UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Subcategorías de grupos

Oscar Mauricio Parra Baquero

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2012

Subcategorías de grupos

Oscar Mauricio Parra Baquero

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias: Matemáticas

Director:
Fernando Zalamea

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2012

Resumen

Se presenta categóricamente la colección de grupos abelianos, y la noción de categoría abeliana; la estructura del retículo de variedades, y la localización de algunas subvariedades de grupos. Con base en esto, se analiza la posibilidad de replicar parte de la estructura de categoría abeliana en otras categorías o variedades.
Palabras clave: Grupos, Retículo, Interpretabilidad.

Abstract

We present, in a categorical way, the collection of abelian groups, the concept of abelian categories, the structure of the lattice of interpretability types of varieties, and the localization of some groups subvarieties. From this, we work on the possibility of recreating part of the abelian structure in other categories or varieties.
Keywords: Groups, Lattice, Interpretability.

Contenido

1 Introducción

Grothendieck, en 1955, definió las categorias abelianas generalizando algunas de las propiedades de la categoría de grupos abelianos. El objetivo de Grothendieck era investigar la analogía entre la teoría de cohomologías con coeficientes en un haz y la teoría de funtores derivados sobre funtores en categorías de módulos, para encontrar una forma (las categorías abelianas) de abarcar ambas teorías. Además, dio criterios sobre una categoría abeliana que permitieran utilizar resultados básicos de álgebra homológica. Neumann, en 1974, definió el retículo de variedades interpretables, donde una variedad V era "menor"que W si las operaciones de V pueden ser reescritas en términos de W. Las ideas de Neumann fueron ampliadas por García y Taylor en 1984, haciendo un estudio de este retículo y la relaciones que dentro de este tienen algunas subvariedades de grupos. Ambos enfoques han proveído formas de estudio de cierto tipos de grupos, bien por las propiedades que pueden replicarse en otras categorías, o por las relaciones de interpretabilidad entre ellas.
En el presente trabajo se presenta categóricamente la colección de grupos abelianos, y a partir de allí se presenta en general la noción de categoría abeliana. Luego se revisa la estructura del retículo de variedades, y la localización de algunas subvariedades de grupos dentro del mismo. Con base en esto, se analiza la posibilidad de replicar parte de la estructura de categoría abeliana en otras categorías o variedades, a partir de dos resultados de Grothendieck y la relación entre equi-interpretabilidad y equivalencia categórica.

2 Ab como Categoría Abeliana

Consideremos la categoría de grupos abelianos, Ab. Algunas de las propiedades de esta categoría pueden ser extendidas de los objetos a los morfismos, y ser tomadas como propiedades categóricas. Otras categorías tambien comparten estas propiedades, y son llamadas categorías abelianas. Se sigue aquí el desarrollo planteado en [6].

2.1. Ab como Categoría Preaditiva

Definición 2.1.1. *Una categoría C se dice Ab-categoría, o categoría preaditiva, si $C(A, B)$, el conjunto de morfismos entre A y B, es un grupo abeliano y la composición es una operación bilineal.*

La estructura de $C(A, B)$ estará dada por una operación interna

$$+_{C(A,B)} : C(A, B) \times C(A, B) \to C(A, B)$$

que satisface las condiciones usuales para un grupo abeliano. En Ab, la operación interna está definida a través de la operación del codominio (notación aditiva): para $f, g : A \to B$ morfismos de grupos abelianos,

$$(f +_{Ab(A,B)} g)(a) = f(a) +_B g(a)$$

y $-f : A \to B$ está definida por $-f(a) = -(f(a))$. Ahora, sean $f, f' : A \to B$ y $g, g' : B \to C$. Queremos que $(g + g') \circ (f + f') = g \circ f + g' \circ f + g \circ f' + g' \circ f'$. Si $A, B \in Ab$,

$$\begin{aligned}
(g + g') \circ (f + f')(a) &= (g + g')((f + f')(a)) \\
&= (g + g')(f(a) + f'(a)) \\
&= g(f(a) + f'(a)) + g'(f(a) + f'(a)) \\
&= g(f(a)) + g(f'(a)) + g'(f(a)) + g'(f'(a)) \\
&= (g(f) + g(f') + g'(f) + g'(f'))a.
\end{aligned}$$

Definición 2.1.2. *Un objeto i se dice inicial si $\forall A \in C$, existe un único morfismo $i \to A$. Se dice que f es un objeto final si $\forall A \in C$ existe un único morfismo $A \to f$. Un objeto inicial y final se denomina objeto cero.*

En Ab, el grupo trivial 0 es un objeto cero, con los morfismos usuales $0 : A \to 0$ y $0 : 0 \to A$, definiendo el morfismo cero $0 : A \to B$ como el morfismo que envía todos los elementos de A al cero de B.

Definición 2.1.3. *Para $f \in C(A, B)$, el kernel de f es un morfismo $Ker(f) \in C(K, A)$ tal que:*

1. $f \circ Ker(f) = 0$
2. *Para todo $h \in C(E, A)$ tal que $f \circ h = 0$, existe un único $h' \in C(E, K)$ que hace el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "Ker(f)"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ E \arrow[u, "h'"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

Para $f \in Ab(A, B)$, definimos el kernel de la manera usual: $K = \{a \in A : f(a) = 0\}$, y $Ker(k) : K \to A$ la inclusión. Ahora, $f \circ Ker(f) = 0 = 0 \circ Ker(f)$. Supongamos $g : C \to A$ tal que $f \circ g = 0 = 0 \circ g$. Como $f(g(c)) = 0\ \forall c \in C$, tenemos que $g(C) \subseteq K$. Luego, existe una inclusión $h : C \to K$, y el diagrama

$$\begin{tikzcd} K \arrow[dr, "Ker(f)"] \arrow[drr, bend left, "0"] & & \\ & A \arrow[r, "f"] & B \\ C \arrow[uu, "h"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[urr, bend right, "0"'] & & \end{tikzcd}$$

conmuta. Esta construcción también es válida en *Grp*, pues $Ker(f)$ siempre es subgrupo normal.

Definición 2.1.4. *El igualador de $f, g : A \to B$ es un morfismo $e : C \to A$ tal que $fe = ge$, y para cualquier $e' : D \to A$ que cumpla $fe' = ge'$, existe un único $h : D \to C$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ D \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "e'"'] & & \end{tikzcd}$$

Por la estructura aditiva de Ab, podemos definir el igualador de dos morfismos a partir del kernel: sean $f, g \in Ab(A, B)$, y sea $K_{f-g} = \{a \in A : (f-g)(a) = 0\} = \{a \in A : f(a) = g(a)\}$. Para $Ker(f - g) : K_{f-g} \to A$ la inclusión, se tiene que $f \circ Ker(f - g) = g \circ Ker(f - g)$. Si

$t \in Ab(C, A)$ es tal que $f \circ t = g \circ t$, por la definición del kernel existe $h \in Ab(C, K_{f-g})$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
K_{f-g} \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, bend left, "0"] & & \\
& A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
C \arrow[uu, "h"] \arrow[ur, "t"] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces $Ker(f-g)$ satisface la condición del igualador, y dado que $K_{f-g} = K_{g-f}$, está bien definido.

Definición 2.1.5. *Para $f \in C(A, B)$, el cokernel de f es un morfismo $Cok(f) \in C(B, E)$ tal que:*

1. $Cok(f) \circ f = 0$
2. *Para todo $h \in C(B, D)$ tal que $h \circ f = 0$, existe un único $h' \in C(E, D)$ que hace el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "Cok(f)"] \arrow[dr, "h"'] & E \arrow[d, "h'"] \\
& & D
\end{tikzcd}$$

Para $f \in Ab(A, B)$, sea $E = B/f(A)$ el grupo cociente, y sea $Cok(f) : B \to B/f(A)$ el morfismo canónico. Se tiene que $Cok(f) \circ f = 0$. Sea, además, $t \in Ab(B, C)$ tal que $t \circ f = 0$. Entonces, sea $t' \in Ab(B/f(A), C)$ dada por $t'([b]) = t(b)$, que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "Cok(f)"] \arrow[dr, "t"'] & B/f(A) \arrow[d, "t'"] \\
& & C
\end{tikzcd}$$

y, dado que, si $[a] = [b], a - b \in f(A)$ y $t(a - b) = 0$, $t(a) = t(b)$, t' está bien definida, pues no depende del representante de clase.

Definición 2.1.6. *El coigualador de $f, g : A \to B$ es un morfismo $e : B \to D$ tal que $ef = eg$, y para cualquier $e' : B \to E$ que cumpla $e'f = e'g$, existe un único $h : D \to E$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "e'"'] & D \arrow[d, "h"] \\
& & E
\end{tikzcd}$$

A partir de la definición del cokernel, podemos definir el coigualador de dos morfismos $f, g \in Ab(A, B)$ como el cokernel de $f - g$.
Consideremos una categoría A con objeto cero, kernel y cokernel. Sea $C \in A$, y sea P_C el conjunto de morfismos con codominio C. Podemos equipar este conjunto con un preorden de la siguiente manera: $g \leq f$ ssi $\exists g'$ tal que $g = fg'$. Decimos que $f = g$ si $f \leq g$ y $g \leq f$. Del mismo modo, sea Q_C el conjunto de morfismos con dominio C con el preorden $u \geq v$ ssi $\exists v'$ tal que $v = v'u$. A partir de estos preórdenes definimos la relación de equivalencia $f = g$ ssi $f \leq g$ y $g \leq f$.

Proposición 2.1.1. *[6][p. 193]Para* $f \in C(A, B)$

1. $Ker(Cok(Ker(f))) = Ker(f)$
2. $Cok(Ker(Cok(f))) = Cok(f)$.

Demostración. 1. La afirmación se deriva del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[rr, "Ker(Cok(Ker(f)))"] \arrow[d, bend right, "g"'] & & A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "Cok(Ker(f))"'] & B \\
{} \arrow[u, bend right, "h"'] \arrow[urr, "Ker(f)"'] & & & {} \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}$$

Por la definición de Cok, existe un morfismo j tal que $j \circ Cok(Ker(f)) = f$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
Cok(Ker(f)) \circ Ker(Cok(Ker(f))) &= 0 \text{ y componiendo con } j \\
j \circ Cok(Ker(f)) \circ Ker(Cok(Ker(f))) &= 0 \\
f \circ Ker(Cok(Ker(f))) &= 0
\end{aligned}$$

y por definición de kernel, existe el morfismo g tal que $Ker(Cok(Ker(f))) = Ker(f) \circ g$. Esto muestra que $Ker(Cok(Ker(f))) \leq Ker(f)$. Además, $Cok(Ker(f)) \circ Ker(f) = 0$, y una vez más, por la definición de kernel, existe un morfismo h tal que $Ker(Cok(Ker(f))) \circ h = Ker(f)$. Esto muestra que $Ker(f) \leq Ker(Cok(Ker(f)))$.

2. Análogo al anterior a partir de

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & B \arrow[rr, "Cok(Ker(Cok(f)))"] \arrow[drr, "Cok(f)"] & & {} \arrow[d, bend right, "h"'] \\
{} \arrow[ur, "Ker(Cok(f))"'] & & & {} \arrow[u, bend right, "g"']
\end{tikzcd}$$

□

Corolario 2.1.1. *[6][p. 193] Un morfismo* f *es kernel ssi* $f = Ker(Cok(f))$.

