Estimaciones Hölder de las Soluciones de la Ecuación $u_t = \Delta G(u) + \sum_{i=1}^{N} f_i(u)_{x_i} + g(t, x_1, x_2, \cdots, x_N, u)$

Ricardo Cano Macias

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia
Sede Bogotá

2009

Estimaciones Hölder de las Soluciones de la Ecuación $u_t = \Delta G(u) + \sum_{i=1}^{N} f_i(u)_{x_i} + g(t, x_1, x_2, \cdots, x_N, u)$

Ricardo Cano Macias
Código:830347
Autor

Trabajo Final para optar al título de
Maestría en Matemáticas

Leonardo Rendón Arbeláez
Director

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia
Sede Bogotá

2010

Estimaciones Hölder de las Soluciones de la Ecuación $u_t = \Delta G(u) + \sum_{i=1}^{N} f_i(u)_{x_i} + g(t, x_1, x_2, \cdots, x_N, u)$

Título en español: ESTIMACIONES HÖLDER DE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN $u_t = \Delta G(u) + \sum_{i=1}^{N} f_i(u)_{x_i} + g(t, x_1, x_2, \cdots, x_N, u)$

Título en Inglés: HÖLDER ESTIMATES OF SOLUTIONS THE EQUATIONS $u_t = \Delta G(u) + \sum_{i=1}^{N} f_i(u)_{x_i} + g(t, x_1, x_2, \cdots, x_N, u)$

Resumen: En el presente trabajo, se estudia el problema de Cauchy para la ecuación parabólica degenerada general

$$u_t = \Delta G(u) + \sum_{i=1}^{N} f_i(u)_{x_i} + g(t, x_1, x_2, \cdots, x_N, u),$$

con condición inicial $u(x, 0) = u_0(x_1, x_2, \cdots, x_N)$. Se obtienen las estimaciones Hölder de las soluciones débiles del problema mediante la aplicación del principio del máximo.

Abstract: In the present work, the Cauchy problem for the general degenerate parabolic equation

$$u_t = \Delta G(u) + \sum_{i=1}^{N} f_i(u)_{x_i} + g(t, x_1, x_2, \cdots, x_N, u),$$

with initial data $u(x, 0) = u_0(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ is studied. The Hölder estimates of the weak solutions are obtained by using the maximun principle.

Palabras claves: Estimaciones Hölder, Hölder continuidad, Hölder exponente.

Key words: Hölder estimates, Hölder continuity, Hölder exponent.

Director:LEONARDO RENDÓN ARBELÁEZ
Autor: RICARDO CANO MACIAS

Quiero dedicar este trabajo a la
memoria de mi querido abuelo
VICTOR MANUEL CANO TRUJILLO
(1920 - 1996)

Quiero agradecer de manera muy especial al doctor
Leonardo Rendón Arbeláez
por su confianza, por su valiosa colaboración y
constante apoyo en la realización de este trabajo.
De igual manera, agradezco también al doctor
Yuguang Lu
por sus continuos, acertados y valiosos aportes
durante todo el desarrollo de este trabajo.

Índice general

Introducción

El problema

$$u_t = \Delta G(u) + \sum_{i=1}^{N} f_i(u)_{x_i} + g(t, x_1, x_2, \cdots, x_N, u), \qquad (1)$$

con valor inicial

$$u(x, 0) = u_0(x_1, x_2, \cdots, x_N), \qquad (2)$$

donde $G(u)$ es una función suave no decreciente, y N denota la dimensión del espacio surge en varias aplicaciones en donde u representa una cantidad no negativa. Por ejemplo, la ecuación

$$u_t = \Delta(u^m) \qquad (3)$$

modela el flujo no estacionario de un fluido Newtoniano no comprimible en un medio poroso bajo condiciones politrópicas. El valor de u es proporcional a la densidad del fluido.

Si el flujo no es politrópico, (3) es reemplazada por la ecuación más general de filtración Newtoniana

$$u_t = \Delta G(u). \qquad (4)$$

Si el medio tiene fuentes de calor, entonces (4) es reemplazada por una ecuación de la forma

$$u_t = \Delta G(u) + g(u). \qquad (5)$$

Un modelo del proceso de propagación del calor en un medio móvil no lineal está dado por la ecuación del calor no lineal con transferencia

$$u_t = \Delta G(u) + \sum_{i=1}^{N} f_i(u)_{x_i}. \qquad (6)$$

En los puntos donde $g(t, x_1, x_2, \cdots, x_N, u) = g(u) = G'(u) > 0$, la ecuación (1) es parabólica, pero se degenera cuando $g(u) = 0$. Si $g(u) \equiv 0$ y una de las $f_i(u)$ es no lineal, la ecuación (1) corresponde a la ecuación hiperbólica no lineal estandar de ley de conservación con fuente. Por otro lado, la solución continua de la ecuación (1), en general, existe solamente localmente en el tiempo.

Es sabido, que las ecuaciones parabólicas degeneradas no poseen una solución clasica, la solución u en general no es suave entre una región parabólica y una región de degeneración parabólica. Afortunadamente, si la función de difusión $G(u)$ tiene solamente un punto degenerado tal como la ecuación para un medio poroso (3), se conoce la siguiente estimación óptima

$$\left|\left(u^{m-1}\right)_x\right| \leq M, \tag{7}$$

para las soluciones del problema de Cauchy (3) con condición inicial en el espacio unidimensional (ver[1]). Sin embargo las propiedades de regularidad de las soluciones para el problema de Cauchy en el espacio multidimensional o para el problema de valor inicial y de frontera para $N \geq 1$ arbitraria, es diferente. Es posible ver las diferencias desde los siguientes hechos.

Consideremos la ecuación para un medio poroso (3) con $u_0(x_1, x_2, \cdots, x_N)$, $N \geq 2$ función continua, acotada y no negativa en la linea $t = 0$. Un ejemplo numérico construido por Graveleau muestra que si existen agujeros en *supp* u_0, es posible que ∇u^{m-1} explote. La existencia y unicidad de la solución Graveleau fue probada más tarde por Aronson y Graveleau mediante una construcción de soluciones radialmente simétricas (ver[2]).

Por otra parte, Caffarelli, Vazquez y Wolanski en [6], demostraron que ∇u^{m-1} es acotado en $\mathbb{R}^N \times (T, \infty)$ $(N > 1)$ para un tiempo grande T conveniente. En algún sentido, esta estimación es la mejor posible como se demuestra en la solución de Graveleau.

De los dos resultados básicos mencionados anteriormente, es natural hacer la siguiente pregunta.¿Cuál es la estimación óptima de la regularidad de las soluciones en el espacio de las variables para $t > 0$?

En [14], Lu estudió el caso especial $m = 2, N = 2$ y obtuvo una Hölder solución con estimación de regularidad $\nabla u^{\frac{3}{2}} \leq M$ en $\mathbb{R}^N \times [0, \infty)$. Ésta es la primera Hölder solución con Hölder exponente explícito en el espacio multidimensional. Esto no implica la regularidad óptima de las soluciones en el espacio multidimensional. Sin embargo mejoró parcialmente resultados anteriores tales como la continuidad global de soluciones débiles con un módulo logarítmico de continuidad obtenidos por por Caffarelli y Friedman (ver[5]) y la Hölder continuidad local de las soluciones débiles con Hölder exponentes implícitos obtenidos en $[3, 5, 7, 21, 22]$

Consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx}, \\ u(x,0) = x^{\frac{1}{m}}, \\ u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 1 \end{cases} \tag{8}$$

La solución de (8) es $u = x^{\frac{1}{m}}$, entonces $|(u^s)_x| = \frac{s}{m} x^{\frac{s}{m}-1} = \infty$ en $x = 0$ para cualquier $s < m$. Así, la aguda estimación de la regularidad de las soluciones para (3) con valor inicial y de frontera es $|(u^m)_x| \leq M$, aún en el espacio de una dimensión, que es mucho más débil que la estimación (7) para las soluciones del problema de Cauchy.

En [13], Y. G. Lu, L. Rendón e I. Mantilla, establecieron las estimaciones Hölder de las soluciones del problema de Cauchy para la ecuación (1) con condición inicial (2), mediante la aplicación del principio del máximo y bajo las suposiciones de que $f_i(u) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, N$ y $g(t, x, u) = 0$.

Posteriormente, en [17], Y. G. Lu, generaliza el resultado anterior para $f_i(u) \neq 0,\ i = 1, 2, \cdots, N$ y el caso especial $g(t, x, u) = h(u)$.

En este trabajo, se generaliza este resultado, obteniendose las estimaciones Hölder de las soluciones del problema de Cauchy (1), (2) y un Hölder exponente explícito para la función $G(u)$ con respecto a las variables espaciales mediante la aplicación del principio del máximo.

Objetivo general

El objetivo principal de este trabajo es generalizar los resultados obtenidos en [13] por Y.G. Lu, L. Rendón e I. Mantilla y en [17] por Y. G. Lu, al establecer las estimaciones Hölder de las soluciones del problema de Cauchy para la ecuación parábolica degenerada general

$$u_t = \Delta G(u) + \sum_{i=1}^{N} f_i(u)_{x_i} + g(t, x_1, x_2, \cdots, x_N, u),$$

con condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x_1, x_2, \cdots, x_N) \geq 0,$$

y obtener un Hölder exponente explícito para la función de difusión $G(u)$ con respecto a las variables espaciales mediante la aplicación del principio del máximo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definiciones básicas

Definición 1. *Una función* $h(r,t) \in C^{(1)}$ *si* $|h(r,t)| \leq M$ *y*

$$\frac{|h(r_2,t_2) - h(r_1,t_1)|}{|r_2 - r_1| + |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}}} \leq M \tag{1.1}$$

para cualesquiera puntos (r_2,t_2) *y* (r_1,t_2)*;* $h(r) \in C^{(1)}$ *significa que (1.1) se satisface para* $t_1 = t_2$*.*

Definición 2 (Lipschitz continuidad)**.**

Números Reales

Una función a valor real f *definida en un subconjunto* D *de números reales*

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

se denomina **Lipschitz continua** *o se dice que satisface una* **condición Lipschitz** *si existe una constante* $K \geq 0$ *tal que parar toda* $x_1, x_2 \in D$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$$

La menor de tales K *se denomina* **Lipschitz constante** *de la función* f*.*

Como ésta ecuación es inmediata si $x_1 = x_2$*, se puede definir equivalentemente que una función es Lipschitz si y sólo si*

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq K$$

para $x_1 \neq x_2$, es decir, si y sólo si, la pendiente de la secante es acotada.

