



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

**Geometrotermodinámica del Agujero
Negro de Kerr-Newman con
Constante Cosmológica**

Sindy Rocío Mojica Gómez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogotá, Colombia
2012

**Geometrotermodinámica del Agujero
Negro de Kerr-Newman con
Constante Cosmológica**

Sindy Rocío Mojica Gómez

Tesis de grado presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Ciencias-Física

Director:
Ph.D. Eduard Alexis Larrañaga Rubio

Línea de Investigación:
Geometrotermodinámica y Relatividad General
Grupo de Investigación:
Astronomía, Astrofísica y Cosmología

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogotá D.C., Colombia
2012

Nota de Aceptación

Los abajo firmantes certifican que han leído y aprueban el trabajo de grado titulado **Geometrotermodinámica del Agujero Negro de Kerr-Newman con Constante Cosmológica**, presentado por **Sindy Rocío Mojica Gómez** como requisito parcial para optar al grado de **Magíster en Ciencias-Física**.

Bogotá, D.C., 26.11.2012

Director _____
PhD. Eduard Alexis Larrañaga Rubio

Jurados: _____
PhD. José Robel Arenas Salazar

PhD. Carlos José Quimbay Herrera

A Marco.

A mi madre y a mi familia.

Agradecimientos

Agradezco a mi mamá y la familia Gómez H. por apoyar y acompañar siempre todas mis decisiones.

A mi tía Mati, por su apoyo al comenzar este proceso y ser un excelente ser humano hasta el final de sus días.

Te agradezco Marco por abrimme las puertas de tu corazón y por ser parte fundamental en este proceso de formación profesional y de crecimiento personal. Por traer felicidad a mi vida, por tu constante e incondicional apoyo, por ser mi voz de aliento y estar a mi lado sin importar la distancia.

A la Universidad Nacional de Colombia por abrimme sus puertas al conocimiento.

Al profesor Eduard Alexis Larrañaga por su colaboración, constancia y sobretodo su confianza y paciencia en el desarrollo de este trabajo.

A Pedro M. por su colaboración en el área de las matemáticas, por ser mi consejero personal y mi amigo.

A mis amigos Ana M., Henanchin y Richard por estar siempre a mi lado y en cualquier circunstancia.

Un agradecimiento muy especial a Jutta Kunz, el grupo de formación Models of gravity y a Hernando Quevedo.

A todas las personas que tuve el privilegio de conocer durante este proceso formativo y que me dieron la oportunidad de aprender de ellas.

Resumen

El estudio de la termodinámica de agujeros negros ha sido objeto de constante análisis; las transiciones de fase de los agujeros negros se ha obtenido por medio de la capacidad calorífica. En la actualidad la propuesta desarrollada por Hernando Quevedo ha formalizado el estudio de la termodinámica introduciendo un factor geométrico que ha cobrado relevancia en el contexto de la relatividad general y los agujeros negros, pues además de hallar transiciones de fase con la capacidad calorífica se han logrado relacionar las singularidades de escalar de curvatura R con las transiciones de fase que puedan existir en dichos sistemas. El vínculo entre la termodinámica y la geometría desarrollada por Quevedo se conoce como geometrotermodinámica GTD, donde la invarianza de Legendre juega un rol fundamental pues la escogencia adecuada de la métrica asegura resultados óptimos en el estudio. En este trabajo se aplica la GTD al agujero negro de Kerr AdS y Kerr-Newman AdS, con la constante cosmológica como variable termodinámica, donde los potenciales termodinámicos nos permiten calcular la capacidad calorífica y las transiciones de fase que ocurren en estos sistemas para ser comparadas con las singularidades obtenidas con escalar de curvatura R . Los resultados obtenidos nos llevan a concluir que la constante cosmológica como variable termodinámica no produce cambios en las transiciones de fase, tal y como se esperaba.

Palabras clave: Agujeros Negros, termodinámica, geometría diferencial, relatividad general, Kerr, Kerr-Newman, constante cosmológica.

Abstract

The study of thermodynamics of black holes has been constant analysis object; the phase transitions of black holes has been obtain through the heat capacity . At present, the proposal developed by Hernando Quevedo has formalized the study of thermodynamics by introducing a geometric factor that has gained importance in the context of the general relativity and black holes, as well as finding a phase transitions with a heat capacity has been achieved related the singularities of the curvature scalar R with a phase transitions that may exist in such systems. The link between thermodynamics and geometry developed by Quevedo called GTD, where the Legendre invariance plays a fundamental role as the proper choice of the metric ensures optimum results in the study. This paper applies the GTD to AdS Kerr black hole and Kerr-Newman AdS with cosmological constant like thermodynamic variable, where the thermodynamic potential allow calculate the heat capacity and phase transitions that occur in these systems to be compared with the singularities curvature obtained with scalar curvature R . The results obtained we have concluded that the cosmological constant like thermodynamics variable no produce changes in phase transitions, like we have hoped.

Keywords: Black Holes, thermodynamics, differential geometry, general relativity, Kerr, Kerr-Newman, cosmological constant.

Contents

Agradecimientos	VI
Resumen	VII
Abstract	VIII
L. lista de símbolos	XI
1. Introducción	2
2. Geometría Diferencial en Breve	4
2.1. 1-Formas	4
2.1.1. Espacios Topológicos	4
2.1.2. Espacios Métricos	5
2.1.3. Variedades Diferenciales	5
2.2. 1-Forma de Gibbs	8
2.3. Tensores	9
2.4. Conexión y Derivada Covariante	10
2.5. El Tensor de Riemann.	12
2.6. Transformaciones entre Variedades	13
3. Relatividad General	14
3.1. Curvatura	14
3.1.1. Geodsicas.	14
3.1.2. El Transporte Paralelo.	14
3.2. Las Ecuaciones de Campo	15
3.2.1. Postulados de la Relatividad General	18
4. Agujeros Negros	21
4.1. La Solución de Schwarzschild	23
4.1.1. Teorema del no pelo	27
4.2. Termodinámica de los Agujeros Negros	27
4.2.1. Las Cuatro Leyes de la Termodinámica de Agujeros Negros	28
4.3. Constante Cosmológica	31
4.3.1. Introducción de la Constante Cosmológica en las Ecuaciones de Campo de Einstein.	31

Contents

4.4. Radiación de Hawking	34
4.4.1. Breve Introducción a los Agujeros Negros Cuánticos	37
4.5. Cosmología de Sitter	38
4.6. Espacio anti de Sitter (AdS)	38
5. Fundamentos de Geometrotermodinámica	40
5.1. Formulación de la Geometrotermodinámica (GTD)	40
5.2. Identidad de Euler y la Relación de Gibbs-Duhem	41
5.3. Transformada de Legendre	42
5.3.1. Transformada Total de Legendre	42
5.3.2. La transformada parcial de Legendre	43
5.4. Condiciones que debe Cumplir la métrica invariante de Legendre.	43
6. GTD para Kerr AdS	45
7. GTD para Kerr-Newman AdS	50
APÉNDICES	58
A. Breve Introducción a la Termodinámica	59
B. Cálculos	65
BIBLIOGRAFÍA	66

Lista de símbolos

La convención de signos usada para las métricas es $(-, +, +, +)$. La velocidad de la luz c , la constante de gravitación universal G y la constante de Planck \hbar se toma en algunos casos iguales a la unidad.

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI
A	Área	m^2
c	Velocidad de la luz en el vacío	$2.9979 \times 10^8 ms^{-1}$
G	Constante de gravitación universal	$6,6726 \times -11m^2s^{-2}kg^{-1}$
H_o	Etalpía	J
h	Constante de Planck	$6,6261 \times 10^{-34} Js$
K	Constante de Boltzman	$1,3807 \times 10^{-23} J/K$
M	Masa	Kg
J	Momento angular	Kgm^2s^{-1}
P	Presión	Pa
Q	Carga eléctrica	C
S	Entropía	JK^{-1}
T	Temperatura	K
t	Tiempo	s
U	Energía Interna	J
V	Volumen	m^3

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término
β_i	Constante

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
ε	Espacio de Estado de Equilibrio Termodinámico		
Θ_G	1 – <i>forma</i> de Gibbs		
κ	Gravedad Superficial		
Λ	Constante Cosmológica		
ω	Velocidad Angular		
Φ	Potencial Termodinámico		
ϕ	Potencial Eléctrico		
ρ	Densidad de Masa		
τ	Espacio de Fase Termodinámico		

Subíndices

Subíndice	Término
$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$	Símbolos de Christoffel
$G_{\alpha\beta}$	Tensor de Einstein
$g_{\alpha\beta}$	Componentes del Tensor métrico
$ g $	Determinante del tensor métrico
$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$	Tensor de Riemman
$R_{\alpha\beta}$	Tensor de Ricci
R	Escalar de Ricci
$T_{\mu\nu}$	Tensor Energía Momento

Abreviaturas

Abreviatura	Término
1.GTD	Geometrotermodinámica
2.EFT	Espacio de fase termodinámico

1. Introducción

La termodinámica es una de las partes de la física cuya formulación ha sido un trabajo complejo y de muchos años, las ecuaciones y leyes que la explican se han obtenido a través de experimentos y conclusiones deducidas del constante trabajo aplicado. Sin embargo, la termodinámica a diferencia de otras áreas como la mecánica analítica, la mecánica cuántica o la relatividad, an no tiene un formalismo matemático general; las leyes de la termodinámica que fueron obtenidas a través de experimentos o el trabajo sobre máquinas desarrollado en la época Kelvin y Clausius, que con el paso del tiempo fueron establecidas junto con la ecuación fundamental de la termodinámica. Aunque la mecánica estadística resuelve los inconvenientes relacionados con el formalismo matemático, es la termodinámica y sus procesos experimentales, junto con las leyes que la describen el puente a través del cual hemos comprendido los conceptos básicos y de uso cotidianos como temperatura, calor, entropía, eficiencia, entre otros.

La geometría diferencial como base para el desarrollo de la geometrotermodinámica (GTD), ha conseguido establecer una fuerte relación entre la geometría y la física asociada a un sistema termodinámico. El proceso es relativamente simple; se establece un conjunto de coordenadas en el espacio de fase termodinámico τ que es una variedad descrita por la 1-*foma* de Gibbs Θ ; el par (Θ_G, τ) constituyen una estructura de contacto. El espacio de estado de equilibrio termodinámico ε como una subvariedad de τ , contiene la información física del sistema. Se asocia al espacio de fase τ una métrica G invariante de Legendre que es independiente del potencial termodinámico usado y que también induce una métrica g en el espacio de estado de equilibrio termodinámico ε . Con la métrica g se calcula el escalar de curvatura y se estudian las posibles transiciones de fase del sistema en relación. Es el cálculo paralelo de la capacidad calorífica la que nos puede indicar si el escalar de curvatura esta dando información acerca de las transiciones del sistema termodinámico, con la certeza de que la métrica G escogida halla sido la adecuada.

La propuesta de Quevedo [4] indica que las transiciones de fase podran ocurrir cuando el escalar de curvatura R es singular. Como en termodinámica ordinaria, cerca de los puntos de transición de fase se pierde el equilibrio termodinámico, los puntos singulares en R podran indicar los puntos críticos donde la descripción geométrica de la GTD da lugar a una aproximación mas general [34].

El formalismo de la GTD ha sido aplicado a sistemas termodinámicos clásicos como el gas ideal o el gas de Van der Waals [4, 29] en el que se ha calculado la capacidad calorífica y el escalar de curvatura con resultados positivos. Igualmente se han desarrollado cálculos para el agujero negro de Reissner-Nrodström, Kerr, Kerr-Newman, Schwarzschild AdS con el cual se probaron varios potenciales termodinámicos y métricas en espacio de estado de equilibrio

termodinámico[35]. En este trabajo se realiza la aplicación de la GTD al agujero negro de Kerr-AdS [19] y Kerr Newman AdS para analizar el comportamiento del escalar de curvatura con constante cosmológica negativa, al tiempo que se calcula la capacidad calorífica, con el fin de comparar ambos resultados.

Las coordenadas asociadas a los agujeros negros de Kerr y Kerr-Newman están dadas por la masa M , la carga Q , el momento angular J y por último la constante cosmológica Λ que en este caso se toma como una variable termodinámica más. Se espera que con la GTD aplicada sobre los agujeros negros de Kerr y Kerr-Newman, los resultados obtenidos a partir del cálculo del escalar de curvatura y sus correspondientes capacidades caloríficas, muestren las posibles transiciones de fase y la constante cosmológica no genere transiciones nuevas.

2. Geometría Diferencial en Breve

2.1. 1-Formas

En este capítulo se presentan los conceptos necesarios para definir las 1 – *formas* dentro de la cual se enmarca el desarrollo de la geometrotermodinámica.

2.1.1. Espacios Topológicos

Definición 1.1

Un espacio topológico τ es una pareja $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$, con \mathcal{T} un conjunto y \mathcal{A} una familia de subconjuntos de \mathcal{T} , llamados los abiertos que satisfacen [1]:

- $\emptyset, \mathcal{T} \in \mathcal{A}$ es decir, el vacío \emptyset y todo el conjunto \mathcal{T} son abiertos.
- Dada cualquier colección de abiertos $\mathbf{a}_\alpha \in \mathcal{A}$, donde $\alpha \in \mathcal{I}$, con \mathcal{I} un conjunto de índices, luego
 $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathbf{a}_\alpha \in \mathcal{A}$ la unión arbitraria de abiertos, es un abierto.
- Para toda colección finita de abiertos $\mathbf{a}_i \in \mathcal{A}$, con $i = 1, 2, \dots, n$ se tiene $\bigcap_{i=1}^n \mathbf{a}_i \in \mathcal{A}$, o sea, la intersección finita de abiertos es un abierto.

A todo conjunto se le puede asociar una topología, solamente se necesita definir los abiertos de \mathcal{T} a cualquier subconjunto de \mathcal{T} . La familia de abiertos de \mathcal{A} se llama topología de \mathcal{T} .

Definición 1.2

Sean dos espacios topológicos \mathcal{T} y \mathcal{R} , la función

$$f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{R} \tag{2.1}$$

se dice es continua si para cualquier abierto $\mathbf{b} \in \mathcal{R}$, la imagen inversa $f^{-1}(\mathbf{b})$ es un abierto \mathcal{T} .

Definición 1.3

Sean dos espacios topológicos \mathcal{T} y \mathcal{R} , la función

$$\varphi : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{R}, \tag{2.2}$$

se llama un homeomorfismo si la función φ es continua con inversa

$$\varphi^{-1} : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{T} \quad (2.3)$$

continua.

Definición 1.4

Un conjunto

$\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$, de un espacio topológico \mathcal{T} , se llama compacto si cualquier recubrimiento abierto de \mathcal{C} , existe un sobrerecubrimiento finito α_i , $i = 1, 2, \dots, n$ de \mathcal{C} , o sea

$$\mathcal{C} \subset \bigcup_{i=1}^n \alpha_i.$$

Definición 1.5

Un subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ de un espacio topológico \mathcal{T} , se llama cerrado si su complemento es abierto.

2.1.2. Espacios Métricos

Un espacio métrico \mathfrak{M} es un conjunto de puntos con una función denominada métrica

$$\begin{aligned} d : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y), \end{aligned} \quad (2.4)$$

tal que

- $\forall x, y \in \mathfrak{M}$, se tiene que

$$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

- $\forall x, y \in \mathfrak{M}$, se cumple

$$d(x, y) = d(y, x),$$

- $\forall x, y, z \in \mathfrak{M}$, se satisface la desigualdad triangular

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

2.1.3. Variedades Diferenciales

Sea \mathbb{R}^n el espacio vectorial euclideo, o sea, el conjunto de n-uplas (x^1, x^2, \dots, x^n) con la métrica usual [1].

2 Geometría Diferencial en Breve

Definición 1.6

Una función

$$\begin{aligned} \varphi : \Upsilon \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto x' = \varphi(x), \end{aligned} \tag{2.5}$$

con Υ un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , se llama de clase C^r si las coordenadas $x' = (x'^1, x'^2, \dots, x'^m)$ del punto imagen $\varphi(x)$ son funciones r -veces continuamente diferenciables. Si la función φ es de clase C^r para todo $r \geq 0$, entonces se dice que φ es suave o de clase C^∞ .

Definición 1.7

Sea X un espacio topológico. Se define una carta para X como el par (U, φ) donde U es un subconjunto abierto de X y φ es un homeomorfismo de U en \mathbb{R}^n , o sea:

$$\begin{aligned} \varphi : U \subset X &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ P &\longmapsto (x^1, \dots, x^n). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Es necesaria una estructura de espacio topológico por que $\varphi : U \subset X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, por lo tanto φ y φ^{-1} de un conjunto abierto (el codominio del homeomorfismo φ es \mathbb{R}^n , una abierto) debe ser un conjunto abierto. La función de la carta lleva abiertos en abiertos, como su inversa. La *dimensión de una carta* es la dimensión del subconjunto U es decir n . Usualmente se usa $(x^1 \dots x^n)$ y (x'^1, \dots, x'^n) para denotar diferentes sistemas de coordenadas [2].

Sea espacio topológico X y sean (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) dos cartas para X , se denominan **cartas compatibles** C^∞ , tales que

$$\begin{aligned} \varphi_1 : U_1 \subset X &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ P &\longmapsto (x^1, \dots, x^n), \\ \varphi_2 : U_2 \subset X &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ P &\longmapsto (x'^1, \dots, x'^n). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Se dice que las cartas m y n son compatibles si se cumplen dos condiciones:

- $m=n$ y
- $U_1 \cap U_2 \equiv \emptyset$ o $U_1 \cup U_2 \neq \emptyset$ las aplicaciones $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ y $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ son C^∞ .

Una *variedad topológica* X es un espacio topológico *Hausdorff* y *separable* (es decir, admite una base numerable de entornos abiertos), junto con una familia de cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_\alpha$ de dimensión n que recubren a \mathcal{M} si $\forall P, Q \in \mathcal{M} : P \neq Q, \exists U, V \subset \mathcal{M}$ abiertos tales que $P \in U$ y $Q \in V, U \cap V = \emptyset$. O sea, que se puede separar en dos puntos distintos[1, 2].

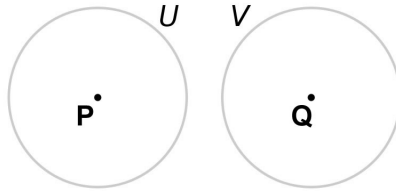


Figure 2.1.: Espacio topológico de Hausdorff para dos puntos P y Q en \mathbb{R}^2

Cuando una familia de cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_\alpha$ recubre \mathcal{M} quiere decir que $\forall P \in \mathcal{M}$ existe al menos un U tal que $P \in U$. Es decir que para todo punto siempre hay un entorno de coordenadas de una carta en el que está incluido.

Definimos el **atlas de una variedad topológica** \mathcal{M} a una familia de cartas que la recubre. Se dice que un atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_\alpha$ es C^∞ si cualesquiera cartas (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) del atlas son compatibles y se define una **carta admisible** para dicho atlas si es C^∞ compatible con todas sus cartas.

Un **atlas maximal** es aquel que contiene todas las cartas admisibles para un atlas inicial dado, es necesario utilizar este atlas con todas las cartas para definir la variedad; así no se privilegia ningún sistema de coordenadas respecto a la estructura, por que el atlas maximal es único, a diferencia del atlas inicial que describe de manera concreta y arbitraria el espacio topológico de modo tal que las leyes físicas son las mismas para distintos observadores[2].

Definición 1.8

Una **variedad diferenciable** \mathcal{M} es un espacio topológico de Hausdorff y separable junto con un atlas $C^\infty(U_\alpha, \varphi_\alpha)_\alpha$ de dimensión n y todas sus cartas admisibles que satisfacen las siguientes propiedades:

- $\forall P \in \mathcal{M} \exists (U_\alpha, \varphi_\alpha)$ tal que $P \in U_\alpha$. La familia recubre a \mathcal{M} .
- Cualesquier (U_β, φ_β) y $(U_\gamma, \varphi_\gamma)$ pertenecientes a la familia son C^∞ compatibles.
- Toda carta admisible para la familia de cartas está contenida en ella (atlas máximo).

Se define un vector tangente $T_p\mathcal{M}$ al conjunto de todos los vectores tangentes a una punto $p \in \mathcal{M}$ como el espacio tangente a la variedad en el punto p .

Lema 1.1

El espacio tangente $T_p\mathcal{M}$ es un espacio vectorial real.

2 Geometría Diferencial en Breve

Definición 1.9

Sea \mathcal{M} una variedad suave y $T_p\mathcal{M}$ el espacio tangente a un punto p . Una 1-forma ω en el punto p es una función lineal de valor real sobre $T_p\mathcal{M}$,

$$\begin{aligned}\omega : T_p\mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\longmapsto \omega(\mathbf{v}) \equiv \langle \omega, \mathbf{v} \rangle,\end{aligned}\tag{2.8}$$

tal que

- $\langle \omega, \mathbf{X} + \mathbf{Z} \rangle = \langle \omega, \mathbf{X} \rangle + \langle \omega, \mathbf{Z} \rangle; \forall x, z \in T_p\mathcal{M}$,
- $\langle \omega, \alpha\mathbf{X} \rangle = \alpha\langle \omega, \mathbf{X} \rangle; \forall x \in T_p\mathcal{M} \text{ y } \forall \alpha \in \mathcal{R}$.

Esto significa que las 1-formas sobre $T_p\mathcal{M}$ pertenecen al conjunto de transformaciones lineales, o sea, el conjunto de las transformaciones lineales de $T_p\mathcal{M}$ sobre los reales, y por tanto las 1-formas ω pertenecen al espacio vectorial dual $T_p^*\mathcal{M}$ del espacio tangente [1].

