	1,420463	1,329957	1,268229	1,228686	1,201645.

Se observa que la estimación de M_0 aproximadamente es $2 \times 10^{-3} < M_0 < 3 \times 10^{-3}$.
Fijando $N_0 = 0{,}02$, $\alpha = 1$, y $a = -2$ y usando la ecuación (5-14), se obtiene $M(N_0) = 0{,}00774$, $-\frac{D_1}{C_1} = 0{,}0000324$ y $-\frac{B_1}{A_1} = 0{,}0041$. En la siguiente tabla haremos variar M con valores menores y mayores que M_0 para ver el comportamiento de los ceros negativos.

	$M = 0{,}0007$	$M = 0{,}007$	$M = 0{,}009$	$M = 0{,}0177$
$\widetilde{x}_{8,1}$	−2,86705	−2,6256	−2,5784	−2,4419
$\widetilde{x}_{8,2}$	**0,54552**	**0,04403**	**−0,0682**	**−0,38396**

Ahora la idea será hacer variar el valor de α fijando n, las dos masas y a. Usaremos polinomios de grado $n = 12$ y $n = 15$, además de los valores $M = 0{,}003$, y $N = 0{,}001$, teniendo $a = -2$.

	$\alpha = 0{,}5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 4$	$\alpha = 6$	$\alpha = 8$	$\alpha = 9$
$\widetilde{x}_{12,1}$	−2,227	−2,234	−2,249	−2,227	−1,796	1,614	2,583
$\widetilde{x}_{12,2}$	−1,147	−1,015	0,3298	1,132	2,157	3,487	4,405.

	$\alpha = 0$	$\alpha = 2$	$\alpha = 4$	$\alpha = 5$	$\alpha = 8$	$\alpha = 9$	$\alpha = 10$
$\widetilde{x}_{15,1}$	$-2{,}122$	$-2{,}177$	$-2{,}245$	$-2{,}253$	$-1{,}439$	$0{,}633$	$2{,}367$
$\widetilde{x}_{15,2}$	$-1{,}798$	$-1{,}614$	$-0{,}541$	$0{,}702$	$2{,}508$	$3{,}068$	$4{,}016.$

Lo que se hará ahora es tomar valores fijos para las masas, el parámetro y el punto masa, para obtener valores mínimos para el grado del polinomio perturbado de tal manera que tenga uno y dos ceros negativos respectivamente. Tomando $a = -4$ se obtiene:

	$\widetilde{x}_{n_0,1} < 0$, $\widetilde{x}_{n_0,2} > 0$			$\widetilde{x}_{n_0,1} < 0$, $\widetilde{x}_{n_0,2} < 0$		
$M = 0{,}00004, \quad N = 0{,}001$	$\alpha = \mathbf{0}$	$\alpha = \mathbf{1}$	$\alpha = \mathbf{2}$	$\alpha = \mathbf{0}$	$\alpha = \mathbf{1}$	$\alpha = \mathbf{2}$
$n \geq n_0$	$n \geq 4$	$n \geq 5$	$n \geq 6$	$n \geq 9$	$n \geq 10$	$n \geq 12$

	$\widetilde{x}_{n_0,1} < 0$, $\widetilde{x}_{n_0,2} > 0$			$\widetilde{x}_{n_0,1} < 0$, $\widetilde{x}_{n_0,2} < 0$		
$M = 0{,}004, \quad N = 0{,}0003$	$\alpha = \mathbf{0}$	$\alpha = \mathbf{1}$	$\alpha = \mathbf{2}$	$\alpha = \mathbf{0}$	$\alpha = \mathbf{1}$	$\alpha = \mathbf{2}$
$n \geq n_0$	$n \geq 2$	$n \geq 3$	$n \geq 5$	$n \geq 8$	$n \geq 9$	$n \geq 11$

