CUERPOS LOCALES DE DIMENSION SUPERIOR

JENNY ALEJANDRA PABÓN CADAVID

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Bogotá, 2012

CUERPOS LOCALES DE DIMENSION SUPERIOR

JENNY ALEJANDRA PABÓN CADAVID
Código: 830173

Trabajo de grado presentado para optar al título de Maestría en Ciencias Matemáticas

DIRIGIDO POR:
JOHN JAIME RODRÍGUEZ

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Bogotá, 2012

CUERPOS LOCALES DE DIMENSION SUPERIOR

HIGUER DIMENSIONAL LOCAL FIELDS

Resumen

En este trabajo se presenta una introducción a los cuerpos locales de dimensión superior, se presentan los conceptos y resultados básicos de la teoría de una forma adecuada para el no especialista. Un cuerpo local de dimensión superior es un ejemplo importante de un cuerpo de valuación discreta; en contraste a los cuerpos locales, los cuerpos locales de dimensión superior tienen una cadena de cuerpos residuales y varios candidatos diferentes para el anillo de enteros.

Palabras claves: Cuerpos locales, valuación, números p-ádicos, cuerpos locales de dimensión superior, completados.

Abstract

In this work, we present an overview of the higher dimensional local fields, we present the concepts and basic results of the theory in a form suitable for the nonspecialist. A higher dimensional local field is an important example of a discrete valuation field, in contrast whit the local field case, the higher dimensional local fields have a chain of residual field and several different candidates for the ring of integers.

Keywords: Local field, valuation, p-adic numbers, higuer dimensional local field, completacion.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Un cuerpo local de dimensión superior es un ejemplo importante de un cuerpo de valuación discreta; en contraste a los cuerpos locales básicos, los cuerpos locales de dimensión superior tienen una cadena de cuerpos residuales y varios candidatos diferentes para el anillo de enteros.

La teoría de Cuerpos de Clases puede verse como una generalización y extensión fructífera de la Ley de Reciprocidad de Gauss. Uno de los objetivos de la teoría de números fue la generalización a otras clases de cuerpos o a extensiones no abelianas de la Teoría de Cuerpos de Clases. Una dirección importante de esta generalización es desarrollar una teoría para cuerpos de dimensión superior, es decir cuerpos finitamente generados sobre su subcuerpo primo. El trabajo en esta materia empezó de manera independiente con las investigaciones de A.N Parshin en característica positiva y K. Kato en el caso general en los años 70 usando la $K-$teoría de Milnor.

Uno de los principios de la teoría de cuerpos de clases para un cuerpo de números algebraicos es construir la aplicación de reciprocidad mezclando las teorías de cuerpos de clases de cuerpos locales. De manera similar la teoría de cuerpos de clases de dimensión superior se obtiene como una mezcla de teoría de cuerpos de clases locales de dimensión superior, las cuales tratan extensiones abelianas de *cuerpos locales de dimensión superior*, fue por este camino que aparecieron los cuerpos locales de dimensión superior.

Sin embargo las aplicaciones de los cuerpos locales de dimensión superior no se limitan a la búsqueda de generalizaciones de la teoría de cuerpos de clases, por ejemplo: dada una superficie S sobre un cuerpo finito de característica p, una curva $C \subset S$ y un punto $x \in C$, tales que S y C son regulares sobre x, el cuerpo de cocientes de la compleción $\widehat{\left(\widehat{\mathcal{O}}_{S,x}\right)}_C$ de la localización en C de la compleción $\widehat{\mathcal{O}}_{S,x}$ del anillo local $\mathcal{O}_{S,x}$ de S en x, es un cuerpo local 2-dimensional sobre un cuerpo finito. Es decir un cuerpo de valuación discreta completo con cuerpo residual local.

Este punto de vista geométrico es interesante, es bien conocido que una manera fructífera de estudiar las propiedades aritméticas de $\mathbb{Q}$ es a través de sus completaciones $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}_p$. Si tomamos $S = \operatorname{spec} \mathbb{Z}$, que como esquema es una curva, y p un primo (un punto cerrado de la curva S) podemos localizar el anillo de funciones regulares de S en p y completar, el cuerpo de fracciones de este anillo es $\mathbb{Q}_p$, en el caso de $\mathbb{R}$ no disponemos de una descripción geométrica tan buena. Podemos generalizar este análisis a superficies aritméticas, que son objetos de dimensión dos interesantes para la teoría de números. Si E es una curva elíptica sobre $\mathbb{Q}$, podemos tomar su modelo de Néron $\mathcal{E} \to S$ que es un esquema de dimensión dos dotado de un morfismo sobre la curva S. En este caso el proceso de localizar y completar nos conducirá a un cuerpo local $2-$dimensional. Como en el caso de $\mathbb{Z}$ es de esperar que podamos utilizar los cuerpos locales $2-$dimensionales para encontrar propiedades aritméticas de la curva elíptica E.