Si C tiene objeto cero, kernel y cokernel, cualquier morfismo f puede factorizarse como $f = mq$, donde $m = Ker(Cok(f))$ y q existe por la definición de kernel.

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & {} \arrow[r, "Cok(f)"] & {} \\ {} \arrow[ur, "m"'] & & \end{tikzcd}$$

Proposición 2.1.2. *[6][p. 193] Si $f = m'q'$ con m' un kernel, entonces existe t que hace el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q'"'] & {} \arrow[d, "m"] \arrow[dl, "t'"'] \\ {} \arrow[r, "m'"'] & {} \end{tikzcd}$$

Más aún, si C tiene igualadores y cada mono es kernel, entonces q es epi.

Demostración. Sea $m' = Ker(p')$, donde $p' = Cok(m')$. Sea $p = Cok(m) = Cok(Ker(Cok(f))) = Cok(f)$.

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q'"'] & {} \arrow[d, "m"] \arrow[dl, "t"'] & \\ {} \arrow[r, "m'"'] & {} \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "p"'] & {} \\ & {} \arrow[ur, "w"'] & \end{tikzcd}$$

Se tiene que $p'm' = 0$, $p'm'q' = 0$, $p'f = 0$, entonces existe w tal que $p' = wp$, y $p'm = wpm = 0$ con lo cual m se factoriza a través de m', $m = m't$, y como $mq = m'q'$, $m'q' = m'tq$ y siendo m' mono, $tq = q'$ Para ver que q es epi, consideremos r, s tales que $rq = sq$, y sea e el igualador de r y s. Existe entonces q' que hace el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[dr, "e"] & & \\ & {} \arrow[r, bend left, "r"] \arrow[r, bend right, "s"'] & {} \\ {} \arrow[uu, "q'"] \arrow[ur, "q"'] & & \end{tikzcd}$$

Sea $f = mq = meq'$. Sea $m' = me$. Este último es mónico, por ser m mónico, y resulta entonces ser un kernel. Por la parte anterior, existe t tal que $m = m't = met$ y siendo m mónico, $1 = et$. Ahora, $re = se$, $ret = set$, $r = s$, y q resulta epimorfismo. $\square$

2.2. Ab como Categoría Aditiva

Hasta ahora, una Ab-Categoría, es una categoría en la que $A(B, C)$ tiene estructura de grupo abeliano, y la composición es bilineal respecto a la adición.

Proposición 2.2.1. *[6][p. 194] Son equivalentes, sobre un objeto z en una Ab-Categoría A*

1. *z es inicial.*

2. *z es terminal.*

3. *$0 = 1_z : z \to z$.*

4. *$A(z,z)$ es el grupo trivial.*

Demostración.

- $(1 \to 3)$ Si z es inicial, existe un único morfismo $z \to z$, con lo cual $1_z = 0$.

- $(3 \to 2)$ Si $1_z = 0$, $\forall f : B \to z$, $f = 1_z f = 0f = 0$, con lo cual sólo existiría un morfismo $B \to z$, y z es final.

- $(2 \to 1)$ $\forall f : z \to C$, $f = 1_z f = 0f = 0$, con lo cual sólo existiría un morfismo $z \to C$, y z es inicial.

- $(3 \to 4)$ Si $f : z \to z$, $f = f 1_z = f0 = 0$, y entonces $A(z,z) = 0$.

- $(4 \to 3)$ Si $A(z,z) = 0$, $1_z = 0$.

□

Definición 2.2.1. *Una categoría aditiva es una Ab-categoría donde, para todo par de objetos, existe un producto.*

Hay una condición equivalente, la existencia de un biproducto.

Definición 2.2.2. *Un diagrama de biproducto para B, C en una Ab-categoría es*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, bend right, "i_1"'] & P \arrow[l, bend right, "p_1"'] \arrow[r, bend left, "p_2"] & C \arrow[l, bend left, "i_2"] \end{tikzcd}$$

donde $p_1 i_1 = 1_B$, $p_2 i_2 = 1_C$, $i_1 p_1 + i_2 p_2 = 1_C$.

Proposición 2.2.2. *[6][p. 194] Dos objetos B, C en una Ab-Categoría tienen producto si y solo si tienen biproducto. De hecho, a partir de un diagrama de biproducto, P, con p_1, p_2 es un producto; y con i_1, i_2 es un coproducto.*

Demostración. Supongamos que existe un diagrama de biproducto para B, C. Se tiene que

$$p_1 i_2 = p_1(i_1 p_1 + i_2 p_2) i_2 = p_1 i_2 + p_1 i_2$$

de donde $p_1 i_2 = 0$. Del mismo modo, $p_2 i_1 = 0$. Sea

$$\begin{tikzcd} B & P \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & C \\ & D \arrow[ul, "f_1"] \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd}$$

donde $h = i_1 f_1 + i_2 f_2$. Hemos de ver que h vuelve el diagrama conmutativo, y además es único. La primera condición se tiene de

$$p_1 h = p_1 i_1 f_1 + p_1 i_2 f_2 = f_1,$$

$$p_2 h = p_2 i_1 f_1 + p_2 i_2 f_2 = f_2.$$

Supongamos ahora que existe $h' : D \to P$ tal que $p_i h' = f_i$, $1 \leq i \leq 2$. Entonces $h' = (i_1 p_1 + i_2 p_2) h' = i_1 p_1 h' + i_2 p_2 h' = i_1 f_1 + i_2 f_2 = h$, lo cual establece la unicidad. A partir de esto, P, junto a p_1, p_2 es un producto. Consideremos ahora el diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & P \arrow[d, "g"] & C \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

donde $g = f_2 p_2 + f_1 p_1$. Igual que antes, necesitamos que g vuelva el diagrama conmmutativo y sea único; y a partir de

$$g i_1 = f_2 p_2 i_1 + f_1 p_1 i_1 = f_1$$

$$g i_2 = f_2 p_2 i_2 + f_1 p_1 i_2 = f_2$$

obtenemos lo primero. Si $g' : P \to D$ cumple $g' i_j = f_j$, $g' = g'(i_1 p_1 + i_2 p_2) = g' i_1 p_1 + g' i_2 p_2 = f_1 p_1 + f_2 p_2 = g$, y obtenemos unicidad. Luego, P, junto a i_1, i_2 es un coproducto.

Supongamos ahora que existe un producto para B, C, y consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "1_B"'] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[dr, "0"] & \\ B & B \times C \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & C \\ & C \arrow[ul, "0"] \arrow[u, "i_2"'] \arrow[ur, "1_C"'] & \end{tikzcd}$$

donde i_1, i_2 aparecen por la propiedad del producto. Ahora, consideremos $k = i_1 p_1 + i_2 p_2$, y veamos que

$$p_1(i_1 p_1 + i_2 p_2) = p_1 + 0 p_2 = p_1$$

$$p_2(i_1 p_1 + i_2 p_2) = 0 p_1 + p_2 = p_2.$$

Esto convierte el siguiente diagrama en conmutativo

$$\begin{tikzcd} B & B \times C \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & C \\ & B \times C \arrow[ul, "p_1"] \arrow[u, "k"'] \arrow[ur, "p_2"'] & \end{tikzcd}$$

Pero, por la unicidad del morfismo producto, $i_1p_1 + i_2p_2 = 1_{B\times C}$, con lo cual

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, bend right, "i_1"'] & B \times C \arrow[l, bend right, "p_1"'] \arrow[r, bend left, "p_2"] & C \arrow[l, bend left, "i_2"] \end{tikzcd}$$

es un diagrama de biproducto. □

En Ab, el biproducto es la suma directa $B \oplus C$, con las proyecciones e inclusiones usuales. Se tiene entonces que Ab es una categoría aditiva.

2.3. Ab como Categoría Abeliana

Definición 2.3.1. *Una categoría Abeliana es una categoría aditiva donde*

1. *Cada morfismo posee kernel y cokernel.*
2. *Cada monomorfismo es un kernel, y cada epimorfismo es un cokernel.*

Para la categoría Ab, ya hemos definido el kernel y el cokernel de un morfismo de la manera usual. Basta agregar, entonces, que cada mono es kernel, y cada epi es cokernel. Supongamos que f es monomorfismo, veamos que es kernel de su cokernel. Sea i el morfismo canónico para $B/Im(f)$, y sea h tal que $ih = 0$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "i"] & B/Im(f) \\ C \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

Sea $c \in C$. Como $i(h(c)) = 0$, $h(c) \in Im(f)$, luego existe $a \in A$ que cumple $f(a) = h(c)$, y es único por ser f mono. Definamos $j(c) = a$, con lo cual $h = fj$. Ahora, supongamos que f es epimorfismo, y veamos que es cokernel de su kernel. Sea i la inclusión del kernel de f en A, y sea h tal que $hi = 0$

$$\begin{tikzcd} Ker(f) \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "j"] \\ & & C \end{tikzcd}$$

Sea $b \in B$. Por ser f epi, existe un $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Definamos $j(b) = h(a)$, para algun $a \in f^{-1}(b)$. Este morfismo está bien definido, pues si a, a' cumplen que $f(a) = f(a') = b$, $f(a - a') = 0$, y $a - a' \in Ker(f)$. Luego, $h(a - a') = 0$ y $h(a) = h(a')$.

Proposición 2.3.1. *[6][p. 199] En una categoría Abeliana, cada morfismo tiene una factorización $f = me$, con m mono y e epi, siendo*

$$m = ker(Cok(f)); e = Cok(Ker(f)).$$

Demostración. Sea $m = ker(Cok(f))$. Como $Cok(f)f = 0$, f debe factorizarse a través de m, por la propiedad del kernel. Luego, $f = me$ para un único e, y por (2.1.2), e es epi. Consideremos

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[dr, "Ker(f)"] & & \\
{} \arrow[r, "Ker(e)"'] & {} \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "f"'] & {} \arrow[d, "m"] \\
 & & {}
\end{tikzcd}$$

Tenemos que $fKer(f) = meKer(f) = 0$, así que $eKer(f) = 0$ por ser m mono, y $Ker(f)$ se factoriza a través de $Ker(e)$. Por otra parte, $meKer(f) = fKer(e) = 0$, así que $Ker(e)$ se factoriza a través de $Ker(f)$. Esto es, $Ker(f) = Ker(m)$. Como e es epi, $e = Cok(Ker(e)) = Cok(Ker(f))$. □

A partir de esto, podemos definir la imagen y coimagen de f como

$$Im(f) = m; CoIm(f) = e.$$

En una categoría abeliana existen el pullback y pushout.

Proposición 2.3.2. *[1][p. 40] El diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}$$

puede ser extendido a un diagrama de pullback.