Ahora analizaremos el funcionamiento de las propiedades atractoras del punto masa cuando cuando se fija una masa y se hace tender a infinito la otra. En particular, tomaremos $a = -2$, $\alpha = 1$, $N = 0{,}01$, y usaremos $n = 7$. El polinomio $Q_{n-2}^{(2)}(x)$ viene dado por:

$$Q_{n-2}^{(2)}(x) = \frac{1}{\Omega_{n-3}((x-a)^4 d\mu)} \begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_{n-2} \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1} & \xi_n & \cdots & \xi_{2n-3} \\ 1 & (x-a) & \cdots & (x-a)^{n-2} \end{vmatrix},$$

y en este caso particular se tiene

$$\Omega_4((x+2)^4 d\mu) =$$

$$\begin{aligned} &= \left| \begin{pmatrix} 536 & 3552 & 26608 & 223\,456 & 2085\,504 \\ 3552 & 26608 & 223\,456 & 2085\,504 & 21\,450\,752 \\ 26608 & 223\,456 & 2085\,504 & 21\,450\,752 & 241\,320\,704 \\ 223\,456 & 2085\,504 & 21\,450\,752 & 241\,320\,704 & 2949\,474\,816 \\ 2085\,504 & 21\,450\,752 & 241\,320\,704 & 2949\,474\,816 & 38\,933\,066\,752 \end{pmatrix} \right| \\ &= 2060\,036\,729\,615\,351\,996\,743\,680, \end{aligned}$$

y

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_5 \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_6 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_5 & \xi_6 & \cdots & \xi_{11} \\ 1 & (x+2) & \cdots & (x+2)^5 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 536 & 3552 & 26608 & 223\,456 & 2085\,504 & 21\,450\,752 \\ 3552 & 26608 & 223\,456 & 2085\,504 & 21\,450\,752 & 241\,320\,704 \\ 26608 & 223\,456 & 2085\,504 & 21\,450\,752 & 241\,320\,704 & 2949\,474\,816 \\ 223\,456 & 2085\,504 & 21\,450\,752 & 241\,320\,704 & 2949\,474\,816 & 38\,933\,066\,752 \\ 2085\,504 & 21\,450\,752 & 241\,320\,704 & 2949\,474\,816 & 38\,933\,066\,752 & 552\,141\,672\,448 \\ 1 & (x+2) & (x+2)^2 & (x+2)^3 & (x+2)^4 & (x+2)^5 \end{pmatrix} \right|$$

y se encuentra que

$Q_5^{(2)}(x) =$

$= x^5 - 44.\,042x^4 + 677.\,61x^3 - 4437.\,4x^2 + 11898.x - 9775.\,1$

y cuyos ceros son

$q_{5,1}^{(2)}$	$1.\,441\,1$
$q_{5,2}^{(2)}$	$3.\,939\,4$
$q_{5,3}^{(2)}$	$7.\,413\,0$
$q_{5,4}^{(2)}$	$12.\,182$
$q_{5,5}^{(2)}$	$19.\,066,$

y para algunos valores de N, y fijando $M = 0{,}1$, se tiene que

$\widetilde{x}_{n,k}$	$N = 0{,}1$	$N = 10$	$N = 100$	$N = 1000$
$\widetilde{x}_{n,1}$	$-2{,}076$	$-2{,}209$	$-2{,}212$	$-2{,}212$
$\widetilde{x}_{n,2}$	$-1{,}399$	$-1{,}748$	$-1{,}751$	$-1{,}751$
$\widetilde{x}_{n,3}$	1,4876	1,4464	1,44601	1,446
$\widetilde{x}_{n,4}$	3,99684	3,943956	3,94346	3,94341
$\widetilde{x}_{n,5}$	7,48083	7,423444	7,4229	7,4228
$\widetilde{x}_{n,6}$	12,244	12,18447	12,1839	12,18384
$\widetilde{x}_{n,7}$	19,136	19,075	19,0744	19,0744

y vemos que dos de los ceros son próximos a el punto masa $a = -1$, y los demás ceros son aproximadamente cercanos a los de $Q_5^{(2)}(x)$.
Para incluir las referencias dentro del texto y realizar lista de la bibliografía en la respectiva sección, puede utilizar las herramientas que Latex suministra o, revisar el instructivo desarrollado por el Sistema de Bibliotecas de la Universidad Nacional de Colombia[2], disponible en la sección "Servicios", opción "Trámitesz enlace .Entrega de tesis".