La función es **localmente Lipschitz continua** *si para todo $x \in D$ existe una vecindad $U(x)$ tal que f restringida a u es* **Lipschitz continua**

Espacios Métricos

Dados dos espacios métricos (M, d_1) y (N, d_2) donde d_1 y d_2 denotan las métricas sobre los conjuntos M y N respectivamente, U un subconjunto de M, una función

$$f : U \longrightarrow N$$

se denomina **Lipschitz continua** *si existe una constante $K \geq 0$ tal que para toda $x_1, x_2 \in U$*

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq K d(x_1, x_2)$$

La menor de tales K se denomina **Lipschitz constante** *de la función f.*

Si $K = 1$ la función se denomina **aplicación corta,** *si $K < 1$ la función se denomina* **contracción.**

Si existe $K > 1$ con

$$\frac{1}{K} d_1(x_1, x_2) \leq d_2(f(x_1), f(x_2) \leq K d_1(x_1, x_2)$$

entonces f se denomina **bilipschitz.** *"Esto es un isomorfismo en la categoria de las aplicaciones Lipschitz".*

Definición 3 (Hölder continuidad puntual)**.** *Sea f una función definida en $D \subset \mathbb{R}^n$, D acotado. Sea $x_0 \in D, 0 < \alpha \leq 1$. Decimos que f es Hölder continua con exponente α en x_0, si la cantidad*

$$[f]_{\alpha, x_0} := \sup_D \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} \quad \text{es finita.}$$

Nota 1. $[f]_{\alpha, x_0}$ *se denomina el $\alpha-$coeficiente Hölder de f en x_0 con respecto a D.*

Definición 4 (Hölder continuidad uniforme)**.** *Sea f una función definida en $D \subset \mathbb{R}^n$. Sea $0 < \alpha \leq 1$.f es uniformemente Hölder continua con exponente α en D si la cantidad*

$$[f]_{\alpha, D} := \sup_{x \neq y \in D} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \quad \text{es finita.}$$

Definición 5 (Hölder continuidad local). *Sea f una función definida en $D \subset \mathbb{R}^n$. Sea $0 < \alpha \leq 1$. Decimos que f es localmente Hölder continua con exponente α en D si f es uniformemente Hölder continua con exponente α en cualquier subconjunto compacto de D.*

1.2. Hölder continuidad de las soluciones de una ecuación parabólica

Sea u una solución de una ecuación parabólica (lineal) de segundo orden no necesariamente uniformemente parabólica. Entonces, Kruzhkov [11,12] demostró que si u es acotada, dada una estimación de la Hölder continuidad de u con respecto a la variable espacial $x \in \mathbb{R}^N$, con exponente $\alpha \in (0,1]$, puede derivarse una estimación de su Hölder continuidad con respecto a la variable tiempo t, con exponente $\alpha^* = \frac{\alpha}{2+\alpha}$.
A continuación, se presenta un resultado desarrollado por B. H. Gilding en [8], que mejora el resultado de Kruzhkov. Bajo condiciones similares, Gilding demuestra que se puede derivar una estimación de la Hölder continuidad con respecto a t con exponente $\alpha^{**} = \frac{1}{2}\alpha$.

Sea $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$ un punto arbitrario de $\mathbb{R}^N$ y sea Ω un conjunto conexo arbitrario y no vacío de $\mathbb{R}^N$. Fijemos $Q = \Omega \times (0, T]$, donde T es alguna constante positiva fija.

Definición 6. *Una función u definida en Q es de clase $C^{2,1}(Q)$ si u es continua en Q y tiene derivadas parciales u_{x_i} para $i = 1, 2, \cdots, N$, $u_{x_i x_j}$ para $i, j = 1, 2, \cdots, N$ y u_t continuas en Q.*

Considerese el operador

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t) \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t},$$

definido en Q bajo las siguiente suposiciones:

i) L es parabólico. Es decir, que en cada punto $(x,t) \in Q$,

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\xi_i \xi_j > 0$$

para todo vector no nulo $\xi \in \mathbb{R}^N$;

ii) los coeficientes de L son continuos en Q;

iii) existe una constante positiva μ tal que para todo $(x,t) \in Q$,

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) \leq \mu, \qquad \left(\sum_{i=1}^{N} b_i^2(x,t)\right)^{\frac{1}{2}} \leq \mu.$$

Se estudiarán las soluciones de la ecuación

$$Lu = f \tag{1.2}$$

en Q, donde f es una función dada continua y acotada definida en Q. Sin pérdida de generalidad se asume que

$$|f(x,t)| \leq \mu$$

para todo $(x,t) \in Q$. Finalmente, sea Ω' un subconjunto abierto y conexo de Ω tal que para algún $d > 0$,

$$\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega) \geq d,$$

y sea $Q' = \Omega' \times (0,T]$.

Teorema 1. *Sea $u \in C^{2,1}(Q)$ una solución de la ecuación (1.2) en Q tal que para todo $(x,t),(y,t) \in Q$*

$$|u(x,t) - u(y,t)| \leq C|x-y|^{\alpha}, \tag{1.3}$$

para algún $\alpha \in (0,1]$ y alguna constante no negativa C. Entonces existe una constante positiva δ, que depende únicamente de μ y d, y una constante positiva K, que depende únicamente de μ, d y C, tal que

$$|u(x,t) - u(x,t_0)| \leq K|t-t_0|^{\frac{\alpha}{2}}$$

para todo $(x,t),(x,t_0) \in Q'$ con $|t-t_0| < \delta$.

Si, además, $\partial\Omega \neq \emptyset$, $u \in C(\bar{\Omega} \times (0,T])$ y para todo $x \in \partial\Omega$ y $t, t_0 \in (0,T]$

$$|u(x,t) - u(x,t_0)| \leq D|t-t_0|^{\beta},$$

para algún $\beta \in (0,1]$ y alguna constante no negativa D, entonces, dada cualquier $\sigma > 0$ existe una constante positiva K que depende únicamente de μ, C, D y σ, tal que

$$|u(x,t) - u(x,t_0)| \leq K|t-t_0|^{\gamma}, \quad \gamma = \min\{\frac{1}{2}\alpha, \beta\}$$

para todo $(x,t),(x,t_0) \in Q$ con $|t-t_0| < \sigma$.

Como una aplicación del teorema, considerese el problema de Cauchy para la ecuación en un medio poroso en una dimensión. Así, considerese la solución de la ecuación

$$u_t = (u^m)_{xx}, \quad m > 1, \tag{1.4}$$

en $S = (-\infty, \infty) \times (0, T]$, donde $T > 0$, la cual satisface la condición inicial

$$u = (x, 0) = u_0(x), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{1.5}$$

Aquí $u_0(x)$ es una función dada, acotada y no negativa en $(-\infty, \infty)$ con la propiedad de que u_0^m satisface una condición Lipschitz en $(-\infty, \infty)$. Sea $\sup_{(-\infty,\infty)} u_0 = M$.

Se sabe que el problema (1.4), (1.5) no necesariamente tiene una solución clasica (ver[20]). Específicamente, si u_0 tiene soporte compacto, entonces tal solución no existe. Sin embargo, el problema (1.4), (1.5) tiene una solución u débil la cual es única y suave en puntos cercanos de S donde $u > 0$. Esta solución fue construida como el límite de una sucesión decreciente de soluciones clasicas positivas $\{u_k(x,t)\}$ de (1.4) en una sucesión de cilindros $S_k = (-k, k) \times (0, T], k = 1, 2, \cdots$; cada uno acotado superiormente por $(M + 1)$, (ver[20]).

Sea $\tau \in (0, T)$ y sea $S_{\tau,k} = (-k, k) \times (\tau, T]$. Entonces, por un resultado debido a Aronson (ver[1]), existe una constante $C_1 = C_1(m, M, \tau)$ tal que

$$|(u_k^{m-1})_x| \leq C_1$$

en $\bar{S}_{\tau,k-1}$. Se sigue que u_k satisface una condición Hölder con respecto a x en $\bar{S}_{\tau,k-1}$ con exponente $\nu = \text{mín}\left\{1, \frac{1}{m-1}\right\}$ y coeficiente C_2 el cual depende de m, M y τ, pero no de k. Por lo tanto, la solución débil del problema (1.4), (1.5), que es el límite de la sucesión $\{u_k(x,t)\}$, es Hölder continua con respecto a x en $(-\infty, \infty) \times (\tau, T]$ con exponente ν. Puede demostrarse, por medio de un ejemplo explícito, que este exponente es el mejor posible (ver[1]).

Para aplicar el teorema, sea $z = u_k$. Entonces z satisface la ecuación

$$z_t = m u_k^{m-1} z_{xx} + m \left(u_k^{m-1}\right)_x z_x$$

en $S_{\tau,k}$. Obsérvese que $m u_k^{m-1}$ es positiva y acotada por $m(M+1)^{m-1}$ en $S_{\tau,k}$ y que $|m(u_k^{m-1})_x|$ está acotado por mC_1 en $S_{\tau,k-1}$. Finalmente, nótese que z está acotada superiormente por $M+1$, y satisface una condición Hölder con respecto a x en $S_{\tau,k-1}$, con exponente ν y coeficiente C_2. Por lo tanto,

z también satisface una condición Hölder con respecto a t en el dominio $S_{\tau,k-2}$, con exponente $\frac{1}{2}\nu$ y coeficiente C_3 el cual depende únicamente de m, M y τ.

Así, puesto que C_3 no depende de k, la solución débil del problema (1.4),(1.5) es también Hölder continua con respecto a t en $(-\infty,\infty)\times(\tau,T]$, con exponente $\frac{1}{2}\nu$ y coeficiente C_3. Para los detalles de este ejemplo (ver[9]).

Demostración. Para los detalles completos de la demostración (ver[8]). $\square$

1.3. Principio del máximo para ecuaciones parabólicas

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N, \Omega_T = \Omega \times (0,T]$ para un $T>0$ fijo y $\Gamma_T = \overline{\Omega_T} - \Omega_T$ la frontera de Ω_T. El problema de Cauchy para ecuaciones parabolicas es:

$$\begin{cases} u_t + Lu = f & \text{en } \ \Omega_T \\ \qquad u = g & \text{sobre } \ \Omega \times \{t=0\}, \end{cases}$$

donde $f : \Omega_T \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas, $u : \Omega_T \longrightarrow \mathbb{R}$ es desconocida y L denota el operador diferencial

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u,$$

donde los coeficiente a^{ij}, b^i y c son dados.