En el caso de $\mathbb{Q}$ sus cuerpos locales y grupos de unidades son grupos abelianos localmente compactos, hecho que permite aplicar técnicas de análisis armónico de manera muy satisfactoria (tesis de Tate). En el caso de dimensión superior aún no tenemos una teoría adecuada de análisis armónico.

De alguna manera, los cuerpos locales son lo suficientemente pequeños para que su topología, álgebra y análisis estén íntimamente relacionados. Por ejemplo el grupo aditivo de un cuerpo local es un grupo abeliano localmente compacto. Esta propiedad topológica garantiza la existencia de la medida de Haar (análisis), que es una medida de Borel (topología) e invariante por traslaciones (álgebra). Esta compacidad local puede verse como una consecuencia de tener un cuerpo residual finito. Sin embargo estas relaciones no se tienen en cuerpos locales de dimensión superior.

Esto ha obligado a considerar herramientas más generales para tratar los cuerpos locales de dimensión superior. Desarrollar tales herramientas y establecer relaciones entre ellas es un problema abierto y activo.

En este trabajo se presenta una introducción a los cuerpos locales de dimensión superior, la exposición se basa en el artículo [11]. En este artículo I. Zhukov resume los conceptos y resultados básicos de la teoría de una forma adecuada para el especialista. El objetivo de este trabajo es presentar demostraciones detalladas para la mayoría de las afirmaciones de [11].

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se presentan las definiciones necesarias para la construcción de los cuerpos locales de dimensión superior y los resultados necesarios para el desarrollo de nuestro trabajo. Las definiciones y demostraciones son tomadas de [3], se presentan aquí como referencia para el lector.

2.1. Anillos valuados.

Grupos ordenados

Definición 2.1. Un grupo ordenado $(\Gamma, +, 0)$ se dice totalmente ordenado, si existe un orden total $\leq$ sobre Γ compatible con la estructura de grupo. Esto es, si $x \leq y$ entonces $x + z \leq y + z$ para todo $z \in \Gamma$. Se escribe $x < y$ si $x \leq y$ y $x \neq y$.

Lema 2.2. *Un grupo abeliano* $(\Gamma, +, 0)$ *tiene un orden total* $\leq$ *compatible con la operación de grupo* $+$ *si existe un subconjunto* P *el cual es cerrado bajo la* $+$ *y satisface*

$$\Gamma = P \cup \{0\} \cup (-P)$$

donde $-P = \{p \in \Gamma \mid -p \in P\}$.

Sean $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ grupos abelianos totalmente ordenados, entonces $\Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n$

es un grupo abeliano totalmente ordenado con respecto a el orden lexicográfico. Esto es $(a_1, \cdots, a_n) < (b_1, \cdots, b_n)$ si y sólo si $a_1 = b_1, \cdots, a_{i-1} = b_{i-1}, a_i < b_i$ para algún $1 \leq i \leq n$.
Sea $(\Gamma, +, 0, \leq)$ un grupo abeliano totalmente ordenado. Se adiciona un elemento $+\infty$ a Γ y se extiende el orden $\leq$ a $\Gamma' = \Gamma \cup \{+\infty\}$ tal que $a \leq +\infty$ para todo $a \in \Gamma$ y $+\infty \leq +\infty$.

Definición 2.3. Sean $(\Gamma_1, \leq_1)$ y $(\Gamma_2, \leq_2)$ dos grupos abelianos totalmente ordenados. Una función $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ es llamada un homomorfismo de orden, si f es un homomorfismo con respecto a el orden total en el siguiente sentido, si $\alpha \leq_1 \beta$, entonces $f(\alpha) \leq_2 f(\beta)$.

Dado un grupo ordenado $(\Gamma, \leq)$, un subconjunto Σ de Γ es llamado convexo, si para todo $\alpha, \beta \in \Sigma$, el conjunto $l_{(\alpha,\beta)} = \{\gamma \in \Gamma : \alpha \leq \gamma \leq \beta\}$ es un subconjunto de Σ

Definición 2.4. Sea $(\Gamma, \leq)$ un grupo ordenado. Sea C_Γ la colección de todos los subgrupos convexos de Γ. La colección C_Γ es totalmente ordenada por inclusión y el cardinal de la cadena maximal de subgrupos convexos no triviales de Γ es llamado el rango de Γ y se denota $rk(\Gamma)$.

Definición 2.5. Un grupo ordenado $(\Gamma, \leq)$ se dice discreto si este satisface las siguientes condiciones:

1. La colección C_Γ de todos los subgrupos convexos de Γ es un buen orden,
2. Si $f : \Gamma \to \Gamma'$ es un homomorfismo de orden no trivial, donde $(\Gamma', \leq')$ es cualquier otro grupo ordenado, entonces $f(\gamma)$ tiene un sucesor inmediato para todo $\gamma \in \Gamma$.

Teorema 2.6. *Sea $(\Gamma, \leq)$ un grupo ordenado discreto de rango finito n. Entonces existe un isomorfismo de orden*

$$\Gamma \tilde{\to} \mathbb{Z}^n$$

donde $\mathbb{Z}^n$ tiene el orden lexicográfico $\leq_{lex}$.