Una 2-forma Ω se define como una aplicación bilineal $\Omega : T(\mathbb{R}^n) \times T(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$. Donde \wedge determina el producto exterior entre 1-formas [2].

2.2. 1-Forma de Gibbs

Para el estudio de cualquier sistema físico es necesario un conjunto de coordenadas o un espacio en el que se va hacer el estudio que permita realizar una descripción vectorial o tensorial que de alguna manera termina entablando una relación con la geometría. En termodinámica se denomina espacio de fase termodinámico (EFT). Con base geométrica definida por una estructura de contacto.

Se considera un espacio de contacto de $(2n + 1)$ -dimensiones con coordenadas (P, X, F) (teorema de Darboux) y con una estructura de contacto definida como:

$$\Omega = Pdx - dF\tag{2.9}$$

La ec. 2.9 es lo que corresponde a la variedad de Legendre y permite acercarse a la 1-forma de Gibbs[3].

Definición 1.10

Sea \mathcal{M} un espacio euclidiano en \mathcal{R}^{2n+1} para cualquier n finito ($n = \text{grados de libertad}$), se designan las coordenadas (Φ, E^a, I^a) , donde Φ es el potencial termodinámico y E^a, I^a corresponden a las variables extensivas e intensivas respectivamente. As la 1-forma de Gibbs se expresa [4]:

$$\Theta_G = d\Phi - \delta_{ab}I^a dE^b, \quad \delta_{ab} = (1, \dots, 1)\tag{2.10}$$

Por ejemplo, si se designan las coordenadas por las letras $(U, S, V, -T, P)$ que representan la energía interna, entropía, volumen, temperatura y presión respectivamente, para este caso en particular, la 1 – *forma de Gibbs* se escribe

$$\Theta_G = dU - TdS + PdV. \quad (2.11)$$

Una variedad \mathcal{M} en termodinámica a veces es llamada **espacio de estados de Gibbs**, mas específicamente si tratamos sobre una variedad de contacto se define la 1 – *forma de Gibbs*.

Estructura de Contacto

Es un conjunto de hiperplanos que cumplen con la condición de no degeneración, o sea, la derivada debe existir en cualquier punto donde se evalué. En termodinámica se utiliza para asociar una estructura geométrica al espacio de fase termodinámico, aplicación que veremos en la formulación de la geometrotermodinámica [4, 18].

Teorema de Darboux

Sea ω^2 una 2 – *forma* diferencial no degenerada en una vecindad de un punto \mathbf{X} en el espacio \mathbb{R}^{2n} . Entonces en alguna vecindad de \mathbf{X} se puede escoger un sistema coordenado $(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$ tal que las formas tienen una forma estándar [3]

$$\omega^2 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i. \quad (2.12)$$

Este teorema permite extenderse a todas las variedades simplécticas cualquier afirmación de carácter local la cual es invariante con respecto a la transformación canónica y esta probada para cualquier espacio de fase estandar $(\mathbb{R}^{2n}, \omega^2 = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q})$.

2.3. Tensores

Definición 1.11

Defnase el producto cartesiano Π_r^s de la siguiente forma [1]

$$\prod_r^s \Leftarrow \underbrace{T_p^* \times T_p^* \times T_p^* \times \dots \times T_p^*}_{r\text{-veces}} \times \underbrace{T_p \times T_p \times T_p \times T_p \times \dots \times T_p}_{s\text{-veces}}. \quad (2.13)$$

Se encuentran entonces, r factores T_p^* y s factores T_p , o sea

$$\prod_r^s = \{(\chi^1, \dots, \chi^r, Y_1, \dots, Y_s) | \chi^i \in T_p^*, Y_j \in T_p\}. \quad (2.14)$$

2 Geometría Diferencial en Breve

Definición 1.12

Un tensor T de tipo (r, s) en $p \in \mathcal{M}$ es una funcional multilineal sobre \prod_r^s , esto es:

$$\begin{aligned} T : \prod_r^s &\longrightarrow \mathcal{R} \\ (\chi^1, \dots, \chi^r, Y_1, \dots, Y_s) &\longrightarrow T(\chi^1, \dots, \chi^r, Y_1, \dots, Y_s), \end{aligned} \quad (2.15)$$

lineal en cada componente.

\mathbb{T} se llama un *tensor r veces contravariante y s veces covariante*, cuyas componentes son

$$T_{\beta_1, \dots, \beta_s}^{\alpha_1, \dots, \alpha_r} = \mathbb{T}(E^{\alpha_1}, \dots, E^{\alpha_r}, E_{\beta_1}, \dots, E_{\beta_s}). \quad (2.16)$$

El tensor métrico g .

Asocia un número específico determinado por $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ para relacionar los vectores específicos \mathbf{A} y \mathbf{B} . La importancia de g radica en que relaciona las 1-*formas* (índices abajo (V_α)) con los vectores (índices arriba (V^α)) $V_\alpha = (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta) V^\beta$; donde \mathbf{e}_α y \mathbf{e}_β son las componentes de la 1-*forma* ω , la cantidad entre paréntesis se puede reducir a $\eta_{\alpha\beta}$, de tal manera que se puede reescribir $V_\alpha = \eta_{\alpha\beta} V^\beta$, asimismo, es posible efectuar el proceso inverso. El tensor métrico es un tensor simétrico $\mathbf{g}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{g}(\mathbf{B}, \mathbf{A})$ [1, 2].

2.4. Conexión y Derivada Covariante

La generalización adecuada de la derivada parcial sobre una variedad es la derivada covariante, la cual refiere una estructura definida sobre la variedad denominada conexión.

La métrica permite definir el transporte paralelo el cual traslada un vector de un punto a otro dentro de la variedad \mathcal{M} a lo largo de una curva, manteniendo constante el ángulo entre el vector y la curva. Hasta ahora no se han definido los vectores paralelos cada uno en un punto diferente de la curva; la conexión afín es un medio a través del cual podremos obtener una noción de paralelismo. Además de la motivación para definir la derivada covariante, también es necesario encontrar una análoga de la derivada parcial de un tensor para que su resultado también sea un tensor [1, 2].

Definición 1.13

Una conexión ∇ en un punto $p \in \mathcal{M}$ es una función que asigna a cada campo vectorial \mathcal{X} en p un operador diferencial $\nabla_{\mathbf{X}}$ que se define como

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}} : \Xi(\mathcal{M}) &\longrightarrow \Xi(\mathcal{M}) \\ \mathbf{Y} &\longmapsto \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

tal que

- $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ es un tensor en el argumento \mathbf{X} y es lineal respecto a \mathbf{X} ,

$$\begin{aligned} \nabla_{f\mathbf{X}+g\mathbf{Y}}\mathbf{Z} &= f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} + g\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} \\ \forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{M}), \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \Xi(\mathcal{M}), \end{aligned} \quad (2.18)$$

- $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ es lineal en \mathbf{Y} , o sea

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}}(\alpha\mathbf{Y} + \mathbf{Z}) &= \alpha\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \Xi(\mathcal{M}), \end{aligned} \quad (2.19)$$

-

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}}f\mathbf{Y} &= \mathbf{X}(f)\mathbf{Y} + f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \\ \forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{M}), \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \Xi(\mathcal{M}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Se dice que $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ es la derivada covariante del campo vectorial \mathbf{Y} con respecto a la **conexión** ∇ en la dirección del vector \mathbf{X} en el punto p .

La última propiedad dada puede ser reescrita usando la primera,

$$\nabla(f\mathbf{Y}) = df \otimes \mathbf{Y} + f\nabla\mathbf{Y}.$$

De una vecindad $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, las bases duales E_{α} y E^{α} que describen las componentes de $\nabla\mathbf{Y}$ (campo tensorial del tipo $(1, 1)$) en estas bases como $Y_{;\beta}^{\alpha}$ de la siguiente manera

$$\nabla\mathbf{Y} = Y_{;\beta}^{\alpha} E_{\alpha} \otimes E^{\beta},$$

para una variedad de dimensión n , las n^3 funciones $\Gamma_{;\beta}^{\alpha}$ determinan la conexión sobre $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \langle E^{\alpha}, \nabla_{E_{\beta}}E_{\gamma} \rangle.$$

Entonces las componentes de $\nabla\mathbf{Y}$ en una base dual coordenada esta dada por:

$$Y_{;\beta}^{\alpha} = \frac{\partial Y^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} Y^{\gamma}.$$

El cambio de base $E_{\alpha}, E^{\alpha} \longrightarrow E'_{\alpha}, E'^{\alpha}$, la ley de transformación es

$$\Gamma'_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\rho} \partial x'^{\gamma}} + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\beta}} \frac{x^{\tau}}{\partial x'^{\gamma}} \Gamma_{\rho\tau}^{\sigma}. \quad (2.21)$$

Sin embargo si comparamos esta ley de transformación con la transformación de componentes de un tensor, la conexión no se transforma de la misma manera [1]. Sin embargo la derivada covariante puede seguir un conjunto de reglas a través de las cuales puede ser aplicada a un tensor y obtener las componentes de una base coordenada así,

$$\begin{aligned}
 T_{\beta_1 \dots \beta_s; \gamma}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} &= \frac{\partial x_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}}{\partial x^\gamma} + \Gamma_{\gamma\sigma}^{\alpha_1} T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\sigma \alpha_2 \dots \alpha_r} + \dots \\
 &+ \Gamma_{\gamma\sigma}^{\alpha_r} T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_{r-1} \sigma} - \Gamma_{\gamma\beta_1}^\sigma T_{\sigma \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} - \\
 &\dots - \Gamma_{\gamma\beta_s}^\sigma T_{\beta_1 \dots \beta_{s-1} \sigma}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}.
 \end{aligned}$$

2.5. El Tensor de Riemann.

El tensor de curvatura de Riemann es un tensor de orden cuatro. Las componentes de este tensor no pueden visualizarse como en caso del tensor métrico de orden dos que se puede representar matricialmente. El tensor de Riemann se define [5]

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \frac{\partial \Gamma_{\delta\beta}^\alpha}{\partial x^\gamma} - \frac{\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha}{\partial x^\delta} + \Gamma_{\gamma\sigma}^\alpha \Gamma_{\delta\beta}^\sigma - \Gamma_{\sigma\delta}^\alpha \Gamma_{\gamma\beta}^\sigma. \quad (2.22)$$

Con

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g_{\lambda\mu, \nu} + g_{\nu\lambda, \mu} - g_{\mu\nu, \lambda}. \quad (2.23)$$

El tensor de Riemann cumple con las siguientes propiedades de simetría

$$\begin{aligned}
 R_{\beta\gamma\delta}^\alpha &= -R_{\beta\delta\gamma}^\alpha, \\
 R_{\beta\gamma\delta}^\alpha + R_{\gamma\delta\beta}^\alpha + R_{\delta\beta\gamma}^\alpha &= 0, \\
 R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -R_{\beta\alpha\gamma\delta}.
 \end{aligned} \quad (2.24)$$

El tensor de curvatura es antisimétrico en el primer par y sobre el segundo par de índices. Adems

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0. \quad (2.25)$$

A través de la operación de contracción de índices se obtienen otras propiedades como

$$R_{\beta\delta} := R_{\beta\sigma\delta}^\sigma, \quad (2.26)$$

de donde se obtiene tensor de Ricci que al igual que el tensor de Riemann, permite obtener información sobre la geometría del espacio, solo que de manera parcial.

En una variedad plana un vector paralelo es aquel, que moviendose paralelamente alrededor de una curva volviera su punto de inicio sin haber cambiado y esto implica

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0; \quad \forall p \in \mathcal{M}. \quad (2.27)$$

El *escalar de Riemann* se obtiene al contraer el tensor de Riemann R_{β}^{α}

$$R \equiv R_{\alpha}^{\alpha} \equiv g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \quad (2.28)$$

Tanto el tensor de Riemann como el escalar de curvatura dan información acerca de la curvatura del espacio-tiempo, si la curvatura es diferente de cero seguramente existe una fuente en el espacio de materia y energía que produce tal perturbación. Por el contrario si el valor calculado de la curvatura es igual a cero, se deduce que la variedad es plana.

Las componentes independientes del tensor de Riemann se pueden encontrar a través de

$$\frac{n^2(n^2 - 1)}{12}, \quad (2.29)$$

con n la dimensión de la variedad. Para $n = 4$ las componentes independientes son 20. El tensor de Riemann en un sistema coordenado general depende del tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ y de sus primeras y segundas derivadas parciales.

2.6. Transformaciones entre Variedades

Definición 1.14

Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} variedades m y n dimensionales. Una función

$$\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}, \quad (2.30)$$

se llama de clase C^k si dados los sistemas de coordenadas (U_α, ψ_α) y (V_β, φ_β) en \mathcal{M} y \mathcal{N} respectivamente, las coordenadas de $\phi(p)$ son funciones de clase C^k de las coordenadas de p [1]:

$$\begin{aligned} \varphi_\beta \circ \phi \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \psi_\alpha(p) &\longmapsto \varphi_\beta(\phi(p)). \end{aligned} \quad (2.31)$$

En el desarrollo de la geometrotermodinámica veremos como la aplicación de transformaciones entre variedades es bastante til.

3. Relatividad General

En este capítulo presentamos los principios generales de la relatividad general, introducimos el principio de equivalencia, curvatura, transporte paralelo y por supuesto las ecuaciones de Einstein.

3.1. Curvatura

El tensor de Riemann [6] nos permite formalizar el concepto de curvatura asociado con la conexión dada por los símbolos de Cristoffel y la métrica. Se distinguen dos tipos de curvatura: *intrínseca* y *extrínseca*. Por ejemplo un cilindro es redondo en una dirección y la percepción inmediata es que el objeto es curvo. O sea una curvatura extrínseca en aquella cuya relación con el espacio tridimensional plano se puede verificar a simple vista y de manera inmediata. Por otra parte, el cilindro puede ser obtenido enrollando una pieza plana de papel, a esta se le denomina geometría intrínseca del papel original, que es plano, esto significa que la distancia entre dos puntos en el cilindro es la misma que en el plano original y las líneas paralelas permanecen paralelas. La geometría intrínseca de una variedad $n - dimensional$ considera solo las relaciones entre los puntos sobre el camino que permanecen en la variedad. La curvatura extrínseca del cilindro depende de la noción del espacio de altas dimensiones. En general se consideran la curvatura intrínseca.

3.1.1. Geodésicas.

En el espacio plano las líneas rectas son la trayectoria más cercana entre dos puntos y uno de los axiomas de Euclides asegura que dos líneas rectas paralelas permanecen paralelas cuando son extendidas. Sin embargo, esto no significa que la distancia entre ellas sea constante, más bien la línea se mantiene en la dirección que ha sido dispuesta. En el espacio curvo se dibujan líneas que unen dos puntos lo más cerca posible para que cumplan con el transporte paralelo y se denominan *geodésicas*[1, 6].

3.1.2. El Transporte Paralelo.

Para realizar el estudio sobre el transporte paralelo usaremos una esfera; se asocia un vector \mathbf{A} a todo el punto de la curva como vemos en la fig 3.1.2. Si cada uno de los vectores \mathbf{A} está infinitesimalmente cerca uno del otro a lo largo de la curva, estos son paralelos o tienen la misma longitud, entonces se dice que \mathbf{A} se ha transportado paralelamente a lo largo de dicha curva. Se denomina λ el parámetro de la curva y $\mathbf{C} = \frac{d\mathbf{X}}{d\lambda}$ es el vector tangente a la curva.

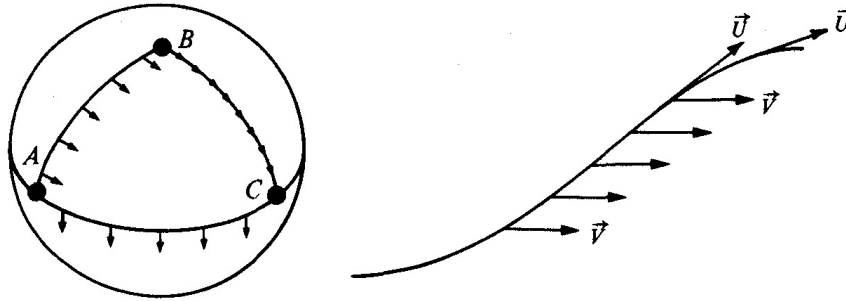


Figure 3.1.: Transporte paralelo sobre un triángulo esférico (izq) y a lo largo de la curva $C(\text{der})$

3.2. Las Ecuaciones de Campo

Desde siempre el espacio y el tiempo han sido conceptos de vital importancia en física, las leyes de conservación y su medida por diferentes observadores han sido una de las mayores preocupaciones en el estudio de los fenómenos físicos, dado que aunque dos observadores vean los fenómenos de diferentes formas, realizando una adecuada transformación de las coordenadas finalmente el resultado debe ser el mismo. Sin embargo, la noción de espacio y tiempo ha cambiado desde la visión de Galileo hasta la actualidad.

Desde la visión de Galileo [6] el tiempo era absoluto $t : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ cuyo gradiente no se anula en ningún punto de la variedad $dt \neq 0$. Igualmente dos puntos p y q de una variedad \mathcal{M} son simultáneos si $t(p) = t(q)$, el conjunto de sucesos simultáneos al punto p es una sección espacial que divide la variedad en dos partes: el pasado y el futuro de p . Las secciones espaciales son variedades diferenciales tridimensionales riemannanas y difeomorfas a \mathbb{R}^3 .

El espacio y tiempo definidos por Newton [6] no tiene vorticidad de manera tal que la conexión compatible con t absoluto y la métrica espacial plana de Galileo permanece invariante bajo difeomorfismos temporales generados por t .

En cuanto a la relatividad especial el espacio-tiempo es una variedad diferenciable pseudoriemanniana cuadridimensional \mathcal{M} a la cual se asocia una métrica lorentziana plana $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. Las relaciones de simultaneidad y causalidad respecto a un punto p están definidas por un cono de luz.

En relatividad especial los cuerpos siguen geodésicas temporales, si no es así seguramente hay alguna fuerza externa actuando sobre ellos y es allá donde la relatividad general tiene relevancia [6].

El *espacio-tiempo* es el conjunto de todos los sucesos y está descrito por una variedad diferenciable pseudoriemanniana (dotada de un tensor métrico no degenerada, simétrica y no definida positiva) conexa $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ de clase C^∞ , donde \mathbf{g} es una métrica lorentziana. Dos

3 Relatividad General

variedades $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ y $(\mathcal{M}', \mathbf{g}')$ representan el mismo espacio-tiempo si y solo si existe un difeomorfismo $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ tal que $\varphi_* \mathbf{g} = \mathbf{g}'$, de tal manera que sea posible elegir las coordenadas mas adecuadas para cada carta.

Una métrica lorentziana \mathbf{g} separa el espacio tangente T_p en cualquier punto $p \in \mathcal{M}$ en vectores \mathbf{V} espaciales, temporales o nulos dependiendo de los valores que tome $\mathbf{g}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ (positivo, negativo o cero respectivamente).

Un espacio-tiempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ es *extensible analíticamente* si y solo si existe otro espacio tiempo mas grande $(\mathcal{M}', \mathbf{g}')$ en el cual el primero esta inmerso isométricamente. Se dice que el espacio-tiempo es la *extensión analítica maximal* de otro espacio-tiempo si y solo si el primero es una extensión analítica del segundo el cual no es extensible. Se exige que el espacio-tiempo no sea extensible analíticamente pues el espacio tiempo debe contener los puntos que no son singulares.

Hasta ahora tenemos espacio-tiempo planos donde nos es desconocido el efecto de la curvatura del espacio-tiempo y su relación con la gravedad como una manifestación de la presencia de cuerpos materiales, de momentum y energía.

Un principio físico básico es el **principio de equivalencia** [6, 7, 8] el cual tiene dos connotaciones: débil y fuerte. **El principio de equivalencia débil** establece que la masa inercial y la masa gravitacional son equivalentes. Con la segunda ley de Newton

$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}. \quad (3.1)$$

La masa inercial es la resistencia de un cuerpo al tratar de ser movido. Mientras que en la ley de la gravitación, la fuerza gravitacional ejercida sobre un cuerpo es proporcional al gradiente de un campo escalar Φ (potencial gravitacional), donde la constante de proporcionalidad es m_g : la masa gravitacional. En este caso

$$\mathbf{F}_g = -m_g \nabla \Phi. \quad (3.2)$$

Galileo mostró que todo cuerpo cae con la misma razón en el campo gravitacional independientemente de su composición esto implica que $m_i \equiv m_g$ ya además la mecánica Newtoniana afirma por el principio de equivalencia débil que $m_i = m_g$ para cualquier objeto. Como consecuencia una partícula de prueba cae libremente sin importar su masa y

$$\mathbf{a} = -\nabla \Phi. \quad (3.3)$$

El principio de equivalencia débil implica que no hay modo de distinguir entre los efectos gravitacionales y los efectos de un marco uniformemente acelerado.

Si se considera un espacio muy grande el campo gravitacional podrá cambiar de un lugar a otro mientras que la aceleración y sus efectos se dirigen en la misma dirección. Las partículas confinadas en un campo gravitacional se mueven hacia el centro de la tierra orientadas en distintas direcciones como se ve en la fig 3.2. Por este motivo el principio de equivalencia

débil se puede escribir como “las leyes de partículas que caen libremente son las mismas en un campo gravitacional en un marco uniformemente acelerado en regiones lo suficientemente pequeñas ” [7].