Demostración. Consideremos $A \times B$, y los morfismos dados por

$$A \times B \xrightarrow{p_1} A \xrightarrow{f} C$$

$$A \times B \xrightarrow{p_2} B \xrightarrow{g} C$$

y sea $K \xrightarrow{i} A \times B =$ el igualador de estos morfismos. Definamos

$$K \xrightarrow{t} A = K \xrightarrow{i} A \times B \xrightarrow{p_1} A$$

$$K \xrightarrow{s} A = K \xrightarrow{i} A \times B \xrightarrow{p_2} A.$$

Se tiene que

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo. Veamos que es, además, un diagrama de pullback. Consideremos morfismos $D \xrightarrow{u} A$ y $D \xrightarrow{v} B$ de tal modo que el diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por la propiedad del producto, existe un único morfismo j para el cual

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "u"'] \arrow[d, "j"] \arrow[dr, "v"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"'] & B \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Pero entonces $gv = gp_2 j$ y $fu = fp_1 j$, y por la propiedad del igualador, existe un único morfismo $\alpha : D \to K$ para el cual $j = i\alpha$, y entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\ & K \arrow[r, "s"'] \arrow[d, "t"] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

es conmutativo. □

Proposición 2.3.3. *[1][p. 42]El diagrama*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & B \\ A & \end{tikzcd}$$

puede ser extendido a un diagrama de pushout.

Demostración. De manera dual al anterior, usando coproductos y coigualadores. □

3 Algunas Subvariedades de Grupos

W. Neumann, en [7], definió el retículo de variedades, mediante el concepto de interpretabilidad. En los años siguientes, se trabajó en la localización de diversas estructuras dentro del retículo, y cómo se relacionaban entre sí. Se sigue aquí el desarrollo planteado en [3], donde se muestran relaciones entre algunas variedades de grupos.

3.1. El Retículo de Variedades

Definición 3.1.1. *Para un conjunto no vacío A definimos una operación f de aridad n, como una función*

$$f : A^n \to A.$$

Un álgebra es un par $\langle A, F \rangle$, donde A es un conjunto no vacío, y F un conjunto finito de operaciones definidas sobre A. Una subálgebra de $\langle A, F \rangle$ es un subconjunto de A donde las operaciones de F están bien definidas. Las aridades de las operaciones pueden ser escritas en orden descendente, formando una tupla, que es llamada el tipo del álgebra.

Podemos considerar un grupo como un álgebra $\langle G, +, -, e \rangle$, donde $+$ es la operación de grupo, de aridad 2; $-$ es la operación que a cada elemento asigna su inverso, de aridad 1; y la operación e, que asigna a todo elemento el cero del grupo, de aridad 0. Estas operaciones cumplen las propiedades usuales para grupos, y convierten al grupo en un álgebra de tipo $(2, 1, 0)$. Podemos considerar el conjunto de todas las álgebras del mismo tipo, y llamarlo clase de álgebras similares. Sea K una clase de álgebras similares. Sobre esta podemos definir ciertos operadores:

- $H(K) =$ Algebras isomorfas a algún elemento de K.
- $S(K) =$ Algebras isomorfas a alguna subálgebra de un elemento de K.
- $P(K) =$ Algebras isomorfas a productos directos de elementos de K.

Estos operadores son operadores de clausura. Si O es uno de estos operadores, se cumple que

$$K \subseteq O(K)$$

$$K_1 \subseteq K_2 \to O(K_1) \subseteq O(K_2)$$

$$O(K) = O(O(K)).$$

Definición 3.1.2. *Una clase K de álgebras similares es una variedad si*

$$K = H(K) = S(K) = P(K) = HSP(K).$$

Podríamos revisar que una clase de álgebras en particular cumpliese $O(K) \subseteq K$, para los tres operadores dados, pero el teorema de Birkhoff proporciona una manera más sencilla de caracterizar una variedad, usando el concepto de clase ecuacional. Para un álgebra K de tipo t, definimos

$$Id_K(X) = \{\tau \approx \sigma : \tau, \sigma \text{ son términos en el lenguaje de } K, \text{ con variables en } X\}.$$

Para $\Sigma \subseteq Id_K(X)$, definimos $Mod(\Sigma)$, como el conjunto de álgebras A de tipo t, que son modelos de Σ, $A \models \Sigma$.

Definición 3.1.3. *Una clase de álgebras K de tipo t se dice clase ecuacional si $K = Mod(\Sigma)$, para algún $\Sigma \subseteq Id_K(X)$. En este caso se dice que K es axiomatizada por Σ.*

Teorema 3.1.1 (Birkhoff). *Toda clase ecuacional es una variedad, y toda variedad es una clase ecuacional.*

De este modo, clases de estructuras algebraicas conocidas, y definidas a traves de ecuaciones, son variedades. Para ver cómo se relacionan, puede usarse la noción de interpretabilidad.

Definición 3.1.4. *Decimos que una variedad V es interpretable en W si para cada operación f en V, existe un término α_f en el lenguaje de W tal que si $\langle A, G_s\rangle_{s\in S}$ es un álgebra en W, entonces $\langle A, \overline{\alpha_f}\rangle \in V$, donde $\overline{\alpha_f}$ es la interpretación del término α_f en $\langle A, G_s\rangle_{s\in S}$. Dicho de otra manera, las operaciones de V pueden ser reescritas en términos de W, y las álgebras de W donde este término tiene sentido son en verdad álgebras de V.*

Definición 3.1.5. *Dos variedades, V y W, se dicen equi-interpretables, $V \equiv W$, si $V \leq W$ y $W \leq V$.*

A partir de estas definiciones, la relación $\leq$ se convierte en un orden parcial sobre las variedades. Además, podemos considerar clases de variedades equi-interpretables, $[V] = \{W \text{variedad}/V \equiv W\}$. La relación $\leq$ se interpreta de manera natural: $[V] \leq [W]$ si y solo si $V \leq W$, para algún representante de cada clase. Las clases equi-interpretables, junto a esta relación, forman un retículo,

$$L = \{[V],\ V \text{ variedad}, \leq\}.$$

Veamos cómo definir las operaciones del retículo. Sean dos variedades V y W, con operaciones $\{F_s\}_{s\in S}$ y $\{F_s\}_{s\in T}$ respectivamente, que no tienen tipos en común ($S \cap T = \emptyset$). Consideremos, además, bases ecuacionales $\Sigma = \{\sigma_i = \tau_i, i \in I\}$ y $\Gamma = \{\mu_j = \nu_j, j \in J\}$ para V y W, respectivamente.

Definición 3.1.6. *La variedad coproducto* $[V \amalg W]$ *es una variedad de tipo* $S \cup T$*, axiomatizada por* $\Sigma \cup \Gamma$*. La variedad producto* $[V \times W]$ *es la variedad con operaciones* $\{F_s\}_{s \in S \cup T}$*, y una operación binaria, notada* xy*, definida por:*

$$xx = x$$

$$(xy)(uv) = xv$$

$$F_s(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n) = (F_s(x_1, x_2, \ldots, x_n))(F_s(y_1, y_2, \ldots, y_n))$$

$$x_1(F_s(y_1, y_2, \ldots, y_n)) = x_1y_1$$

$$(F_s(x_1, x_2, \ldots, x_n))y_1 = x_1y_1$$

$$\sigma_i y = \tau_i y$$

$$x\mu_j = x\nu_j.$$

Proposición 3.1.1. *[3][p. 20]* $[V] \vee [W] = [V \amalg W]$.

Demostración. Veamos que $[V] \leq [V \amalg W]$. Para F_s una operación n-aria en $[V]$, existe un término $\alpha_s = F_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en el lenguaje de $[V \amalg W]$ (ya que el lenguaje de esta clase contiene al lenguaje de $[V]$), de tal modo que si $\langle A, \{F_s\}_{s \in S \cup T} \rangle$ es un álgebra en $[V \amalg W]$, $\langle A, \overline{\alpha_s}_{s \in S} \rangle$ es un álgebra de $[V]$ (simplemente omitiendo las operaciones heredadas de $[W]$). De manera análoga, $[W] \leq [V \amalg W]$. Supongamos que existe una clase $[Z]$ tal que $[V] \leq [Z] \leq [V \amalg W]$ y $[W] \leq [Z] \leq [V \amalg W]$. Sea F_s una operación n-aria de $[V \amalg W]$. Si $s \in S$, F_s es una operación de $[V]$, y le corresponde un término α_s en el lenguaje de $[Z]$; mientras que si $s \in T$, F_s es una operación de $[W]$, y le corresponde un término α'_s en el lenguaje de $[Z]$. Ahora, sea $\langle A \rangle$ un álgebra de $[Z]$. Se tiene que $\langle A, \overline{\alpha_s}_{s \in S} \rangle$ es un álgebra de $[V]$, y $\langle A, \overline{\alpha'_s}_{s \in T} \rangle$ es un álgebra de $[W]$. A partir de esto, $\langle A, \overline{\alpha_s}_{s \in S} \cup \overline{\alpha'_s}_{s \in T} \rangle$ es un álgebra de $[V \amalg W]$. Se tiene, entonces, que $[V \amalg W] \equiv [Z]$. □

Lema 3.1.1. *[3][p. 20]* $[V \times W] \leq [V]$ *y* $[V \times W] \leq [W]$.

Demostración. Veamos que $[V \times W] \leq [V]$. Para la operación binaria propia de $[V \times W]$, asignemos a xy el término $\alpha = x$ en el lenguaje de $[V]$. Para $F_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una operación de $[V \times W]$, asignamos $\alpha_s = F_s$, si $s \in S$; y $\alpha_s = x_1$ si $s \in T$. De esta manera, dada un álgebra $\langle A \rangle$ de V, $\langle A, \{\overline{\alpha_s}\} \rangle$ es un álgebra de $[V \times W]$. Así, $[V \times W] \leq [V]$. De manera análoga, $[V \times W] \leq [W]$. □

Podemos considerar a $[V]$ como la subvariedad de $[V \times W]$ definida por la ley adicional $xy = x$, y a $[W]$ como la subvariedad de $[V \times W]$ definida por $xy = y$.

Lema 3.1.2. *[3][p. 21] Cada álgebra en* $[V \times W]$ *es isomorfa a* $A \times B$*, para algún* $A \in V$ *y* $B \in W$*.*

Demostración. Sea C un álgebra en $[V \times W]$. Sea $b \in C$, y sea $Cb = \{cb : c \in C\}$, y $bC = \{bc : c \in C\}$. Definamos los morfismos

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "\phi"] & Cb \times bC \arrow[l, bend left, "\psi"] \end{tikzcd}$$

donde $\phi(x) = (xb, bx)$, y $\psi(xb, by) = xy$. Se tiene que

$$\psi(\phi(x)) = \psi(xb, bx) = xx = x$$

$$\phi(\psi(xb, by)) = \phi(xy) = (xyb, bxy) = ((xy)(bb), (bb)(xy)) = (xb, by).$$

Con lo cual estos morfismos son inversos el uno del otro, y resultan ser biyecciones. Ahora, para una operación F_s de $[V \times W]$, definamos una operación F'_s en Cb, y una operación F''_s en bC de la siguiente manera:

$$F'_s(x_1 b, \ldots x_n b) = F_s(x_1 b, \ldots x_n b)b$$

$$F''_s(bx_1, \ldots bx_n) = bF_s(bx_1, \ldots bx_n).$$

Sea $A = \langle Cb; \{F'_s\}\rangle$ y $B = \langle bC; \{F''_s\}\rangle$. Se tiene que $(cb)(c'b) = cb$ y $(bc)(bc') = bc'$, con lo cual $A \in V$ y $B \in W$. Además,

$$\begin{aligned}
\psi(F_s(x_1, \ldots x_n)) &= (F_s(x_1, \ldots x_n)b, bF_s(x_1, \ldots x_n)) \\
&= (F_s(x_1 b, \ldots x_n b)b, bF_s(bx_1, \ldots bx_n)) \\
&= (F'_s(x_1 b, \ldots x_n b), F''_s(bx_1, \ldots bx_n)) \\
&= F_s^{Cb \times bC}((x_1 b, bx_1), \ldots, (x_n b, bx_n)) \\
&= F_s^{Cb \times bC}(\psi(x_1), \ldots, \psi(x_n))
\end{aligned}$$

con lo cual ψ es un homomorfismo. $\square$

Proposición 3.1.2. *[3][p. 20]* $[V] \wedge [W] = [V \times W]$.