En virtud de este teorema, por un grupo ordenado discreto de rango n siempre se entenderá $(\mathbb{Z}^n, \leq_{lex})$.

Definición 2.7. Una Γ-valuación v sobre un anillo R es una función

$$v : R \longrightarrow \Gamma'$$

sujeta a las siguientes propiedades:

1. $v(a) = \infty$ si y sólo si $a = 0$,
2. $v(ab) = v(a) + v(b)$,
3. $v(a + b) \geq \text{mín}\{v(a), v(b)\}$,

donde a,b $\in R$ y Γ es un grupo abeliano totalmente ordenado. Se llamará a (R, v) un anillo valuado. Si R es un cuerpo, (R, v) se dirá un cuerpo valuado.

Nota *1.*

- Si $v(F^*) = \{0\}$, entonces v es llamada la valuación trivial.
- Si R es un anillo con valuación v, entonces se tiene que $v(1_R) = 0_\Gamma$, dado que $v(1_R) = v(1_R) + v(1_R)$, por lo tanto $v(-1_R) = v(1_R)$.
- Si $v(\alpha) \neq v(\beta)$, entonces $v(\alpha + \beta) = \text{mín}(v(\alpha), v(\beta))$.
  Sean $\alpha, \beta \in R$ tales que $v(\alpha) < v(\beta)$, entonces

  $$v(\alpha+\beta) \geq \text{mín}(v(\alpha), v(\beta)) = v(\alpha) = v(\alpha-\beta+\beta) \geq \text{mín}(v(\alpha+\beta), v(-\beta))$$

  lo cual significa $v(\alpha + \beta) = v(\alpha)$.

Lema 2.8. *Sea (F, v) un cuerpo valuado, entonces*

$$\mathcal{O}_v := \{\alpha \in F \mid v(\alpha) \geq 0\}$$

es un anillo local, llamado el anillo de enteros de (F, v) cuyo ideal maximal es:

$$\mathcal{M}_v := \{\alpha \in F \mid v(\alpha) > 0\}.$$

Este ideal coincide con el conjunto de los elementos sin inverso multiplicativo de $\mathcal{O}_v$.

El grupo multiplicativo

$$\mathcal{U}_v := \mathcal{O}_v - \mathcal{M}_v$$

es llamado el grupo de las unidades de (F, v). El cuerpo cociente

$$\overline{F}_v := \mathcal{O}_v/\mathcal{M}_v$$

es llamado el cuerpo residual de v. La imagen de un elemento $\alpha \in \mathcal{O}_v$ en $\overline{F}_v$ se escribe $\overline{\alpha}$ y es llamada el residuo de α en $\overline{F}_v$

Demostración. En efecto $\alpha \in \mathcal{O}_v^*$ si y sólo si $v(\alpha) \geq 0$ y $v(\alpha^{-1}) = -v(\alpha) \geq 0$, lo cual significa $v(\alpha) = 0$. Entonces el anillo de enteros $\mathcal{O}_v$ es un anillo local y el ideal $\mathcal{M}_v$ es maximal. □

Lema 2.9. *Sea R un dominio entero y v_R una valuación sobre R que toma valores en el grupo $\Gamma' = \Gamma \cup \{\infty\}$. Entonces la aplicación $v : Q(R) \to \Gamma'$ dada por*

$$v(\alpha/\beta) \mapsto v_R(\alpha) - v_R(\beta)$$

define una valuación sobre el cuerpo de fracciones $Q(R)$ de R.

Demostración. Veamos que $v : Q(R) \to \Gamma'$ esta bien definida. Si $\alpha/\beta = \alpha'/\beta'$, entonces $v_R(\alpha) - v_R(\beta) = v_R(\alpha') - v_R(\beta')$ es evidente, puesto que $\alpha\beta' = \alpha'\beta$. □

Definición 2.10. Sea (R, v) un anillo valuado. La imagen $v(R^*)$ en Γ del grupo multiplicativo R^* de R es llamada el valor del grupo por v. En particular, si $v(R^*)$ es un grupo ordenado discreto de rango n con respecto al orden inducido por Γ, entonces se dirá que (R, v) es un anillo de valuación discreta de rango n.

2.1.1. Ejemplos

1. Una Aplicación $\|\cdot\|$ de un anillo R en $\mathbb{R}$ es llamada un valor absoluto sobre $\mathbb{R}$ si está satisface.

   a) $\|\alpha| > 0$ si $\alpha \neq 0, \|\|0\| = 0$,

   b) $\|\alpha\beta\| = \|\alpha\|\|\beta\|$,

   c) $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$.

   Un valor absoluto $\|\cdot\|$ es llamado no-arquimediano sobre $\mathbb{R}$ si se cumple la propiedad ultramétrica $\|\alpha+\beta\| \leq \text{máx}(\|\alpha\|, \|\beta\|)$. Se puede verificar que si un valor absoluto es no-arquimediano sobre $\mathbb{R}$, entonces $\|\alpha\| \neq \|\beta\|$, implica $\|\alpha + \beta\| = \text{máx}(\|\alpha\|, \|\beta\|)$.