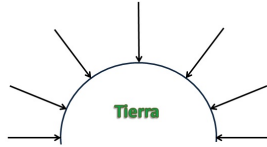


Figure 3.2.: Partículas que se mueven hacia el centro de la tierra en diferentes direcciones

En grandes regiones de espacio tiempo el campo gravitacional es inhomogéneo, como consecuencia se producen fuerzas de marea que pueden ser detectadas. El concepto de masa pierde su unicidad y por lo tanto para distinguir entre aceleración uniforme y el campo gravitacional en dirección a generalizar el principio de equivalencia débil y hacerlo mas inclusivo se establece **el principio de equivalencia de Einstein**. Para regiones lo suficientemente pequeñas las leyes de la física se reducen a la relatividad especial que imposibilita la detección de campos gravitacionales o el efecto de los cuerpos materiales en el espacio tiempo. Además del campo gravitacional, el campo electromagnético también está presente y se encuentran acoplados cumpliendo el principio de equivalencia débil.

Ahora imaginemos un cuerpo en cada libre que comienza a rotar mientras se mueve en una trayectoria como si estuviera en un marco acelerado a través del campo gravitacional. Recordemos que el principio de equivalencia de Einstein se aplica cuando no se detecta la acción de la gravedad, mientras que si las trayectorias son curvas y los marcos de referencia acelerados es necesario definir **el principio de equivalencia fuerte** el cual incluye todas las leyes físicas gravitacionales y otras que puedan apreciarse. En otras palabras el principio de equivalencia fuerte incluye todas las fuerzas de la naturaleza y como son perturbadas debido al campo gravitacional [7, 8].

Sin embargo para los propósitos que se quiere, se usa por lo general el principio de equivalencia de Einstein y en algunos casos se definen los MCRF (Marcos de referencia en comovimiento). Tiene mas sentido hablar de marcos no acelerados que marcos en cada libre, por que la gravedad no es una fuerza, mientras que una fuerza esta ligada a la definición de aceleración y la aceleración cero esta relacionada con moverse libremente en presencia de cualquier campo gravitacional. Sin embargo, la curvatura del espacio-tiempo es suficiente para describir la gravedad en el límite newtoniano que para un solo cuerpo gravitacional el potencial puede ser calculado partiendo de la suposición $m_i = m_g$ podemos igualar la fuerza relacionada con el campo gravitacional y la segunda ley de Newton [8]

$$-G \frac{M m_g}{r^2} \hat{r} = m_i \mathbf{a}. \quad (3.4)$$

3 Relatividad General

Donde M es la masa que produce el campo y m es la masa afectada por el campo. Como la fuerza es conservativa podemos escribir

$$\mathbf{F} = -m_g \nabla \Phi, \quad (3.5)$$

y en terminos de la ecuación de Poisson, la densidad de masa producida por M

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (3.6)$$

luego

$$\frac{d^2 X^i}{dt^2} = -\frac{m_g}{m_i} \nabla \Phi, \quad (3.7)$$

donde $g = -\nabla \Phi = -\frac{GM}{r^2}$ y $\Phi = -\frac{GM}{r}$, con $c = 1$. Por ltimo

$$\frac{d^2 t}{ds^2} = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{d^2 x^1}{ds^2} = -\frac{m_g}{m_i} \nabla \Phi, \quad (3.9)$$

con estas condiciones

$$\frac{d^2 X^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0, \quad (3.10)$$

siempre y cuando se cumpla

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \begin{cases} \Gamma_{00} = -\frac{m_g}{m_i} \nabla_i \Phi, \\ 0 \text{ otro modo.} \end{cases} \quad (3.11)$$

La fuente de campo gravitacional en la teora de Newton es como sabemos la densidad de masa, por lo tanto en la teoría de la relatividad la fuente de campo debe estar relacionada con la masa como una obvia generalización relativista corresponde a la energía total que por supuesto incluye la masa en reposo. Inicialmente se sugiere la densidad ρ como fuente de energía total del campo gravitacional relativista que es posible no alcance a satisfacer estas condiciones debido a que ρ es la densidad de energía medida en el marco local o MCRF.

3.2.1. Postulados de la Relatividad General

Igual que la relatividad especial, la relatividad general cumple con ciertas condiciones que permiten analizar los sistemas físicos adecuadamente dentro del contexto de estas teorías. El conjunto de postulados [1] que cumple la relatividad general involucran la geometría del espacio, la conservación de las leyes físicas y la relación entre la geometría del espacio-tiempo con la perturbación de este debido a la presencia de campos gravitacionales.

3.2 Las Ecuaciones de Campo

- Postulado 1. La variedad del espacio tiempo El espacio tiempo lo constituyen todos los eventos finitos y está descrito por el par $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ donde \mathcal{M} es una variedad suave cuatridimensional de Hausdorff y \mathbf{g} es la métrica lorentziana sobre la variedad \mathcal{M} .

Sobre la variedad \mathcal{M} estan definidos todos los campos de materia contenidos en el espacio-tiempo, denotados como $\psi_{(i)\gamma\dots\delta}^{\alpha\dots\beta}(x)$, donde i representa los diferentes campos de materia.

Los campos de materia obedecen a las ecuaciones expresadas como la relaciones entre tensores sobre la variedad \mathcal{M} cuyas derivadas con respecto a las coordenadas son derivadas covariantes con respecto a la conexión simétrica dada por la métrica \mathbf{g} .

- Postulado 2. Causalidad local Las ecuaciones que determinan los campos de materia deben incluir derivadas hasta un orden finito n y deben tener solución única determinada por las condiciones de frontera.
- Postulado 3. Conservación local de la energía Existe un tensor simétrico, llamado *tensor momento-energía* que es función de todos los campos de materia y sus derivadas. Tal que

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= 0 & \text{si y solo si} & & \psi_i &= 0 & \text{en } \mathcal{U} \subset \mathcal{M}, \\ \nabla_\gamma T^{\mu\nu} &= 0 & \text{ley de conservación.} & & & & \end{aligned} \quad (3.12)$$

- Postulado 4. Las ecuaciones de campo de Einstein. Hasta el momento se han dado todos los elementos para formular las ecuaciones de campo, en principio la métrica $\mathbf{g} = \eta$ es plana si nos encontramos en el contexto de la relatividad especial. Sin embargo, en relatividad general se consideran los efectos de la gravedad y como las partículas siguen geodsicas. Como es de nuestro conocimiento, las leyes de la física son las mismas para cualquier observador, existen formas variadas de espresarlas pero matienen la misma premisa: las leyes de la física son las mismas para cualquier marco coordenado. Para determinar las ecuaciones de campo para la métrica que describa un sistema en relatividad general y conservar el principio de equivalencia son relaciones tensoriales que incluyen el efecto de la materia a través del tensor momento energía. De otro lado, el único elemento que puede determinar la geometría del espacio-tiempo es el tensor de Riemann y sus derivados como el tensor de Ricci o el escalar de curvatura que se obtiene a partir del tensor métrico y las primeras derivadas de sus componentes, siempre y cuando satisfaga las condiciones de simetría y el principio de conservación local, de manera que la métrica sobre la variedad ya definida $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ esta dada por las ecuaciones de campo de Einstein que se expresan

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}, \quad (3.13)$$

3 *Relatividad General*

donde G es constante de gravitacion universal y Λ es la constante cosmológica. Las ecuaciones de Einstein son diez ecuaciones acopladas no lineales para la métrica y sus primeras derivadas, aunque

$$\left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta} \right)_{;\alpha} = 0 = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}_{;\alpha}, \quad (3.14)$$

la divergencia covariante a cada lado de la ecuación se satisface independientemente lo que reduce las ecuaciones a seis y finalmente con ellas se puede determinar el tensor métrico.

4. Agujeros Negros

Del mismo modo que cualquier ser de la naturaleza, las estrellas también cumplen con un ciclo de vida: nacen, crecen, agotan el combustible que las mantiene vivas y por ltimo mueren, y es esta última parte en la que enfocamos nuestra atención, particularmente en estrellas con suficiente masa como para finalizar su ciclo en un agujero negro.

A lo largo de su evolución, una estrella pasa por diferentes fases que determinaran como ser su futuro y que puede suceder con ella al final de su vida. Una estrella puede vivir millones de años, afortunadamente se han obtenido datos de diferentes etapas de su vida esquematizando su evolución.

Las estrellas se forman a partir de nubes de gas interestelar que al acumularse se comprimen y aumentan su densidad. La acción de la gravedad termina por contraer la estrella, y al igual que cualquier gas ejerce una presión hacia afuera que contrarresta el efecto de la gravedad intentando detener la contracción, cuando estas dos fuerzas (la presión y la gravedad) tienen un valor semejante, la estrella sigue el proceso de contracción mucho mas lentamente. Comienza a formarse un núcleo caliente alrededor del cual se concentra una nube de gas y polvo hasta que la temperatura alcanza para producir reacciones termonucleares tales como la fusión, con la que se genera suficiente energía en la estrella para que esta empiece a brillar y es as como la estrella comienza su vida.

Durante toda su vida, la estrella debe mantener dos tipos de equilibrio: por un lado la presión a cualquier profundidad de la estrella debe balancearse con el peso de las capas superiores y de otro lado el equilibrio térmico, en el que la energía producida en el interior debe equilibrarse con la energía radiada hacia el exterior y con la temperatura interna. La masa de la nube de gas, determina la masa de la estrella y como terminar su vida esta.

Durante casi el 90% de su vida la estrella vive en lo que se conoce como la secuencia principal, en este largo periodo de tiempo sobrevive mediante la fusin nuclear quemando el hidrógeno que la constituye. Además, es posible que a su alrededor gracias a restos de polvo y gas se hayan formado planetas. Existen diferentes tipos de estrellas en la secuencia principal como las gigantes azules que son estrellas muy grandes y masivas, las enanas rojas pequeñas y de poca masa o nuestro sol que esta catalogado como una enana amarilla.

La estrella quema el hidrógeno en un proceso de combustión generando helio mediante una cadena de reacciones, entre ellas la cadena protón-protón y el ciclo CNO donde intervienen el carbono, nitrógeno y el oxígeno; de la masa de la estrella no solo depende su muerte, sino también el tiempo que durar en la secuencia principal, por lo general las estrellas mas

4 Agujeros Negros

grandes consumen rápidamente su combustible tal que su tiempo de vida es muy corto.

Al consumir la mayor parte de su hidrógeno la estrella comienza a acumular helio en su interior hasta el punto en que el helio empieza a interrumpir los procesos de fusión disminuyendo la presión hacia el exterior y como consecuencia comprimirla y calentarla mucho más lo cual produce una dilatación de las capas exteriores de la estrella, seguida por un aumento en su radio y su luminosidad con el que la estrella comienza con una fase de **gigante roja** que la saca de la secuencia principal. La estrella comienza a acumular los elementos más pesados cerca de su centro y a medida que se aleja de este se constituyen capas de elementos cada vez menos pesados. El proceso de fusión produce grandes cantidades de hierro que es el elemento más pesado que se forma en la combustión nuclear. El gas a su alrededor es eyectado a través de poderosos vientos estelares.

Cuando una estrella posee una masa menor a $1.4M_{\odot}$ su vida termina convertida en una **enana blanca**. Durante el proceso de colapso este tipo de estrellas expulsa una nube vaporosa de gases conocida como **nebulosa planetaria**, las cuales son ionizadas e iluminadas durante el tiempo en que la estrella moribunda permanece caliente. El tamaño de una enana blanca puede aproximarse al tamaño de un planeta como la tierra sin embargo, la gravedad en su superficie alcanza a ser 1×10^5 veces mayor.

Un ejemplo cercano de enana blanca es el propio sol que terminará como una esfera fría de unos 10^4 Km de diámetro. Aunque el proceso de enfriamiento es bastante lento tanto que se cree que aún no se han enfriado las enanas blancas que primero se formaron en el universo, pues las enanas blancas solo radian el 1% de la luminosidad solar.

Las **enanas marrones** son objetos de $0.01 - 0.8M_{\odot}$, que no son capaces de mantener reacciones nucleares de fusión de hidrógeno continuas, pero brillan debido al calor residual de las reacciones por lo que continúan contrayéndose y enfriándose, las enanas marrones son relevantes ya que establecen un vínculo entre los planetas gigantes y las estrellas de poca masa.

Las **supernovas** son explosiones muy violentas de estrellas de gran masa, en las cuales en la etapa de gigantes rojas comenzaron reacciones termonucleares con carbono y oxígeno, produciendo silicio que ahora se convierte en el nuevo combustible nuclear que genera residuos de hierro. Cuando el núcleo alcanza $5 \times 10^9 \text{ C}$ de temperatura, los núcleos atómicos se descomponen en protones, neutrones y neutrinos, como si el proceso fuera de producción de núcleos atómicos durante la vida de la estrella se dirigiese en dirección opuesta, el cual junto a los neutrinos que escapan del núcleo, gasta energía suficiente para disminuir la temperatura de la estrella. Este proceso desestabiliza el núcleo, se pierde el equilibrio hidrostático, la gravedad triunfa finalmente y el colapso de la estrella gigante sucede en menos de un segundo. La expulsión de las capas superiores generan una maravillosa luminosidad tan grandiosa que puede ser observada en toda la galaxia.

De la presión ejercida sobre el núcleo nacerá una estrella de neutrones o un agujero negro.

Las **estrellas de neutrones** son remanentes de estrellas gigantes de una masa superior a $8M_{\odot}$ e inferior a un límite que aún no se conoce, después de la explosión de supernova. Las estrellas de neutrones están formadas por neutrones muy condensados con una masa de 1.4 veces la masa del sol, dentro de una esfera de $20 \times 10^3 \text{ Km}$ de diámetro, por lo que su densidad es de aproximadamente 10^{12} Kg/m^3 y rotan tan rápido que se genera un campo magnético que emite energía a una frecuencia radial. Si se está ubicado de manera adecuada se pueden detectar las pulsaciones enviadas por este objeto denominado **pulsar**.

Los **agujeros negros** son los cuerpos astrofísicos más misteriosos de la naturaleza. La materia de la estrella colapsada cae dentro del **horizonte de eventos** que es una superficie geométrica, la cual separa los sucesos dentro del agujero negro del resto del universo, puesto que es imposible distinguir físicamente dicho horizonte. Los cálculos realizados por Schwarzschild sugieren que el radio de horizonte corresponde a $2MG$; en el caso de la Tierra por ejemplo el radio de Schwarzschild sería de 1 cm .

La motivación para estudiar los agujeros negros [9] es la hipótesis de que estos objetos misteriosos tienen relación con muchos de los procesos fundamentales del universo. Se cree que los agujeros negros poseen importante información sobre la naturaleza del espacio-tiempo, es decir la relación entre el mundo de $3 - \text{dimensiones}$ y el de $4 - \text{dimensiones}$. Un ejemplo de esto es como el tiempo para un infortunado astronauta en la frontera del horizonte de eventos, permanece en reposo y desde allí puede observar futuros sucesos en el universo exterior, pues una vez ha llegado al horizonte no puede escapar del poder del agujero negro y quedar atrapado allí para siempre, entonces lo que para el astronauta es un periodo muy corto de tiempo, para los seres fuera del horizonte de eventos los sucesos en el universo exterior se manifiestan como procesos de larga duración en el universo, tal como la evolución de las estrellas o hasta la formación de galaxias. Los agujeros negros, contienen información de una fuerza que experimentamos a diario y que mantiene en cierto equilibrio la configuración al universo mismo, la gravedad.

4.1. La Solución de Schwarzschild

La primera solución a las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (4.1)$$

fue desarrollada por Schwarzschild [7, 10, 15]. La métrica de Schwarzschild describe un agujero negro esféricamente simétrico, estático y estacionario en el espacio-tiempo vacío. En tal caso las ecuaciones de Einstein llevan a que el tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = 0$ [1].

Schwarzschild no solo obtuvo una solución particular de las ecuaciones de Einstein. También logró comprender los efectos relativísticos en los sistemas planetarios (i.e. tierra-sol) pues

4 Agujeros Negros

describe el campo gravitacional en el exterior de un cuerpo esféricamente simétrico, cuyo elemento de línea está dado por [10]

$$ds^2 = -e^{\alpha(t,r)} dt^2 + e^{\beta(t,r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.2)$$

$$\text{con } d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2.$$

Ahora se resuelven las ecuaciones de Einstein [7] para una métrica en un espacio-tiempo esféricamente simétrico, se calculan los símbolos de Christoffel con los cuales se determinan explícitamente los valores de las funciones $\alpha(t, r)$ y $\beta(t, r)$, puesto que estos símbolos son necesarios para obtener el tensor de curvatura, el tensor de Ricci y el escalar de curvatura. Definidos (x^0, x^1, x^2, x^3) para el conjunto de coordenadas (t, r, θ, ϕ) se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \partial_0\alpha & \Gamma_{01}^0 &= \partial_1\alpha & \Gamma_{11}^0 &= e^{2(\beta-\alpha)}\partial_0\beta, \\ \Gamma_{00}^1 &= e^{2(\alpha-\beta)}\partial_1\alpha & \Gamma_{01}^1 &= \partial_0\beta & \Gamma_{11}^1 &= \partial_1\beta, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} & \Gamma_{22}^1 &= -re^{-2\beta} & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{33}^1 &= -re^{-2\beta}\text{sen}^2\theta & \Gamma_{33}^2 &= -\text{sen}\theta\cos\theta & \Gamma_{23}^3 &= \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Las componentes que no están escritas explícitamente son cero o son simétricas a las ya mencionadas. Las componentes no nulas del tensor de Riemann son

$$\begin{aligned} R_{101}^0 &= e^{2(\beta-\alpha)}[\partial_0^2\beta + (\partial_0\beta)^2 - \partial_0\alpha\partial_0\beta] + [\partial_1\alpha\partial_1\beta - \partial_1^2\alpha - (\partial_1\alpha)^2], \\ R_{202}^0 &= -re^{-2\beta}\partial_1\alpha, \\ R_{303}^0 &= -re^{-2\beta}\text{sen}^2\theta\partial_1\alpha, \\ R_{212}^0 &= -re^{-2\alpha}\partial_0\beta, \\ R_{313}^0 &= -re^{-2\alpha}\text{sen}^2\theta\partial_0\beta, \\ R_{212}^1 &= re^{-2\beta}\partial_1\beta, \\ R_{313}^1 &= re^{-2\beta}\text{sen}^2\theta\partial_1\beta. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Contrayendo para obtener el tensor de Ricci se tiene que

$$\begin{aligned} R_{00} &= [\partial_0^2\beta + (\partial_0\beta)^2 - \partial_0\alpha\partial_0\beta] + e^{2(\alpha-\beta)}[\partial_1^2\alpha + (\partial_1\alpha)^2 - \partial_1\alpha\partial_1\beta + \frac{2}{r}\partial_1\alpha], \\ R_{11} &= -[\partial_1^2\alpha + (\partial_1\alpha)^2 - \partial_1\alpha\partial_1\beta - \frac{2}{r}\partial_1\beta] + e^{2(\beta-\alpha)}[\partial_0^2\beta + (\partial_0\beta)^2 - \partial_0\alpha\partial_0\beta], \\ R_{01} &= \frac{2}{r}\partial_0\beta, \\ R_{22} &= e^{-2\beta}[r(\partial_1\beta - \partial_1\alpha) - 1] + 1, \\ R_{33} &= (e^{-2\beta}[r(\partial_1\beta - \partial_1\alpha) - 1] + 1)\text{sen}^2\theta. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Sin embargo $R_{\mu\nu} = 0$. De $R_{01} = 0$ se infiere $\partial_0\beta = 0$. Como el sistema es estacionario, esto implica que no evoluciona con el tiempo, luego la derivada respecto a esta coordenada es nula, lo anterior quiere decir que $R_{00} = 0$ y $\partial_0\beta = 0$, de donde se tiene que $\partial_0\partial_1\alpha$.

4.1 La Solución de Schwarzschild

Ahora las funciones α y β se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\beta &= \beta(r), \\ \alpha &= f(r) + g(r).\end{aligned}\tag{4.6}$$

Luego el primer término de la ec.(4.2) es independiente de la coordenada temporal $\alpha(t, r) = f(r)$ por que $g(t) = 0$ y por lo tanto queda como $-e^{2f(r)}e^{2g(t)}dt^2$, sin embargo la coordenada temporal se puede escribir como $dt \rightarrow e^{-g(t)}dt$. La métrica queda entonces

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{\beta(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2.\tag{4.7}$$

Como se puede observar las componentes de la métrica son independientes del tiempo, lo que comprueba que la métrica en cuestion es estacionaria. Asimismo esta métrica es estática pues nada está en movimiento, mientras que la métrica estacionaria es aquella que permite movimiento de las cosas pero solamente de manera simétrica, tal como una métrica esféricamente simétrica que puede describir adecuadamente una estrella o un agujero negro sin rotación. Sin embargo, los sistemas con rotación son descritos a través de métricas estacionarias.

Debido a que R_{00} y R_{11} desaparecen y usando las ecuaciones para el tensor de Ricci obtenemos

$$0 = e^{2(\beta-\alpha)}R_{00} + R_{11} = \frac{2}{r}(\partial_1\alpha + \partial_1\beta),\tag{4.8}$$

por lo que $\alpha = -\beta + cte$; reescalando las coordenadas se tiene que $\alpha = -\beta$.