Demostración. Ya tenemos que $[V \times W] \leq [V]$ y $[V \times W] \leq [W]$. Supongamos que existe $[Z]$ tal que $[V \times W] \leq [Z] \leq [V]$ y $[V \times W] \leq [Z] \leq [W]$. Para F_s una operación de Z, existen términos α_s en el lenguaje de V y α'_s en el lenguaje de W. Consideremos el término $\alpha_s\alpha'_s$ en el lenguaje de $[V \times W]$. Sea C un álgebra de $[V \times W]$. Consideremos $\langle C, \{\overline{\alpha_s\alpha'_s}\}\rangle$. Por el lema anterior, esta es isomorfa a $\langle A \times B, \{\overline{\alpha_s\alpha'_s}\}$, y en esta álgebra la interpretación del este término convierte el álgebra en $(\langle A, \{\overline{\alpha_s}\}\rangle, \langle B, \{\overline{\alpha'_s}\}\rangle)$, y cada una de estas es un álgebra de Z, así que pertenece a $P(Z) = Z$. Entonces, $\langle C, \{\overline{\alpha_s\alpha'_s}\}\rangle$ es isomorfa a un álgebra de Z, luego es un álgebra de Z. De este modo, $[Z] \leq [V \times W]$ y $[Z] \equiv [V \times W]$. $\square$

Podemos dar otra interpretación a la relación $\leq$ del retículo. Consideremos la variedad V como una categoría.

Proposición 3.1.3. *[3][p. 17] $V \leq W$ si y solo si existe un funtor $\psi : W \to V$ que hace el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "U_W"'] & & V \arrow[dl, "U_V"] \\
& Con &
\end{tikzcd}$$

donde los funtores U_W, U_V son los funtores olvido a la categoría de conjuntos.

Demostración. Supongamos que $V \leq W$. Entonces, para cada operación $F_s, s \in S$ de V existe un término α_s en el lenguaje de W. Consideremos la asignación $\psi(\langle A, \{F_s\}_{s\in T}\rangle) = \langle A, \{\overline{\alpha_{s}}_{s\in S}\}\rangle$, que toma un álgebra de W e interpreta los términos α_s para dar lugar a un álgebra de V. Esta asignación deja iguales los homomorfismos entre álgebras de W (y estos están bien definidos, ya que los universos son los mismos, y el lenguaje no ha cambiado). Dado el funtor ψ, supongamos que $V \nleq W$, así que existe una operación f en V que no puede reescribirse en términos de W. De este modo, $\psi(A) \notin V$, ya que no podría aparecer la operación f dentro de la interpretación de A. $\square$

El funtor ψ recibe el nombre de funtor concreto.

Definición 3.1.7. *Para A un álgebra,*

$$Archivo(A) = (A, Aut(A), End(A), Sub(A), Con(A), \cdots),$$

donde $Aut(A)$ es el grupo de automorfismos de A, $End(A)$ el monoide de endomorfismos, $Sub(A)$ el retículo de subuniversos, $Con(A)$ el retículo de congruencias, etc. Decimos que, para dos álgebras A, B, $Archivo(A) \leq Archivo(B)$ si y solo si los universos de ambas álgebras coinciden, y $Aut(B) \subseteq Aut(A)$, $End(B) \subseteq End(A)$, etc.

Proposición 3.1.4. *[3][p. 26] Si $V \leq W$, entonces para cada álgebra $B \in W$ existe un álgebra $A \in V$ tal que $Archivo(A) \leq Archivo(B)$.*

Demostración. Sea $\psi : W \to V$ un funtor concreto. Para $B \in W$, $A = \psi(B)$. $\square$

La razón por la cual la lista de estructuras de $Archivo(A)$ se extiende, es porque puede ser expandida para buscar una contradicción en la anterior proposición.

Definición 3.1.8. *Sea A un álgebra y V una variedad. Decimos que A es interpretablemente simple en V (SIN en V), si y solo si para cualquier par de funtores concretos $\psi, \phi : HSP(A) \to V$, se tiene que $\psi(A) = \phi(A)$.*

Es decir, todas las interpretaciones de A en V son isomorfas.

Proposición 3.1.5. *[3][p. 26] Sea $A \in V$, SIN en V. Si U, W son subvariedades de V tales que $A \in U$ y $A \notin W$, entonces $W \nleq U$.*

Demostración. Supongamos que $W \leq U$. Existe, entonces, un funtor concreto $\psi : U \to W$. Sea

$$HSP(A) \xrightarrow{i} U \xrightarrow{\psi} W \xrightarrow{i} V$$

$$HSP(A) \xrightarrow{i} V$$

donde i es un funtor inclusión. Como A es SIN en V, el funtor compuesto y el funtor inclusión deben tener las mismas imagenes, lo que implica que $A \in W$. $\square$

3.2. Localización de Algunas Subvariedades de Grupos

Veamos cómo se relacionan algunas subvariedades dentro del retículo. Para cualquier retículo L, un elemento se dice a se dice $\wedge$-primo si y solo si

$$x \wedge y \leq a \to x \leq a \text{ o } y \leq a,$$

para cualquier $x, y \in L$. Si además se tiene que

$$x \wedge y = a \to x = a \text{ o } y = a,$$

se dice que a es $\wedge$-irreducible.

Proposición 3.2.1. *[3][p. 37] Si V puede escribirse como una unión de una cadena ascendente de variedades, $V = \bigcup V_i$, $V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots$, y cada una de estas variedades es generada por un álgebra A_i, $HSP(A_i) = V_i$, cada una con un número primo de elementos, entonces V es $\wedge$-prima.*

Demostración. Supongamos que $U \wedge W = U \times W \leq V$. Existe entonces un funtor concreto $\psi : V \to U \times W$, definido por las interpretaciones de las operaciones de $U \times W$ en V. Supongamos $\alpha(x, y)$ el término en V que define la operación xy de $U \times W$. Ahora, para cada A_i, $\psi(A_i) = B_i \times C_i$, para $B_i \in U$, $C_i \in W$. Dado que los universos de ambas álgebras deben ser de igual cardinalidad, $\psi(A_i)$ tiene un número primo de elementos, con lo cual $|B_i| = 1$ o $|C_i| = 1$. Entonces, $\psi(A_i) \in U$ o $\psi(A_i) \in W$. Supongamos que $\psi(A_i) \in U$. Entonces, $V_i \in U$, y por ser una cadena ascendente, $V_j \in U$ para $j \geq i$, con lo cual el funtor ψ enviaría V en U, y $U \leq V$. $\square$

Corolario 3.2.1. *[3][p. 38] Ab_p, los grupos abelianos de exponente primo p, es $\wedge$-prima.*

Demostración. Ab_p está generada por un álgebra de potencia prima ($\mathbb{Z}_p$), y $A_i = \mathbb{Z}_p$. $\square$

Para grupos abelianos (Ab), grupos abelianos de exponente k (Ab_k), anillos (An), anillos de característica k (An_k), anillos unitarios de característica k (Anu_k) y anillos conmutativos unitarios de característica k ($Ancu_k$), se tiene que:

Proposición 3.2.2. *[3][p. 76]*

1. $Ab \equiv An$
2. $Ab_k \equiv An_k$, $\forall k > 1$
3. $Ab_k < Anu_k \leq Ancu_k$, $\forall k > 1$

Demostración. Consideremos el funtor olvido de anillos a grupos abelianos, $\psi : An \to Grp$, que omite la multiplicación y el 1, si existe. Para este funtor, el diagrama

$$\begin{tikzcd} An \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "U_{An}"'] & & Ab \arrow[dl, "U_{Grp}"] \\ & Con & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, y por ende $Ab \leq An$, $Ab_k \leq An_k \leq Anu_k$. Si consideramos el funtor $\phi : Ab \to An$, que asigna a cada grupo abeliano una estructura de anillo definiendo la multiplicación $a \cdot b = 0$, el funtor ϕ resulta ser un funtor concreto, y $An \leq Ab$, $An_k \leq Ab_k$. Así, $Ab \equiv An$, $Ab_k \equiv An_k$. Si suponemos que $Anu_k \leq Ab_k$, existen términos en el lenguaje de grupos que interpretan las operaciones del anillo. Sean $qx+ly$ el término para $x\overline{+}y$, y $nx+my$ el término para $x \cdot y$, donde a, l, n, m son enteros, y el simbolo de la operación de grupo es $+$, y el del anillo $\overline{+}$. Se tiene que $0\overline{+}0 = q0 + l0 = 0$, con lo cual el cero de Ab_k coincide con el cero de Anu_k. Tenemos además que $0 = 0 \cdot a = n0+ma = ma$ y $0 = a \cdot 0 = na+m0 = na$. En particular, para $\mathbb{Z}_k \in Ab_k$, se tiene que $0 = m1 = m$ y $0 = 1n = n$, y $x \cdot y = 0$, con lo cual $1 \cdot 1 = 0$, y la interpretación de $\mathbb{Z}_k$ en Anu_k sería un anillo de un solo elemento, pero esto contradice el hecho de que los universos de ambas álgebras han de coincidir. Este argumento también muestra que $Ab < Ancu$. □

Proposición 3.2.3. *[3][p. 78] Sea p un número primo. Para la variedad de anillos conmutativos con unidad de característica p ($Ancu_p$), y la subvariedad de esta que cumple $x^p = x$ ($Ancup$), se tiene que $Ancu_p < Ancup$.*