2. Sea F un cuerpo $\mathbb{Z}$-valuado con valuación v y d un número real en el intervalo $(0, 1)$. Para $\alpha \in F$, sea $\|\alpha\|_v = d^{v(\alpha)}$. Entonces $\|\alpha\|_v = 0$ si y sólo si $\alpha = 0$ y $\|\cdot\|_v$ esta definida de manera positiva. Si $\alpha, \beta \in F$ entonces

   $$\|\alpha\beta\|_v = d^{v(\alpha\beta)} = d^{v(\alpha)+v(\beta)} = d^{v(\alpha)}d^{v(\beta)} = \|\alpha\|_v\|\beta\|_v$$

   además,

   $$\|\alpha+\beta\|_v = d^{v(\alpha+\beta)} \leq d^{\text{mín}(v(\alpha),v(\beta))} = \text{máx}(d^{v(\alpha)}, d^{v(\beta)}) = \text{máx}(\|\alpha\|_v, \|\beta\|_v)$$

   lo cual significa que $\|\cdot\|_v$ es una ultramétrica sobre F.

3. Sea $F = \mathbb{Q}$ y p un primo fijo, se define

   $$v_p(n/m) = v_p(n) - v_p(m)$$

   donde $v_p(n)$ es el mayor entero tal que $p^{v_p(n)}$ divide a n. Entonces el anillo de enteros es $\{n/m \in \mathcal{O}_{v_p} : m, n \in \mathbb{Z}, p \nmid m\}$. La aplicación

   $$\psi : \mathcal{O}_{v_p} \to \mathbb{F}_p$$

   que envía a n/m en $\overline{n}\,\overline{m}^{-1}$ es un epimorfismo de anillos cuyo núcleo es $\{n/m \in \mathcal{O}_{v_p} : p \mid n\}$, lo cual significa que el cuerpo residual de $\mathcal{O}_{v_p}/\ker(\psi)$ es isomorfo al cuerpo finito $\mathbb{F}_p$ con p elementos.

4. Sea $K = F(X)$ y $||\cdot||$ un valor absoluto no trivial sobre K, el cual es trivial sobre el grupo multiplicativo del cuerpo base ($||F^*|| = 1$). Sean $\alpha, \beta \in K$, entonces

   $$||\alpha+\beta||^n \leq ||\alpha||^n + ||\alpha||^{n-1}||\beta|| + \cdots + ||\beta||^n \leq (n+1)\,\text{máx}(||\alpha||^n, ||\beta||^n).$$

   Tomando raíz $n-$ésima a ambos lados y haciendo tender n a infinito, se obtiene la desigualdad $||\alpha+\beta|| \leq \text{máx}(||\alpha||, ||\beta||)$, lo cual significa que $||\cdot||$ es un valor absoluto que cumple la propiedad ultramétrica. Existen dos casos:

   a) $||X|| > 1$. Si $f(X), g(X) \in F[X]$, entonces $\deg(f/g) = \deg(f) - \deg(g)$. Por lo tanto

   $$||\alpha|| = ||X^{-1}||^{-\deg(\alpha)}$$

   Se define la valuación $v_\infty(\alpha) = -\deg(\alpha)$, $v_\infty(0) = +\infty$. Note que $v_\infty(1/X) = 1$.

   b) $||X|| \leq 1$. Entonces $||\alpha|| \leq 1$ para $\alpha \in F[X]$. Sea $p(X) \in K[X]$ un polinomio mónico de grado minimal que satisface la condición $||p(X)|| < 1$, entonces $p(X)$ es irreducible y

   $$||\alpha|| = ||p(X)||^{v_{p(X)}(\alpha)},$$

   donde $v_{p(X)}(\alpha)$ es el mayor entero k, tal que $p(X)^k$ divide al polinomio $f(X)$. Así dados $f, g \in K$ se define $v_{p(X)}(f/g) = v_{p(X)}(f) - v_{p(X)}(g)$, $v_{p(X)}(0) = +\infty$.

   De este modo se define una valuación no trivial sobre $K = F(X)$, la cual es trivial sobre F.
   Para el primer caso el cuerpo residual es F. Para el segundo caso se tiene que el anillo de enteros es

   $$\mathcal{O}_{v_{p(X)}} = \{f(X)/g(X) \,:\, f(X), g(X) \in F[X]\,,\, g(X)\text{es primo relativo con } p(X)\}$$

   y el cuerpo residual es $F[X]/p(X)F[X]$.