Tomamos ahora a $R_{22} = 0$,

$$e^{-2\alpha}(2r\partial_1\alpha + 1) = 1,\tag{4.9}$$

o del mismo modo

$$\partial_1(re^{2\alpha}) = 1,\tag{4.10}$$

que resolviendo queda

$$e^{2\alpha} = 1 + \frac{\mu}{r},\tag{4.11}$$

con μ una constante no definida. Con la ec.4.11 y el hecho de que $\alpha = -\beta$, la métrica adquiere la forma

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{\mu}{r}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{\mu}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2.\tag{4.12}$$

Como podemos ver en la ec.4.12 es independiente de todos los parámetros excepto de μ el cual se puede tomar cualquier valor y también es posible comprobar que es adecuado para

4 Agujeros Negros

las ecuaciones $R_{00} = 0$ y $R_{11} = 0$.

Las soluciones a un sistema esféricamente simétrico en el vacío se enfocan en analizar la configuración del espacio-tiempo en el exterior de una estrella, un planeta, un agujero negro o cualquier cuerpo astrofísico con estas características. En el caso límite cuando $r \rightarrow \infty$ las componentes g_{00} y g_{rr} de la métrica dada en la ec (4.12) son

$$\begin{aligned} g_{00}(r \rightarrow \infty) &= -\left(1 + \frac{\mu}{r}\right), \\ g_{rr}(r \rightarrow \infty) &= \left(1 - \frac{\mu}{r}\right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Es decir en el límite del campo débil se tiene

$$\begin{aligned} g_{00}(r \rightarrow \infty) &= -\left(1 + 2\Phi\right), \\ g_{rr}(r \rightarrow \infty) &= \left(1 - 2\Phi\right), \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde $\Phi = -\frac{GM}{r}$ correspondiente al potencial gravitacional, luego la constante μ es interpretada en términos de una cantidad física, en este caso $\mu = -2GM$.

Finalmente obtenemos la **métrica de Schwarzschild**

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2MG}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.15)$$

válida para cualquier solución a las ecuaciones de Einstein esféricamente simétrica en el vacío. Aunque la solución de Schwarzschild no es la mejor, es la única con estas características y a esto se le conoce como **teorema de Birkhoff**. La masa M funciona como un parámetro que interpretado desde la mecánica Newtoniana corresponde a la masa estudiada a grandes distancias desde donde se encuentra la fuente gravitacional. Es importante recalcar que cuando $M \rightarrow 0$ corresponde al espacio de Minkowski, asimismo cuando $r \rightarrow \infty$ el espacio se vuelve progresivamente Minkowskiana, propiedad que se conoce como **asintóticamente plana**.

De la ec.(4.12) los coeficientes de la métrica son cantidades dependientes de las coordenadas que se vuelven infinitas cuando $r = 0$ y $r = 2GM$ y es posible tener una “singularidad coordenada” consecuencia de una mala elección en el conjunto coordenado de la variedad. La modo de resolver este inconveniente es cambiar el sistema coordenado para que no se presenten las singularidades ya mencionadas.

La solución encontrada solo es válida en el vacío y para el espacio fuera del cuerpo simétrico en estudio.

4.1.1. Teorema del no pelo

La solución de Schwarzschild aunque es relevante no es la única que se ha obtenido y para ello vamos a mencionar un teorema fundamental en el estudio de los agujeros negros y las soluciones a las ecuaciones de Einstein asociadas a ellos. Como bien sabemos el horizonte de eventos está ubicado en $R = 2M$ fuera del horizonte en $R \geq 2M$ es donde la física toma relevancia para cualquier observador externo, luego los sucesos dentro del agujero si bien no son observables, ni medibles, no tienen ninguna influencia sobre lo que ocurre en el espacio exterior.

El teorema del no pelo [11] establece que un agujero negro puede ser caracterizado completamente por la masa M , la carga eléctrica Q y el momento angular J . Un colapso más realista de una estrella produce un agujero negro con algunas diferencias respecto a la solución de Schwarzschild: una pequeña carga eléctrica y pequeñas asimetrías, cálculos con teoría de la perturbación predicen un agujero negro con un campo externo determinado por completo por M, Q y J . Para un colapso con grandes asimetrías y gran cantidad de carga también cumplen con el teorema del no pelo.

La explicación heurística de este teorema se enfoca en el hecho de que todas las cantidades intrínsecas para cualquier fuente aislada de gravedad y electromagnetismo, solo M, Q y a están definidos por unicidad y conservación en los campos externos de la fuente.

4.2. Termodinámica de los Agujeros Negros

El estudio de los agujeros negros es más sencillo cuando se comprende el concepto de horizonte de eventos, siendo este una superficie geométrica que separa el agujero negro del resto del universo y los eventos que ocurren dentro de él, no se pueden caracterizar o medir por un observador externo. De otro lado, la termodinámica juega un rol fundamental, pues con ella podemos comprender cómo está organizado el universo, diferente a la dinámica, que se enfoca en estudiar los efectos de la gravedad sobre el espacio-tiempo.

El radio $r = 2MG/c^2$ es el horizonte que separa los eventos que pueden ser observados a grandes distancias de los que no. Un cálculo adecuado muestra que al aproximarse al radio crítico la luz desde la superficie manifiesta un corrimiento al rojo que parece sin límite, tal que no puede ir más allá de lo visible, y en últimas un observador no la podrá ver. Aunque, luego de una larga espera un observador inercial en el infinito que imagina como la luz lucha contra la acción de la gravedad, capta como la luz moviéndose a su velocidad usual permanece lejos de la estrella que a lo lejos y luego de una larga espera parece congelada.

En la familia de agujeros negros de Kerr-Newman, el comportamiento de la luz es más complicado, pero en general las características son semejantes a las del agujero negro del Schwarzschild. A pesar de que el interior del agujero negro es desconocido para cualquier observador fuera de él, es posible suponer lo que ocurre dentro del agujero pues en cualquier caso las leyes físicas son invariantes. Asimismo definir una diferencia entre dos agujeros

4 Agujeros Negros

negros con la misma M , J y Q es prácticamente imposible, ya que no importa el material del que est constituido en su estado final se ver igual. Los parámetros (M, J, Q) enunciados por el teorema del “no pelo” son observables desde el exterior y a una gran distancia de la estrella y constituyen un macro-estado compuesto por una gran cantidad de micro-estados internos (producidos durante el colapso); gradientes de temperatura, carga eléctrica, distribución de corriente y densidad de perturbación la mantienen lejos de la simetría esférica exacta. Si se mide un patrón alrededor de campo eléctrico para determinar su diferencia entre regiones vecinas, el efecto de crecimiento de la curvatura del espacio-tiempo que distorsiona las líneas de fuerza correspondera a una distribución de carga uniforme. Debido a la gran cantidad de microestados se sugiere una alta entropía y en algún momento un máximo de entropía que llevar al EQUILIBRIO DE ESTADO FINAL del colapso gravitacional.

En un agujero negro la mayoría de la información física fue borrada. Debido a la gran cantidad de microestados producidos la entropía no solo describe el nivel de desorden del sistema sino que también su tamaño, esto nos permitir mas adelante definir su relación con a termodinámica. En el equilibrio se obtiene información sobre la carga y la temperatura al final desaparece, asimismo la densidad de perturbaciones, la cantidad de bariones y leptones se vuelven observables inmedibles en el exterior del agujero negro. El colapso de una estrella es entonces un proceso irreversible en el cual se pierde casi toda la información. Debido a las colisiones entre moléculas es posible que la información macroscópica se pierda y no pueda ser medida pues se redistribuye en todos los microestados posibles y en grados de libertad irresolubles. Luego, si la información es destruida por el campo gravitacional, es imposible acceder a la información sobre el agujero pues el horizonte de eventos impide que podamos acercarnos a ella. En cualquier caso, la memoria observable del estado inicial está completamente perdida. Sin embargo, hay un camino que sigue la entropía que nos lleva hacia la información, la cual podemos medir a través del tamaño del agujero negro. Luego entropía tiene una relación directa con el tamaño del sistema.

4.2.1. Las Cuatro Leyes de la Termodinámica de Agujeros Negros

Un agujero negro puede tomarse como un sistema sobre el cual fluye energía constantemente dentro y fuera de el y actúa a su vez como intermediario para el intercambio de energía, la máxima eficiencia de este proceso es cuando el área del horizonte de eventos no cambia, tanto el proceso de incremento de energía es irreversible tanto como el hecho de que el área de horizonte no puede decrecer. Esto cumple la mismas propiedades de la entropía de un sistema termodinámico [12]. Pero, presenta algunas fallas enunciadas a continuación.

- La temperatura del agujero negro desaparece, pues por definición el agujero negro no puede emitir nada.
- La entropía es adimensional, pero la longitud del área de horizonte tiene unidades de longitud al cuadrado. Esto se debe a que la entropía es un cuarto del área de horizonte dividido en las longitud de Planck al cuadrado $(\hbar G/c^3)$ (unidades naturales).
- El área de todo agujero negro por separado no disminuye, solo sí la entropía total no disminuye en termodinámica.

4.2 Termodinámica de los Agujeros Negros

La solución a estas fallas es posible gracias a la teoría cuántica. Un agujero negro tiene una temperatura proporcional a la constante de Planck \hbar y la entropía es $1/4$ del rea horizonte dividido por la longitud de Planck al cuadrado ($\hbar G/c^3$) y el área puede decrecer va radiación de Hawking.

Al igual que la gravedad va aumentando a medida que un cuerpo se dirige hacia el colapso, la luz no es capaz de escapar del límite construido por el horizonte de eventos tal que este acta como un tipo de asimetría de una superficie continua; cosas pueden caer dentro del agujero y hacerlo más grande pero, cosas no pueden salir de el y hacerlo mas pequeño, análogo a la segunda ley de la termodinámica en que la entropía del sistema no disminuye, luego el tamaño del agujero negro esta directamente relacionado con la entropía. Sin embargo, esta es una relación no trivial incluso en el caso mas sencillo de un agujero negro esférico y eléctricamente neutro (Schwarzschild). Para la solución mas general en que el agujero negro depende de J y Q , la superficie total de horizonte se expresa

$$A = 4\pi \left[2M^2 - Q^2 + 2M^2 \left(1 - \frac{Q^2}{M^2} - \frac{J^2}{M^4} \right)^{1/2} \right]. \quad (4.16)$$

Con $Q^2 < M^2$ y $J^2 < M^4$, unidades de la constantes G y c igual a 1 cualquier cambio en los valores de M, J, Q puede incrementar el rea de horizonte[13].

Como fue mostrado por Hawking en 1972 el área de horizonte puede mantenerse igual o crecer pero nunca disminuir su valor en cualquier proceso. Si se extrae masa y energía de un agujero negro que se encuentra en rotación, propulsando un cuerpo pequeño en la región justo fuera del horizonte de eventos, donde algunas de las trayectorias de las partículas poseen energía negativa (gravedad repulsiva) relativa al infinito. Un cuerpo explota en dos pedazos uno de los cuales toma uno de esos caminos con energía negativa desapareciendo dentro del agujero negro. El agujero ha perdido parte de su masa total M ; mientras que la energía liberada expulsa hacia el infinito el otro fragmento de partícula a una velocidad altísima (este mecanismo fue propuesto por Penrose en 1969). Cuando disminuye la masa del agujero negro y hay transferencia de energía como acabamos de ver, el momento angular también se ve afectado y por lo tanto J decrece, como concecuancia el área calculada con la ec.(4.16) aumenta a pesar de los cambios en M , pues con un cálculo cuidadoso los cambios de J siempre superan los cambios de M , por consiguiente la segunda ley se salva de ser violada [13]. Considerando un proceso isoentrópico la eficiencia ser máxima y el proceso reversible, pero como sabemos un proceso con el 100% de eficiencia y completamente reversible es imposible .

Se dice entonces que la entropía y el área de horizonte son análogos, luego se denomina *segunda ley* en referencia al teorema del área de Hawking el cual expresa

$$dA \geq 0. \quad (4.17)$$

De otro lado de la ec. 4.16 es posible obtener la expresión para la *primera ley*

$$dM = (8\pi)^{-1} \kappa dA + \Omega dJ + \phi dQ. \quad (4.18)$$

4 Agujeros Negros

Donde, $\Omega = \partial M/\partial J$ corresponde a la velocidad angular, $\phi = \partial M/\partial Q$ es el potencial eléctrico y finalmente $(8\pi)^{-1}\kappa = \partial M/\partial A$. Relacionada con la termodinámica clásica que conocemos A juega el papel de entropía, por lo tanto κ corresponde a la temperatura y se muestra como una constante alrededor del horizonte de eventos

$$TdS \sim \kappa dA. \quad (4.19)$$

La ec. 4.18 es la expresión que representa los cambios del trabajo o la energía extraída debido a los cambios del momento angular ΩdJ y de carga eléctrica ϕdQ .

La *ley cero* donde el equilibrio térmico es posible cuando la temperatura es la misma para todo el sistema tiene por analoga la cantidad κ conocida como *gravedad superficial*, definida como la fuerza por unidad de masa que debe ser aplicada en el infinito, con el fin de mantener las partículas sobre la trayectoria del horizonte.

Para finalizar esta sección enunciaremos la *tercera ley*. Si los J^2 y Q^2 toman valores muy grandes de tal manera que

$$\frac{J^4}{M^2} + \frac{Q^2}{M^2} = 1, \quad (4.20)$$

la gravedad superficial κ desaparece al igual que lo que conocemos como rea A , que responder al cero absoluto de la temperatura. Un agujero negro con parámetros semejantes a la ec. 4.20 es el caso límite de la solución de Kerr-Newman. Si el lado izquierdo de la ecuación es mucho mayor que 1 el horizonte desaparece y se tiene una *singularidad desnuda* de tal manera que un observador en el universo exterior puede verla con facilidad. Sin embargo, la *censura cósmica* nos dice que una singularidad desnuda no es posible a partir del colapso gravitacional, por esta razón no es posible el cero absoluto o $\kappa = 0$ y por lo tanto juega el rol de tercera ley.

En resumen podemos enunciar las leyes de la termodinámica de los agujeros negros así [13]:

- Ley cero. En un agujero negro estacionario la gravedad superficial κ es constante.
- Primera ley. La diferencia entre los parámetros M, J, Q de dos agujeros negros infinitamente próximos satisfacen la ec. 4.18.
- Segunda ley. En todo proceso el rea total de los horizontes, crece siempre hacia el futuro como lo indica la ec. 4.19.
- Los agujeros negros con $\kappa = 0$ son inaccesibles físicamente en un número finito de pasos.

4.3. Constante Cosmológica

La constante cosmológica [14] fue introducida en la teoría de la relatividad general como un factor de ajuste para mantener homogéneas y estáticas las soluciones a las ecuaciones de Einstein. Pero con el descubrimiento de la expansión del universo realizado por Hubble, la constante cosmológica dejó de tener sentido. Sin embargo, en la actualidad la constante cosmológica tiene lugar en la física teórica pues esta se sugiere como medida de la *densidad de energía* en el vacío. Pero ¿Cómo definimos esta energía de vacío de manera adecuada? Por un lado tenemos la mecánica cuántica y en otro contexto la relatividad general. Mientras la primera estudia todas las fuerzas y las partículas, ignora la gravedad y mide diferencias de energía pero no puede determinar la energía de vacío. Asimismo, la relatividad general no toma en cuenta ningún efecto cuántico y solo es capaz de obtener la energía de vacío a través de experimentos que midan la curvatura espacio-tiempo. Cualquiera puede decir que se unifiquen las dos en lo que comúnmente se llama gravedad cuántica, con el descubrimiento del bosón de Higgs esto puede ser posible. Pero nuestro problema no radica ahí, aún con los resultados obtenidos por el CERN no ha sido posible resolver el hecho de que el concepto de energía de vacío cambia dependiendo de la perspectiva, cuántica o relativista (RG) [25].

4.3.1. Introducción de la Constante Cosmológica en las Ecuaciones de Campo de Einstein.

Las ecuaciones de Einstein en la teoría de la relatividad general, están propuestas inicialmente para sistemas estáticos en los que la densidad de energía toma solamente valores positivos tal como sucede con estrellas y gases comúnmente. Sin embargo, en otro caso se propone una solución en la cual está incluido un nuevo factor sobre las ecuaciones de campo [14]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (4.21)$$

donde Λ es un parámetro libre que conocemos como la constante cosmológica. La suma de la densidad de energía en el espacio vacío es Λ y la presión es igual a $-\Lambda$ dispuestas en el tensor $T_{\mu\nu}$. Esta solución se conoce como *el universo estático de Einstein*.

La Energía de Vacío.

A pesar de que inicialmente la constante cosmológica fue incluida en las ecuaciones de campo como un parámetro para mantener estático el universo e incluso después del descubrimiento de Hubble, la constante cosmológica no perdió sentido ya que los valores calculados para ella son no nulos. La constante cosmológica tiene por unidades $(longitud)^{-2}$ desde la perspectiva de la relatividad general clásica. En cuanto a los físicos de partículas la constante cosmológica es una medida de la densidad de energía en el vacío (el estado más bajo de energía) que no podemos calcular con la suficiente confianza, pero cuyas contribuciones

4 Agujeros Negros

son dadas por la constante.

Considerese un campo escalar ψ con energía potencial $V(\psi)$, la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\rho \psi \partial_\sigma \psi \right) g_{\mu\nu} - V(\psi) g_{\mu\nu}, \quad (4.22)$$

con $g =$ determinante del tensor métrico $g_{\mu\nu}$. El tensor momento-energía se expresa como

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi + \frac{1}{2} \left(g^{\rho\sigma} \partial_\rho \psi \partial_\sigma \psi \right) g_{\mu\nu} - V(\psi) g_{\mu\nu}. \quad (4.23)$$

La configuración con densidad de energía ms baja es aquella en la cual no existe contribución de la energía cinética ni hay gradientes de energía, razón por la cual $\partial_\mu \psi = 0$ con $T_{\mu\nu} = -V(\psi_0) g_{\mu\nu}$ donde ψ_0 es el valor del potencial cuando se minimiza $V(\psi)$. Con estas condiciones el tensor energía-momento queda

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac} g_{\mu\nu}, \quad (4.24)$$

donde el valor de ρ_{vac} puede estar determinado por $V(\psi_0)$ y se expresa como si habláramos de un fluido perfecto $p_{vac} = -\rho_{vac}$. Siendo

$$\rho_{vac} = \rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (4.25)$$

La ecuación que acabamos de escribir relaciona la constante cosmológica con la energía de vacío ya que el tensor energía-momento de la ec.(4.24) es equivalente a la constante cosmológica y se puede introducir como $\Lambda g_{\mu\nu}$ en la ec.4.21, por lo tanto finalmente se tiene

$$S = \int d^4x \sqrt{-q} [R - 2\Lambda_0]; \quad R = \text{escalar de Ricci}. \quad (4.26)$$

Esta es la acción covariante más general construida sobre la métrica tanto para sus primeras y segundas derivadas y se convierte entonces en el punto de partida para una teoría mas completa de la gravedad. Sin embargo, las condiciones impuestas para llegar hasta aquí solo tiene importancia a nivel clásico y es necesario tener en cuenta los conceptos cuánticos para estudiar las contribuciones desde una energía cero asociada con variaciones en el vacío.[14]

El problema de la constante cosmológica

De un lado es posible medir la “densidad de energía de vacío” por medio de observaciones astronómicas y basados en las medidas de la curvatura del espacio-tiempo, el valor obtenido es muy cercano a CERO. Si lo comparamos con al densidad de masa es aproximado a $1 \times 10^{-26} \text{Kg}/m^3$, y relacionado con la densidad de energía es $1 \times 10^{-9} \text{J}/m^3$.

4.3 Constante Cosmológica

Ahora bien, se puede hablar de un valor cercano a cero pero no conocer si este es positivo, cero o negativo. A través de experimentos de la NASA como el Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, la convergencia de la constante cosmológica tiende a un valor positivo igual a $7 \times 10^{-27} \text{Kg}/\text{m}^3$, con densidad de energía positiva de $6 \times 10^{-10} \text{J}/\text{m}^3$.

Se espera que la expansión del universo sea un proceso que debido a la acción de la gravedad lo haga lentamente, pues esta acta atrayendo la materia ordinaria. Sin embargo, se conoce que el universo se expande aceleradamente. La pregunta a responder ahora es ¿Qué puede estar acelerando la expansión del universo? De la relatividad general, si el vacío tiene densidad de energía también debe existir una presión la cual debe ser igual a 1 vez su densidad de energía con unidades de velocidad de la luz y constante gravitacional iguales a 1. Para una densidad de energía con valor positivo la expansión del universo es lenta, mientras que para una presión negativa la expansión de universo tiende a acelerarse proporcionalmente a

$$-\rho - 3P. \quad (4.27)$$

Donde ρ es la densidad de energía y P es la presión. El número 3 está relacionado con las dimensiones del espacio.

Dado que para el vacío la presión resultante es menos la densidad de energía $P = -\rho$, la razón a la cual el universo se expande es proporcional a 2ρ . Luego si el vacío tiene una densidad de energía positiva la expansión del universo tiende a acelerarse. La energía de vacío es posiblemente la mejor explicación y la relatividad general tendrá que ser incorrecta para que esto no funcione.