Definición 7. *El operador diferencial* $\dfrac{\partial}{\partial t} + L$ *es (uniformemente) parabólico se existe una constante positiva* θ *tal que:*

$$\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2,$$

para todo $(x,t)\in\Omega_T$ *y todo* $\xi\in\mathbb{R}^N$.

En lo que sigue, supondremos que los coeficientes a^{ij}, b^i y c son continuos, $a^{ij} = a^{ji}, c \geq 0$ en Ω_T, el opreador diferencial $\dfrac{\partial}{\partial t} + L$ es parabólico y que la función u tiene segundas derivadas continuas con respecto a x y derivada continua con respecto a t en Ω_T y que es continua en $\overline{\Omega_T}$.

1.3.1. Principio del máximo débil

i) Si $u_t + Lu \leq 0$ en Ω_T, entonces

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u \leq \max_{\Gamma_T} u^+,$$

donde $u^+ = \max\{u, 0\}$;

ii) Si $u_t + Lu \geq 0$ en Ω_T entonces

$$\min_{\overline{\Omega_T}} u \geq -\max_{\Gamma_T} u^-,$$

donde $u^- = -\min\{u, 0\}$.

1.3.2. Principio del máximo fuerte

Supongamos que Ω es conexo. Entonces

i) Si $u_t + Lu \leq 0$ en Ω_T, y alcanza un mínimo no negativo sobre Ω_T en un punto $(x_0, t_0) \in \Omega_T$, entonces u es constante sobre Ω_{t_0};

ii) Si $u_t + Lu \geq 0$ en Ω_T y alcanza un mínimo no positivo sobre Ω_T en un punto $(x_0, t_0) \in \Omega_T$, entonces u es constante sobre Ω_{t_0}

Capítulo 2

Estimaciones Hölder de la solución de la ecuación $u_t = \Delta G(u)$

En este capítulo se presenta un resultado obtenido por Y. G. Lu, I. Mantilla y L. Rendón (ver[13]), en el que se establecen las estimaciones Hölder de las soluciones del problema de Cauchy para la ecuación parabólica degenerada (1) con condición inicial (2), bajo las suposiciones de que $f_i(u) = 0$ para $i = 1, 2, \cdots, N$ y $g(t, x_1, x_2, \cdots, x_N, u) = 0$. Dicho resultado es el siguiente:

Consideremos el problema de Cauchy

$$u_t = \Delta G(u) \tag{2.1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x_1, x_2, \cdots, x_N) \tag{2.2}$$

donde $G(u)$ es una función suave no decreciente, y N denota la dimensión del espacio.

Teorema 2. *Sea $G'(u) \geq 0$. Si*

$$\left|\frac{GG''}{G'^2}\right| \leq \beta, \quad \beta^2 \leq \frac{1}{2N}, \tag{2.3}$$

entonces la solución u del problema de Cauchy (2.1),(2.2) satisface la estimación global

$$|\nabla G^{\alpha}(u)| \leq M, \quad en \ \ \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \tag{2.4}$$

si la condición inicial (2.2) satisface la misma estimación regular (2.4), donde M es una constante positiva que depende únicamente de la condición *inicial, y*

$$\alpha = 1 - \frac{1+\sqrt{1-2N\beta^2}}{4} \tag{2.5}$$

Ejemplo 1. *Para el caso especial* $m = 2, N = 2$ *en la ecuación de un medio poroso,* $\beta = \frac{m-1}{m} = \frac{1}{2}$ *y* $\alpha = \frac{3}{4}$. *Se tiene la estimación*

$$|\nabla G^{\alpha}(u)| = |\nabla(u^{\frac{3}{2}})| \le M.$$

Así, la solución u *es Hölder continua con respecto a* x *con exponente Hölder* $\frac{2}{3}$

Ejemplo 2. *Sea*

$$G(u) = \begin{cases} c, & c_1 \le u \le 0, \\ \left(e^u - \frac{u^2}{2} - u - 1 + c\right)^{\gamma}, & 0 \le u \le c_2 \\ \textit{otros}, & u < c_1 < 0,\ u > c_2 > 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

para constantes pequeñas c_1, c_2 y c constante positiva. Considerando la solución en el intervalo $I = [c_1, c_2].G \in C^1$ en I, para $\gamma \ge \frac{1}{3}$ y

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{G(u)G''(u)}{(G'(u)^2)} = \frac{3\gamma - 1}{3\gamma}.$$

Entonces $\beta \to 0$ cuando $\gamma \to \frac{1}{3}$. Así para cualquier N, se consigue la estimación (2.4) para la función de difusión dada en (2.6), donde $\alpha > \frac{1}{2}$ y $\alpha \to \frac{1}{2}$ cuando $\gamma \to \frac{1}{3}$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, sea $G(u) \ge 0$. Consideremos el problema de Cauchy relacionado con la ecuación (2.1),

$$u_t = \Delta G^{\varepsilon}(u) \tag{2.7}$$

con valor inicial

$$u^{\varepsilon}(x, 0) = u_0(x_1, x_2, \cdots, x_N) + \varepsilon_1, \tag{2.8}$$

donde $G^{\varepsilon}(u) = G(u) + \varepsilon u$, ε y ε_1 son constantes pequeñas no negativas.

Para la ecuación en un medio poroso, se elige $\varepsilon = 0,\ \varepsilon_1 > 0$; para otros casos, $\varepsilon > 0,\ \varepsilon_1 = 0$. Para ε y ε_1 fijos la ecuación (2.7) es estrictamente parabólica. Se puede resolver el problema de Cauchy (2.7), (2.8) y obtener soluciones aproximadas $u^{\varepsilon,\varepsilon_1}$. Si $u^{\varepsilon,\varepsilon_1}$ es acotada y uniformemente Hölder continua en $\varepsilon,\ \varepsilon_1$, existe una subsucesión $u^{\varepsilon^l,\varepsilon_1^l}$ uniformemente convergente en cualquier región acotada a la solución Hölder continua u del problema de Cauchy (2.1), (2.2) a medida que $\varepsilon^l,\ \varepsilon_1^l \to 0^+$. Esta técnica es estandar, por facilidad se omiten los detalles (ver detalles en [15]) y únicamente se da la estimación uniforme (2.4).

Consideremos la transformación

$$w = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(G^{\varepsilon}(u)_{x_i})^2 \tag{2.9}$$

y sea $P(u) = G^{\varepsilon}(u)$. Entonces $P'(u) = G^{\varepsilon'}(u)$ y

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(G^{\varepsilon}(u)_{x_i})^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(G^{\varepsilon'}(u)u_{x_i})^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(P'(u)u_{x_i})^2 \end{aligned}$$

Ahora, $P_{x_i} = P'(u)u_{x_i}$. De aquí, $u_{x_i} = \frac{P_{x_i}}{P'(u)}$.

De (2.7), se obtiene

$$\begin{aligned} (P_{x_i})_t &= P''(u)u_t u_{x_i} + P'(u)(u_{x_i})_t \\ &= P''(u)\Delta P\left(\frac{P_{x_i}}{P'(u)}\right) + P'(u)(u_t)_{x_i}. \end{aligned}$$

Así,

$$(P_{x_i})_t = P'(u)\Delta(P_{x_i}) + \frac{P''(u)}{P'(u)}P_{x_i}\Delta P \tag{2.10}$$

y

$$
\begin{aligned}
w_t &= \sum_{i=1}^{N} (G^{\varepsilon\prime}(u) u_{x_i}) \left[G^{\varepsilon\prime\prime}(u) u_t u_{x_i} + G^{\varepsilon\prime}(u)(u_{x_i})_t \right] \\
&= \sum_{i=1}^{N} G^{\varepsilon\prime}(u) G^{\varepsilon\prime\prime}(u)(u_{x_i})^2 u_t + \sum_{i=1}^{N} (G^{\varepsilon\prime}(u))^2 u_{x_i}(u_{x_i})_t \\
&= \sum_{i=1}^{N} P'(u)P''(u) \left(\frac{P_{x_i}}{P'(u)} \right)^2 \Delta P + \sum_{i=1}^{N} (P'(u))^2 u_{x_i}(u_{x_i})_t \\
&= \frac{P''(u)}{P'(u)} \Delta P \sum_{i=1}^{N} (P_{x_i})^2 + \sum_{i=1}^{N} (P'(u))^2 u_{x_i}(u_{x_i})_t \\
&= \frac{2P''(u)}{P'(u)} \Delta P \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (P'(u) u_{x_i})^2 \right) + \sum_{i=1}^{N} (P'(u))^2 u_{x_i}(u_{x_i})_t \\
&= \frac{2P''(u)}{P'(u)} w \Delta P + P'(u) \sum_{i=1}^{N} P_{x_i} \Delta(P_{x_i}) \\
&= \frac{2P''(u)}{P'(u)} w \Delta P + P'(u) \left(\sum_{i,j=1}^{N} P_{x_i} P_{x_i x_j x_j} + \sum_{i,j=1}^{N} (P_{x_i x_j})^2 - \sum_{i,j=1}^{N} (P_{x_i x_j})^2 \right)
\end{aligned}
$$

se concluye que

$$
w_t = P'(u)\Delta w - P'(u) \sum_{i,j=1}^{N} (P_{x_i x_j})^2 + \frac{2P''(u)}{P'(u)} w \Delta P \tag{2.11}
$$

Sea $z = P^s w,\ s$ constante. $w = P^{-s} z, w_{x_i} = z_{x_i} P^{-s} - s P^{-s-1} P_{x_i} z$ y

$$
\begin{aligned}
w_{x_i x_i} &= z_{x_i x_i} P^{-s} - s P^{-s-1} P_{x_i} z_{x_i} - s P^{-s-1} P_{x_i} z_{x_i} \\
&\quad - s \left((-s-1) P^{-s-2} (P_{x_i})^2 + P^{-s-1} P_{x_i x_i} \right) z \\
&= z_{x_i x_i} P^{-s} - 2s P^{-s-1} P_{x_i} z_{x_i} + s(s+1) P^{-s-2} (P_{x_i})^2 z \\
&\quad - s P^{-s-1} P_{x_i x_i} z
\end{aligned}
$$

De esta manera,

$$\sum_{i=1}^{N} w_{x_i x_i} = P^{-s}\sum_{i=1}^{N} z_{x_i x_i} - 2sP^{-s-1}\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} z_{x_i}$$
$$+ 2s(s+1)P^{-s-2} z\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(P'(u)u_{x_i})^2\right) - sP^{-s-1} z\sum_{i=1}^{N} P_{x_i x_i}$$

y por consiguiente,

$$\begin{aligned}\Delta w = P^{-s}\Delta z - 2sP^{-s-1}\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} z_{x_i} + 2s(s+1)P^{-2s-2} z^2 \\ - sP^{-s-1} z\Delta P\end{aligned} \tag{2.12}$$

De igual forma, $z_t = P^s w_t + sP^{s-1}P_t w$.