Demostración. Por ser $Ancup$ una subvariedad de $Ancu_p$, $Ancu_p \leq Ancup$. Supongamos que $Ancu_p \geq Ancup$. Sean $t(x,y), u(x,y)$ los términos que interpretan la suma y multiplicación, respectivamente, de $Ancu_p$ en el lenguaje de $Ancup$. Consideremos la multiplicación $t(x,y)$. En el lenguaje de $Ancup$,

$$t(x,y) = a_0 + a_1(x+y) + a_2xy + a_3(x^2+y^2) + a_4(x^2y+xy^2) + \cdots + a_k(x^ny^m + x^my^n),$$

donde, sin perdida de generalidad, $n \geq m$. Consideremos $t(t(x,y),z) = a_0 + \ldots a_k((t(x,y))^nz^m + (t(x,y))^mz^n) = a_0 + \ldots (a_k)^{n+1}(x^ny^m)^nz^m$. En esta expresión, x aparece a la potencia n^2, pero en $t(x,t(y,z))$ esta potencia de x no aparece, así que el coeficiente de $(x^ny^m)^nz^m$ en $t(x,t(y,z))$ es cero. Como $t(t(x,y),z) = t(x,t(y,z))$, $a_k^{n+1} = 0$, y $a_k = 0$. Usando repetidas veces este argumento, podemos eliminar de la expresión de $t(x, y)$ los ultimos términos hasta llegar a $a_3 = 0$. Usando el mismo argumento sobre $u(x, y)$, tenemos que $t(x, y) = a_0 + a_1(x + y) + a_2xy$ y $u(x, y) = b_0 + b_1(x + y) + b_2xy$. Definamos ahora $x^{n(t)}$ de manera recursiva: $x^{1(t)} = x$ y $x^{n+1(t)} = t(x, x^{n(t)})$. Desarrollando esta ultima expresión obtenemos $x^{n+1(t)} = a_0 + \cdots + a_2^n x^{n+1}$, y en particular $x^{p(t)} = a_0 + \cdots + a_2^{p-1}x^p$. Por la condición extra de *Ancup*, $x^{p(t)} = x$, así que $a_2^{p-1} = 0$, $a_2 = 0$. De manera análoga, definiendo $x^{n(u)}$, y dado que $x^{p(u)} = 0_u$ (por ser un anillo de característica p), $b_2^{p-1} = 0$ y $b_2 = 0$. Así, $t(x, y) = a_0 + a_1(x + y)$ y $u(x, y) = b_0 + b_1(x + y)$. Además,

$$t(t(x, y), z) = a_0 + a_0a_1 + a_1^2x + a_1^2y + a_1z$$

$$t(x, t(y, z)) = a_0 + a_0a_1 + a_1x + a_1^2y + a_1z$$

de donde $a_1^2 = a_1$, y $a_1 = 1$. Del mismo modo, $b_1 = 1$. Así, $t(x, y) = a_0 + x + y$ y $u(x, y) = b_0 + x + y$. Dado que $x = u(x, -b_0)$, se tiene que $-b_0 = 0_u$, y así $0_u = t(0_u, 0) = a_0 + 0_u + 0$ de donde $a_0 = 0$. Luego, $0_u = t(0_u, 0_u) = 0_u + 0_u$ y $0_u = 0 = -b_0$. Usando esto, $t(x, y) = u(x, y) = x + y$. Y, dado que las operaciones coinciden, $1_t = 0_u$, lo que significa que la interpretación de cualquier anillo sería un anillo de un elemento. Pero $Ancu_p$ tiene anillos no triviales, y la interpretación de estos debe ser del mismo cardinal. □

Proposición 3.2.4. *[8][p. 256] Sea $\psi : V \to W$ un funtor concreto entre variedades de grupos. Para $G \in V$, el elemento neutro y los inversos en G y $\psi(G)$ coinciden.*

Demostración. Sea $\cdot$ la operación de G y $*$ la operación de $\psi(G)$. Sea $\{1\}$ el grupo trivial, y sea $i : \{1\} \to G$ el único morfismo entre estos grupos, donde $f(1) = e_G$. Sea además $\psi(i) : \{1\} \to \psi(G)$, la imagen bajo ψ de f. Aquí, $\psi(i)(1) = i(1) = e_{\psi(G)}$, y los neutros coinciden. Ahora, como $W \leq V$ existe un término en el lenguaje de V que interpreta la operación de W. Sea $x^{i_1} \cdot y^{j_1} \cdot \dots \cdot x^{i_n} \cdot y^{j_n}$ la interpretación de $x * y$. Para $y = e_{\psi(G)} = e_G$, tenemos que $x = x^a$ para $a = \sum i_k$, y de manera análoga $y = y^b$ para $b = \sum j_k$. Tomemos entonces $x * x^{-1} = x^a \cdot x^{-b} = x \cdot x^{-1} = e_G$, con lo cual los inversos también coinciden. □

Proposición 3.2.5. *[3][p. 80] Sea $\psi : V \to W$ un funtor concreto entre variedades de grupos. Si $V \subseteq Ab$, el funtor es un funtor inclusión.*

Demostración. Sea G un grupo en V. Tenemos que $x * y = x^{i_1} \cdot y^{j_1} \cdot \dots \cdot x^{i_n} \cdot y^{j_n}$. Siendo G un grupo abeliano, $x * y = x^a \cdot y^b$. Pero $x = x^a$ y $y = y^b$, con lo cual ambas operaciones coinciden, y $G = \psi(G)$. □

Corolario 3.2.2. *[3][p. 80] Si V y W son variedades de grupos abelianos y V es una subvariedad propia de W, $W < V$.*

Proposición 3.2.6. *[3][p. 80] Para $(\mathbb{N}, |)$ el orden parcial sobre los naturales dado por la relación de divisibilidad, $Ab_m \wedge Ab_n = Ab_{m \vee n}$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sean p, q primos distintos, y $k, l \in \mathbb{N}$. A partir de la definición de $\wedge$, $Ab_{p^kq^l} \leq Ab_{p^k} \wedge Ab_{q^l}$. Definamos un funtor $\psi : Ab_{p^kq^l} \to Ab_{p^k} \wedge Ab_{q^l}$ de la siguiente manera: Sea $(G, \cdot, -1, e) \in Ab_{p^kq^l}$. $G = G_p \times G_q$, donde estos son los p y q subgrupos de Sylow de G, respectivamente. Definamos $\psi_p(G_p) = (G_p, \cdot, -1, e, \circ, -1^x, e^x, \pi)$, donde $(G_p, \dot{;} -1, e) \in Ab_{p^k}$ es el p subgrupo de Sylow de G, y $x \circ y = x$, $x^{-1^x} = x$, $e^x(x) = x$ y $\pi(x, y) = x$, donde π es la operación de yuxtaposición. Del mismo modo, definimos $\psi_q(G_q) = (G_q, \bullet, -1^\bullet, e^\bullet, \cdot, -1, e, \pi)$, donde $(G_q, \cdot, -1, e) \in Ab_{q^l}$ es el q subgrupo de Sylow y $x \bullet y = x$, $x^{-1^\bullet} = x$, $e^\bullet(x) = x$, $\pi(x, y) = x$. A partir de esto, sea $\psi(G) = \psi_p(G_p) \times \psi_q(G_q)$. Si $h : G \to H$ es un $Ab_{p^kq^l}$ homomorfismo, se tiene que $h(G_p) \subseteq H_p$ y $h(G_q)$ $subseteq H_q$, y $h = (h|_{G_p}, h|_{G_q})$. Así, $\psi_p(h|_{G_p}) : \psi_p(G_p) \to \psi_p(H_p)$ es un homomorfismo, y $\{\circ, -1^x, e^x, \pi\}$ son proyecciones. Análogamente, $\psi_q(h|_{G_q}) : \psi_p(G_q) \to \psi_p(H_q)$ también es un homomorfismo. Podemos definir, entonces, $\psi(h) = (\psi_p(h|_{G_p}), \psi_q(h|_{G_q}))$, y por construcción, ψ es un funtor concreto. Esto muestra que $Ab_{p^kq^l} \geq Ab_{p^k} \wedge Ab_{q^l}$, y $Ab_{p^kq^l} = Ab_{p^k} \wedge Ab_{q^l}$. A partir de esto, si $n = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$,

$$Ab_n = Ab_{p_1^{n_1}} \wedge \cdots \wedge Ab_{p_k^{n_k}}.$$

Sean $m, n \in \mathbb{N}$. $m = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ y $n = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$. Entonces

$$\begin{aligned} Ab_m \wedge Ab_n &= (Ab_{p_1^{m_1}} \wedge \cdots \wedge Ab_{p_k^{m_k}}) \wedge (Ab_{p_1^{n_1}} \wedge \cdots \wedge Ab_{p_k^{n_k}}) \\ &= (Ab_{p_1^{m_1}} \wedge Ab_{p_1^{n_1}}) \wedge \cdots \wedge (Ab_{p_k^{m_k}} \wedge Ab_{p_k^{n_k}}) \\ &= Ab_{p_1^{max\{m_1,n_1\}}} \wedge \cdots \wedge Ab_{p_k^{max\{m_k,n_k\}}} \\ &= Ab_{m \vee n} \end{aligned}$$

□

Proposición 3.2.7. *[3][p. 81] $\mathbb{Z}_n$ es SIN en Grp.*

Demostración. Sean V y W subvariedades de Grp, $V \leq W$, y supongamos $\langle \mathbb{Z}_n, +_n \rangle \in W$. Sea $\alpha(x, y) = x^{i_1} + y^{j_1} + \cdots + x^{i_n} + y^{j_n}$ el término en lenguaje de W tal que $\langle \mathbb{Z}_n, \alpha_{\mathbb{Z}_n} \rangle \in V$. Se tiene que $x\alpha_{\mathbb{Z}_n}y = ax +_n by$, donde $b = \sum j_k$ y $a = \sum i_k$, y $0\alpha_{\mathbb{Z}_n}1 = b$ y $1\alpha_{\mathbb{Z}_n}0 = a$. Tenemos, por asociatividad,

$$\begin{aligned} (x\alpha_{\mathbb{Z}_n}y)\alpha_{\mathbb{Z}_n}z &= (ax +_n by)\alpha_{\mathbb{Z}_n}z \\ &= a(ax +_n by) +_n bz \\ &= a^2x +_n aby +_n bz \\ &= ax +_n +bay +_n b^2z \\ &= ax +_n b(ay +_n bz) \\ &= ax +_n b((y\alpha_{\mathbb{Z}_n}z)) = x\alpha_{\mathbb{Z}_n}(y\alpha_{\mathbb{Z}_n}z) \end{aligned}$$

y para $x = 1, y = z = 0$, tenemos que $a = a^2$. Analogamente, $b = b^2$. Así, $a, b = 0, 1$, y $0\alpha_{\mathbb{Z}_n}0 = 0$, con lo cual 0 se convierte en el neutro de $\langle \mathbb{Z}_n, \alpha_{\mathbb{Z}_n} \rangle$. Así, $x\alpha_{\mathbb{Z}_n}0 = x$ y $a = 1\alpha_{\mathbb{Z}_n}0 = 1$. Del mismo modo, $b = 1$. Así, $x\alpha_{\mathbb{Z}_n}y = x +_n y$, y la interpretación de la operación es siempre la misma. □

Definición 3.2.1. *Para un grupo finito G, de orden n, definimos la estructura de orden de G como la n-upla $(O_{G,1}, \cdots, O_{G,n})$, donde $O_{G,i}$ es el número de elementos de orden i.*

Lema 3.2.1. *[3][p. 82] Para V, W subvariedades de Grp, y $\psi : V \to W$ un funtor concreto, $O_{G,k} \leq O_{\psi(G),k}$, para todo k.*

Demostración. El número de subgrupos de G, isomorfos a $\mathbb{Z}_k$, distintos, es $O_{G,k}/O_{\mathbb{Z}_k,k}$. Ahora, como $Archivo(\psi(G)) \subseteq Archivo(G)$, $\psi(G)$ tiene por lo menos tantos subgrupos isomorfos a $\mathbb{Z}_k$ como G, así que $O_{G,k}/O_{\mathbb{Z}_k,k} \leq O_{\psi(G),k}/O_{\mathbb{Z}_k,k}$, lo que implica $O_{G,k} \leq O_{\psi(G),k}$. □

Proposición 3.2.8. *[3][p. 82] Sea G un grupo finito. Sean V, W variedades de grupos, y $G \in V$. Para cualquier funtor concreto $\psi : V \to W$,*

$$(O_{G,1}, \cdots, O_{G,|G|}) = (O_{\psi(G),1}, \cdots, O_{\psi(G),|G|}).$$

Además, ψ preserva el exponente de G.