Ahora bien, calculemos la densidad de energía en el vacío usando la mecánica cuántica. Cuando se halla el menor valor de energía posible para un oscilador armónico se obtiene una respuesta más adecuada con la mecánica cuántica que con la mecánica clásica. La diferencia de energía es denominada “energía de punto-cero”. La energía del punto cero de un oscilador armónico es $\frac{h}{2}f$ (donde h es la constante de Planck y f es la frecuencia). Para obtener la densidad de energía de vacío se suman todas las energías de punto-cero correspondientes a todos los modos vibracionales de los campos cuánticos. Los modos con longitudes de onda corta, debido a sus altas frecuencias contribuyen más a la energía de vacío. Considerando el espacio tiempo como un continuo, la suma de estas altas frecuencias traerá como resultado un valor de densidad de energía en el vacío igual a INFINITO. Obviamente hay una inconsistencia y aún si el espacio tiempo no se tomara como un continuo y con longitudes de onda mayores a la longitud del Planck (10^{35}m), el valor de la densidad de energía en el vacío será finito pero demasiado grande e incluso teniendo en cuenta que $E = mc^2$, la densidad de masa corresponderá a $1 \times 10^{96} \text{kg}/\text{m}^3$, un valor extravagante. Sin embargo, el tratamiento con modos vibracionales en un oscilador armónico es propio para teoría de campo libre que aunque convincente está lejos la realidad físicamente.

Sin embargo, llegamos a un gran problema pues el cálculo de la densidad de energía da un resultado enorme y comparado con los datos experimentales existe una gran discrepancia. A esto se le conoce comúnmente como el “problema de la constante cosmológica”. El valor de

4 Agujeros Negros

la constante en unidades de masa de Planck por longitud de Planck al cubo es aproximadamente 1×10^{-123} .

En cuanto a la teora cuántica, se ha ignorado la gravedad con la ventaja de adherir una constante que no afecte la definición de densidad de energía, ni las predicciones sobre cualquier cosa que se pueda medir experimentalmente. Como habíamos mencionado en mecánica cuántica solo se miden diferencias de energía y no la curvatura de espacio tiempo. Teniendo en cuenta que en los cálculos que hemos mencionado los sistemas físicos son prácticamente ideales, as que deliberadamente se redefine el concepto de densidad de energía para restarle el punto cero de energia, por lo cual el resultado nos lleva a un valor igual a cero, que corresponde a lo que ordinariamente resulta en la teoría cuántica. Empero, ya definida una constante para introducir de algún modo la densidad de energía en el vacío en la teoría cuántica, también podríamos asegurar de algún modo de esta energía de vacío es solo una invención y no podemos asegurar que relamente es una densidad de energía, lo que implicará que su valor es indeterminado.

4.4. Radiación de Hawking

La radiación de Hawking [13, 15] es una predicción que explica las propiedades térmicas relacionadas a los agujeros negros y sugiere que estos podran tener una entropía bien definida y el estudio de la termodinámica de agujero negros incluyendo la emisión de energía. Hawking estudió la radiación de un cuerpo negro para un agujero negro, donde se generan fluctuaciones en el vacío debido a la producción de partículas-antipartícula cerca al horizonte de eventos, mientras una de las partículas cae en el agujero negro la otra escapa antes de aniquilarse con su opuesta, como consecuencia un observador distante puede ver el agujero negro. La partícula observada tiene energía positiva, la partícula que se pierde en el agujero posee energía negativa relativa al universo exterior y por este motivo el agujero negro pierde energía, por lo tanto masa ya que $E = mc^2$, esto es opuesto a las predicciones de Einstein y es un efecto cuántico.

El estudio desarrollado por los físicos teóricos lleva comprender que la existencia de partícula y antipartícula dependen del observador lo cual va en contraposición de teoría de la relatividad, esto se debe a que el número de partículas es limitado también dependiendo del observador.

El horizonte de eventos desde la perspectiva clásica es solo una barrera espacial que separa el agujero negro de su exterior, sin embargo a nivel cuántico es distinto dada la incertidumbre y las fluctuaciones cuánticas del vacío, donde las partícula-antipartícula son creadas y después destruidas virtualmente en el vacío.

En cuanto a la temperatura de un agujero negro, Hawking descubrió que esta no es cero debido a la radiación de partículas, dicha temperatura es expresada como

4.4 Radiación de Hawking

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (4.28)$$

donde $G = c = \hbar = K = 1$, cuyo espectro es justamente el de un cuerpo negro perfecto ya que radia todo tipo de partículas perfectamente descrito por la distribución de Planck.

Entonces la ec.(4.28) es la temperatura física del agujero negro. Hawking considera el espacio tiempo clásico (M, g_{ab}) describiendo el colapso gravitacional del agujero negro de Schwarzschild. Se considera un espacio-tiempo libre propagándose en un campo cuántico. El fondo cuántico que inicialmente se encuentra en el vacío antes de colapsar tiene calculadas la cantidad de partículas en un tiempo posterior, de modo que la frecuencia de las partículas sea positiva tal que corresponda a los últimos momentos propagándose hacia atrás en el tiempo y determinando frecuencias negativas y positivas en el pasado asintótico. El número de partículas corresponde a la emisión de un cuerpo negro perfecto de tamaño finito a la temperatura de Hawking.

El cálculo de la radiación de Hawking se ha realizado sin tener en cuenta las ecuaciones de campo gravitacionales y consider un espacio-tiempo arbitrario de un agujero negro arbitrario, donde su estado final es estacionario satisfaciendo la ley cero de la termodinámica de agujeros negros. Al final de cuentas se establece que el estado final de un agujero negro corresponde a la radiación de un cuerpo negro con temperatura de Hawking y si a esto agregamos que el cuerpo se encuentra rotando, el espectro observado en el infinito corresponde a un agujero negro rotando [13].

A pesar de las similitudes entre las leyes de la termodinámica clásica y las leyes de la termodinámica de agujeros negros, no hay una completa relación, pues si un agujero negro se supone es negro su temperatura debe ser cero ya que se considera un sistema térmica y mecánicamente aislado. Esto contradice el hecho de pensar a la gravedad superficial κ como una temperatura real y se puede ver en el caso sencillo del agujero negro de Schwarzschild donde $J = Q = 0$. Obtenemos desde la ec.(4.16) que $A = 16\pi M^2$ y

$$\kappa = 8\pi \frac{\partial M}{\partial A} = \frac{1}{4M}; \quad (4.29)$$

haciendo uso de la relación $dM = \kappa dA = TdS$ tenemos que *Energía* = 2 * *Entropía* * *Temperatura*, en un agujero negro la energía M es finita, luego la temperatura igual a cero implicara una entropía infinita, por lo tanto es necesario reescribir la masa como

$$M = \frac{A\kappa}{4\pi}. \quad (4.30)$$

Ahora importante comprender como la entropía esta relacionada con la información para acercarnos mas a la noción de entropía de un agujero negro y bajo que condiciones puede

4 Agujeros Negros

volverse infinita. Si un sistema tiene un alto grado de desorden su entropía es alta, de lo contrario si el sistema es altamente ordenado su entropía ser baja, en ese caso se puede decir que tiene gran cantidad de información. En otras palabras, cuando un sistema es desordenado su entropía aumenta y por lo tanto este estado requiere menos información para dar una descripción del mismo. En el estado de equilibrio tenemos el mximo de entropía y el mínimo contenido de información, tan solo un pequeño número de parámetros son necesarios. La cantidad de información que puedo extraer del sistema, en este caso del agujero negro es fundamental puesto que podemos conocer la entropía del agujero negro y la naturaleza de su horizonte de eventos.

Para calcular la cantidad de información que se puede extraer de un agujero negro se cuenta el número interno de grados de libertad, pero la cantidad de partículas dentro de un agujero negro de masa M puede ser ilimitada y como consecuencia su entropía también lo será. Sin embargo, aplicando la mecánica cuántica a la naturaleza de la materia la entropía del agujero negro podra ser finita, puesto por la relación entre la energía y la longitud de onda $E = h/\lambda$, se establece que al menos la longitud de onda λ debe tener un tamaño menor al agujero negro si este contiene partículas de energía E . Tómesese $\lambda \simeq 2M$ es decir el agujero negro de Schwarzschild con $G = c = 1$ se tiene una partícula de masa h/M con energía mínima. Luego el número máximo de partículas dentro del agujero negro de masa M es M^2/h y su entropía se calcula como $S = \zeta K(M^2/h)$; donde K es la constante de Boltzman y ζ es un número de orden unitario que es necesatio calcularlo desde la teoría cuántica de agujeros negros y en cuanto al límite clásico la entropíaa diverge cuando $h \rightarrow 0$. Como el área es $A = 16\pi M^2$ valor optenido de la segunda ley de la termodinámica de agujeros negros, podemos reescribir la entropía como

$$S = \zeta K A / 16\pi h, \quad (4.31)$$

donde como podemos ver la entropía es proporcional al área y por último dado que la energía es 2 veces la entropía multiplicada por la temperatura, que se expresa para el agujero negro de Schwarzschild

$$T = \frac{h}{2\zeta K M}, \quad (4.32)$$

en el límite clásico cuando $h \rightarrow 0$ el agujero es completamente negro y la temperatura es $T = 0$, de otro modo la temperatura debe ser calculada teniendo en cuenta la gravedad superficial κ y por tanto se escribe

$$T = \frac{2h\kappa}{\zeta K}. \quad (4.33)$$

Hablar de temperatura en un agujero negro es una cuestion bastante complicada pues esto supone que el agujero se encuentra en equilibrio térmico (teniendo en cuenta la ley cero de la termodinámica) con un bao de calor a su alrededor pero como sabemos el calor o la radiación

puede fluir en el agujero negro mas no salir de él. Entonces el concepto de temperatura para un agujero negro debe estar asociado con el equilibrio térmico de la radiación y la longitud de onda asociada a esta es $\lambda_0 \simeq h/KT$, retomando el valor de la temperatura obtenemos asumiendo $\varsigma \simeq 1$ que

$$\lambda_0 \simeq 2M = \text{radio de un agujero negro.} \quad (4.34)$$

Lo importante aqui es notar que el agujero negro es una fuente de radiación y no es frío ni negro, la radiación emitida por el agujero negro puede ser comprendida y tratada desde un tratamiendo cuántico [13].

4.4.1. Breve Introducción a los Agujeros Negros Cuánticos

De la ec. 4.32 y del cálculo de la temperatura obtenido por Hawking [13, 16]

$$T = \frac{\hbar\kappa}{2\pi K}, \quad (4.35)$$

es posible hallar la radiación térmica emitida y además obtener el valor de $\varsigma = 8\pi^2$. A pesar de que es un poco complicado abordar los cálculos obtenidos por Hawking debido a las implicaciones cuánticas, una mejor comprensión del tema es posible estudiando el ejemplo de la radiación emitida desde un espejo en movimiento [13, 16].

El estudio de la física moderna logro dar una explicación a la naturaleza de la luz con la cuantización de la energía, los cambios de estado cuánticos y con esto a emisión y absorción de fotones, resumido como una perturbación del vacío debido a una fuente de campo electromagnético. Sin embargo, comprender la aparición de fotones o cualquier otra partícula en el vacío sin la presencia de ningn campo, es una concepción mucho mas difícil de asimilar. Entonces mientras existe una fuente o un campo cualquiera en el vacío se pueden explicar cambios en los modos de vibración de algunas partículas, en otro casos donde no hay fuentes podemos estudiar los cambios en la geometría y un ejemplo claro de esto es una estrella que muere para convertirse en un agujero negro.

Dado que un agujero negro radia con una temperatura equivalente a la calculada por Hawking 4.35, podemos calcular la luminosidad total del agujero negro como [17]:

$$L = -\frac{dM}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_0^{\infty} d\omega \omega \frac{\Gamma_{\omega l}}{e^{2\omega\pi\kappa^{-1}} - 1}, \quad (4.36)$$

donde ω es la frecuencia de oscilación de las ondas de radiación emitidas y $\Gamma_{\omega l}$ es denominado “*factor de cuerpo gris*” pues codifica el espectro del agujero negro ya que algunas partículas son retrodispersadas dentro el agujero negro a causa de la curvatura del espacio-tiempo. En el caso particular del agujero negro de Schwarzschild

4 Agujeros Negros

$$T_{BH} = \frac{\hbar}{8\pi G K M} \approx 6.02 \times 10^{-8} \frac{M_{\odot}}{M} K, \quad (4.37)$$

donde la gravedad superficial es $\kappa = \frac{1}{4GM}$. Por supuesto el valor de la temperatura para un agujero negro de una masa solar es despreciable, pues la radiación absorbida es mucho mayor que los $3K$ de radiación de fondo de microondas que este emite.

4.5. Cosmología de Sitter

El espacio de Sitter [15] es especial porque mantiene una conexión con las observaciones cosmológicas. El modelo cosmológico más aceptado es el MODELO ESTADAR, que involucra el espacio de Sitter pues el universo temprano fue sometido a un poca de inflación rápida, ahora el espacio de Sitter parece ser le mejor candidato par describir el estado final del universo. La historia del universo puede ser vista desde la poca de Sitter donde la energía de vaco muy grande imitada por una constante cosmológica positiva. Durante un tiempo la geometría del universo fue de Sitter hasta que la energía de vaco comenzo a decrecer, en que la constante cosmológica tiene un valor muy pequeno pero no cero. El espacio de Sitter es la solución a las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica positiva que exige máxima simetría. Un espacio de Sitter de $4 - dimensiones$ puede ser definido por la aplicación en un espacio plano de Minkowski de $(4 + 1) - dimensiones$, que corresponde a una hiperboloide dada por

$$\sum_{i=1}^4 (\chi^i)^2 - (\chi^0)^2 = R^2. \quad (4.38)$$

El radio de curvatura R esta relacionado con la constante cosmológica as

$$R^2 = \frac{3}{G\lambda}. \quad (4.39)$$

Asimismo la entropía máxima calculada es

$$S = \frac{4\pi R^2}{4G}. \quad (4.40)$$

4.6. Espacio anti de Sitter (AdS)

El espacio anti-de Sitter [17] es una solución maximalmente simétrica de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica, que ciertamente no es atractiva pero se puede considerar como un comportamiento de la gravedad a grandes distancias. El espacio anti-de Sitter se puede definir convenientemente como una superficie cuadrática en un espacio-tiempo plano

4.6 Espacio anti de Sitter (AdS)

de $(n+1)$ – *dimensiones* con signatura $(n-1, 2)$. Debido a que todas las formas cuadráticas pueden ser diagonalizadas sobre los reales, se satisface

$$(\chi^1)^2 + (\chi^2)^2 + \cdots + (\chi_{n+1})^2 = \mathcal{R}^2. \quad (4.41)$$

El espacio anti-de Sitter permite acercarnos a una mejor comprensión de la constante cosmológica, pues en este caso las superficies como de espacio están abiertas y los sistemas poseen una rica estructura debido a la presencia de una simetría asintótica en el como espacio infinito. Dado que el espacio anti-de Sitter es la mejor solución de la materia libre a las ecuaciones de Einstein porque posee la mayor cantidad de simetrías, la geometría toma a $\Lambda = 0$ para un espacio de Minkowski.

El significado de la aproximación asintótica de la geometría anti-de Sitter puede ser explicado brevemente en cuatro condiciones que debe cumplir. Primero, la condición asintótica debe ser invariante bajo la acción del grupo anti-de Sitter como de otra transformación simétrica. Segundo, las transformaciones simétricas deben tener bien definidos los generadores canónicos. Tercero, las condiciones límite deben incluir las soluciones asintóticas anti-de Sitter de interés físico tales como la métrica de Kerr AdS o Kerr-Newman AdS. Por último las condiciones límite deben ser preferiblemente expresadas en términos de los componentes de la métrica espacio-temporal.

5. Fundamentos de Geometrotermodinámica

5.1. Formulación de la Geometrotermodinámica (GTD)

Para comenzar a trabajar sobre geometrotermodinámica [4, 18] el primer paso es definir una estructura de contacto en un espacio de $(2n + 1) - dimensiones$, haciendo uso de los conceptos de $1 - forma$ y estructura de contacto del primer capítulo. Las coordenadas que se van a utilizar están determinadas por el conjunto $Z^A = (\phi, E^a, I^a)$ donde ϕ es el potencial termodinámico, E^a son las variables extensivas e I^a corresponde a las variables intensivas con $A = 0, \dots, 2n$ y $a = 1, \dots, n$, de tal manera que $Z^0 = \phi$, $E^a = Z^a$ y $I^a = Z^{n+a}$.

Introducimos la $1 - forma$ de Gibbs Θ_G usando el conjunto de coordenadas Z^A para una variedad de contacto τ , donde el par (τ, Θ_G) es la estructura de contacto que satisface $\Theta_G \wedge (d\Theta_G)^n \neq 0$. Se introduce entonces el espacio de estado de equilibrio termodinámico ε en $n - dimensiones$. Una aplicación

$$\phi : \varepsilon \longrightarrow \tau,$$

entre estos dos estados termodinámicos se define como

$$\varphi : (E^a) \longrightarrow (\phi, E^a, I^b), \quad (5.1)$$

con $\phi = \phi(E^a)$.

Luego τ se considera un “estado auxiliar” que describe la geometría de cualquier sistema termodinámico con un conjunto de coordenadas definido, y ε un espacio de fase de equilibrio termodinámico sobre el cual se estudian las transiciones de fase.

La aplicación $\varphi : \varepsilon \longrightarrow \tau$ debe satisfacer

$$\varphi^*(\Theta_G) = \varphi^*(d\phi - \delta_{\alpha\beta} I^a, dE^b) = 0, \quad (5.2)$$

estableciendo las condiciones de equilibrio termodinámico, i.e. la primera y segunda ley de la termodinámica

$$d\phi - \delta_{ab} I^a dE^b = 0, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial E^a} = \delta_{ab} I^b. \quad (5.4)$$

5.2 Identidad de Euler y la Relación de Gibbs-Duhem

Distinguir un sistema termodinámico en el espacio de estado de equilibrio es posible con la ec.(1.1) y haciendo uso de la relación $\phi = \phi(E^a)$, se introduce la tercera ley de la termodinámica en este contexto

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial E^a \partial E^b} \geq 0. \quad (5.5)$$

Donde el potencial debe cumplir con la *identidad de Euler y la relación de Gibbs-Duhem* 2.2.

5.2. Identidad de Euler y la Relación de Gibbs-Duhem

Un sistema termodinámico es homogéneo cuando las variables intensivas del sistema no varían si éste aumenta o disminuye su tamaño [20]

$$\phi(\lambda E^a) = \lambda^\beta \phi E^a. \quad (5.6)$$

Se define el conjunto de variables

$$U(\lambda S, \lambda V, \lambda N, \lambda X) = \lambda U(S, V, N, X), \quad (5.7)$$

donde U es la energía interna, V es el volumen, N el número de partículas, X son las demás variables extensivas del sistema termodinámico y λ es una constante con valor al unidad.

La energía interna en términos de las variables intensivas y extensivas tiene la forma

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N,X} S + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N,X} V + \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{V,S,X} N + \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_{V,N,S} X = U.$$

Ahora $U = TS - PV - \mu N + xX$ (donde P = presión, T = temperatura y x son las demás variables intensivas que pueda tener el sistema), el diferencial dU relaciona los cambios de las variables intensivas

$$SdT - VdP - Nd\mu - Xdx = 0,$$

y en general se puede expresar

$$(1 - \beta)\delta_{ab}I^a dE^b + \delta_{ab}E^a dI^b = 0. \quad (5.8)$$

Esto significa que la suma de todas las variables independientes es cero, mas no implica que cada una de ellas tenga valor nulo (sea independiente del sistema o su diferencial valga cero). La ec.(5.8) es llamada *relación de Gibbs-Duhem*. En resumen las variables intensivas no deben depender del tamaño del sistema.

5.3. Transformada de Legendre

Sea $y = f(x)$ una función convexa, $f''(x) > 0$. La transformada de Legendre de la función f es una nueva función g de una nueva variable p , la cual está contruida como se muestra en la figura [?], la gráfica de f en el plano x, y . Sea p un número cualquiera. Considerese la línea recta $y = px$. Tomando el punto $x = x(p)$ en el cual la curva está más lejos de la línea recta en la dirección vertical: para cada p la función $px - f(x) = F(p, x)$ tiene un máximo con respecto a x en el punto $x(p)$. Entonces $g(p) = F(p, x(p))$ queda definido.

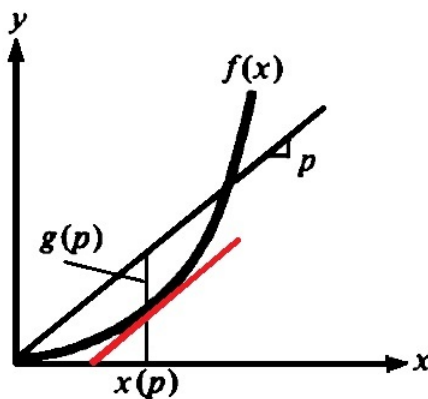


Figure 5.1.: Transformada de Legendre

El punto $x(p)$ está definido por la condición $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ i.e., $f'(x) = p$. Ya que f es convexa, el punto $x(p)$ es único [3].

Para obtener una estructura invariante de τ se hace uso de la transformada de Legendre (ec.(5.9)), la cual implica entre otras cosas que las propiedades termodinámicas del sistema no dependen del potencial escogido para poder describirlo.

5.3.1. Transformada Total de Legendre

La transformada total de Legendre $\{Z^A\} \longrightarrow \{\tilde{Z}^A\}$ se expresa

$$G^{AB} \longrightarrow \tilde{G}^{AB} = \frac{\partial Z^C}{\partial \tilde{Z}^A} \frac{\partial Z^D}{\partial \tilde{Z}^B} G_{CD}. \quad (5.9)$$

La única condición para garantizar que la transformada de Legendre se mantenga invariante, es que las coordenadas mantengan su dependencia funcional después de ser transformadas. Si se mantienen los valores de A y B se garantiza que tanto G como g son invariantes de Legendre. Por otro lado, G la métrica termodinámica asociada a τ induce una métrica g en espacio de estado de equilibrio termodinámico ε e igualmente g induce una métrica en τ

5.4 Condiciones que debe Cumplir la métrica invariante de Legendre.

en un proceso inverso.