5. Sea F un cuerpo con valuación v. Para $f(X) = \sum_{i=m}^{k} a_i X^i \in F[X]$ con $a_m \neq 0$ sea
$$v^*(f(X)) = (m, v(a_m)) \in \mathbb{Z} \times v(F^*).$$
Se puede extender v^* a $F(X)$. Ordenando $\mathbb{Z} \times v(F^*)$ con el orden lexicográfico, se obtiene una valuación v^* sobre $F(X)$ con cuerpo residual $\overline{F}_v$. Análogamente se define una valuación sobre $F(X_1)\cdots(X_n)$ con valores en el grupo $(\mathbb{Z})^{n-1} \times v(F^*)$ ordenado lexicográficamente.

2.2. Cuerpos de Valuación Discreta

Un cuerpo F se dice un cuerpo de valuación discreta si este admite una valuación discreta no trivial.

Definición 2.11. Sea F un cuerpo de valuación discreta. Un elemento $\pi \in \mathcal{O}_v$ es llamado un elemento primo (elemento uniformizador) si $v(\pi)$ genera el grupo $v(F^*)$. Sin pérdida de generalidad se asumirá que el homomorfismo $v : F^* \to \mathbb{Z}$ es sobreyectivo. Esto es v es normalizada.

Lema 2.12. *Si $char(F) \neq char(\overline{F}_v)$, entonces $char(F) = 0$ y $char(\overline{F}_v) \neq 0$.*

Demostración. Supongamos $char(F) = p \neq 0$, entonces $p = 0$ en F, $\overline{p} = 0$ en $\overline{F}_v$ lo cual significa $char(\overline{F}_v) = p$. □

Lema 2.13. *Sea (F, v) un cuerpo valuado y J un ideal diferente de cero del anillo de enteros $\mathcal{O}_v$. Sean $\alpha \in J$ y $\beta \in \mathcal{O}_v$. Si $v(\alpha) \leq v(\beta)$ entonces $\beta \in J$.*

Demostración. Dado que $v(\beta) \geq v(\alpha)$, se tiene $v(\beta) - v(\alpha) \geq 0$, por lo tanto $v(\beta/\alpha) \geq 0$ es decir $\beta/\alpha \in \mathcal{O}_v$. El resultado se tiene por el hecho que $\beta = \alpha(\beta/\alpha)$. □

Lema 2.14. *Sea F un cuerpo de valuación discreta y π un elemento uniformizador. El anillo de enteros $\mathcal{O}_v$ es un dominio de ideales principales y todo ideal no cero de $\mathcal{O}_v$ es generado por π^n, para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $\alpha \in \mathcal{O}_v$ y $n = v(\alpha)$. Entonces $v(\alpha\pi^{-n}) = 0$, lo cual significa $\alpha = \pi^n u$ donde u es una unidad en $\mathcal{O}_v$. Por el lema anterior se puede ver que si I es un ideal propio de $\mathcal{O}_v$, entonces $I = \pi^k \mathcal{O}_v$ donde $k = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \mid n = v(\alpha)\}$. En particular $\mathcal{M} = \pi\mathcal{O}_v$ y $\mathcal{O}_v$ no posee un ideal minimal no trivial. □

Lema 2.15. *Cualquier elemento $\alpha \in F^*$ puede escribirse de manera única como $\pi^n \varepsilon$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in \mathcal{U}_v$.*

Demostración. Sea $n = v(\alpha)$. Entonces $\alpha\pi^{-n} \in \mathcal{U}_v$ y $\alpha = \pi^n \varepsilon$ para algún $\varepsilon \in \mathcal{U}_v$. Si $\pi^n \varepsilon_1 = \pi^m \varepsilon_2$, entonces $n + v(\varepsilon_1) = m + v(\varepsilon_2)$. Como $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{U}_v$ se deduce $n = m$ y $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. □

2.2.1. Topología de Valuación Discreta

Sea F un cuerpo de valuación discreta con valuación v y $d \in (0, 1)$. La aplicación $d_v : F \times F \to \mathbb{R}$ definida por $d_v(\alpha, \beta) = d^{v(\alpha-\beta)}$ es una métrica sobre F. Por lo tanto, esto induce una estructura de espacio topológico de Hausdorff sobre F. Para $\alpha \in F$ los conjuntos $\alpha + \pi^n \mathcal{O}_v$, $n \in \mathbb{N}$, forman una base de vecindades abiertas de α. Esta topología sobre F, la topología inducida sobre $\mathcal{U}_v$ y $1 + \mathcal{M}_v$ es llamada Topología de Valuación Discreta.