Usando (2.7), (2.11) y (2.12),

$$\begin{aligned}z_t &= P^s\left(P'(u)\Delta w - \sum_{i,j=1}^{N} P'(u)(P_{x_i x_j})^2 + \frac{2P''(u)}{P'(u)} w\Delta P\right) \\ &\quad + sP^{s-1}P_t(P^{-s}z) \\ &= P^s P'(u)\left(P^{-s}\Delta z - 2sP^{-s-1}\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} z_{x_i} + 2s(s+1)P^{-2s-2}z^2\right) \\ &\quad - P^s P'(u)(sP^{-s-1} z\Delta P) - P^s P'(u)\sum_{i,j=1}^{N}(P_{x_i x_j})^2 \\ &\quad + \frac{2P''(u)}{P'(u)} P^s(P^{-s}z)\Delta P + sP^{-1}(P'(u)u_t)z \\ &= P'(u)\Delta z - 2sP^{-1}P'(u)\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} z_{x_i} + 2s(s+1)P^{-s-2}P'(u)z^2 \\ &\quad - sP^{-1}P'(u)z\Delta P - P^s P'(u)\sum_{i,j=1}^{N}(P_{x_i x_j})^2 + \frac{2P''(u)}{P'(u)} z\Delta P \\ &\quad + sP^{-1}P'(u)z\Delta P\end{aligned}$$

finalmente,

$$z_t = P'(u)\Delta z - 2sP^{-1}P'(u)\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} z_{x_i} + 2s(s+1)P^{-s-2}P'(u)z^2$$
$$- P^s P'(u)\sum_{i,j=1}^{N}(P_{x_i x_j})^2 + \frac{2P''(u)}{P'(u)} z\Delta P \tag{2.13}$$

Dado que

$$\sum_{i,j=1}^{N}(P_{x_i x_j})^2 \geq \frac{1}{N}(\Delta P)^2, \tag{2.14}$$

elijase s tal que

$$s(s+1) + \frac{N}{2}\left(\frac{P''P}{P'^2}\right)^2 \leq 0, \tag{2.15}$$

de esta forma, la suma de los últimos tres términos en (2.13) es no positiva. Así, de (2.13)

$$z_t \leq P'(u)\Delta z - 2sP^{-1}P'(u)\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} z_{x_i}, \tag{2.16}$$

lo cual implica la estimación $z \leq M$ mediante el uso del principio del máximo a (2.16) si la condición inicial es suave.

De la condición (2.3),

$$\left(\frac{P''P}{P'^2}\right)^2 = \left(\frac{G''(u)(G(u)+\varepsilon u)}{(G'(u)+\varepsilon)^2}\right)^2 \leq \beta^2 + \beta(\varepsilon), \tag{2.17}$$

donde $\beta(\varepsilon) > 0$ es una función de ε y $\beta(\varepsilon) \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$. Si se elige s^* como la más pequeña raíz de la ecuación

$$s(s+1) + \frac{N}{2}(\beta^2 + \beta(\varepsilon)) = 0, \tag{2.18}$$

se satisface (2.15). De este modo

$$P^{s^*} w \leq M, \tag{2.19}$$

donde

$$s^* = \frac{-1 - \sqrt{1 - 2N(\beta^2 + \beta(\varepsilon))}}{2} \tag{2.20}$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$ en (2.20), se consigue la estimación (2.4) y así la prueba del Teorema. $\square$

Capítulo 3

Estimaciones Hölder de las soluciones de una ecuación con función de difusión degenerada

En este capítulo se presenta un resultado obtenido por Y.G. Lu en [17] y que generaliza el resultado obtenido por Y. G. Lu - I.Mantilla - L. Rendón en [13] el cual se presentó en el capítulo 2 de este trabajo. Se establecen las estimaciones Hölder de las soluciones débiles del problema de Cauchy para la ecuación parabólica degenerada

$$u_t = \Delta G(u) + \sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j} + h(u), \tag{3.1}$$

con valor inicial

$$u(x,0) = u_0(x_1, x_2, \cdots, x_N), \tag{3.2}$$

donde $G(u)$ es una función suave no decreciente, y N denota la dimensión del espacio y se obtienen además, mediante la aplicación del principio del máximo algunos Hölder exponentes explícitos de la función $G(u)$ con respectos a las variables espaciales. Dicho resultado es el siguiente:

Teorema 3. *Supóngase que $G'(u) \geq 0$ y que la solución u es acotada: $|u| \leq \bar{u}$. Si*

$$\left|\frac{GG''}{G'^2}\right| \leq \beta, \quad \beta^2 \leq \frac{1}{2N}, \tag{3.3}$$

$$\left|f_i''(u)\right| \leq c\left|G''(u)\right|, \quad \left|h'(u)\right| \leq cG'(u). \tag{3.4}$$

entonces la solución u del problema de Cauchy (3.1), (3.2) *satisface la estimación global*

$$|\nabla G^{\alpha}(u)| \leq M, \quad en \ \ \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \tag{3.5}$$

si la condición inicial (3.2) *satisface la misma estimación regular* (3.5), *donde M es una constante positiva que depende únicamente de la condición inicial, y*

$$\alpha > 1 - \frac{1+\sqrt{1-2N\beta^2}}{4} \tag{3.6}$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, sea $G(u) \geq 0$. Consideremos el problema de Cauchy relacionado con la ecuación (3.1),

$$u_t = \Delta G^{\varepsilon}(u) + \sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j} + h(u), \tag{3.7}$$

con condición inicial

$$u^{\varepsilon}(x,0) = u_0(x_1, x_2, \cdots, x_N) + \varepsilon_1, \tag{3.8}$$

donde $G^{\varepsilon}(u) = G(u) + \varepsilon(u+\bar{u})$, con ε y ε_1 constantes no negativas pequeñas. Para la ecuación en un medio poroso, elegimos $\varepsilon = 0, \varepsilon_1 > 0$; para otros casos, elegimos $\varepsilon_1, \varepsilon > 0$. de este modo, para ε y ε_1, fijos la ecuación (3.7) es estrictamente parabólica. Se puede resolver el problema de Cauchy (3.7), (3.8) y obtener soluciones aproximadas $u^{\varepsilon,\varepsilon_1}$.

Puesto que $u^{\varepsilon,\varepsilon_1}$ es acotada, existe una subsucesión $u^{\varepsilon^l,\varepsilon_1^l}$ que converge débilmente a la función acotada u cuando $\varepsilon^l, \varepsilon_1^l \to 0^+$, en cualquier región acotada. Si se prueba la Hölder continuidad de $G(u^{\varepsilon,\varepsilon_1})$, entonces $G(u^{\varepsilon^l,\varepsilon_1^l})$ converge débilmente a $G(u)$ mediante la aplicación del lema de Minty con la condición $G'(u) \geq 0$. De las condiciones dadas por (3.4), se puede probar que $f_j(u^{\varepsilon^l,\varepsilon_1^l})$ y $h(u^{\varepsilon^l,\varepsilon_1^l})$ convergen débilmente a $f_j(u)$ y $h(u)$ respectivamente. Por lo tanto, el límite u es una solución débil del problema de Cauchy (3.1), (3.2), y $G(u)$ satisface la misma estimación Hölder. Esta técnica es estandar, por facilidad se omiten los detalles, los cuales se pueden encontrar en [15]. Aqui, únicamente se presentan los detalles de la estimación uniforme (3.5).

Consideremos la transformación

$$w = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \left(G^{\varepsilon}(u)_{x_i}\right)^2 \tag{3.9}$$

y sea $P(u)=G^{\varepsilon}(u)$. Así, $P_{x_i}=P'(u)u_{x_i}$ y $u_{x_i}=\frac{P_{x_i}}{P'(u)}$. De (3.7), obtenemos

$$\begin{aligned} P_t = P'(u)u_t &= P'(u)\left(\Delta G^{\varepsilon}(u)+\sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j}+h(u)\right) \\ &= P'(u)\Delta G^{\varepsilon}(u)+\sum_{j=1}^{N} f_j'(u)P'(u)u_{x_j}+P'(u)h(u) \\ &= P'(u)\Delta P+\sum_{j=1}^{N} f_j'(u)P_{x_j}+P'(u)h(u), \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} (P_{x_i})_t &= \Big(P'(u)u_{x_i}\Big)_t = P''(u)u_{x_i}u_t+P'(u)(u_{x_i})_t \\ &= \left(\frac{P''(u)}{P'(u)}\right)P_{x_i}\left(\Delta P+\sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j}+h(u)\right) \\ &\quad + P'(u)\left(\Delta P+\sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j}+h(u)\right)_{x_i} \\ &= \left(\frac{P''(u)}{P'(u)}\right)P_{x_i}\Delta P+\left(\frac{P''(u)}{P'(u)}\right)P_{x_i}\sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j} \\ &\quad + \left(\frac{P''(u)}{P'(u)}\right)P_{x_i}h(u)+P'(u)\Delta(P_{x_i})+P'(u)\left(\sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j}\right)_{x_i} \\ &\quad + P'(u)h(u)_{x_i} \\ &= P'(u)\Delta(P_{x_i})+\left(\frac{P''(u)}{P'(u)}\right)P_{x_i}\Delta P+\Big(P'(u)h(u)\Big)_{x_i} \\ &\quad + P'(u)_{x_i}\sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j}+P'(u)\left(\sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j}\right)_{x_i} \\ &= P'(u)\Delta(P_{x_i})+\left(\frac{P''(u)}{P'(u)}\right)P_{x_i}\Delta P+\Big(P'(u)h(u)\Big)_{x_i} \\ &\quad + \left(P'(u)\sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j}\right)_{x_i} \end{aligned}$$