5.3.2. La transformada parcial de Legendre

La transformada parcial de Legendre [3, 4, 18] se define como

$$\{Z^A\} \longrightarrow \{\tilde{Z}^A\} = \{\tilde{\phi}, \tilde{E}^a, \tilde{I}^a\}. \quad (5.10)$$

Este tipo de transformada no afecta la estructura del tratamiento, aunque en realidad lo que se espera es utilizar una transformada total de Legendre para inducir la métrica, mientras que una transformada parcial nos permite pasar de un potencial termodinámico a otro.

5.4. Condiciones que debe Cumplir la métrica invariante de Legendre.

Para el espacio de fase τ se asocia una métrica G definida sobre una estructura riemanniana la cual es denominada *métrica termodinámica*, que debe cumplir con:

- G debe ser invariante ante una transformación o sea que no afecte la estructura de contacto τ , en particular debe ser invariante ante una transformada de Legendre. Por lo tanto las propiedades del sistema no dependen del potencial termodinámico escogido.
- G debe inducir en el estado de equilibrio ε una métrica g a través de:

$$\varphi * (G) = g. \quad (5.11)$$

La cual relaciona la geometría de τ con la geometría de ε a través de una estructura de contacto [4].

Los desarrollos realizados por Weinhold y Ruppeiner apuntan hacia métricas que tienen como objeto estudiar transiciones de fase en un estado de equilibrio ε . Se definen *métrica de Weinhold*:

$$g^w = \frac{\partial^2 M}{\partial E^a \partial E^b} dE^a dE^b,$$

donde M es la masa y juega el papel de potencial termodinámico. De otro lado se tiene la *métrica de Ruppeiner* en la que cambiamos la masa por la entropía S

$$g^R = \left(\frac{\partial S}{\partial M} \right)^{-1} \frac{\partial^2 S}{\partial E^a \partial E^b} dE^a dE^b.$$

5 Fundamentos de Geometrotermodinámica

Cuando se realiza la transformada de Legendre para estas métricas se ha encontrado no son invariantes de Legendre, debido a que dependen del potencial utilizado; esto hace necesaria la formulación de una métrica invariante de Legendre. Dicha estructura se define [18]

$$G = \Theta_G^2 + (\delta_{ab}E^a I^b)(\delta_{cd}dE^a dI^d), \quad (5.12)$$

en el que Θ_G es al 1 – *forma de Gibbs*.

De este modo la métrica inducida en el espacio de fase de equilibrio termodinámico ε es [8]

$$g = \left(E^a \frac{\partial \phi}{\partial E^a} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial E^a \partial E^b} dE^a dE^b \right). \quad (5.13)$$

Este tipo de métrica permite en cada caso encontrar puntos críticos de transiciones de fase y puede ser una medida adecuada de interacción termodinámica de un sistema cualquiera.

Se ha desarrollado este tratamiento con el gas de Van der Waals, sistemas con dos grados de libertad y geometrías de Reissner-Nordström, Kerr, la métrica de Fisher-Rao y un análisis con la métrica general que incluye un estudio de el campo gravitatorio de Kerr-Newman[4, 18, 22]. Todos estos trabajos han generado interesantes resultados dado que la curvatura se entiende como una medida de interacción, tal como sucede en el caso del gas de Van der Waals, cuya principal característica es la ausencia de interacción termodinámica entre las partículas del gas y cualquier generalización del gas ideal tiene curvatura $R = 0$; luego la GTD es una buena aproximación. El gas de Van der Waals no es el único resultado positivo, el agujero negro de Reissner-Nordström presenta dos singularidades en la curvatura que representan los puntos críticos, luego la GTD describe adecuadamente su comportamiento. Sin embargo, la misma suerte no se ha corrido con el agujero negro de Kerr [29].

6. Geometrotermodinámica del Agujero Negro de Kerr con Constante Cosmológica

La solución a las ecuaciones de Einstein que describe un objeto colapsado de geometría no esférica, momento angular diferente de cero esta descrito por la solución estacionaria y axialmente simétrica de Kerr, que esta determinado entonces por la masa y el momento angular. La métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2 - \frac{4Mr a \sin^2\theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{A \sin^2\theta}{\Sigma} d\phi^2, \quad (6.1)$$

donde

$$\begin{aligned} \Sigma &\equiv r^2 + a^2 \cos^2\theta & \Delta &\equiv r^2 - 2Mr + a^2, \\ A &\equiv (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2\theta. \end{aligned}$$

Ahora la ecuación general que representa la solución de Kerr-AdS es

$$ds^2 = -\frac{\Delta_r}{\rho^2} \left(dt - \frac{a \sin^2\theta}{\Xi} d\phi \right)^2 + \frac{\Delta_{\theta} \sin^2\theta}{\rho^2} \left(a dt - \frac{r^2 + a^2}{\Xi} d\phi \right) + \rho^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta_r} + \frac{d\theta^2}{\Delta_{\theta}} \right), \quad (6.2)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta_r &= (r^2 + a^2) \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3} - 2mr \right) & \Delta_{\theta} &= 1 + \frac{\Lambda a^2}{3} \cos^2\theta, \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2\theta & \Xi &= 1 + \frac{\Lambda a^2}{3}. \end{aligned}$$

De la fórmula se Smarr [13, 24] se obtiene la expresión de la masa para el agujero negro de Kerr-AdS

$$M^2 = J^2 \left(\frac{\pi}{S} - \frac{\Lambda}{3} \right) + \frac{S^3}{4\pi^3} \left(\frac{\pi}{S} - \frac{\Lambda}{3} \right)^2, \quad (6.3)$$

6 GTD para Kerr AdS

correspondiente a la ecuación fundamental de la termodinámica y en la cual el parámetro M depende de las variables extensivas entropía S , momento angular J y la constante cosmológica Λ es decir que $M = M(S, J, \Lambda)$. Luego el conjunto de variables extensivas esta dado por $E^a = \{S, J, \Lambda\}$ y el conjunto de variables intensivas son la temperatura T , la velocidad angular Ω y la variable conjugada generalizada del parámetro Λ en otras palabras $I^a = \{T, \Omega, \Psi\}$. Por lo tanto se conforma un espacio de fase termodinámico τ de 7-dimensiones por el conjunto de variables $Z^A = \{M, S, J, \Lambda, T, \Omega, \Psi\}$. La 1-forma que genera la estructura de contacto τ es

$$\Theta_G = dM - TdS - \Omega dJ - \Psi d\Lambda. \quad (6.4)$$

Ahora nuestra métrica invariante determinada a partir de la ec.(5.12)

$$G = (dM - TdS - \Omega dJ - \Psi d\Lambda)^2 + (ST + \Omega J + \Psi \Lambda)(-dSdT + dJd\Omega + d\Lambda d\Psi), \quad (6.5)$$

de la ec. (6.5) hallamos el determinante con el fin de inducir la métrica correspondiente al espacio de estado de equilibrio termodinámico y establecer las singularidades para el agujero negro de Kerr.

El determinante de la métrica invariante G esta dado por

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} -M_{SS} & 0 & 0 \\ 0 & M_{JJ} & M_{J\Lambda} \\ 0 & M_{J\Lambda} & M_{\Lambda\Lambda} \end{vmatrix}.$$

Para obtener la métrica inducida en el espacio de estado de equilibrio termodinámico ε se realiza la aplicación

$$\varphi : \{S, J, \Lambda\} \mapsto \{M(S, J, \Lambda), S, J, \Lambda, T(S, J, \Lambda), \Omega(S, J, \Lambda), \Psi(S, J, \Lambda)\}, \quad (6.6)$$

siguiendo con la condición $\varphi^*(\Theta_G) = 0$, podemos calcular las condiciones de equilibrio termodinámico, la primera y la segunda ley de la terodinámica.

La temperatura de Hawking

$$T = \left. \frac{\partial M}{\partial S} \right|_{J, \Lambda} = \frac{S^2}{8\pi^3 M} \left(\frac{\pi}{S} - \Lambda \right) \left(\frac{\pi}{S} - \frac{\Lambda}{3} \right) - \frac{\pi J^2}{2MS^2}, \quad (6.7)$$

la velocidad angular

$$\Omega = \frac{\partial M}{\partial J} = \frac{J}{M} \left(\frac{\pi}{S} - \frac{\Lambda}{3} \right), \quad (6.8)$$

y la variable conjugada del la constante cosmológica Λ

$$\Psi = \frac{\partial M}{\partial \Lambda} = \frac{-J^2}{6M} - \frac{S^3}{12\pi^3 M}, \quad (6.9)$$

La variable conjugada de Λ es análoga al volumen pues la constante cosmológica se comporta como una presión, luego el producto entre $\Psi\Lambda$ tiene dimensiones de energía y se comporta de manera semejante a lo que en termodinámica nos referimos a VdP en la primera ley. El conjunto de variables termodinámicas Z^a sugieren la masa como la entalpía del sistema que representa la energía total del sistema.

La entalpía en termodinámica es la energía mínima con la que cuenta el sistema y se asocia a un proceso reversible en el cual TdS se interpreta como el calor intercambiado por el sistema a presión constante.

De otro lado la métrica inducida g esta dada por

$$\mathbf{g} = \left(SM_S + JM_J + \Lambda M_\Lambda \right) \begin{pmatrix} -M_{SS} & 0 & 0 \\ 0 & M_{JJ} & M_{J\Lambda} \\ 0 & M_{J\Lambda} & M_{\Lambda\Lambda} \end{pmatrix},$$

y finalmene el determinante de g es

$$\det|g| = M_{SS}(M_{J\Lambda}^2 - M_{JJ}M_{\Lambda\Lambda})(SM_S + JM_J + \Lambda M_\Lambda). \quad (6.10)$$

Entonces, siendo M la entalpía del agujero negro a partir de ella es posible encontrar la expresión para la enega interna aplicando una transformada de Legendre se tiene

$$\begin{cases} \Phi & = \tilde{\Phi} - \tilde{E}^3 \tilde{I}^3 \\ E^3 & = \tilde{I}^3 \\ I^3 & = \tilde{E}^3, \end{cases}$$

Debido a que $H = U + PV$ donde U es la energía interna y en este caso PV equivalen a $\Lambda\Psi$ se tiene que

$$M = U + \Lambda\Psi \quad (6.11)$$

luego

$$U = M - \Psi\Lambda. \quad (6.12)$$

Entonces la 1 - forma de Gibbs

$$\Theta = d\tilde{\Phi} - \delta_{ab}\tilde{I}^a d\tilde{E}^b = dU - TdS - \Omega dJ - \Lambda d\Psi. \quad (6.13)$$

Finalmente la métrica invariante en térmicos de la energía interna

$$G = (dU - TdS - \Omega dJ + \Lambda d\Psi)^2 + (ST + \Omega J + \Psi\Lambda)(-dSdT + dJd\Omega + d\Lambda d\Psi). \quad (6.14)$$

y ahora la métrica inducida en el espacio de estado de equilibrio termodinámico ε

6 GTD para Kerr AdS

$$\mathbf{g} = \left(SU_S + JU_J + \Lambda U_\Psi \right) \begin{pmatrix} -U_{SS} & 0 & 0 \\ 0 & U_{JJ} & U_{J\Psi} \\ 0 & U_{J\Lambda} & U_{\Psi\Psi} \end{pmatrix},$$

y su correspondiente determinante

$$|g| = U_{SS}(U_{J\Psi}^2 - U_{JJ}U_{\Psi\Psi})(SU_S + JU_J + \Psi U_\Psi). \quad (6.15)$$

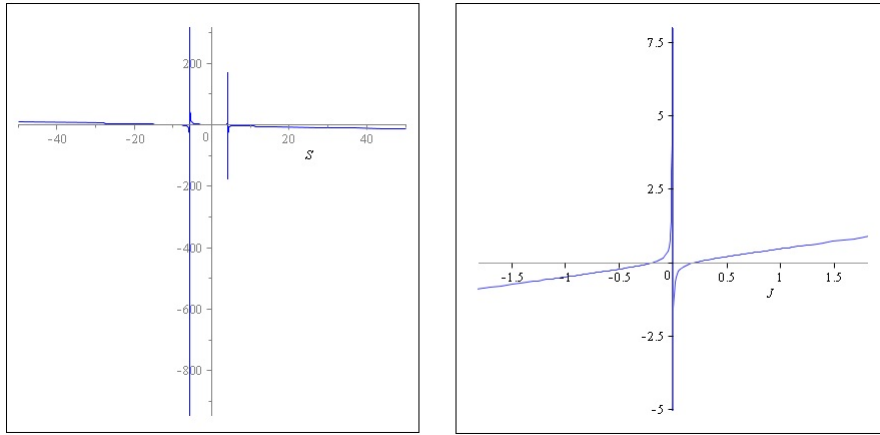


Figure 6.1.: Capacidad calorífica de un agujero negro de Kerr-AdS. Se presenta transición de fase de segundo orden. C vs. S Izq: $\Lambda = -1, J = -1$ entre $(-50, 50)$. Der: C vs. J $\Lambda = -1$ y $S = 1$ entre $(-2, 2)$.

Analicemos ahora las posibles transiciones de fase y el escalar de curvatura. La capacidad calorífica calculada en [20] comparada con el denominador del escalar de curvatura R , correspondiente al determinante de g en el espacio de estado de equilibrio termodinámico ε . Se muestra claramente la proporcionalidad con el término M_{SS} de la ec.(6.10), la cual coincide con la divergencia encontrada en la capacidad calorífica de [20], dado $M_{SS} = 0$ y sí el numerador de R no anula los ceros del denominador, tenemos una transición de fase. De igual manera, el determinante de g para el potencial termodinámico de la energía interna U tiene gran similitud con la entalpía, pues si el valor de $U_{SS} = 0$ y el escalar de curvatura no anula ningún término del denominador calculado por $|g|$, aseguramos nuevamente la transición de fase y corroboramos una de las condiciones que debe cumplir la métrica invariante simultáneamente.

En la fig.(6.1) se observa que al graficar la capacidad calorífica respecto de la entropía S , se presentan dos transiciones de fase de segundo orden para un valor negativo y otro positivo de la entropía alrededor de $S = -5$ y $S = 5$. En cuanto al escalar de curvatura en función de la entropía se presentan transiciones de segundo orden, lo cual coincide con el resultado encontrado con la capacidad calorífica. Del mismo modo, la gráfica correspondiente a la capacidad calorífica respecto del momento angular J se observa una transición

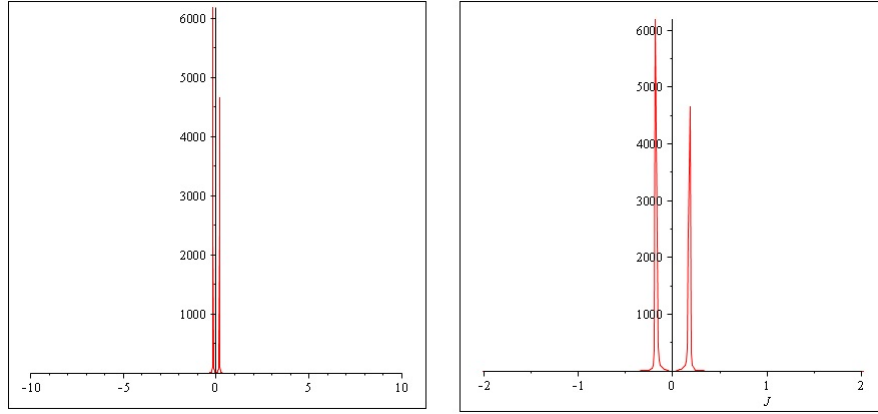


Figure 6.2.: Escalar de curvatura de un agujero negro de Kerr-AdS. Se presenta transición de fase de segundo orden. R vs. J con $\Lambda = -1$ y $S = 1$. Izq. $(-9, 9)$ y Der $(-2, 2)$

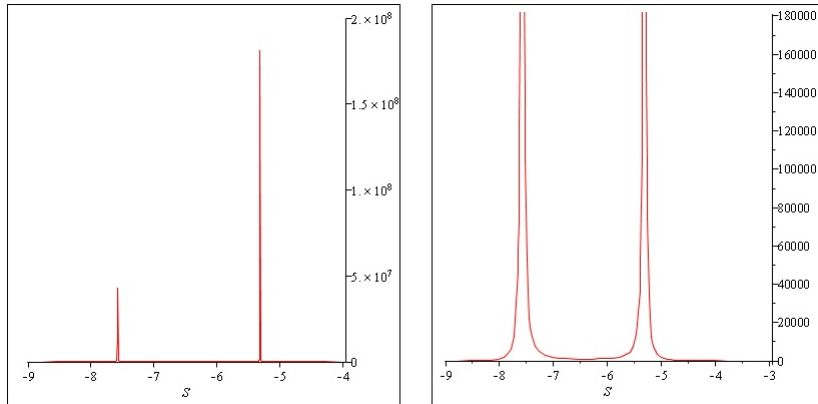


Figure 6.3.: Escalar de curvatura de un agujero negro de Kerr-AdS. Se presenta transición de fase de segundo orden. C vs. S , con $\Lambda = -1$, $J = -1$ entre $(-9, 9)$.

de fase de segundo orden alrededor del punto cero de J , cuando observamos el comportamiento de escalar de curvatura se presenta una discontinuidad alrededor del cero de J la cual no es visible a gran escala, y a su vez se puede observar un par de puntos sobre la gráfica en los que hay cambios abruptos correspondientes a una transición de fase de segundo orden.

En el siguiente capítulo, realizaremos el mismo procedimiento aplicado a el agujero negro de Kerr con el fin de hallar las transiciones de fase en el agujero negro de Kerr-Newman.

7. Geometrotermodinámica del Agujero Negro de Kerr-Newman Anti de Sitter

En este capítulo se aplica el formalismo de la geometrotermodinámica [18] para el agujero negro de Kerr-Newman se espera calcular el escalar de curvatura y encontrar las divergencias correspondientes a la solución de las ecuaciones de Einstein para este agujero negro considerando la constante cosmológica como una variable termodinámica en concordancia con la GTD. Estos resultados se compararán con los cálculos de la capacidad calorífica, con el fin de encontrar algún tipo de relación entre las características geométricas del espacio por medio del escalar de curvatura y las transiciones de fase que se puedan obtener de la capacidad calorífica. Luego el principal objetivo de la geometrotermodinámica relacionar la geometría con la termodinámica de un sistema físico, se aplica a un agujero negro de Kerr-Newman como ha sido aplicado a otros casos más simples.

La acción de Einstein con constante cosmológica Λ se expresa [19]

$$\mathcal{A} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (7.1)$$

y la solución general para un agujero negro de Kerr-Newman AdS en coordenadas de Boyer-Lindquist

$$ds^2 = -\frac{1}{\Sigma} [\Delta_r - \Delta_\theta a^2 \sin^2 \theta] dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta_r} dr^2 + \frac{1}{\Sigma \Xi^2} [\Delta_\theta (r^2 + a^2)^2 - \Delta_r a^2 \sin^2 \theta] \sin^2 \theta d\phi^2 - \frac{2a}{\Sigma \Xi} [\Delta_\theta (r^2 + a^2) - \Delta_r] \sin^2 \theta dt d\phi, \quad (7.2)$$

donde

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Xi = 1 + \frac{1}{3} \Lambda a^2, \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta_\theta &= 1 + \frac{1}{3} \Lambda a^2 \cos^2 \theta, \\ \Delta_r &= (r^2 + a^2) \left(1 - \frac{1}{3} \Lambda r^2\right) - 2Mr + Q^2, \end{aligned} \quad (7.4)$$

y por supuesto Λ corresponde a la constante cosmológica que en este caso tomar valores negativos y tiene unidades de longitud l^{-2} . El horizonte [10] se obtiene a partir de la métrica de la ec. 7.2 as [20]

$$\begin{aligned}
\Delta_r &= (r^2 + a^2)(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2) - 2Mr + Q^2 \\
&= -\frac{1}{3}\Lambda \left[r^4 - \left(\frac{3}{\Lambda} - a^2 \right) r^2 + \frac{6Mr}{\Lambda} - \frac{3}{\Lambda}(a^2 + Q^2) \right] \\
&= -\frac{1}{3}\Lambda(r - r_{++})(r - r_{--})(r - r_+)(r - r_-) = 0.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Si $\Delta_r = 0$ tiene cuatro raíces de las cuales los valores r_{++} y r_{--} son un par de raíces de complejos conjugados, r_+ y r_- son dos raíces reales positivas y se supone que $r_+ > r_-$; por esta razón $r = r_+$ es el horizonte de eventos.