Lema 2.16. *Un cuerpo F con la topología definida anteriormente es un cuerpo topológico, esto es, las operaciones del cuerpo $+, \times$ y la inversa son continuas.*

Demostración. Dado que

$$v((\alpha - \beta) - (\alpha_0 - \beta_0)) \geq \text{mín}(v(\alpha - \alpha_0), v(\beta - \beta_0)),$$

$$v(\alpha\beta - \alpha_0\beta_0) \geq \text{mín}(v(\alpha - \alpha_0) + v(\beta), v(\beta - \beta_0) + v(\alpha_0)),$$

$$v(\alpha^{-1} - \alpha_0^{-1}) = v(\alpha - \alpha_0) - v(\alpha) - v(\alpha_0),$$

se obtiene la continuidad de la suma, multiplicación y división. □

Lema 2.17. *Sea F un cuerpo el cual tiene estructura de cuerpo de valuación discreta con respecto a las valuaciones v_1 y v_2. Entonces la topología inducida por las topologías coincide si y sólo si $v_1 = v_2$.*

2.3. Cuerpos Locales

Sea F un cuerpo de valuación discreta y v la valuación sobre éste, como F es un espacio métrico por la topología inducida por la norma se puede introducir la noción de sucesión de cauchy. Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de F es llamada de Cauchy si para todo número real c existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n, m \geq N \qquad v(a_n - a_m) \geq c.$$

En vista de las propiedades de la valuación, para una sucesión de Cauchy se tiene que $\lim v(a_n)$ existe.

Lema 2.18. *El conjunto A de todas las sucesiones de cauchy forma un anillo con respecto a la adición y multiplicación componente a componente. El conjunto de todas las sucesiones de cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ forma un ideal maximal M de A. El cuerpo A/M es un cuerpo de valuación discreta con la valuación $\widehat{v}$ definida por $\widehat{v}(a_n) = \lim v(a_n)$.*

Definición 2.19. Un cuerpo de valuación discreta se dirá completo si toda sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Es decir, existe $\lim a_n \in F$ con respecto a v. Un cuerpo $\widehat{F}$ con una valuación $\widehat{v}$ es llamado una completación de F si éste es completo, $\widehat{v}|_F = v$ y F es un subcuerpo denso en $\widehat{F}$ con respecto a $\widehat{v}$.

Proposición 2.20. *Todo cuerpo de valuación discreta tiene una completación la cual es única salvo isomorfismos sobre F.*

Lema 2.21. *Sea F un cuerpo de valuación discreta y $\widehat{F}$ su completado, con valuaciones respectivas v y $\widehat{v}$. Entonces el anillo de enteros $\mathcal{O}_v$ es denso en $\mathcal{O}_{\widehat{v}}$, el ideal maximal $\mathcal{M}_v$ es denso en $\mathcal{M}_{\widehat{v}}$ y el cuerpo residual $\overline{F_v}$ coincide con el cuerpo residual de $\widehat{F}$ con respecto a la valuación $\widehat{v}$.*

Definición 2.22. Cuerpo Local: Un cuerpo completo de valuación discreta con cuerpo residual perfecto es llamado un cuerpo local.

2.3.1. Ejemplos

1. La completación de $\mathbb{Q}$ con respecto a la valuación v_p es llamada el cuerpo de los número p-ádicos y se denota por $\mathbb{Q}_p$, el anillo de enteros de $\mathbb{Q}_p$ se denota $\mathbb{Z}_p$ y es llamado el anillo de enteros $p-$ádicos. El cuerpo residual de $\mathbb{Q}_p$ es el cuerpo finito $\mathbb{F}_p$ con p elementos.

2. La completación de $K(X)$ con respecto a v_X es el cuerpo de series de Laurent $K((X))$ con la valuación

$$v\left(\sum_{n\gg\infty}^{\infty} \alpha_n X^n\right) = \text{mín}\{n \in \mathbb{Z} \,:\, \alpha_n \neq 0\}$$

El anillo de enteros con respecto a v_X es $K[[X]]$, que es el conjunto de todas las series formales $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n X^n$, $\alpha_n \in K$. El cuerpo residual se puede identificar con K.

3. Sea F un cuerpo de valuación discreta con respecto a la valuación v, y $\widehat{F}$ su completado. Entonces la valuación v^* sobre $F(X)$ definida en el Ejemplo 5 sección 2.2.1 se puede extender de manera natural a $\widehat{F}((X))$. Para $f(X) = \sum_{n\geq m} \alpha_n X^n$, $\alpha_n \in F$, $\alpha_m \neq 0$, sea

$$v^*(f(X)) = (m, \widehat{v}(\alpha_m)).$$

El anillo de enteros de v^* sobre $\widehat{F}((X))$ es $\mathcal{O}_{\widehat{v}} + X\widehat{F}[[X]]$.

2.4. Estructura de los Cuerpos de Valuación Discreta Completos

En esta sección se presentarán algunas definiciones y teoremas de estructura para cuerpos de valuación discreta completos. Se pueden ver las demostraciones en [3]. Se sabe que existen 3 casos: Dos casos de igual característica, cuando $Char(F) = Char(\overline{F}) = 0$ o $Char(F) = Char(\overline{F}) = p > 0$, y uno de diferente característica, cuando $Char(F) = 0$, $Char(\overline{F}) = p > 0-$

Un conjunto T se llamará un conjunto de representantes para un cuerpo valuado F si $T \subset \mathcal{O}_v$, $0 \in T$ y la aplicación canónica $T \to \mathcal{O}_v/\mathcal{M}_v = \overline{F}$ es una biyección. Se escribirá como $rep : \overline{F} \to T$ a la inversa de esta aplicación. Para un conjunto S se denota por $(S)_n^{\infty}$ el conjunto de todas sucesiones $(a_i)_{i \geq n}$, $a_i \in S$. Sea $(S)_{-\infty}^{\infty}$ la unión de conjuntos decrecientes $(S)_n^{\infty}$ donde n tiende a menos infinito.