[2]Ver: www.sinab.unal.edu.co

Bibliografía

[1] A. F. Nikiforov, V. B. U.: *Special Functions of Mathematical Physics: An unified approach*. Basel : Birkhauser Verlag, 1998

[2] Alfaro, M. ; López, G. ; Rezola, M.: Some Properties of Zeros of Sobolev-Type Orthogonal Polynomials. En: *J. Comput. Appl. Math.* 69 (1962), p. 171–179

[3] Althammer, P.: Eine Erweiterung des Orthogonalitatsbegriffes bei Polynomen und deren Anwendung auf die beste Approximation. En: *J. Reine Angew. Math.* 211 (1962), p. 192–204

[4] Chihara, T.S.: *An introduction to Orthogonal Polynomials*. New York : Gordon and Breach, 1978

[5] Cohen, E.A.: Zero distribution and behavior of orthogonal polynomials in the Sobolev space $W^{1,2}[-1,1]$. En: *SIAM J. Math. Anal.* 6 (1975), p. 105–116

[6] Duenas, H. ; Huertas, E. ; Marcellán, F.: Asymptotic Properties of Laguerre Sobolev Type Orthogonal Polynomials. En: *Numerical Algorithms, In press*

[7] Duenas, H. ; Huertas, E. ; Marcellán, F.: Analytic Properties of Laguerre-Type orthogonal Polynomials. En: *Integral Transf. Special Funct.* 22 (2011), p. 107–122

[8] Duenas, H. ; Marcellán, F.: The Laguerre-Sobolev-Type Orthogonal Polynomials. En: *J. Approx. Theory* 162 (2010), p. 421–440

[9] Duenas, H. ; Marcellán, F.: The Laguerre-Sobolev Type Orthogonal Polynomials. Holonomic Equation and Electrostatic Interpretation. En: *Rocky Mount. J. Math.* 41 (2011), p. 95–131

[10] E., Andrews G. ; R., Askey ; R., Roy: *Special functions in Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge : Cambridge University Press, 1999

[11] F. Marcellán, J.C. P.: Orthogonal polynomials and coherent pairs: the classical case. En: *sometido*

[12] Fujii, K.: A Modern Introduction to Cardano and Ferrari Formulas in the Algebraic Equations. En: *Quant-ph* 0311102 (2003)

[13] Huertas, E. ; Marcellan, F. ; Fejnullahu, B. X. ; Zejnullahu, R.Xh.: On Orthogonal Polynomials with Respect to Certain Discrete Sobolev Inner Product. En: *Pacific J. Math. In Press*

[14] Huertas, E. ; Marcellan, F. ; Rafaelli, F.: Zeros of OrthogonalPolynomials Generated by Canonical Perturbations on Standard Measure. En: *Appl. Math. Comput* 218 (2012), p. 109–127

[15] Iserles, A. ; Koch, P. E. ; Norsett, S. P. ; Sanz-Serna, J. M.: On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products. En: *J. Approx. Theory* 65 (1991), p. 151–175

[16] Ismail, M. E. H.: *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable, in Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge : Cambridge University Press, 2005

[17] Koekoek, R.: *Generalizations of the classical Laguerre polynomials and some q-analogues*. Netherlandsl, Tech. Univ. ofDelft, Tesis de Doctorado, 1990

[18] Koekoek, R. ; H. G, Meijer: An Generalization of the Laguerre polynomials. En: *SIAM J. Math. Anal* 24 (1993), p. 768–773

[19] Lewis, D. C.: Polynomial Least Square Approximations. En: *Amer. J. Math.* 69 (1947), p. 273–278

[20] Lopez, G. ; Pijeira, H.: *Generalizations of the classical Laguerre polynomials and some q-analogues*. Merida, Venezuela : Polinomios Ortogonales. XIV Escuela Venezolana de Matemáticas 2001. Facultad de Ciencias. Universidad de los Andes

[21] Marcellán, F. ; Perez, T. ; nar, M. P.: Laguerre-Sobolev Orthogonal Polynomials. En: *J. Comput. Appl. Math.* 71 (1996), p. 245–265

[22] Meijer, H. G.: A Short History of Orthogonal Polynomials in a Sobolev Sapce I. The Non Discrete Case. En: *Technische Universiteit Delft. Delft University of Technology Faculteit der Technische Wiskunde en Informatica Faculty of Technical Mathematics and Informatics ISSN 0922-5641 Copyright*

[23] Meijer, H. G.: Laguerre Polynomials Generalized to a Certain Discrete Sobolev Inner Product Space. En: *Journal of Aproximation Theory* 73 (1993), p. 1–16

[24] Meijer, H. G.: Sobolev orthogonal polynomials with a small number of real zeros. En: *J. Approx. Theory* 77 (1994), p. 305–313

[25] Szego, G.: *Orthogonal Polynomials*. New J. : American Mathematical Society. Colloquium Publications, 1975

[26] Wolf, F. W. Shäfke. G.: Einfache verallgemeinerte klassische Orthogonalpolynome. En: *J. Reine Angew. Math.* 262 (1973), p. 339–355