La masa M y el momentum angular J a partir de las integrales de Komar en el espacio AdS se escriben [21]

$$M = \frac{m}{\Xi^2}, \quad J = \frac{am}{\Xi^2}. \tag{7.6}$$

Asi mismo las cargas pueden ser calculadas como

$$Q_e = \frac{q_e}{\Xi}, \tag{7.7}$$

donde $m^2 = la(1 + a/l)^4$ y $q_e^2 = la(1 + a/l)^2$. El potencial eléctrico medido desde el infinito con respecto al horizonte es

$$\Phi = \frac{q_e r_+}{r_+^2 + a^2}. \tag{7.8}$$

La fórmula de Smarr para el agujero negro de Kerr-Newman AdS

$$M^2 = \frac{\mathcal{A}}{16\pi} + \frac{\pi}{\mathcal{A}}(4J^2 + Q^4) + \frac{Q^2}{2} + \frac{J^2}{l^2} + \frac{\mathcal{A}}{8\pi l^2} \left(Q^2 + \frac{\mathcal{A}}{4\pi} + \frac{\mathcal{A}}{32\pi^2 l^2} \right), \tag{7.9}$$

en el límite cuando $l \rightarrow \infty$ la ecuación toma la forma usual que conocemos de la fórmula de Smarr para una solución asintóticamente plana de la solución de Kerr-Newman. Del mismo modo, la entropía es

$$S = \frac{\mathcal{A}}{4}, \tag{7.10}$$

y en la fórmula de Smarr con constante cosmológica queda [21]

$$M^2 = \frac{S}{4\pi} + \frac{\pi}{4S}(4J^2 + Q^4) + \frac{Q^2}{2} + \frac{J^2}{l^2} + \frac{S}{2\pi l^2} \left(Q^2 + \frac{S}{\pi} + \frac{S^2}{2\pi^2 l^2} \right). \tag{7.11}$$

De la primera ley de la termodinámica es posible calcular cantidades como la temperatura T , la velocidad angular ω , el potencial eléctrico Φ , la fuerza generalizada Ψ , que corresponden a las variables conjugadas de la entropía S , el momento angular J , la carga eléctrica Q y la constante cosmológica Λ [19, 20].

7 GTD para Kerr-Newman AdS

La temperatura

$$T = \frac{1}{8\pi M} \left(1 - \frac{\pi^2}{S^2} (4J^2 + Q^2) + 2\Lambda \left(Q^2 + \frac{2S}{\pi} \right) + \frac{3S^2\Lambda^2}{\pi^2} \right) \quad (7.12)$$

la velocidad angular

$$\Omega = \frac{\pi J}{MS} + \frac{J\Lambda}{M}, \quad (7.13)$$

el potencial eléctrico

$$\Phi = \frac{\pi Q}{2MS} \left(Q^2 + \frac{S}{\pi} + \frac{S^2\Lambda}{\pi^2} \right), \quad (7.14)$$

la variable conjugada de Λ es

$$\Psi = \frac{J^2}{2M} + \frac{Q^2 S}{4\pi M} + \frac{S^3 \Lambda}{4\pi^3 M}. \quad (7.15)$$

Ahora definimos la estructura métrica sobre el espacio de estado de equilibrio termodinámico ε como

$$\mathbf{g} = \left(SM_S + JM_J + \Phi M_\Phi + \Lambda M_\Lambda \right) \begin{pmatrix} -M_{SS} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{JJ} & M_{JQ} & M_{J\Lambda} \\ 0 & M_{JQ} & M_{QQ} & M_{Q\Lambda} \\ 0 & M_{\Lambda J} & M_{\Lambda Q} & M_{\Lambda\Lambda} \end{pmatrix}.$$

Calculando el determinante de g se tiene

$$|\mathbf{g}| = -M_{SS} \begin{pmatrix} M_{JJ} & M_{JQ} & M_{J\Lambda} \\ M_{QJ} & M_{QQ} & M_{Q\Lambda} \\ M_{\Lambda J} & M_{\Lambda Q} & M_{\Lambda\Lambda} \end{pmatrix}.$$

Nótese que las derivadas cruzadas $M_{SJ}, M_{SQ}, M_{S\Lambda}$ no aparecen, esto es debido a la métrica que se ha escogido [26]. Luego,

$$\det[g] = -M_{SS} (M_{JJ}M_{QQ}M_{\Lambda\Lambda} - M_{JJ}M_{QJ}^2 - M_{QQ}M_{J\Lambda}^2). \quad (7.16)$$

La condición de invarianza sobre la métrica G nos ha llevado a obtener el escalar de curvatura, de hecho dado que R contiene el determinante de g en el denominador, éste es suficiente para conocer los cero del escalar y establecer una o varias de las transiciones que se puedan presentar. Por eso solamente hemos calculado $|g|$ [26].

Ahora calculamos la capacidad calorífica, esta función de respuesta nos permite conocer en termodinámica las transiciones de fase de un sistema y esta dada por

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{M_S}{M_{SS}}. \quad (7.17)$$

Luego la capacidad calorífica es

$$C = -\frac{M_S}{M_{SS}} = \frac{1 - \frac{\pi^2}{S^2}(4J^2 + Q^2) + 2\Lambda(Q^2 + \frac{2S}{\pi}) + \frac{3S^2\Lambda}{\pi^2}}{\pi \left(\frac{4\pi J^2}{S^3} + \frac{\pi Q^4}{S^3} + \frac{2\Lambda}{\pi} + \frac{3S\Lambda^2}{\pi^4} \right)}. \quad (7.18)$$

De la ec.(7.16) se puede observar una transición de fase inmediata cuando $M_{SS} = 0$; además dado que los términos dentro del paréntesis tienen signos diferentes, podemos encontrar transiciones de fase a partir de las derivadas cruzadas. Del cálculo de la capacidad calorífica se observa fácilmente que $M_{SS} = 0$ (ya que $C = M_S/M_{SS}$) ocurre la transición de fase coincidiendo con lo obtenido en la ec.(7.16) como es posible ver en las fig.(7.1) y (7.2) en donde se tiene la capacidad calorífica C vs. la entropía S y se presenta una transición de fase de Erhenfest de primer orden en la cual se presentan discontinuidades en las variables extensivas específicas alrededor de $S = 0$ clasificada como transición de primer orden.

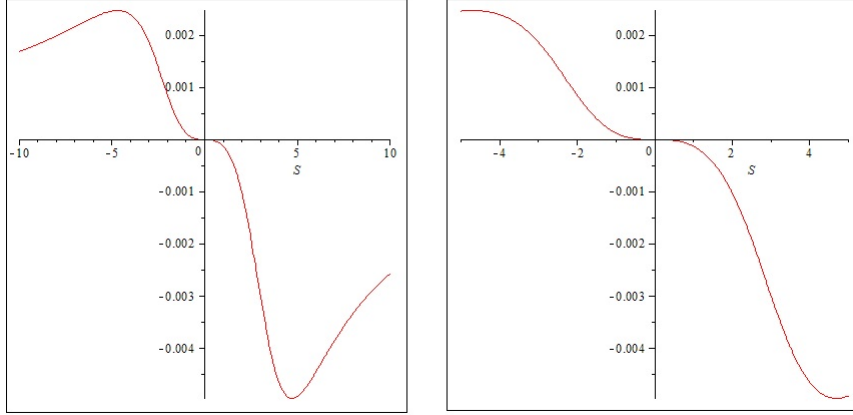


Figure 7.1.: Capacidad calorífica de un agujero negro de Kerr-Newman AdS. Se presenta transición de fase de Ehrenfest. Izquierda: $\Lambda = J = Q = -1$ y $T = 0,001$ entre $(-10, 10)$. Derecha: $\Lambda = J = Q = -1$ y $T = 0,001$ entre $(-5, 5)$.

Comparando el escalar de curvatura del agujero negro de Kerr-Newman AdS con la capacidad calorífica cuando S varía, es de notar que se presentan transiciones de fase pero con la diferencia en el caso de R son de segundo orden. Luego, a pesar de que el escalar de curvatura refleja transiciones de fase no muestra las mismas observadas en las gráficas de la capacidad calorífica.

7 GTD para Kerr-Newman AdS

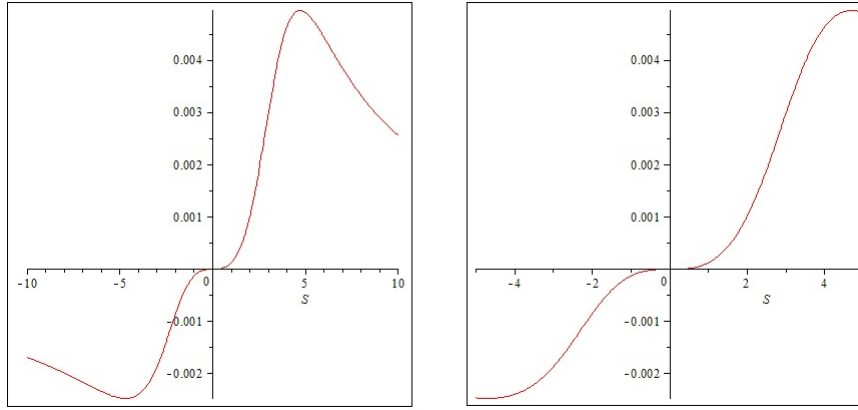


Figure 7.2.: Capacidad calorífica de un agujero negro de Kerr-Newman AdS. Se presenta transición de fase de Ehrenfest de primer orden. Izquierda: $\Lambda = -1, J = Q = 1$ y $T = -0,001$ entre $(-10, 10)$. Derecha: $\Lambda = -1, J = Q = 1$ y $T = -0,001$ entre $(-5, 5)$.

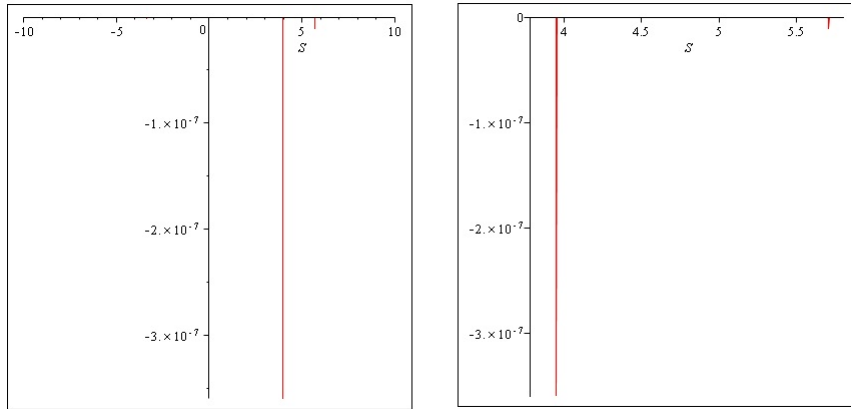


Figure 7.3.: Escalar de curvatura de un agujero negro de Kerr-Newman AdS. Se presenta transición de fase de Ehrenfest de primer orden. Izquierda: $\Lambda = -1, J = Q = -1$ entre $(-10, 10)$ y Derecha entre $(-3.8, 5.8)$.

En la fig.(7.4) se tiene C vs. J , la transición que se observa es de segundo orden aunque las derivadas de las variables extensivas específicas son continuas y se puede observar alrededor del $J = 0$. Al variar el signo de la temperatura cambia la dirección del punto en que se encuentra el cambio de fase.

Debido a que el escalar de curvatura es el que nos permite medir las interacciones termodinámicas de el agujero negro de Kerr-Newman AdS y muestra las transiciones de fase que a su vez son calculadas con la capacidad calorífica, ésta pudo ser graficada cuando la temperatura se colocó explícitamente en la expresión (7.18), lo que de algún modo implica

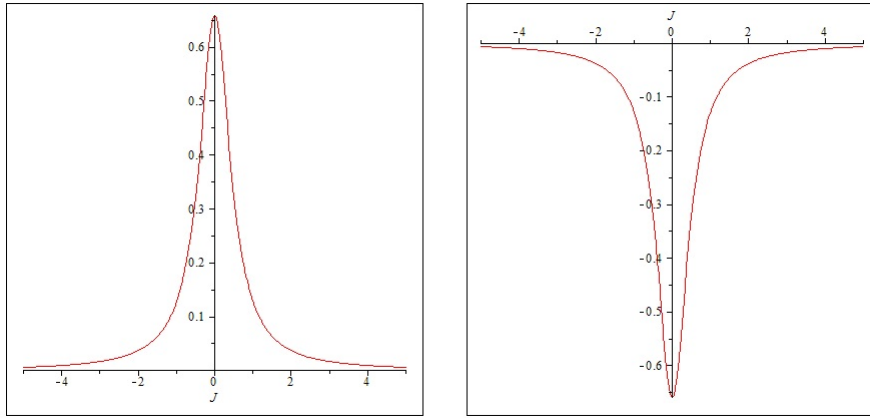


Figure 7.4.: Capacidad calorífica de un agujero negro de Kerr-Newman AdS. Se presenta transición de fase tipo lambda de segundo orden. Izquierda: $\Lambda = T = -1$ Y $S = Q = 1$ entre $(-5, 5)$. Derecha: $\Lambda = -1$ Y $T = S = Q = 1$ entre $(-5, 5)$.

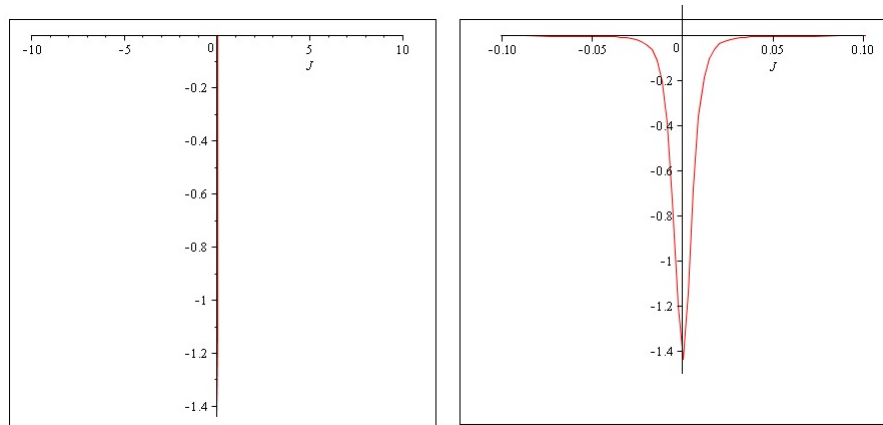


Figure 7.5.: Escalar de curvatura de un agujero negro de Kerr-Newman AdS. Se presenta transición de fase tipo lambda de segundo orden. Izquierda: $\Lambda = -1$ Y $S = Q = -0.1$ entre $(-10, 10)$ y derecha entre $(-0.10, 0.10)$.

que la información se esconde tras algunos términos. Es interesante ver como la con la capacidad calorífica se pueden obtener transiciones de fase en las cuales no se presentan divergencias o transiciones que tiendan a infinito tal como se observa en la fig.(7.4) por tal razón es probable que al calcular el escalar de curvatura no encontremos singularidades ni divergencias como se puede observar en la fig(7.5) que muestra el comportamiento del escalar de curvatura en función del momento angular J , esto sugiere la posibilidad de usar otros escalares de curvatura para poder hallar dichas transiciones que no se muestran en R .

Como vemos es posible describir la termodinámica del agujero negro de Kerr-Newman

7 *GTD para Kerr-Newman AdS*

AdS, otros agujeros negros y diferentes sistemas termodinámicos por medio del computo del escalar de curvatura y compararlo con los resultados conocidos de la capacidad calorífica [31, 32, 33].

Conclusiones

La formulación de la geometrotermodinámica fue construida a partir del lenguaje de la geometría diferencial y aplicada tanto a sistemas termodinámicos clásicos [4] como a los agujeros negros para calcular las posibles transiciones de fase que puedan ocurrir. Siguiendo el procedimiento y aplicando la formulación de la GTD para un agujero negro de Kerr-AdS para el cual se obtuvo la métrica invariante de Legendre. Con el cálculo de la capacidad calorífica que nos permite hallar las transiciones de fase comparada con los resultados obtenidos para el escalar de curvatura R , se evidenciaron transiciones de fase cuando la representación de la métrica se dio en términos de la entalpía, pues es posible que con otro tipo de potenciales se oculte información que nos permite hallar dichas transiciones, esto probablemente se debe al tipo de métrica escogida.

En el caso más sencillo en la aplicación de la GTD de un agujero negro de Schwarzschild-AdS considerando la constante cosmológica como variable termodinámica. En este caso la masa del agujero negro es interpretada como la entalpía total y con las métricas escogidas no describen transiciones de fase [35], pues el escalar de curvatura no diverge, lo cual está de acuerdo con la geometría asintótica de Schwarzschild. Es interesante observar que en el caso del agujero negro de Kerr AdS con la constante cosmológica como variable termodinámica Λ , se puede interpretar la expresión de la masa total del agujero negro como la entalpía total del sistema. El escalar de curvatura R de Kerr AdS diverge exactamente donde ocurre la transición de fase de segundo orden, sin embargo la constante cosmológica no genera transiciones nuevas al ser considerada como variable termodinámica.

De otro lado al considerar el agujero negro de Kerr-Newman AdS con la constante cosmológica como variable termodinámica y calcular la capacidad calorífica a partir de las derivadas parciales de la masa respecto a la entropía, se tienen puntos críticos cuando $M_{SS} = 0$ como se puede ver en la fig.(??) en la cual aparecen puntos críticos alrededor de $J = 0$ cuando se grafica la capacidad calorífica en función del momento angular; del mismo modo se observan puntos críticos en los valores de $S = 0$ cuando se grafica la capacidad calorífica en función de la entropía. Para $M_{SS} \neq 0$ existen puntos de estabilidad e inestabilidad de la capacidad calorífica cuando la entropía toma valores $S = -2, 5$ y $S = 2, 5$.

El cálculo de el escalar de curvatura ec.7.16 evidencia transiciones de fase cuando el denominador del determinante de la métrica inducida g sea $M_{SS} = 0$ y éste no se anule con los términos de el numerador; o de otro modo teniendo en cuenta los términos cuadráticos y los signos de los valores dentro del paréntesis, es posible obtener transiciones de fase de segundo orden.

7 GTD para Kerr-Newman AdS

En algunos casos el escalar de curvatura muestra un comportamiento similar al calculado con la capacidad calorífica como se puede notar en las fig. (7.4) y (7.5), lo cual es un resultado positivo para la GTD, como en el caso de R y C en función de la entropía para Kerr AdS y estas mismas cantidades respecto al momento angular para Kerr-Newman AdS. Sin embargo, en otros casos algunas transiciones que se presentan en la capacidad calorífica no coinciden en el tipo de transición de fase del escalar de curvatura, lo cual implica que si bien el R posee información acerca de las transiciones de fase de sistemas termodinámicos, puede estar mostrando otras transiciones de fase que con C no son visibles, podrían tener relación con otras funciones de respuesta [23].

La constante cosmológica como variable termodinámica no arroja resultados diferentes a los esperados, pues como se ha mencionado tanto con el cálculo de la capacidad calorífica como con el escalar de curvatura es posible observar transiciones de fase, la clave en todos estos casos es proponer una métrica adecuada que cumpla con las condiciones de invarianza de Legendre y que induzca una métrica en el espacio de estado de equilibrio termodinámico. Otro aspecto importante es, que dado que los sistemas termodinámicos pueden ser descritos través de representaciones como la entropía, la masa o algún potencial termodinámico (entalpía, energía libre de Gibbs, energía libre de Helmholtz, entre otros), es necesario reconocer cual de estos puede dar información más completa sobre el sistema y encontrar más fácilmente las transiciones de fase o los puntos de inflexión. También es fundamental distinguir o ahondar sobre el tipo de sistema termodinámico que se está tratando, el potencial adecuado que lo describe y sus variables asociadas [27, 28].

Podemos notar que en ninguno de los casos: Schwarzschild AdS, Kerr AdS y Kerr-Newman AdS la constante cosmológica Λ como variable termodinámica incluye ninguna transición de fase nueva en cualquiera de los sistemas ya mencionados [19, 34, 35].

Queda la motivación de poder avanzar más allá de realizar aplicaciones y cálculos con la geometrotermodinámica, poder explorar mayores opciones de cálculo para obtener otro tipo de resultados que logren describir un sistema termodinámico por completo. Todo esto encaminado a encontrar una mayor comprensión de esta ciencia y estructurarla de una manera más formal, calculando funciones de partición [30], realizando un análisis a nivel de la mecánica estadística, introduciendo este modelo incluso en la economía y por que no hallar una expresión adecuada con la cual no sea necesario general diferentes métricas para cada uno de los sistemas termodinámicos, sino que de algún modo las leyes de la termodinámica se vean reflejadas y sea posible expresarlas en términos de una ecuación general.

La termodinámica es una ciencia misteriosa que se mueve entre lo clásico y lo cuántico, que puede ser llevada en el límite hacia la mecánica estadística que es mucho más formal en el sentido matemático. Sin embargo, la termodinámica tiene inherente a ella la complejidad de la física que aún no ha sido comprendida por completo y que la geometrotermodinámica busca entender en gran medida.

A. Breve Introducción a la Termodinámica

La termodinámica se puede considerar como una ciencia general ya que se aplica a todos los procesos en los que intervienen temperatura y calor, como ocurre en la termodinámica del equilibrio que estudia sistemas físicos cuyas propiedades macroscópicas dependen de los cambios en su temperatura [22]

Algunos conceptos básicos utilizados usualmente en termodinámica y sus definiciones se darán a continuación.

Sistema Termodinámico.

Puede definirse como aquella parte del universo que queremos estudiar. Un sistema interactúa con su entorno de dos formas: la primera es a través del trabajo y la segunda por interacción térmica; las interacciones se miden en términos de trabajo o calor. Si el sistema se expande, este hace trabajo sobre el entorno y si sucede lo contrario, es decir si el entorno hace trabajo sobre el sistema hay un proceso de compresión [22].

Existen varios tipos de sistemas:

- *Sistema aislado.* Es un sistema cuyas propiedades no son afectadas por lo que sucede en su entorno.
- *Sistema cerrado.* Es aquel en el que la masa total del sistema permanece constante.
- *Sistema abierto.* En este caso ni masa del sistema y su energía permanecen constantes.

Fronteras. Para estudiar las interacciones del sistema es necesario considerar límites o fronteras que permitan caracterizar el tipo de interacción que se deben definir para cuando estas son de tipo térmico o se manifiestan en forma de trabajo.

Tipos de paredes que limitan el sistema.