Así,

$$
\begin{aligned}
(P_{x_i})_t &= P'(u)\Delta(P_{x_i}) + \left(\frac{P''(u)}{P'(u)}\right) P_{x_i}\Delta P + \Big(P'(u)h(u)\Big)_{x_i} \\
&\quad + \left(\sum_{j=1}^{N} f_j'(u)P_{x_j}\right)_{x_i}
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

y

$$
\begin{aligned}
w_t &= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Big(P(u)_{x_i}\Big)^2\right)_t = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Big(P'(u)u_{x_i}\Big)^2\right)_t \\
&= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(P'(u)\left(\frac{P_{x_i}}{P'(u)}\right)\right)^2\right)_t = \sum_{i=1}^{N} P_{x_i}\Big(P_{x_i}\Big)_t \\
&= \sum_{i=1}^{N} P_{x_i}\left(P'(u)\Delta(P_{x_i}) + \left(\frac{P''(u)}{P'(u)}\right) P_{x_i}\Delta P + \Big(P'(u)h(u)\Big)_{x_i}\right) \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{N} P_{x_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{N} f_j'(u)P_{x_j})\right)_{x_i} \\
&= P'(u)\sum_{i=1}^{N} P_{x_i}\Delta(P_{x_i}) + \left(\frac{P''(u)}{P'(u)}\right)\Delta P\sum_{i=1}^{N}\Big(P_{x_i}\Big)^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} P_{x_i}\Big(P'(u)h(u)\Big)_{x_i} + \left(\sum_{i=1}^{N} P_{x_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{N} f_j'(u)P_{x_j}\right)_{x_i} \\
&= P'(u)\left(\sum_{i,j=1}^{N} P_{x_i}P_{x_ix_jx_j} + \sum_{i,j=1}^{N}\Big(P_{x_ix_j}\Big)^2 - \sum_{i,j=1}^{N}\Big(P_{x_ix_j}\Big)^2\right) \\
&\quad + \left(\frac{2P''(u)}{P'(u)}\right) w\Delta P + \sum_{i=1}^{N} P_{x_i}\Big(P''(u)u_{x_i}h(u) + P'(u)h'(u)u_{x_i}\Big) \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{N} P_{x_i}\right)\sum_{j=1}^{N}\Big(f_j'(u)P_{x_j}\Big)_{x_i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= P'(u)\Delta w - P'(u)\sum_{i,j=1}^{N}\Big(P_{x_ix_j}\Big)^2 + \left(\frac{2P''(u)}{P'(u)}\right)w\Delta P\\
&\quad + 2h(u)\left(\frac{P''(u)}{P'(u)}\right)w + 2h'(u)w\\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{N}P_{x_i}\right)\sum_{j=1}^{N}\Big(f_j''(u)u_{x_i}P_{x_j} + f_j'(u)P_{x_jx_i}\Big)\\
&= P'(u)\Delta w - P'(u)\sum_{i,j=1}^{N}\Big(P_{x_ix_j}\Big)^2 + \left(\frac{2P''(u)}{P'(u)}\right)w\Delta P\\
&\quad + 2\left(\frac{P''(u)h(u)}{P'(u)} + h'(u)\right)w\\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{N}P_{x_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{N}f_j''(u)P_{x_j}\left(\frac{P_{x_i}}{P'(u)}\right) + \sum_{j=1}^{N}f_j'(u)P_{x_jx_i}\right)
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
w_t &= P'(u)\Delta w - P'(u)\sum_{i,j=1}^{N}(P_{x_ix_j})^2 + \frac{2P''(u)}{P'(u)}w\Delta P\\
&\quad + 2\left(\frac{P''(u)h(u)}{P'(u)} + h'(u)\right)w\\
&\quad + 2\sum_{j=1}^{N}f_j''(u)P_{x_j}\frac{w}{P'(u)} + \sum_{j=1}^{N}f_j'(u)w_{x_j}.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Sea $z = P^s w,$ s constante. $w = P^{-s}z, w_{x_i} = z_{x_i}P^{-s} - sP^{-s-1}P_{x_i}z$ y

$$
\begin{aligned}
w_{x_ix_i} &= z_{x_ix_i}P^{-s} - sP^{-s-1}P_{x_i}z_{x_i} - sP^{-s-1}P_{x_i}z_{x_i}\\
&\quad - s\Big((-s-1)P^{-s-2}(P_{x_i})^2 + P^{-s-1}P_{x_ix_i}\Big)z\\
&= z_{x_ix_i}P^{-s} - 2sP^{-s-1}P_{x_i}z_{x_i} + s(s+1)P^{-s-2}(P_{x_i})^2 z\\
&\quad - sP^{-s-1}P_{x_ix_i}z
\end{aligned}
$$

De esta manera,

$$\sum_{i=1}^{N} w_{x_i x_i} = P^{-s}\sum_{i=1}^{N} z_{x_i x_i} - 2sP^{-s-1}\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} z_{x_i}$$
$$+ 2s(s+1)P^{-s-2}z\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Big(P'(u)u_{x_i}\Big)^2\right) - sP^{-s-1}z\sum_{i=1}^{N} P_{x_i x_i}$$

y por lo tanto,

$$\Delta w = P^{-s}\Delta z - 2sP^{-s-1}\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} z_{x_i} + 2s(s+1)P^{-2s-2}z^2$$
$$- sP^{-s-1}z\Delta P \tag{3.13}$$

De igual forma, $z_t = P^s w_t + sP^{s-1}P_t w$. Usando (3.1), (3.12) y (3.13),

$$\begin{aligned}
z_t &= P^s\left(P'(u)\Delta w - P'(u)\sum_{i,j=1}^{N}(P_{x_i x_j})^2 + \frac{2P''(u)}{P'(u)}w\Delta P\right)\\
&\quad + 2P^s\left(\frac{P''(u)h(u)}{P'(u)} + h'(u)\right)w\\
&\quad + P^s\left(2\sum_{j=1}^{N} f_j''(u)P_{x_j}\frac{w}{P'(u)} + \sum_{j=1}^{N} f_j'(u)w_{x_j}\right) + sP^{s-1}P_t(P^{-s}z)\\
&= P^sP'(u)\Delta w - P^sP'(u)\sum_{i,j=1}^{N}(P_{x_i x_j})^2 + \frac{2P''(u)}{P'(u)}z\Delta P\\
&\quad + 2\left(\frac{P''(u)h(u)}{P'(u)} + h'(u)\right)z + 2z\sum_{j=1}^{N}\frac{f_j''(u)P_{x_j}}{P'(u)}\\
&\quad + P^s\sum_{j=1}^{N} f_j'(u)w_{x_j} + sP^{-1}P_t z
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= P^s P'(u)\left(P^{-s}\Delta z - 2sP^{-s-1}\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} z_{x_i} + 2s(s+1)P^{-2s-2}z^2\right) \\
&\quad - P^s P'(u)\Big(sP^{-s-1} z\Delta P\Big) - P^s P'(u) \sum_{i,j=1}^{N} (P_{x_i x_j})^2 \\
&\quad + \frac{2P''(u)}{P'(u)} z\Delta P + 2\left(\frac{P''(u)h(u)}{P'(u)} + h'(u)\right) z + 2z \sum_{j=1}^{N} \frac{f_j''(u)P_{x_j}}{P'(u)} \\
&\quad + P^s \sum_{j=1}^{N} f_j'(u) w_{x_j} + sP^{-1} z(P'(u)u_t) \\
&= P'(u)\Delta z - 2sP^{-1}P'(u) \sum_{i=1}^{N} P_{x_i} z_{x_i} + 2s(s+1)P^{-s-2}P'(u)z^2 \\
&\quad - sP^{-1}P'(u) z\Delta P - P^s P'(u) \sum_{i,j=1}^{N} (P_{x_i x_j})^2 + \frac{2P''(u)}{P'(u)} z\Delta P \\
&\quad + 2\left(\frac{P''(u)h(u)}{P'(u)} + h'(u)\right) z + 2z \sum_{j=1}^{N} \frac{f_j''(u)P_{x_j}}{P'(u)} + P^s \sum_{j=1}^{N} f_j'(u) w_{x_j} \\
&\quad + sP^{-1}P'(u) z \left(\Delta P + \sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j} + h(u)\right) \\
&= P'(u)\Delta z - 2sP^{-1}P'(u) \sum_{i=1}^{N} P_{x_i} z_{x_i} + 2s(s+1)P^{-s-2}P'(u)z^2 \\
&\quad - sP^{-1}P'(u) z\Delta P - P^s P'(u) \sum_{i,j=1}^{N} (P_{x_i x_j})^2 + \frac{2P''(u)}{P'(u)} z\Delta P \\
&\quad + 2\left(\frac{P''(u)h(u)}{P'(u)} + h'(u)\right) z + 2z \sum_{j=1}^{N} \frac{f_j''(u)P_{x_j}}{P'(u)} + P^s \sum_{j=1}^{N} f_j'(u) w_{x_j} \\
&\quad + sP^{-1}P'(u) z\Delta P + sP^{-1}P'(u) z \sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j} + sP^{-1}P'(u)h(u)z.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente,

$$
\begin{aligned}
z_t = {} & P'(u)\Delta z - 2sP^{-1}P'(u)\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} z_{x_i} + 2s(s+1)P^{-s-2}P'(u)z^2 \\
& - \sum_{i,j=1}^{N} P^s P'(u)(P_{x_i x_j})^2 + \frac{2P''(u)}{P'(u)} z\Delta P \\
& + \left(sP^{-1}P'(u)h(u) + 2h'(u) + \frac{2P''(u)h(u)}{P'(u)} \right) z \\
& + \sum_{j=1}^{N} \frac{2f_j''(u)}{P'(u)} P_{x_j} z + \sum_{j=1}^{N} f_j'(u) z_{x_j}
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Dado que

$$
\sum_{i,j=1}^{N} (P_{x_i x_j})^2 \geq \sum_{i=1}^{N} (P_{x_i x_i})^2 \geq \frac{1}{N} (\Delta P)^2, \tag{3.15}
$$

elijase s tal que

$$
s(s+1) + \frac{N}{2} \left(\frac{P(u)P''(u)}{(P'(u))^2} \right)^2 \leq 0, \tag{3.16}
$$

como $-1 < s < 0$ y existe una constante apropiada C tal que

$$
\begin{aligned}
& 2s(s+1)P^{-s-2}P'(u)z^2 - \sum_{i,j=1}^{N} P^s P'(u)(P_{x_i x_j})^2 + \frac{2P''(u)}{P'(u)} z\Delta P \\
& \leq 2s(s+1)P^{-s-2}P'(u)z^2 - \frac{1}{N} P^s P'(u)(\Delta P)^2 + \frac{2P''(u)}{P'(u)} z\Delta P \\
& \leq -CP^{-s-2}P'(u)z^2.
\end{aligned}
$$