[3][p. 82]

Demostración. Se tiene que $0 \leq O_{G,i} \leq O_{\psi(G),i}$, para todo $i = 1, \cdots, |G|$. Además,

$$|G| = \Sigma_{i=1}^{|G|} O_{G,i} \leq \Sigma_{i=1}^{|\psi(G)|} O_{\psi(G),i} = |\psi(G)| = |G|,$$

y por ende $O_{G,i} = O_{\psi(G),i}$. □

Definición 3.2.2. *Sea $S \subseteq L$, L un retículo. Decimos que S es una cadena si para cualquier par de elementos $a, b \in S, a \neq b$, $a < b$ o $b < a$. Es una anticadena si para cualquier par de elementos $a, b \in S, a \neq b$, $a \nleq b$ y $b \nleq a$ (notado $a||b$). Definimos, además, la longitud de S como el supremo de los cardinales de anticadenas en S. Para un elemento $a \in S$, definimos la cota de a, como la cardinalidad de la menor cadena maximal $a_1 < a_2 < \cdots < a$ (donde no pueden ser insertados más elementos al comienzo o en medio de la cadena).*

Proposición 3.2.9. *[3][p. 83] Para cada $n \in \mathbb{N}$, la longitud del L-intervalo $[Ab, Ab_n]$ es infinita.*

Demostración. $\{Ab_{pn}, p$ es primo y $p \nmid n\}$ es un subconjunto de este intervalo, y dado que $\mathbb{Z}_{pn}$ y $\mathbb{Z}_{qn}$ son SIN en Grp, con $p \neq q$, y dado que cualquier funtor concreto debe conservar el exponente del grupo, no puede haber ningún funtor concreto entre Ab_{pn} y Ab_{qn}. Así, $Ab_{pn}||Ab_{qn}$. □

Sea N_n la variedad de grupos n-nilpotentes, la variedad de grupos definida por $[x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}] = 1$, donde $[x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}]$ está definido de manera recursiva como: $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, $[x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}] = [[x_1, \cdots x_n], x_{n+1}]$. Sea además M la variedad de grupos metabelianos, definida por $[[x, y], [z, w]] = 1$, y M_n la variedad de grupos n-metabelianos, donde cada subgrupo generado por n o menos elementos es metabeliano. Este tipo de variedades se dice definida por conmutadores.

Proposición 3.2.10. *[3][p. 83] Sea B_n la variedad de grupos de exponente n. Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, $m|n$. Entonces*

1. *$B_n < B_m$.*
2. *$[Grp, B_n]$ tiene longitud infinita.*
3. *$B_n \cap X < B_m \cap X$, para cualquier variedad de grupos X definida por conmutadores.*

Demostración. Dado que B_m es una subvariedad de B_n, $B_n \leq B_m$ y $B_n \cap X \leq B_m \cap X$. Ahora, dado que $\mathbb{Z}_m \in B_m \cap X \subseteq B_m$, y es SIN en grupos, no puede existir un funtor concreto $\psi : B_m \to B_n$ o $\psi : B_m \cap X \to B_n \cap X$, pues el exponente del grupo se ha de conservar. Si consideramos $\{B_{pn}, p$ es primo y $p \nmid n\}$ como un subconjunto de $[Grp, B_n]$, $B_{pn}||B_{qn}$ para $q \neq p$. Así, este intervalo tiene longitud infinita. □

Lema 3.2.2. *[3][p. 84] Todo grupo dihedral D_n es SIN en Grp.*

Demostración. Sea $\psi : HSP(D_n) \to Grp$ un funtor concreto, y sea $G = \psi(D_n)$. G tiene la misma estructura de orden de D_n,

$$(O_{D_n,1}, O_{G_n,2}, O_{G_n,3}, \cdots, O_{G,n}) = (1, n + O_{\mathbb{Z}_n,2}, O_{\mathbb{Z}_n,3}, \cdots, O_{\mathbb{Z}_n,n}).$$

Sea $a \in G$, un elemento de orden n, y $b \notin \langle a \rangle$. Se tiene, entonces, que b es de orden 2, al igual que ba, con lo cual $baba = 1$. Se tiene entonces $a^n = 1$, $b^2 = 1$, y $bab^{-1} = a^{-1}$, y G resulta isomorfo a D_n. Luego, las imagenes de D_n por cualquier par de funtores concretos son isomorfas. □

Proposición 3.2.11. *[3][p. 84] Para todo $n, m \in \mathbb{N}$*

1. *$M_n < N_{n+1} < N_n$*
2. *$N_{n+1} \cap M < N_n \cap M$*
3. *$B_{2^{n+1}m} \cap N_{n+1} < B_{2^{n+1}m} \cap N_n$*
4. *$B_{2^{n+1}m} \cap N_{n+1} \cap M < B_{2^{n+1}m} \cap N_n \cap M$*

   Si n es par distinto de una potencia de 2,

5. *$B_n \cap M_m < B_n \cap M_{m+1}$*
6. *$B_n \cap M < B_n \cap N_m \cap M$.*

Demostración. Dado que N_{n+1} es una subvariedad de M_n, $M_n \leq N_{n+1}$. Ahora, consideremos el grupo D_3, SIN en *Grp*. $D_3 \in M_n$, pero $D_3 \notin N_{n+1}$. Así, $M_n < N_{n+1}$. Del mismo modo, $D_{2^{n+1}}$ es SIN en Grp, y $D_{2^{n+1}} \in N_{n+1} \cap M$ y$D_{2^{n+1}} \notin M_n$, y obtenemos 2, 3 y 4. Ahora, si n es par, pero no una potencia de 2, existe un primo $p \neq 2$ tal que $2p|n$. Así, el grupo $D_p \in B_n \cap M \subseteq B_n M_m$, que es SIN en Grp, y cumple que $D_p \notin B_n \cap N_{m+1}$ y $D_p \notin B_n \cap N_m \cap M$. Esto prueba 5 y 6. □

Corolario 3.2.3. *[3][p. 85] Para todo $m \in \mathbb{N}$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$ distinto de una potencia de 2,*

1. $Grp < N_m$
2. $M < N_m \cap M$
3. $B_n < B_n \cap N_m$
4. $B_n \cap M < M_n \cap N_2$
5. $N_2 < Ab$
6. $B_{4m} \cap N_2 < Ab_{4m}$.

Además, $N_3 \cap M < N_2$, $B_8 \cap M < B_8 \cap N_2$, $B_{8n} \cap N_3 < B_{8n} \cap N_2$, $B_{16n} \cap N_4 < B_{16n} \cap N_3 < B_{16n} \cap N_2 < Ab_{16n}$.

Dentro de los resultados aquí expuestos, se menciona $Ab \equiv An$. An por sí sola es una categoría abeliana, pero si consideramos otra variedad V que cumpla $V \equiv Ab$, ¿es posible que V, vista como categoría, resulte abeliana? Si podemos interpretar las operaciones de una variedad en otra, ¿podemos replicar parte de la estructura categórica que estas generan? En la seccion 4.2 se responde a este interrogante de manera parcial, dando una condición para la equivalencia categórica a partir de la equi-interpretabilidad, y replicando la estructura de categoría aditiva.

4 Estructura Abeliana

Es posible duplicar algunas de las propiedades de una categoría abeliana en otras estructuras, utilizando únicamente la estructura de la categoría.

4.1. Diagramas y Límites

En una categoría con kernel e igualadores, es posible construir todos los límites pequeños, y hay un resultado similar para colímites por dualidad. La construcción de estos hereda algunas propiedades de la categoría [1, pp. 10-14].

Definición 4.1.1. *Un esquema es una tripla $S = (I, \Delta, d)$, donde I, Δ son conjuntos y $d : \Delta \to I \times I$. Los elementos de Δ son llamados flechas, los elementos de I son considerados vértices, y la función d asigna a cada flecha δ un par (i, j), su dominio y codominio.*

Una composición de flechas con dominio i y codominio j es una secuencia finita, no vacía, de flechas donde el codominio de una coincide con el dominio de la siguiente, el dominio de la primera flecha es i, el codominio de la última flecha es j.

Definición 4.1.2. *Para una categoría C, definimos un diagrama D como una función sobre un esquema S, que asigna a cada vértice un elemento $D(i) \in C$, y a cada flecha δ un morfismo $D(\delta) : D(i) \to D(j)$.*

La clase de diagramas, notada C^S, puede ser vista como una categoría tomando como morfismos entre D y D', familias de morfismos (u_i), $u_i : D(i) \to D'(i)$, tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} D(i) \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, "D(\delta)"'] & D'(i) \arrow[d, "D'(\delta)"] \\ D(j) \arrow[r, "u_j"'] & D'(j) \end{tikzcd}$$

conmuta, para cualquier δ con dominio i y codominio j.

Proposición 4.1.1. *[4][p. 11] Si A es una categoría aditiva, A^S es una categoría aditiva.*

Demostración. Sean $(u_i), (v_i) : D \to D'$ morfismos de diagramas. Definamos $(u_i) + (v_i) = (u_i + v_i)$. Se tiene que $D'(\delta)(u_i + v_i) = D'(\delta)u_i + D'(\delta)v_i = u_j D(\delta) + v_j D(\delta) = (u_j + v_j)D(\delta)$, por lo que el diagrama

$$\begin{tikzcd} D(i) \arrow[r, "u_i+v_i"] \arrow[d, "D(\delta)"'] & D'(i) \arrow[d, "D'(\delta)"] \\ D(j) \arrow[r, "u_j+v_j"'] & D'(j) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Esta operación es asociativa: $((u_i)+(v_i))+(w_i) = (u_i+v_i)+(w_i) = ((u_i+v_i)+w_i) = (u_i+(v_i+w_i)) = (u_i)+(v_i+w_i) = (u_i)+((v_i)+(w_i))$. Si consideramos la familia (0_i), como $D'(\delta)0_i = D(\delta)0_j$, (0_i) es un morfismo entre D y D', y $(0_i)+(u_i) = (0_i+u_i) = (u_i)$, con lo que la operación posee un neutro. Consideremos la familia $(-u_i)$. Como $0 = D'(\delta)(u_i-u_i) = D'(\delta)(u_i)+D'(\delta)(-u_i)$, $-(D'(\delta)(u_i)) = D'(\delta)(-u_i)$. Además, $0 = (u_j-u_j)D(\delta) = u_jD(\delta)+(-u_j)D(\delta)$, $-(u_jD(\delta)) = (-u_j)D(\delta) = -(D'(\delta)u_i)$. Se tiene que $(-u_j)D(\delta) = D'(\delta)(-u_i)$, con lo que $(-u_i)$ es un morfismo entre D, D', y $(u_i)+(-u_i) = (u_i-u_i) = (0_i)$. Y $(u_i)+(v_i) = (u_i+v_i) = (v_i+u_i) = (v_i)+(u_i)$. Esta operación es bilineal con la composición, $((u_i)+(v_i))((w_i)+(s_i)) = ((u_i+v_i)(w_i+s_i)) = (u_iw_i+u_is_i+v_iw_i+v_is_i) = (u_iw_i)+(u_is_i)+(v_iw_i)+(v_is_i)$. Así, C^S es preaditiva. Para D, D' diagramas, definamos el diagrama $D\times D'$ de la siguiente manera: $D\times D'(i) = D(i)\times D'(i)$, y $D\times D'(\delta)$ usando la propiedad del producto:

$$\begin{tikzcd} D(i) \arrow[d, "D(\delta)"'] & D(i)\times D'(i) \arrow[l, "\pi_i"'] \arrow[r, "\pi'_i"] \arrow[d, "D\times D'(\delta)"] & D'(i) \arrow[d, "D'(\delta)"] \\ D(j) & D(j)\times D'(j) \arrow[l, "\pi_j"'] \arrow[r, "\pi'_j"] & D'(j) \end{tikzcd}$$