Sea F un cuerpo de valuación discreta completo con anillo de enteros $\mathcal{O}$ y cuerpo residual $\overline{F}$. Sea π un elemento primo y T un conjunto de representantes de $\overline{F}$.

Proposición 2.23. *Todo elemento $a \in \mathcal{O}$ puede escribirse de manera única como una serie convergente*

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \pi^n, \quad con \quad \theta_n \in T.$$

y todo elemento $\alpha \in F$ se puede escribir de manera única como

$$\alpha = \sum_{n > -\infty} \theta_n \pi^n, \quad con \quad \theta_n \in T.$$

A continuación se introducirá un conjunto especial de representantes T que es cerrado con respecto a la multiplicación, para describir los coeficientes de las sumas y productos de series de potencia convergentes.

Definición 2.24. Asumamos que $Char(\overline{F}) = p > 0$. Sea $a \in \overline{F}$. Un elemento $\alpha \in \mathcal{O}$ se dice un representante multiplicativo(Representante de Teichmüller) de a si $\overline{\alpha} = a$ y $\alpha \in \cap_{m \geq 0} F^{p^m}$.

Está definición es justificada por la siguiente proposición.

Proposición 2.25. *Un elemento $a \in \overline{F}$ tiene un representante multiplicativo si y sólo si $a \in \cap_{m \geq 0} \overline{F}^{p^m}$. El representante multiplicativo para cada a es único. Si a y b tienen como representantes multiplicativos α y β respectivamente, entonces $\alpha\beta$ es el representante multiplicativo de ab.*

Estos son algunos resultados importantes para el caso de igual característica.

Lema 2.26. *El anillo de enteros $\mathcal{O}_F$ contiene un cuerpo no trivial M si y sólo si $Char(F) = Char(\overline{F})$.*

Definición 2.27. Un cuerpo $M \subset \mathcal{O}_F$ es llamado un cuerpo de coeficientes en $\mathcal{O}_F$ si existe un isomorfismo sobre el cuerpo residual $\overline{M} = \overline{F}$.

Si existe tal cuerpo, este es un conjunto de representantes de $\overline{F}$ en $\mathcal{O}_F$, lo cual implica que en este caso F es isomorfo (algebraica y topológicamente) con el cuerpo $M((X))$, donde a un elemento primo π se le hace corresponder con X. Este isomorfismo depende de la selección de un cuerpo de coeficientes, el cual es algunas veces único y de la elección del elemento primo de F.

Proposición 2.28. *Sea $Char(\overline{F}) = 0$, entonces existe un cuerpo de coeficientes en $\mathcal{O}_F$. Un cuerpo de coeficientes se puede escoger de infinitas formas si y solo si $\overline{F}$ no es algebraico sobre $\mathbb{Q}$.*

Para tratar el caso de $Char(\overline{F}) = p$ consideremos las siguiente noción introducida por Teichmüller: Un conjunto de elementos diferentes $\theta_1, \cdots, \theta_n$ de $\overline{F}$ son llamados una $p-$base de $\overline{F}$, si

$$\overline{F} = \overline{F}^p[\{\theta_i\}] \qquad \text{y} \qquad |\overline{F}^p[\theta_1, \cdots, \theta_n] : \overline{F}^p| = p^n$$

para cada θ_i. El conjunto vacío es una $p-$base si y sólo si $\overline{F}$ es perfecto. Para un cuerpo imperfecto $\overline{F}$, una $p-$base $\Theta = \{\theta_i\}$ existe por el lema de Zorn, dado que cada conjunto maximal de elementos θ_i que satisface la segunda condición posee la primera propiedad. La definición de $p-$base implica que $\overline{F} = \overline{F}^{p^n}$ para $n \geq 1$.

Proposición 2.29. *Sea $Char(F) = p$. Si $\overline{F}$ es perfecto, entonces existe un cuerpo de coeficientes y este es único; este coincide con el conjunto de representantes multiplicativos de $\overline{F}$ en $\mathcal{O}_F$. Si $\overline{F}$ es imperfecto, entonces existen infinitos cuerpos de coeficientes.*

En resumen: dado un cuerpo de valuación discreta completo F, si $Char(F) = Char(\overline{F}) = 0$ ó $Char(F) = Char(\overline{F}) = p > 0$, entonces

$$F \simeq \overline{F}((X)).$$

Las definiciones y resultados que se presentan a continuación nos sirven para presentar la estructura de un cuerpo de valuación discreta completo que cumple $Char(F) = 0$, $Char(\overline{F}) = p > 0$.