De (3.14), se tiene

$$
\begin{aligned}
z_t \leq {} & P'(u)\Delta z - 2sP^{-1}P'(u)\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} z_{x_i} - CP^{-s-2}P'(u)z^2 + \sum_{j=1}^{N} f_j'(u) z_{x_j} \\
& + \sum_{j=1}^{N} \frac{2f_j''(u)}{P'(u)} P_{x_j} z + \left(sP^{-1}P'(u)h(u) + 2h'(u) + \frac{2P''(u)h(u)}{P'(u)} \right) z
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Si las condiciones en el Teorema 3 se satisfacen, entonces existen constantes $c_i > 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$, tales que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{N} \frac{2f_j''(u)}{P'(u)} P_{x_j} z\right| &\leq \sum_{j=1}^{N} \left|\frac{2f_j''(u)}{P'(u)} P_{x_j} z\right| \leq 2c \frac{|G''(u)|}{P'(u)} \sum_{j=1}^{N} |P_{x_j}| z \\
&\leq c_1 \frac{|G''(u)|}{P'(u)} w^{\frac{1}{2}} z \\
&= c_1 \frac{|G''(u)|}{(P'(u))^2} P^{\frac{s}{2}} w^{\frac{1}{2}} z P^{-\frac{s}{2}} P^{-s-2} P^{s+2} P'(u) \\
&= c_1 \frac{|G''(u)|}{(P'(u))^2} P^{\frac{s}{2}+2} \left(P^{-s-2} P'(u)\right) z^{\frac{3}{2}}, \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

donde

$$c_1 \frac{|G''(u)|}{(P'(u))^2} P^{\frac{s}{2}+2} \leq c_2 \frac{|G''(u)|}{(P'(u))^2} P(u) \leq c_2 M(\varepsilon), \qquad (3.19)$$

y $M(\varepsilon) \to \beta$ cuando $\varepsilon \to 0$. Así, $M(\varepsilon)$ es uniformemente acotada. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\left|sP^{-1} P'(u) h(u) z\right| &= \left|sP^{-1} P'(u) P^{s+2} P^{-s-2} h(u) z\right| \\
&= \left|sP^{s+1} h(u) \Big(P^{-s-2} P'(u) z\Big)\right| \\
&\leq c_3 P^{-s-2} P'(u) z, \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|2h'(u) z\right| &= \left|\frac{2h'(u)}{P'(u)} P^{s+2} \Big(P^{-s-2} P'(u)\Big) z\right| \\
&\leq c_4 P^{-s-2} P'(u) z, \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2P''(u) h(u)}{P'(u)} z\right| &= \left|\frac{2P''(u)}{(P'(u))^2} h(u) P^{s+2} P^{-s-2} P'(u) z\right| \\
&= \left|2 \frac{P(u) G''(u)}{(P'(u))^2} P^{s+1} h(u) \Big(P^{-s-2} P'(u)\Big) z\right| \\
&\leq c_5 \frac{P(u)\, |G''(u)|}{(P'(u))^2} \Big(P^{-s-2} P'(u)\Big) z \\
&\leq c_5 M(\varepsilon) P^{-s-2} P'(u) z. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de (3.17)-(3.22), se tiene que

$$
\begin{aligned}
z_t \leq\ & P'(u)\Delta z - 2sP^{-1}P'(u)\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} z_{x_i} + \sum_{j=1}^{N} f_j'(u) z_{x_j} \\
& + \Big(-Cz^2 + c_2 M(\varepsilon) z^{\frac{3}{2}} + \big(c_3 + c_4 + c_5 M(\varepsilon)\big) z\Big) P^{-s-2} P'(u), \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

donde $M(\varepsilon)$ es uniformemente acotada. Así, se tiene la estimación $z \leq M$, mediante la aplicación del principio del máximo a (3.23) si la condición inicial es suave.

De la condición (3.3),

$$
\left(\frac{PP''}{P'^2}\right)^2 = \left(\frac{G''(u)\big(G(u) + \varepsilon(u + \bar{u})\big)}{\big(G'(u) + \varepsilon\big)^2}\right)^2 \leq \beta^2 + \beta(\varepsilon), \qquad (3.24)
$$

donde $\beta(\varepsilon)$ es una función de ε y $\beta(\varepsilon) \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Si se elige s^* como la más pequeña raíz de la ecuación

$$
s(s+1) + \frac{N}{2}\big(\beta^2 + \beta(\varepsilon)\big) = 0, \qquad (3.25)
$$

se satisface (3.16). De este modo

$$
P^{s^*} w \leq M, \qquad (3.26)
$$

donde

$$
s^* = \frac{-1 - \sqrt{1 - 2N\beta^2}}{2} \qquad (3.27)
$$

obteniendose la estimación (3.5) y así la prueba del Teorema 3. $\square$

Capítulo 4

Estimaciones Hölder para la ecuación parabólica degenerada general

En este capítulo se presenta el resultado principal de este trabajo, se establecen las estimaciones Hölder de las soluciones débiles del problema de Cauchy para ecuación parabólica degenerada general

$$u_t = \Delta G(u) + \sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j} + g(t, x_1, x_2, \cdots, x_N, u), \tag{4.1}$$

con condción inicial

$$u(x,0) = u_0(x_1, x_2, \cdots, x_N), \tag{4.2}$$

donde $G(u)$ es una función suave no decreciente, y N denota la dimensión del espacio. Esté resultado es un poco más general que el obtenido por Lu en [$*$] y que se presentó en el capítulo 3 de este trabajo, ya que se considera la función más general $g(t, x_1, x_2, \cdots, x_N, u)$ en lugar de la función $h(u)$. De igual manera, se obtienen mediante la aplicación del principio del máximo algunos Hölder exponentes explícitos de la función $G(u)$ con respectos a las variables espaciales. Dicho resultado es el siguiente:

Teorema 4. *Supóngase que $G'(u) \geq 0$ y la solución u es acotada: $|u| \leq \bar{u}$. Si*

$$\left| \frac{GG''}{G'^2} \right| \leq \beta, \quad \beta^2 \leq \frac{1}{2N}, \tag{4.3}$$

y

$$\left|f_j''(u)\right| \le c\left|G''(u)\right|, \quad g(t,x,u) \in C_0^2\left(\mathbb{R}^N \times [0,T]\right) \tag{4.4}$$

para una constante positiva c apropiada, entonces la solución u del problema de Cauchy (4.1), (4.2) *satisface la estimación global*

$$|\nabla G^{\alpha}(u)| \le M, \quad en \ \ \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \tag{4.5}$$

si la concición inicial (4.2) *satisface la misma estimación regular* (4.5), *donde M es una constante positiva que depende únicamente de la condición inicial, y*

$$\alpha > 1 - \frac{1+\sqrt{1-2N\beta^2}}{4}. \tag{4.6}$$

La igualda en (4.6) se tiene si $f_j(u) \equiv 0$ y $g(t,x,u) \equiv 0$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, sea $G(u) \ge 0$. Consideremos el problema de Cauchy para la ecuación relacionada con la ecuación (4.1),

$$u_t = \Delta G^{\varepsilon}(u) + \sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j} + g(t,x,u), \tag{4.7}$$

con condición inicial

$$u^{\varepsilon}(x,0) = u_0(x_1,x_2,\cdots,x_N) + \varepsilon_1, \tag{4.8}$$

donde $G^{\varepsilon}(u) = G(u)+\varepsilon(u+\bar{u})$, con ε y ε_1 constantes no negativas pequeñas. Para la ecuación en un medio poroso, elegimos $\varepsilon = 0, \varepsilon_1 > 0$; para otros casos, elegimos $\varepsilon_1, \varepsilon > 0$. de este modo, para ε y ε_1, fijos la ecuación (4.7) es estrictamente parabólica. Se puede resolver el problema de cauchy (4.7), (4.8) y obtener soluciones aproximadas $u^{\varepsilon,\varepsilon_1}$.

Puesto que $u^{\varepsilon,\varepsilon_1}$ es acotada, existe una subsucesión $u^{\varepsilon^l,\varepsilon_1^l}$ que converge débilmente a la función acotada u cuando $\varepsilon^l, \varepsilon_1^l \to 0^+$, en cualquier región acotada. Si se prueba la Hölder continuidad de $G(u^{\varepsilon,\varepsilon_1})$, entonces con la condición $G'(u) \ge 0, G(u^{\varepsilon^l,\varepsilon_1^l})$ converge débilmente a $G(u)$. (Ver los detalles en [17]).

De las condiciones dadas por (4.4), se puede probar que $f_j(u^{\varepsilon^l,\varepsilon_1^l})$ y $g(t,x,u^{\varepsilon^l,\varepsilon_1^l})$ convergen débilmente a $f_j(u)$ y $g(t,x,u)$ respectivamente. Por lo tanto, el límite u es una solución débil del problema de Cauchy (4.1), (4.2), y $G(u)$ satisface la misma estimación Hölder. Esta técnica es estandar, por facilidad se omiten los detalles, los cuales se pueden encontrar en [15]. Aqui, únicamente se presentan los detalles de la estimación uniforme (4.5).

Consideremos la transformación

$$w = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \left(G^{\varepsilon}(u)_{x_i}\right)^2 \tag{4.9}$$

y sea $P(u) = G^{\varepsilon}(u)$. Así, $P_{x_i} = P'(u)u_{x_i}$ y $u_{x_i} = \frac{P_{x_i}}{P'(u)}$. De (4.7), obtenemos

$$\begin{aligned}
P_t = P'(u)u_t &= P'(u)\left(\Delta G^{\varepsilon}(u) + \sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j} + g(t,x,u)\right)\\
&= P'(u)\Delta G^{\varepsilon}(u) + \sum_{j=1}^{N} f_j'(u)P'(u)u_{x_j} + P'(u)g(t,x,u)\\
&= P'(u)\Delta P + \sum_{j=1}^{N} f_j'(u)P_{x_j} + P'(u)g(t,x,u),
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
(P_{x_i})_t &= \left(P'(u)u_{x_i}\right)_t = P''(u)u_{x_i}u_t + P'(u)(u_{x_i})_t\\
&= \frac{P''(u)}{P'(u)}P_{x_i}\left(\Delta P + \sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j} + g(t,x,u)\right)\\
&\quad + P'(u)\left(\Delta P + \sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j} + g(t,x,u)\right)_{x_i}\\
&= \frac{P''(u)}{P'(u)}P_{x_i}\Delta P + \frac{P''(u)}{P'(u)}P_{x_i}\sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j} + \frac{P''(u)}{P'(u)}P_{x_i}g(t,x,u)\\
&\quad + P'(u)\Delta(P_{x_i}) + P'(u)\left(\sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j}\right)_{x_i} + P'(u)g(t,x,u)_{x_i}\\
&= P'(u)\Delta(P_{x_i}) + \frac{P''(u)}{P'(u)}P_{x_i}\Delta P + \left(P'(u)g(t,x,u)\right)_{x_i}\\
&\quad + P'(u)_{x_i}\sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j} + P'(u)\left(\sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j}\right)_{x_i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= P'(u)\Delta(P_{x_i}) + \frac{P''(u)}{P'(u)}P_{x_i}\Delta P + \Big(P'(u)g(t,x,u)\Big)_{x_i} \\
&\quad + \left(P'(u)\sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j}\right)_{x_i} \\
&= P'(u)\Delta(P_{x_i}) + \frac{P''(u)}{P'(u)}P_{x_i}\Delta P + \left(\sum_{j=1}^{N} f_j'(u)P_{x_j}\right)_{x_i} \\
&\quad + \Big(P'(u)g(t,x,u)\Big)_{x_i}
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