- *Pared diatérmica o rígida.* Son paredes en las que es imposible hacer trabajo, sin embargo esta puede permitir intercambio de calor.
- *Paredes adiabáticas.* No permiten intercambio térmico. Permite transferencia de trabajo pero no intercambio de calor.
- *Pared impermeable.* Es aquella que no permite el intercambio de partículas.

A Breve Introducción a la Termodinámica

- *Paredes permeables.* Permite intercambio de partículas.

Tipos de Interacciones Termodinámicas

El estado del sistema permite especificar de forma detallada sus propiedades en un tiempo determinado, para lo cual es necesario identificar dos modos de interacción:

- *Interacciones térmicas.* Es la interacción entre dos sistemas los cuales entran en contacto a través de una pared diatérmica, esta interacción se expresa a través de la temperatura T .
- *Interacciones no térmicas.* Es la interacción entre dos sistemas la cual puede ser de tipo magnético, eléctrico, mecánico, gravitacional, entre otros.

Variables Termodinámicas

- *Variables intensivas.* Son cantidades locales que no se pueden manejar aditivamente (por ejemplo, la temperatura, campo eléctrico, campo magnético, presión. Son cantidades independientes del tamaño del sistema.)
- *Variables extensivas* Son cantidades globales que son aditivas (por ejemplo: el volumen, la masa, la entropía). Las variables extensivas son proporcionales al tamaño del sistema.

El Estado de un Sistema Termodinámico

Para establecer un *estado termodinámico*. Son necesarias un conjunto de variables termodinámicas independientes, de tal modo que a cada interacción le corresponda una variable:

$$\text{Estado termodinámico} = (T, a_1, a_2, \dots, a_n) := (T, a)$$

Donde T es la temperatura y a_n es la variable independiente que representa el n -ésimo modo de interacción; g es el número total de modos no térmicos. Las variables $a = (a_1, a_2, \dots, a_g)$ son las *coordenadas generalizadas*[26].

Espacio de estados y funciones básicas de estado.

La descripción de un sistema termodinámico se puede realizar asociando a él, un espacio de fase termodinámico (EFT), en el espacio euclidiano donde cada punto coordinado por (T, a) es la representación de un estado termodinámico.

Equilibrio termodinámico.

Cuando el entorno de un sistema sufre una variación (ya sea por interacciones térmicas o de trabajo), generalmente el sistema se ve afectado y después de un tiempo el sistema

alcanza un estado en el cual no hay interacción alguna, de tal manera que se puede decir que se ha llegado a un estado de equilibrio termodinámico. La condición principal para la existencia de equilibrio termodinámico de un sistema es que la energía gastada durante un proceso sea mínima. La energía disponible da una medida de la máxima cantidad de trabajo que el sistema puede entregar. Estas condiciones restringen el uso de la energía a cuatro casos, para un sistema que an sufriendo pequenos cambios en un proceso reversible desde el estado de equilibrio.

- *Caso 1. Sistema térmicamente aislado e isocórico (volumen constante.)*
- *Caso 2. Sistemas isóbaros (presión constante) y térmicamente aislados*
- *Sistema no aislado térmicamente e isocoro*
- *Sistema isóbaro y no aislado térmicamente*

Potenciales termodinámicos.

Los estados de equilibrio termodinámico se pueden expresar a través de cuatro expresiones importantes que son:

- *Energía interna:* es el potencial termodinámico asociado a un proceso reversible para un sistema aislado cerrado con $S, X, \{N_j\}$ fijos, luego $U = TS - XY + \sum_j \mu_j N_j$. El cambio en la energía interna corresponde a la máxima cantidad de trabajo que puede dar o recibir el sistema.
- *Entalpía:* estudia un sistema aislado térmicamente pero mecánicamente acoplado con el resto del mundo, por lo tanto hay intercambio de partículas en un proceso reversible. La entalpía $H = U - XY = ST + \sum_j \mu_j N_j$ corresponde a un proceso reversible con X, Y, N_j fijos. El cambio de $\{S, X, N_j\} \rightarrow \{S, Y, N_j\}$ es posible a través de la transformada de Legendre.
- *Energía libre de Helmholtz* es usado para sistemas cerrados y acoplados térmicamente con el resto del universo, pero mecánicamente aislado, es decir que las variables S, X, N_j permanecen fijas tal que por medio de la transformada de Legendre $\{S, X, N_j\} \rightarrow \{T, X, N_j\}$ tal que el potencial de Helmholtz está dado por $F = U - ST = XY + \sum_j \mu_j N_j$ para un proceso reversible.
- *Le energía libre de Gibbs* mantiene constantes $\{T, Y, N_j\}$ durante un proceso reversible en un sistema mecánica y térmicamente acoplados al resto del universo la transformada de Legendre $\{S, X, N_j\} \leftrightarrow \{T, Y, N_j\}$, entonces la energía libre de Gibbs se expresa $U - ST - \sum_j N_j \mu_j = XY$.

Transiciones de Fase.

Fase. Se define como un sistema homogéneo que tiene límites definidos. Cuando una sustancia es física y químicamente homogénea se dice que tiene una única fase, los estados sólido, líquido y gaseoso se consideran cada uno como una fase. La fase tiene asociadas cantidades de temperatura, presión, potencial químico, cantidades que pueden ser medidas, variables intensivas que se mantienen constantes y que definen el estado de un sistema. Fluctuaciones constantes pueden ocurrir, un recipiente con agua no cambiara de fase si yo aumento o disminuyo su volumen, pero si bajo la temperatura hasta que el agua se congele, el efecto observable de este fenómeno advierte sobre un cambio de fase.

Capacidad calorífica. Es el calor necesario para elevar un grado la temperatura; el aumento de la temperatura determinado por el incremento de desorden del sistema. Se expresa como

$$C_p = \frac{dQ}{dT} = T \left(\frac{dS}{dT} \right)$$

De otro lado, la *capacidad calorífica* y su derivada muestran la existencia de una transición de fase, cuando hay un cambio abrupto de la capacidad calorífica. Dicha capacidad también puede ser estudiada desde la perspectiva estadística en la cual la entropía juega un papel fundamental, pues la disminución del grado de desorden del sistema rompe con su equilibrio generando una transición de fase.

La entropía A grosso modo se puede decir que es el grado de desorden de un sistema. En termodinámica representa una variable de estado mientras que desde la perspectiva de la mecánica estadística es la cantidad de energía almacenada en él.

Las ecuaciones de estado termodinámicas pueden sufrir discontinuidades, dichas discontinuidades se manifiestan físicamente como transiciones de fase. El estudio de las transiciones de fase es muy importante principalmente a nivel práctico, por que permite conocer la utilidad de un material a cierta temperatura; en el camino a seguir para el estudio de cómo ocurren las transiciones de fase es necesario un enfoque microscópico, es decir desde la mecánica estadística, sin embargo, la termodinámica provee las herramientas para dejarlo de lado y dar una explicación suficiente a nivel macroscópico. Son los campos los que producen trabajo y al generar un potencial rompen con el equilibrio provocando un proceso en el cual la hay transiciones de fase.

Un diagrama $p - T$ es un *diagrama de fase*. En los diagramas de fase se utilizan las variables intensivas temperatura T y presión p , puesto que ofrecen un contacto térmico y mecánico apropiado, además son cantidades fáciles de usar y especifican de manera sencilla el volumen en un sistema, entre otras cantidades. Un ejemplo de diagrama de fase se puede ver a continuación:

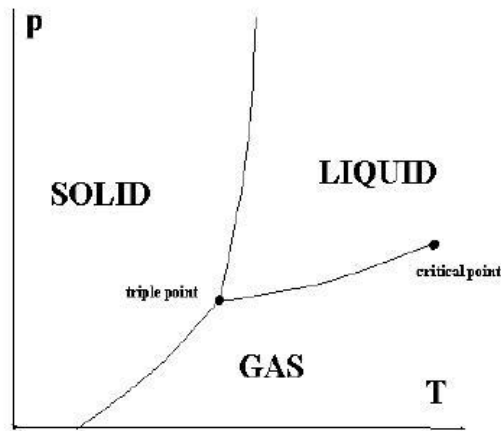


Figure A.1.: Diagrama de Fase para un Modelo Simple.

De este diagrama se pueden interpretar varias cosas. Primero las líneas continuas separan las fases de los materiales, a temperaturas altas una material se puede convertir en líquido o sólido y es posible que en un mismo sistema convivan dos fases diferentes o como en el caso del *punto triple*. del agua convivan tres fases.

El punto crítico. Otro aspecto importante del estudio de los diagramas de fase es el punto crítico. En la gráfica se puede ver el camino desde el punto tripe hasta el punto crítico, cuando la temperatura se encuentra en ese intervalo, un incremento en la presión podra causar una transición de fase entre dos estados, el cambio de una fase a la otra es continuo y por lo tanto no se puede identificar. El punto crítico existe para aquellas fases tales que la diferencia entre ellas posee un carácter cuantitativo.

Variaciones en primer orden y segundo orden. Una sola fase es función de la temperatura y la presión, esta se puede ser representada como una superficie tridimensional g (donde $g(T, p)$) y en la que hay coexistencia de fases. Cada superficie esta caracterizada por algunos valores de T , p y G (función de Gibbs) y muestra los valores que debe tomar en determinada fase. Si se considera una sustancia simple sobre la cual pueden existir los tres estados: sólido, líquido y gaseoso, entonces existen tres superficies g que al cortar por parejas generan tres líneas que representan el equilibrio entre fases. Al intersectar las tres superficies se hallar un punto en el cual existen las tres fases (el punto triple), al mover este punto infinitesimalmente se puede pasar a cualquiera de esos estados, y si se mueve infinitesimalmete uno de los planos se vuelve al caso de corte entre parejas de superficies.

Las transiciones de fase pueden ser varios tipos que se distinguen según la continuidad de las derivadas del potencial de Gibbs,

- *Transiciones de primera especie o de primer orden.* Se presentan cuando hay cambios de estado discontinuos y los estados correspondientes a cada fase se hallan separados en el espacio de configuraciones. Se caracterizan por una discontinuidad en la repre-

A Breve Introducción a la Termodinámica

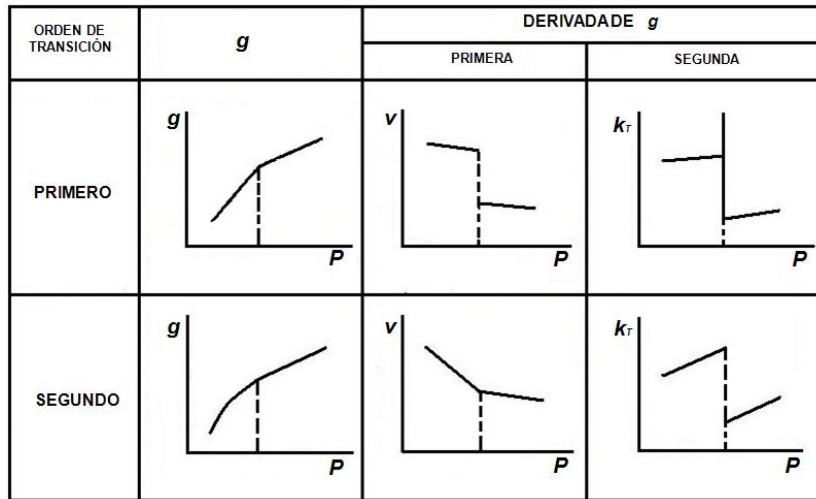


Figure A.2.: Comportamiento de la función de Gibbs y de las dos primeras derivadas en transiciones de primero y segundo orden.

sentación de las variables extensivas específicas en función de alguna variable intensiva, en este caso es necesario aportar energía al sistema para poder pasar de una fase a otra.

- *Transiciones de segundo orden o tipo lambda.* Se presentan cuando los cambios de estado son continuos, es decir no hay energía de cambio de fase. Sin embargo sus segundas derivadas son de orden superior, sus derivadas divergen en el cambio de fase.

B. Cálculos

En este apéndice mostramos los cálculos realizados para obtener la primera ley de la termodinámica y el determinante de la métrica de un agujero negro de Kerr-Newmann AdS. El programa utilizado para realizar estos cálculos fue Maple 15, los cálculos del escalar de curvatura tanto de Kerr y Kerr-Newman con constante cosmológica no se incluyen en el texto debido a su gran extensión.

Cálculos de las condiciones de equilibrio y las variables intensivas M , Ω , Φ y Ψ

De la expresan para la masa

$$M^2 = \frac{\mathcal{A}}{16\pi} + \frac{\pi}{\mathcal{A}}(4J^2 + Q^4) + \frac{Q^2}{2} + \frac{J^2}{l^2} + \frac{\mathcal{A}}{8\pi l^2} \left(Q^2 + \frac{\mathcal{A}}{4\pi} + \frac{\mathcal{A}}{32\pi^2 l^2} \right), \quad (\text{B.1})$$

$$T = \left. \frac{\partial M}{\partial S} \right|_{JQ\Lambda} = \frac{1}{8\pi M} \left(1 - \frac{\pi^2}{S^2}(4J^2 + Q^2) + 2\Lambda \left(Q^2 + \frac{2S}{\pi} \right) + \frac{3S^2\Lambda^2}{\pi^2} \right) \quad (\text{B.2})$$

la velocidad angular

$$\Omega = \left. \frac{\partial M}{\partial J} \right|_{SQ\Lambda} = \frac{\pi J}{MS} + \frac{J\Lambda}{M}, \quad (\text{B.3})$$

el potencial eléctrico

$$\Phi = \left. \frac{\partial M}{\partial Q} \right|_{SJ\Lambda} = \frac{\pi Q}{2MS} \left(Q^2 + \frac{S}{\pi} + \frac{S^2\Lambda}{\pi^2} \right) \quad (\text{B.4})$$

la variable conjugada de Λ es

$$\Psi = \left. \frac{\partial M}{\partial \Lambda} \right|_{SJQ} = \frac{J^2}{2M} + \frac{Q^2 S}{4\pi M} + \frac{S^3 \Lambda}{4\pi^3 M} \quad (\text{B.5})$$

El determinante de g

$$\det[g] = -M_{SS}(M_{JJ}M_{QQ}M_{\Lambda\Lambda} - M_{JJ}M_{QJ}^2 - M_{QQ}M_{J\Lambda}^2). \quad (\text{B.6})$$

Donde

B Cálculos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial S} &= M_S = \frac{1}{8\pi M} \left(1 - \frac{\pi^2}{S^2} (4J^2 + Q^2) + 2\Lambda \left(Q^2 + \frac{2S}{\pi} + \frac{3S^2\Lambda^2}{\pi^2} \right) \right) \\
\frac{\partial M^2}{\partial^2 S} &= M_{SS} = \frac{\pi J^2}{MS^3} + \frac{\pi Q^4}{4MS^3} + \frac{\Lambda}{2\pi M} + \frac{3S\Lambda^2}{4\pi^3 M}, \\
\frac{\partial M}{\partial J} &= M_J = \frac{\pi J}{SM} \left(1 + \frac{\Lambda S}{\pi} \right) \\
\frac{\partial M^2}{\partial^2 J} &= M_{JJ} = \frac{1}{M} \left(\frac{\pi}{S} + \Lambda \right), \\
\frac{\partial M}{\partial Q} &= M_Q = \frac{\pi Q}{2MS} \left(\frac{3Q^2\pi}{2SM} + \frac{1}{2M} + \frac{S\Lambda}{2\pi M} \right) \\
\frac{\partial M^2}{\partial^2 Q} &= M_{QQ} = \frac{1}{2M} \left(\frac{3\pi Q^2}{S} + \frac{S\Lambda}{\pi} + 1 \right), \\
\frac{\partial M}{\partial \Lambda} &= M_\Lambda = \frac{J^2}{2M} + \frac{Q^2 S}{4\pi M} + \frac{S^3 \Lambda}{4\pi^3 M} \\
\frac{\partial M^2}{\partial^2 \Lambda} &= M_{\Lambda\Lambda} = \frac{S^3}{4\pi^3 M}, \\
\frac{\partial M^2}{\partial Q \partial J} &= M_{QJ} = 0, \\
\frac{\partial M^2}{\partial J \partial \Lambda} &= M_{Q\Lambda} = \frac{J}{M}.
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Bibliography

- [1] Tejeiro.J.M., Notas de Clase, Principios de Relatividad General, Universidad Nacional de Colombia, 2005.
- [2] Tejero. A., Balbs. M.,Variedades, Tensores y física, alqua.com, 2012.
- [3] Arnold,V.I., Mtodos Matemticos da Mecnica Clsica, Editora Mir Moscovo,Moscu, 1987.
- [4] H. Quevedo, "Geometrotermodynamics", arXiv:physics/0604164v2 [physics.chem-ph] 5 Diciembre 2006.
- [5] Norbury. J.,General Relativity & Cosmology for Undergraduates,Physics Department, University of Wisconsin, 1997.
- [6] Garay.L.,Notas de Relatividad General,Universidad Complutense de Madrid, 2011
- [7] Carroll, B. W, Ostle, D. A,An Introduction to the Modern Astrophysics, Second Edition, Wesley Pearson Addison, 2007.
- [8] Schutz, B. F,A First Course in General Relativity, CAMBRIDGE University Press,
- [9] Nardo.D.Black Holes,Lucent Books. Lucent Books is an imprint of The Gale Group, Inc., a division of Thomson Learning, Inc. 2004.
- [10] Larraaga. E.A.,Agujeros Negros Clsicos,AshCat Publishers, 2009
- [11] Misner,C.W., K.S. Torne, and J.A. Wheeler, Gravitation, W.H Freedman and Company, San Francisco, 1973.
- [12] Jacobson, T.,Introductory Lectures on Black Hole Thermodynamics,Institute for Theoretical Physics, university of Utrecht
- [13] Davies.,P. C. W. Thermodynamics of black holes Rep. Prog. Phys. 41, 1313 (1978).
- [14] Carroll S.M., The Cosmological Constant,Theoretical Physics and Astrophysics and Physics Department California Institute of Technology, University of Chicago, <http://preposterousuniverse.com>
- [15] Susskind,L.,Lindesay,J., An Introducion to Black Holes and the String Theory Revolution. The Holographic Universe, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.,2005.
- [16] Hawking. S.W.,Particle Creation by Black Holes. Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Cambridge, England Received April 12, 1975.

Bibliography

- [17] Kiefer.C., The Galactic Black Hole Lectures on General Relativity and Astrophysics. Chapter 7. University of Cologne, Germany. 2003.
- [18] Quevedo H., Geometrothermodynamics of Black Holes, arXiv:0704.3102v2 [gr-qc] 2 Jul 2007.
- [19] Larrañaga.A.,Mojica.S., Geometric Thermodynamics of Kerr-AdS Black Hole with a Cosmological Constant as State Variable,arXiv:1204.3696v1 [gr-qc] 17 Apr 2012.
- [20] Zheng Ze Ma,<http://arxiv.org/abs/hep-th/0409024v3> 31 Dec 2004, Hawking temperature of Kerr-Newman-AdS black hole from tunneling
- [21] Caldarelli, M., Cognola.,G and Klemm.,D,Thermodynamics of Kerr-Newman-AdS Black Holes and Conformal Field Theories, <http://arxiv.org/abs/hep-th/9908022v3> 6 Dec 1999
- [22] Kubo, R., Thermodynamics, University of Tokio, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968.
- [23] Rabin, B., Sujoy, K. M., Saurav, S.,Second Order Phase Transition and Thermodynamic Geometry in Kerr-AdS Black Hole, arXiv:1005.4832 24 August 2011.
- [24] L. Smarr, "Mass Formula of Kerr Black Holes", Physical Review Letters, volume 30, Nmero 2, 8 Enero 1973, pp 71-73.
- [25] <http://math.ucr.edu/home/baez/vacuum.html>, Agosto 2012.
- [26] Quevedo, H., Sánchez, A., Geometrothermodynamics of asymptotically anti de Sitter black holes, <http://arxiv.org/abs/0805.3003v2>, Agosto 2008
- [27] Sethna, J.,Statistical Mechanics Entropy, Order Parameters, and Complexity,Published in the United States by Oxford University Press Inc., New York, 2006.
- [28] Reichl, L., A Modern Course in Statistical Physics, A Wilwy-Interscience Publication John Wiley & sons, inc, 2nd Edición, ISBN 0-471-59521-9, 1998
- [29] Quevedo, H., Ramírez, A., A geometric approach to the thermodynamics of the van der Waals system,<http://arxiv.org/abs/1205.3544v1>, Mayo 2012.
- [30] Mrugala,R., Nulton, J.D., Schn, J.C., and Salamon, P., Statistical approach to the geometric structure of thermodynamics, Phys. Rev. A 41, 3156 (1990).
- [31] Quevedo,H., Sánchez, A., Taj, S., Vasquéz, A., Phase transitions in geometrothermodynamics, <http://arxiv.org/abs/1010.5599v1>, 2010.
- [32] Jardim, D., Rodrigues M., and Houndjo,S., Thermodynamics of phantom Reissner-Nordstrom-AdS black hole, arXiv:1202.2830, Febrero de 2012.
- [33] W. Janke., D.A. Johnston and R. Kenna,Information Geometry and Phase Transitions, <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0401092v1>.

Bibliography

- [34] Larrañaga, A., Mojica, S., Geometrothermodynamics of a Charged Black Hole of String Theory, arXiv:1012.2070 , Diciembre 2006.
- [35] Larrañaga, A., Cárdenas, A., Geometric Thermodynamics of Schwarzschild-AdS black hole with a Cosmological Constant as State Variable, <http://arxiv.org/abs/1108.2205v1>, Agosto 2011.