Los cuadrados de este diagrama garantizan que $(\pi_i) : D\times D' \to D$ y $(\pi') : D\times D' \to D'$ son morfismos entre diagramas. Ahora, sean $(u_i) : C \to D$ y $(v_i) : C \to D'$. Por la propiedad del producto, existe h_i tal que

$$\begin{tikzcd} & C(i) \arrow[dl, "u_i"'] \arrow[d, "h_i"] \arrow[dr, "v_i"] & \\ D(i) & D\times D'(i) \arrow[l, "\pi_j"'] \arrow[r, "\pi'_j"] & D'(i) \end{tikzcd}$$

y si consideramos el morfismo $(h_i) : C \to D\times D'$,

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "(u_i)"'] \arrow[d, "(h_i"] \arrow[dr, "(v_i)"] & \\ D & D\times D' \arrow[l, "(\pi_j)"'] \arrow[r, "(\pi'_j)"] & D' \end{tikzcd}$$

el diagrama resulta conmutativo. Solo es necesario comprobar que (h_i) está bien definido.

$$
\begin{tikzcd}
C(i) \arrow[rr, "h_i"] \arrow[dr, "u_i"] \arrow[ddd, "C(\delta)"] & & D\times D'(i) \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[ddd, "D\times D'(\delta)"'] \\
& D(i) \arrow[d, "D(\delta)"'] & \\
& D(j) & \\
C(j) \arrow[rr, "h_j"'] \arrow[ur, "u_j"] & & D\times D'(j) \arrow[ul, "\pi_j"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C(i) \arrow[rr, "h_i"] \arrow[dr, "v_i"] \arrow[ddd, "C(\delta)"] & & D\times D'(i) \arrow[dl, "\pi'_i"'] \arrow[ddd, "D\times D'(\delta)"'] \\
& D'(i) \arrow[d, "D'(\delta)"'] & \\
& D'(j) & \\
C(j) \arrow[rr, "h_j"'] \arrow[ur, "v_j"] & & D\times D'(j) \arrow[ul, "\pi'_j"']
\end{tikzcd}
$$

Del diagrama de la izquierda se tiene $\pi_j h_j C(\delta) = u_j C(\delta) = D(\delta)u_i = D(\delta)\pi_i h_i = \pi_j D \times D'(\delta)h_i$. Del diagrama de la derecha, $\pi'_j h_j C(\delta) = \pi'_j D \times D'(\delta)h_i$. Luego,

$$
\begin{tikzcd}
& C(i) \arrow[dl, "\pi_j D\times D'(\delta)h_i"'] \arrow[d, "h_jC(\delta)"] \arrow[dr, "\pi'_j D\times D'(\delta)h_i"] & \\
D(j) & D\times D'(j) \arrow[l, "\pi_j"'] \arrow[r, "\pi' j"] & D'(j)
\end{tikzcd}
$$

pero por la propiedad del producto, $D \times D'(\delta)h_i = h_j C(\delta)$, así que el morfismo (h_i) está bien definido. $\square$

Supongamos ahora que A es abeliana. A partir de $(u_i) : D \to D'$, definamos el diagrama K como $K(i) = Ker(D(i))$, y $K(\delta)$ es tal que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
K(i) \arrow[r, "Ker(u_i)"] \arrow[d, "K(\delta)"'] & D(i) \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, "D(\delta)"'] & D'(i) \arrow[d, "D'(\delta)"'] \\
K(j) \arrow[r, "Ker(u_j)"] & D(j) \arrow[r, "u_j"] & D'(j)
\end{tikzcd}
$$

conmuta. El morfismo $(Ker(u_i))$ es el kernel de (u_i): si $(v_i) : C \to D$ es tal que $(u_i)(v_i) = (0_i)$, existen morfismos g_i tales que

$$
\begin{tikzcd}
K(i) \arrow[r, "Ker(u_i)"] & D(i) \arrow[r, "u_i"] & D'(i) \\
C(i) \arrow[u, "g_i"] \arrow[ur, "v_i"'] & &
\end{tikzcd}
$$

se tiene que $(Ker(u_i))(g_i) = (v_i)$. Solo es necesario comprobar que (g_i) está bien definido

$$\begin{tikzcd}
C(i) \arrow[rr, "v_i"] \arrow[dr, "g_i"'] \arrow[ddd, "C(\delta)"'] & & D(i) \arrow[ddd, "D(\delta)"] \\
& K(i) \arrow[ur, "Ker(u_i)"'] \arrow[d, "h_i"'] & \\
& K(j) \arrow[dr, "Ker(u_j)"] & \\
C(j) \arrow[ur, "g_j"] \arrow[rr, "v_j"'] & & D(j)
\end{tikzcd}$$

$Ker(u_j)h_ig_i = D(\delta)Ker(u_i)g_i = D(\delta)v_i = v_jC(\delta) = Ker(u_j)g_jC(\delta)$, y por ser $Ker(u_j)$ monomorfismo, $h_ig_i = g_jC(\delta)$. Así, cada morfismo de A^S posee kernel. De manera dual, posee cokernel.
Consideremos el conjunto de vértices como un preorden $(I, \leq)$, y las flechas como pares (i, j), con i el dominio, j el codominio, $i \leq j$. Supongamos además que $(i, j)(j, k) = (i, k)$, y agreguemos una flecha $e_i = (i, i)$. Para una categoría C, un diagrama $D = (D(i), u_{ij})$ a partir de este esquema, donde $u_{ij} : D(i) \to D(j)$, siempre que $i \leq j$, es llamado sistema inductivo sobre I con valores en C. Si invertimos el orden de I, o cambiamos C por su categoría opuesta, el diagrama resultante es llamado un sistema proyectivo.

Definición 4.1.3. *Para un sistema inductivo $(D(i), u_{ij})$, un límite inductivo (L, u_i) es un elemento $L \in A$ junto a morfismos $u_i : D(i) \to A$ tales que*

1. *$u_i = u_ju_{ij}$, para $i \leq j$.*
2. *Si existe $M \in A$ y morfismos $v_i : D(i) \to M$ que satisfacen $v_i = v_ju_{ij}$, para $i \leq j$, existe un único morfismo $V : L \to M$ tal que $v_i = vu_i$.*

Dos límites sobre un mismo sistema inductivo son isomorfos. Así, podemos definir el límite de un sistema inductivo como $\varinjlim D = (L, (u_i))$, salvo isomorfismo.

Así definido, $\varinjlim D$ puede ser visto como un funtor covariante entre S y A, siempre que el límite exista, donde S es un conjunto de sistemas inductivos, donde el funtor evaluado en un diagrama es $\varinjlim D = L$, y para un morfismo $(s_i) : D \to D'$, $\varinjlim(s_i) = h$ dada por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[rrr, "s_i"] \arrow[dr, "u_i"] \arrow[dd, "u_{ij}"'] & & & D'(i) \arrow[dl, "v_i"'] \arrow[dd, "v_{ij}"] \\
& L \arrow[r, "h"] & L' & \\
D(j) \arrow[ur, "u_j"'] \arrow[rrr, "s_j"'] & & & D'(j) \arrow[ul, "v_j"]
\end{tikzcd}$$

Es posible garantizar la existencia de límites sobre una categoría abeliana si pedimos la existencia de sumas directas arbitrarias. Al hacer esto, ganamos un funtor aditivo.

Proposición 4.1.2. *[4][p. 13] Sea A es una categoría abeliana, que posee sumas directas arbitrarias, y sea I un conjunto dotado de un preorden. Para cualquier sistema inductivo D sobre I con valores en A, existe $\varinjlim D$, y es un funtor aditivo entre S y A.*

Demostración. Para un sistema inductivo $(D(i), u_{ij})$, consideremos $\oplus_{i\in I}D(i)$ con las inclusiones $v_i : D(i) \to \oplus_{i\in I}D(i)$ y, para $i \leq j$, $\oplus_{i\leq j}D(i)$, con inclusiones $v_{ij} : D(i) \to \oplus_{i\leq j}D(i)$. Se tiene que, para $i \leq j$,

$$
\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[d, "v_{ij}"'] \arrow[dr, "v_i"] & \\
\oplus_{i\leq j}D(i) \arrow[r, "d"'] & \oplus_{i\in I}D(i)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[d, "v_{ij}"'] \arrow[dr, "v_j u_{ij}"] & \\
\oplus_{i\leq j}D(i) \arrow[r, "e"'] & \oplus_{i\in I}D(i)
\end{tikzcd}
$$

de donde $dv_{ij} = v_i$ y $ev_{ij} = v_j u_{ij}$. Sea $f : \oplus_{i\in I} \to L$ el coigualador de d, e. Consideremos el par (L, fv_i). Se tiene que $fv_i = fdv_{ij} = fev_{ij} = fv_j u_{ij}$. Para un par (M, w_i) $w_i : D(i) \to M$, que cumple $w_i = w_j u_{ij}$, existe g que hace el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[d, "v_i"'] \arrow[dr, "w_i"] & \\
\oplus_{i\in I}D(i) \arrow[r, "g"'] & M
\end{tikzcd}
$$

Ahora, $gdv_{ij} = gv_i = w_i$ y $gev_{ij} = gv_j u_{ij} = w_j u_{ij} = w_i$. Así, los siguientes diagramas resultan conmutativos

$$
\begin{tikzcd}
 & M & \\
D(i) \arrow[ur, "w_i"] \arrow[r, "v_{ij}"'] & \oplus_{i\leq j}D(i) \arrow[u, "ge"] & D(j) \arrow[ul, "w_j"'] \arrow[l, "v_{ij}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & M & \\
D(i) \arrow[ur, "w_i"] \arrow[r, "v_{ij}"'] & \oplus_{i\leq j}D(i) \arrow[u, "gd"] & D(j) \arrow[ul, "w_j"'] \arrow[l, "v_{ij}"]
\end{tikzcd}
$$

pero por la propiedad universal de la suma, $gd = ge$. Luego, existe $t : L \to M$ tal que $tf = g$, y $tfv_i = gv_i = w_i$. Así, $(L, fv_i) = \varinjlim D$. Ahora, sean $(v_i)(v'_i) : D \to D'$. Se tiene que

$$
\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[rrr, "v_i+v'_i"] \arrow[dr, "u_i"] \arrow[dd, "u_{ij}"'] & & & D'(i) \arrow[dl, "u'_i"'] \arrow[dd, "u'_{ij}"] \\
 & \varinjlim(D) \arrow[r, "\varinjlim((v_i)+(v'_i))"] & \varinjlim(D') & \\
D(j) \arrow[ur, "u_j"'] \arrow[rrr, "v_j+v'_j"'] & & & D'(j) \arrow[ul, "u'_j"]
\end{tikzcd}
$$

de donde $\varinjlim((v_i) + (v'_i))u_i = u'_i(v_i + v'_i) = u'_i v_i + u'_i v'_i = \varinjlim(v_i)u_i + \varinjlim(v'_i)u_i = (\varinjlim(v_i) + \varinjlim(v'_i))u_i$, y se tiene que $\varinjlim((v_i) + (v'_i)) = \varinjlim(v_i) + \varinjlim(v'_i)$. $\square$

4.2. Estructura Abeliana en Variedades

Para la categoría de grupos abelianos, la estructura de categoría preaditiva se construye a partir de la estructura y propiedades de los objetos de la categoría: el conjunto de morfismos hereda la estructura del codominio. Esto no es cierto para cualquier grupo, ya que sin la conmutatividad la operación heredada puede no resultar bien definida: si $f, g : A \to B$, y $f \cdot g$ se define como $f \cdot g(x) = f(x)g(x)$, se tiene que $f \cdot g(xy) = f(xy)g(xy) = f(x)f(y)g(x)g(y) \neq f(x)g(x)f(y)g(y) = f \cdot g(x) f \cdot g(y)$. Por ejemplo, N_n y M no pueden heredar directamente su estructura de grupo a sus conjuntos de morfismos. Sin embargo, estas categorías sí poseen productos, como puede verse en [5][p. 101]. La prueba de este hecho puede ser reescrita usando los términos que las definen como variedades.