y

$$
\begin{aligned}
w_t &= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\big(P_{x_i}\big)^2\right)_t = \sum_{i=1}^{N} P_{x_i}\Big(P_{x_i}\Big)_t \\
&= \sum_{i=1}^{N} P_{x_i}\left(P'(u)\Delta(P_{x_i}) + \frac{P''(u)}{P'(u)}P_{x_i}\Delta P + \Big(P'(u)g(t,x,u)\Big)_{x_i}\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} P_{x_i}\left(\sum_{j=1}^{N} f_j'(u)P_{x_j})\right)_{x_i} \\
&= P'(u)\sum_{i=1}^{N} P_{x_i}\Delta(P_{x_i}) + \frac{P''(u)}{P'(u)}\Delta P\sum_{i=1}^{N}\Big(P_{x_i}\Big)^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} P_{x_i}\Big(P'(u)g(t,x,u)\Big)_{x_i} + \sum_{i=1}^{N} P_{x_i}\left(\sum_{j=1}^{N} f_j'(u)P_{x_j})\right)_{x_i} \\
&= P'(u)\left(\sum_{i,j=1}^{N} P_{x_i}P_{x_ix_jx_j} + \sum_{i,j=1}^{N}\Big(P_{x_ix_j}\Big)^2 - \sum_{i,j=1}^{N}\Big(P_{x_ix_j}\Big)^2\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} P_{x_i}\Big(P''(u)u_{x_i}g(t,x,u) + P'(u)\big(g_{x_i}(t,x,u) + g_u(t,x,u)u_{x_i}\big)\Big) \\
&\quad + \frac{2P''(u)}{P'(u)}w\Delta P + \sum_{i=1}^{N} P_{x_i}\sum_{j=1}^{N}\Big(f_j'(u)P_{x_j}\Big)_{x_i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= P'(u)\Delta w - P'(u)\sum_{i,j=1}^{N}\Big(P_{x_i x_j}\Big)^2 + \frac{2P''(u)}{P'(u)} w\Delta P \\
&\quad + \frac{2P''(u)}{P'(u)} w g(t,x,u) + 2w g_u(t,x,u) \\
&\quad + P'(u)\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} g_{x_i}(t,x,u) + \sum_{i=1}^{N} P_{x_i}\sum_{j=1}^{N}\Big(f_j''(u)u_{x_i}P_{x_j} + f_j'(u)P_{x_j x_i}\Big) \\
&= P'(u)\Delta w - P'(u)\sum_{i,j=1}^{N}\Big(P_{x_i x_j}\Big)^2 + \frac{2P''(u)}{P'(u)} w\Delta P \\
&\quad + 2\left(\frac{P''(u)g(t,x,u)}{P'(u)} + g_u(t,x,u)\right) w + P'(u)\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} g_{x_i}(t,x,u) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} P_{x_i}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{f_j''(u)}{P'(u)} P_{x_j}P_{x_i} + \sum_{j=1}^{N} f_j'(u)P_{x_j x_i}\right) \\
&= P'(u)\Delta w - P'(u)\sum_{i,j=1}^{N}(P_{x_i x_j})^2 + \frac{2P''(u)}{P'(u)} w\Delta P \\
&\quad + 2\left(\frac{P''(u)g(t,x,u)}{P'(u)} + g_u(t,x,u)\right) w + P'(u)\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} g_{x_i}(t,x,u) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N}\frac{2f_j''(u)}{P'(u)} P_{x_j} w + \sum_{j=1}^{N} f_j'(u) w_{x_j}. \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

Sea $z = P^s w$, s una constante. Entonces $w = P^{-s}z$,

$$
w_{x_j} = z_{x_j}P^{-s} - sP^{-s-1}P_{x_j}z,
$$

$$
\begin{aligned}
w_{x_j x_j} &= z_{x_j x_j}P^{-s} - sP^{-s-1}P_{x_j}z_{x_j} - sP^{-s-1}P_{x_j}z_{x_j} \\
&\quad - s\Big((-s-1)P^{-s-2}(P_{x_j})^2 + P^{-s-1}P_{x_j x_j}\Big)z \\
&= z_{x_j x_j}P^{-s} - 2sP^{-s-1}P_{x_j}z_{x_j} + s(s+1)P^{-s-2}(P_{x_j})^2 z \\
&\quad - sP^{-s-1}P_{x_j x_j}z.
\end{aligned}
$$

$$\sum_{j=1}^{N} w_{x_j x_j} = P^{-s}\sum_{j=1}^{N} z_{x_j x_j} - 2sP^{-s-1}\sum_{j=1}^{N} P_{x_j} z_{x_j}$$
$$+ 2s(s+1)P^{-s-2}z\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\Big(P'(u)u_{x_j}\Big)^2\right) - sP^{-s-1}z\sum_{j=1}^{N} P_{x_j x_j},$$

y

$$\Delta w = P^{-s}\Delta z - 2sP^{-s-1}\sum_{j=1}^{N} P_{x_j} z_{x_j} + 2s(s+1)P^{-2s-2}z^2$$
$$- sP^{-s-1}z\Delta P. \tag{4.13}$$

Entonces de (4.10)-(4.13), tenemos que

$$\begin{aligned}
z_t &= P^s w_t + sP^{s-1}P_t w \\
&= P^s\left(P'(u)\Delta w - P'(u)\sum_{i,j=1}^{N}(P_{x_i x_j})^2 + \frac{2P''(u)}{P'(u)}w\Delta P\right) \\
&\quad + P^s\left(\left(\frac{2P''(u)g(t,x,u)}{P'(u)} + g_u(t,x,u)\right)w + P'(u)\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} g_{x_i}(t,x,u)\right) \\
&\quad + P^s\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{2f_j''(u)}{P'(u)}P_{x_j}w + \sum_{j=1}^{N} f_j'(u)w_{x_j}\right) + sP^{s-1}P_t(P^{-s}z) \\
&= P^s P'(u)\Delta w - P^s P'(u)\sum_{i,j=1}^{N}(P_{x_i x_j})^2 + \frac{2P''(u)}{P'(u)}z\Delta P \\
&\quad + 2\left(\frac{P''(u)g(t,x,u)}{P'(u)} + g_u(t,x,u)\right)z + 2z\sum_{j=1}^{N}\frac{f_j''(u)}{P'(u)}P_{x_j} \\
&\quad + P^s\sum_{j=1}^{N} f_j'(u)w_{x_j} + P^s P'(u)\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} g_{x_i}(t,x,u) + sP^{-1}P_t z
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= P^s P'(u)\left(P^{-s}\Delta z - 2sP^{-s-1}\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} z_{x_i} + 2s(s+1)P^{-2s-2}z^2\right)\\
&\quad - P^s P'(u)\Big(sP^{-s-1}z\Delta P\Big) - P^s P'(u)\sum_{i,j=1}^{N}(P_{x_i x_j})^2\\
&\quad + \frac{2P''(u)}{P'(u)}z\Delta P + 2\left(\frac{P''(u)g(t,x,u)}{P'(u)} + g_u(t,x,u)\right)z + 2z\sum_{j=1}^{N}\frac{f_j''(u)}{P'(u)}P_{x_j}\\
&\quad + P^s\sum_{j=1}^{N} f_j'(u)w_{x_j} + P^s P'(u)\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} g_{x_i}(t,x,u) + sP^{-1}zP'(u)u_t\\
&= P'(u)\Delta z - 2sP^{-1}P'(u)\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} z_{x_i} + 2s(s+1)P^{-s-2}P'(u)z^2\\
&\quad - sP^{-1}P'(u)z\Delta P - P^s P'(u)\sum_{i,j=1}^{N}(P_{x_i x_j})^2 + \frac{2P''(u)}{P'(u)}z\Delta P\\
&\quad + 2\left(\frac{P''(u)g(t,x,u)}{P'(u)} + g_u(t,x,u)\right)z + 2z\sum_{j=1}^{N}\frac{f_j''(u)}{P'(u)}P_{x_j}\\
&\quad + P^s\sum_{j=1}^{N} f_j'(u)w_{x_j} + P^s P'(u)\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} g_{x_i}(t,x,u)\\
&\quad + sP^{-1}P'(u)z\left(\Delta P + \sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j} + g(t,x,u)\right)\\
&= P'(u)\Delta z - 2sP^{-1}P'(u)\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} z_{x_i} + 2s(s+1)P^{-s-2}P'(u)z^2\\
&\quad - sP^{-1}P'(u)z\Delta P - P^s P'(u)\sum_{i,j=1}^{N}(P_{x_i x_j})^2 + \frac{2P''(u)}{P'(u)}z\Delta P\\
&\quad + 2\left(\frac{P''(u)g(t,x,u)}{P'(u)} + g_u(t,x,u)\right)z + 2z\sum_{j=1}^{N}\frac{f_j''(u)}{P'(u)}P_{x_j}\\
&\quad + P^s\sum_{j=1}^{N} f_j'(u)w_{x_j} + P^s P'(u)\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} g_{x_i}(t,x,u)\\
&\quad + sP^{-1}P'(u)z\Delta P + sP^{-1}P'(u)z\sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j} + sP^{-1}P'(u)g(t,x,u)z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= P'(u)\Delta z - 2sP^{-1}P'(u)\sum_{i=1}^{N} P_{x_i}z_{x_i} + 2s(s+1)P^{-s-2}P'(u)z^2 \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{N} P^s P'(u)(P_{x_ix_j})^2 + \frac{2P''(u)}{P'(u)} z\Delta P \\
&\quad + \left(sP^{-1}P'(u)g(t,x,u) + 2g_u(t,x,u) + \frac{2P''(u)g(t,x,u)}{P'(u)} \right) z \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N} \frac{2f_j''(u)}{P'(u)} P_{x_j} z + \sum_{j=1}^{N} f_j'(u) z_{x_j} + P^s P'(u) \sum_{i=1}^{N} P_{x_i} g_{x_i}(t,x,u). \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

Puesto que

$$
\sum_{i,j=1}^{N} (P_{x_ix_j})^2 \geq \sum_{i=1}^{N} (P_{x_ix_i})^2 \geq \frac{1}{N}(\Delta P)^2, \qquad (4.15)
$$

elejimos s tal que

$$
s(s+1) + \frac{N}{2}\left(\frac{P''(u)P(u)}{(P'(u))^2} \right)^2 < 0; \qquad (4.16)
$$

entonces $-1 < s < 0$ y existe una constante apropiada C tal que

$$
\begin{aligned}
&2s(s+1)P^{-s-2}P'(u)z^2 - \sum_{i,j=1}^{N} P^s P'(u)(P_{x_ix_j})^2 + \frac{2P''(u)}{P'(u)} z\Delta P \\
&\leq 2s(s+1)P^{-s-2}P'(u)z^2 - \frac{1}{N} P^s P'(u)(\Delta P)^2 + \frac{2P''(u)}{P'(u)} z\Delta P \\
&\leq -CP^{-s-2}P'(u)z^2. \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

De (4.14) y (4.17), tenemos

$$
\begin{aligned}
z_t &\leq P'(u)\Delta z - 2sP^{-1}P'(u)\sum_{i=1}^{N} P_{x_i}z_{x_i} - CP^{-s-2}P'(u)z^2 + \sum_{j=1}^{N} f_j'(u) z_{x_j} \\
&\quad + \left(sP^{-1}P'(u)g(t,x,u) + 2g_u(t,x,u) + \frac{2P''(u)g(t,x,u)}{P'(u)} \right) z \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N} \frac{2f_j''(u)}{P'(u)} P_{x_j} z + P^s P'(u) \sum_{i=1}^{N} P_{x_i} g_{x_i}(t,x,u). \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

Si las condiciones en el Teorema 4 se satisfacen, entonces existe una constante $c_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, tal que

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^{N} \frac{2f_j''(u)}{P'(u)} P_{x_j} z \right| &\leq 2c \frac{|G''(u)|}{P'(u)} \sum_{j=1}^{N} |P_{x_j}| z \\
&\leq c_1 \frac{|G''(u)|}{P'(u)} w^{\frac{1}{2}} z \\
&= c_1 \frac{|G''(u)|}{(P'(u))^2} w^{\frac{1}{2}} z P^{\frac{s}{2}} P^{-\frac{s}{2}} P^{-s-2} P^{s+2} P'(u) \\
&= c_1 \frac{P^{\frac{s}{2}+2} |G''(u)|}{(P'(u))^2} P^{-s-2} P'(u) z^{\frac{3}{2}} \\
&\leq c_2 \frac{P(u) |G''(u)|}{(P'(u))^2} P^{-s-2} P'(u) z^{\frac{3}{2}} \\
&\leq c_2 M(\varepsilon) P^{-s-2} P'(u) z^{\frac{3}{2}}, \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

y $M(\varepsilon) \to \beta$ cuando $\varepsilon \to 0$. Así, $M(\varepsilon)$ es uniformemente acotada. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\left| sP^{-1} P'(u) g(t,x,u) z \right| &= \left| sP^{-1} P'(u) P^{s+2} P^{-s-2} g(t,x,u) z \right| \\
&= \left| sP^{s+1} g(t,x,u) \Big(P^{-s-2} P'(u) z \Big) \right| \\
&\leq c_3 P^{-s-2} P'(u) z, \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|2g_u(t,x,u) z| &= \left| \frac{2g_u(t,x,u) P^{s+2}}{P'(u)} \Big(P^{-s-2} P'(u) \Big) \right| \\
&\leq c_4 P^{-s-2} P'(u), \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{2P''(u) g(t,x,u) z}{P'(u)} \right| &= \left| \frac{2P''(u)}{(P'(u))^2} g(t,x,u) P^{s+2} P^{-s-2} P'(u) z \right| \\
&= \left| 2P^{s+1} g(t,x,u) \left(\frac{P(u) P''(u)}{(P'(u))^2} \right) P^{-s-2} P'(u) z \right| \\
&\leq c_5 \left(\frac{P(u) |G''(u)|}{(P'(u))^2} \right) P^{-s-2} P'(u) z \\
&\leq c_5 M(\varepsilon) P^{-s-2} P'(u) z \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\left|P^sP'(u)\sum_{i=1}^{N}P_{x_i}g_{x_i}(t,x,u)\right| &\le c_6\sum_{i=1}^{N}|P_{x_i}|P'(u)\\ &= c_6w^{\frac{1}{2}}P^{\frac{s}{2}}P^{-\frac{s}{2}}P^{s+2}(P^{-s-2}P'(u))\\ &\le c_7P^{-s-2}P'(u)z^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

De (4.18)-(4.23), tenemos que

$$\begin{aligned} z_t \le{}& P'(u)\Delta z - 2sP^{-1}P'(u)\sum_{i=1}^{N}P_{x_i}z_{x_i} + \sum_{j=1}^{N}f'_j(u)z_{x_j}\\ &+\Big(-Cz^2 + c_2M(\varepsilon)z^{\frac{3}{2}} + (c_3+c_4+c_5M(\varepsilon))z + c_7z^{\frac{1}{2}}\Big)P^{-s-2}P'(u). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Donde $M(\varepsilon)$ es uniformemente acotada. De este modo, tenemos $z \le M$ mediante la aplicación del principio del máximo a (4.24), con M una constante positiva grande apropiada.

De la condición (4.3),

$$\left(\frac{P''P}{P'^2}\right)^2 = \left(\frac{G''(u)\Big(G(u)+\varepsilon(u+\bar{u})\Big)}{(G'(u)+\varepsilon)^2}\right)^2 \le \beta^2 + \beta(\varepsilon), \tag{4.25}$$

donde $\beta(\varepsilon) > 0$ es una función de ε y $\beta(\varepsilon) \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$. Si elejimos s^* como la más pequeña de las raices de la ecuación

$$s(s+1) + \frac{N}{2}(\beta^2 + \beta(\varepsilon)) = 0, \tag{4.26}$$

entonces (4.16) se satisface. De este modo, tenemos

$$P^{s^*}w \le M, \tag{4.27}$$

donde

$$s^* = \frac{-1-\sqrt{1-2N(\beta^2+\beta(\varepsilon))}}{2}. \tag{4.28}$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$ en (4.28), obtenemos la estimación (4.5), y con esto la prueba del Teorema 4. $\square$

Bibliografía

[1] D. G. Aronson, Regularity properties of flows through porous media, *SIAM J. Appl. Math.* 17 (1969), 461-467.

[2] D. G. Aronson, "The porous Medium Equation", Lecture notes in Mathematics, Vol. 1224, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1985.

[3] P. Benilan, "A Strong Regularity L^p for Solutions of the porous Media Equation", Research Notes in Math., Vol. 89, pp.39-59, Pitman, London, 1983.

[4] L. A. Caffarelli and L. C. Evans, Continuity of the temperature in the Two-Phase Stefan problem, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 83 (1983), 199-220.

[5] L. A. Caffarelli and A. Friedman, Continuity of the density of gas flow in a porous medium, *Trans. Amer. Math. Soc.* 252 (1979), 99-113.

[6] L. A. Caffarelli, J. L. Vazquez, and N. I. Wolanski, Lipschitz continuity of solutions and interfaces of the N-dimensional porous medium equation, *Indiana Univ. Math. j.* 32 (1983), 83-118.

[7] E. DiBenedetto and A. Friedman, Hölder estimates for nonlinear degenerate parabolic systems, *J, Reine Angew. Math.* 357 (1985), 1-22.

[8] B. H. Gilding, Hölder continuity of solutions of parabolic equations, *J, London Math. Soc.* 13 (1976), 103-106.

[9] B. H. Gilding, "Continuity of generalized solutions of the Cauchy problems for the porous medium equation", *Lecture Notes in Mathematics, Volume* 415: *Ordinary and partial differential equations* (Springer - Verlag, Berlin, 1974), 363-367.

[10] S. Kesavan, "Topics in Functional Analysis and Applications", John Wiley & Sons, New York, 1989.

[11] S. N. Kruzhkov, "Nonlinear parabolic equations in two independent variables", *Trudy Moskov. Mat. Obshch.,* 16 (1967), 329-346. (Translated as *Trans. Moscow Math. Soc.,* 16 (1967), 355-373.)

[12] S. N. Kruzhkov, "Results concerning the nature of the continuity of solutions of parabolic equations and some of their applications", *Mat. Zametki,* 6 (1969), 97-108. (Translated as *Math. Notes,* 6 (1969), 517-523.)

[13] Y. G. Lu, I. Mantilla and L. Rendón, Hölder Estimates of Solutions on the Equation $u_t = \Delta G(u)$, *Applicable Analysis,* Vol.10, (2001),pp. 1-7.

[14] Y. G. Lu, Hölder estimates of solutions of biological population equations, *Applied Math. Letter* 13 (2000), 123-126.

[15] Y.G. Lu and W. Jäger, Regularity of Solutions to Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations with Degenerate Diffusion, J. Diff. Equations, 170(2001), No.1, 1-21. MR 2001j:35159

[16] Y. G. Lu and W. Jäger, Globlal regularity of solutions for general degenerate parabolic equations in $1-D$, *j. Differential Equations* 140 (1997), 365, 367.

[17] Y.G. Lu, Hölder Estimates of Solutions to a Degenerate Diffusion Equation, American Mathematical Society, Volume 130, Number 5, Pages 1339-1343.

[18] Y.G. Lu and L.W. Qian, Regularity of viscosity solutions of a degenerate parabolic equation, American Mathematical Society, 130(2002), Pages 999-1004.

[19] Murray H. Protter and Hans F. Weinberger, "Maximum Principles in Differenthial Equations", Springer-Verlag, New York, 1984.

[20] O. A. Oleinik, A. S. Kalashnikov and Chzhou Yui-Lin, "The Cauchy problem and boundary problems for equations of the type of unsteady filtration", *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.,* 22 (1958), 667-704.

[21] P. E. Sacks, Continuity of solutions of a singular parabolic equation, *Nonlinear Anal.* 7 (1983), 387-409.

[22] W. P. Ziemer, Interior and boundary continuity of weak solutions of degenerate parabolic equations, *Trans. Amer. Soc.* 271 (1982), 733-748.