Proposición 4.2.1. *El producto directo de dos grupos metabelianos(n-nilpotentes) es metabeliano(n-nilpotente).*

Demostración. Sean A, B grupos metabelianos, y sea $A \times B$ su producto directo. Se tiene que $[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = (x_1, x_2)^{-1}(y_1, y_2)^{-1}(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1^{-1}, x_2^{-1})(y_1^{-1}, y_2^{-1})(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1^{-1}y_1^{-1}x_1y_1, x_2^{-1}y_2^{-1}x_2y_2) = ([x_1, y_1], [x_2, y_2])$. A partir de esto,

$$\begin{aligned}
[[(x_1, x_2)(y_1, y_2)], [(z_1, z_2), (w_1, w_2)]] &= [([x_1, y_1], [x_2, y_2]), ([z_1, w_1], [z_2, w_2])] \\
&= ([[x_1, y_1], [z_1, w_1]], [[x_2, y_2], [z_2, w_2]]) = (1, 1).
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que A, B son n-nilpotentes. Se tiene que $[(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)] = [[(x_1, x_2), (y_1, y_2)], (z_1, z_2)] = [([x_1, y_1], [x_2, y_2]), (z_1, z_2)] = ([[x_1, y_1], z_1], [[x_2, y_2], z_2])$ y esto es igual a $([x_1, y_1, z_1], [x_2, y_2, z_2])$. Entonces,

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots (x_{n+1}, y_{n+1})] = ([x_1, x_2, \cdots x_{n+1}], [y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}]) = (1, 1)$$

□

Así, la categoría de grupos metabelianos (n-nilpotentes) posee producto, donde las proyecciones y la propiedad universal se toman de manera usual. Del mismo modo, como categorías poseen kernel, cokernel, cada monomorfismo es kernel y cada epimorfismo es cokernel. Veamos ahora qué podemos replicar usando, en lugar de morfismos, funtores concretos.

Proposición 4.2.2. *Si V, W son variedades equi-interpretables, $\psi\phi \sim 1_V$ y $\phi\psi \sim 1_W$.*

Demostración. Si V, W son equi-interpretables, existen funtores concretos ϕ, ψ que hacen el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "U_V"'] & W \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "U_W"] & V \arrow[dl, "U_V"] \\
& Con &
\end{tikzcd}$$

donde U_W, U_V son los funtores olvido a la categoría de conjuntos. Sean $A, B \in V$ y $f : A \to B$. Se tiene que $U_V(\psi(\phi(A))) = U_V(A)$. Esto implica que A y $\psi(\phi(A))$ poseen el mismo universo. Se tiene además que $U_V(\psi(\phi(f))) = U_V(f)$, donde $\psi(\phi(f)) : A \to B$, y por ser el funtor olvido fiel,

$$\psi(\phi(f)) = f.$$

Así, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\psi(\phi(A)) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\psi(\phi(f))"'] & A \arrow[d, "f"] \\
\psi(\phi(B)) \arrow[r, "i"'] & B
\end{tikzcd}$$

esto es, existe una transformación natural entre $\psi\phi$ y 1_V. De manera similar, existe una transformación natural entre $\phi\psi$ y 1_W. □

Esto no implica la equivalencia categórica, pues la variedad $\psi(\phi(A))$, aunque conserva el mismo universo, no tiene por qué tener exactamente la misma estructura, en variedades sin muchas condiciones.

Corolario 4.2.1. *Si V, W son variedades equi-interpretables, y las álgebras de ambas variedades son SIN en ellas mismas, V y W son categóricamente equivalentes.*

No podemos transmitir toda la estructura abeliana de una variedad a otra, pero podemos transmitir fragmentos de esta.

Proposición 4.2.3. *Si V, W son equi-interpretables, y W es una categoría preaditiva, V es una categoría preaditiva.*

Demostración. Si V, W son equi-interpretables, existen funtores concretos ϕ, ψ que hacen el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "U_V"'] & W \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "U_W"] & V \arrow[dl, "U_V"] \\
& Con &
\end{tikzcd}$$

Supongamos que la estructura abeliana de W está dada en terminos de $+$. Debemos definir una estructura de grupo abeliano sobre los morfismos de $V(A, B)$. Sean $f, g : A \to B$, $\phi(f), \phi(g) : \phi(A) \to \phi(B)$. $\phi(A)$ tiene el mismo universo de A, y lo mismo ocurre con $\phi(B)$; y $\phi(f)$, como morfismo de conjuntos, es igual a f, y lo mismo ocurre con $\phi(g)$. Ahora, W es una categoría abeliana, así que existe $\phi(f) + \phi(g) : \phi(A) \to \phi(B)$, y como morfismo de conjuntos, es una función entre A y B. Ahora, $\psi(\phi(f) + \phi(g)) : \psi\phi(A) \to \psi\phi(A)$, sigue siendo un morfismo de conjuntos entre A y B, y coincide con $\phi(f)+\phi(g)$. Ahora, sea h^A la interpretación de la operación h en A, vista como una función de $A^n \to A$.

$$\begin{aligned}
&\psi(\phi(f)+\phi(g))(h^A(x_1,x_2,\cdots,x_k))\\
=\;&(\phi(f)+\phi(g))(h^A(x_1,x_2,\cdots,x_k))\\
=\;&\phi(f)(h^A(x_1,x_2,\cdots,x_k))+\phi(g)(h^A(x_1,x_2,\cdots,x_k))\\
=\;&f(h^A(x_1,x_2,\cdots,x_k))+g(h^A(x_1,x_2,\cdots,x_k))\\
=\;&h^B(f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_k))+h^B(g(x_1),g(x_2),\cdots,g(x_k))\\
=\;&h^B(\phi(f)(x_1),\phi(f)(x_2),\cdots,\phi(f)(x_k))+h^B(\phi(g)(x_1),\phi(g)(x_2),\cdots,\phi(g)(x_k))\\
=\;&h^B((\phi(f)(x_1),\phi(f)(x_2),\cdots,\phi(f)(x_k))+(\phi(g)(x_1),\phi(g)(x_2),\cdots,\phi(g)(x_k)))\\
=\;&h^B((\phi(f)+\phi(g))(x_1),(\phi(f)+\phi(g))(x_2),\cdots,(\phi(f)+\phi(g))(x_k))\\
=\;&h^B(\psi(\phi(f)+\phi(g))(x_1),\psi(\phi(f)+\phi(g))(x_2),\cdots,\psi(\phi(f)+\phi(g))(x_k)).
\end{aligned}$$

Esto permite definir una operación sobre $V(A,B)$. Para $f,g,h\in V(A,B)$

$$\begin{aligned}
(f+g)+h &= \psi(\phi(\psi(\phi(f)+\phi(g)))+\phi(h))\\
&= \psi((\phi(f)+\phi(g))+\phi(h))\\
&= \psi(\phi(f)+\phi(g)+\phi(h))\\
&= \psi(\phi(f)+(\phi(g)+\phi(h)))\\
&= \psi(\phi(f)+\phi(\psi(\phi(g)+\phi(h))))=f+(g+h),
\end{aligned}$$

y así la operación es asociativa. $f+g=\psi(\phi(f)+\phi(g))=\psi(\phi(g)+\phi(f))=g+f$, y la operación resulta conmutativa. Si $0:\phi(A)\to\phi(B)$,

$$\begin{aligned}
f+\psi(0) &= \psi(\phi(f)+\phi(\psi(0)))\\
&= \psi(\phi(f)+0)=\psi(\phi(f))=f,
\end{aligned}$$

con lo cual la operación tiene elemento neutro. Ademas,

$$\begin{aligned}
f+(\psi(-\phi(f))) &= \psi(\phi(f)+\phi(\psi(-\phi(f))))\\
&= \psi(\phi(f)-\phi(f))=\psi(0),
\end{aligned}$$

y tenemos un grupo abeliano. Esta operación tambien es bilineal respecto a la composición,

$$\begin{aligned}
(g+g')\circ(f+f') &= (\psi(\phi(g)+\phi(g')))\circ(\psi(\phi(f)+\phi(f')))\\
&= \psi((\phi(g)+\phi(g'))\circ(\phi(f)+\phi(f')))\\
&= \psi(\phi(g)\phi(f)+\phi(g)\phi(f')+\phi(g')\phi(f)+\phi(g')\phi(f'))\\
&= \psi(\phi(gf)+\phi(gf')+\phi(g'f)+\phi(g'f'))\\
&= (gf)+gf'+g'f+g'f'.
\end{aligned}$$

□

Así definida la operación, el funtor ϕ resulta un funtor abeliano. Ahora, siendo V una variedad, para cualquier par de álgebras $A, B \in V$, existe un producto $A \times B$ y proyecciones π_A, π_B.

Corolario 4.2.2. *Si V, W son equi-interpretables, y W es preaditiva, entonces ambas son categorías aditivas.*

Bibliografía

[1] Freyd, P: *Abelian Categories.* New York : Harper and Row, 1964.

[2] Gaitan, H: *Algebra Universal: Notas de Clase.* Universidad Nacional de Colombia, 2011.

[3] Garcia, O ; Taylor, W: *The Lattice of Interpretability Types of Varieties.* Memoirs AMS 50, 1984.

[4] Grothendieck, A: *On Certain Aspects of Homological Algebra.* University of Kansas, 1955.

[5] Hungerford, T: *Algebra.* New York : Springer-Verlag, 1974.

[6] McLane, S: *Categories for the Working Mathematician.* New York : Springer-Verlag, 1971.

[7] Neumann, W: “On Malcev Conditions”. En: *Journal of the Australian Mathematical Society* 17 (1974), p. 376–384.

[8] de la Peña, J: “On Interpretability in Varieties of Groups”. En: *Algebra Universalis* 20 (1985), p. 254–261.