Sea $A = \mathbb{Z}[X_0, X_1, \cdots, Y_0, Y_1, \cdots]$ el anillo de polinomios en variables $X_0, X_1, \cdots, Y_0, Y_1, \cdots$ con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Se introducen los polinomios

$$W_n(X_0, \cdots, X_n) = \sum_{i=0}^{n} p^i X_i^{n-i}, \;\; n \geq 0$$

En particular $W_0(X_0) = X_0$, $W_1(X_0, X_1) = X_0^p + pX_1$.

Proposición 2.30. *Existen polinomios únicos*

$$w_n^*(X_0, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n) \in A, \; n \geq 0$$

que satisfacen la ecuación

$$W_n(X_0, \cdots, X_n) * W_n(Y_0, \cdots, Y_n) = W_n(w_0^{(*)}, \cdots, w_n^{(*)})$$

para $n \geq 0$, donde $* = +$ o $* = \times$. Y los polinomios

$$w_n^*(X_0, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n)^p - w_n^*(X_0^p, \cdots, X_n^p, Y_1^p, \cdots, Y_n^p)$$

pertenecen a pA.

Construcción del Anillo de Witt:

Sea B un anillo conmutativo con unidad. Dados los polinomios

$$W_n(X_0, \cdots, X_n) = \sum_{i=0}^{n} p^i X_i^{n-i}, \;\; n \geq 0$$

sobre B, sean las imágenes de los polinomios $W_n \in \mathbb{Z}[X_0, \cdots, X_n]$ (definidos anteriormente) bajo el homomorfismo natural $\mathbb{Z} \to B$. Para $(a_i)_{i\geq 0}$, haciendo

$$(a^{(i)}) = (W_0(a_0), W_1(a_0, a_1), \cdots) \in (A)_0^{\infty};$$

Las sucesiones $(a_i) \in (B)_0^{\infty}$ son llamadas Vectores de Witt, y las componentes (a^i) para $i \geq 0$ son llamadas las componentes fantasma del vector de Witt (a_i). La aplicación $(a_i) \mapsto (a^{(i)})$ es una biyección de $(B)_0^{+\infty}$ sobre $(B)_0^{+\infty}$ si p

es un elemento invertible en B. Transfiriendo la estructura de anillo de $(a^{(i)}) \in (B)_0^{+\infty}$ bajo la suma y multiplicación componente a componente sobre $(a_i) \in (B)_0^{+\infty}$. Entonces para $(a_i), (b_i) \in (B)_0^{+\infty}$ se tiene

$$(a_i) * (b_i) = (w_0^{(*)}(a_0, b_0), w_1(a_0, a_1, b_0, b_1), \cdots)$$

para $* = +$ ó $= \times$, donde los polinomios w_i^* son las imágenes de los polinomios $w_i^{(*)} \in \mathbb{Z}[X_0, X_1 \cdots, Y_0, Y_1, \cdots]$ bajo el homomorfismo canónico $\mathbb{Z} \to B$. Si p es invertible en B, entonces el conjunto de vectores de Witt es claramente un anillo conmutativo bajo las operaciones definidas anteriormente. En el caso general cuando p no es invertible en B, la propiedad del conjunto $(B)_0^{+\infty}$ de ser un anillo conmutativo bajo las operaciones $+, \times$ definidas anteriormente puede expresarse vía ciertas ecuaciones para los coeficientes de los polinomios $w_i^{(*)} \in B[X_0, X_1 \cdots, Y_0, Y_1, \cdots]$. Esto implica que si el anillo B satisface estas condiciones, entonces lo mismo es cierto para un subanillo, el anillo cociente y el anillo de polinomios. Así, para todo anillo se puede obtener de esta forma un anillo $\mathcal{B}$ en el cual p es invertible, se deduce que bajo la imagen en B de las operaciones definidas anteriormente para $\mathcal{B}$ el conjunto $(B)_0^{+\infty}$ es un anillo conmutativo con unidad $(1, 0, 0, \cdots)$. Este anillo es llamado el Anillo de Witt de B y es denotado $W(B)$. Si B es un dominio entero entonces $W(B)$ es un dominio entero.

Teorema 2.31. *Sea K un cuerpo perfecto de característica p. Para un vector de Witt $\alpha = (a_0, a_1, \cdots) \in W(K)$ sea*

$$v(\alpha) = \min\{i : a_i \neq 0\} \quad si, \quad \alpha \neq 0, \qquad v(0) = +\infty$$

Sea F_0 el cuerpo de fracciones de $W(K)$ y $v : F_0^* \to \mathbb{Z}$ la extensión de v a $W(K)$ $(v(\alpha\beta^{-1}) = v(\alpha) - v(\beta))$. Entonces v es una valuación discreta sobre F_0 y F_0 es cuerpo de valuación discreta completo de característica 0 con anillo de enteros $W(K)$ y cuerpo residual isomorfo a K.

2.5. Extensiones de Cuerpos Valuados

Sea F un cuerpo y L una extensión de F el cual es un cuerpo de valuación discreta con respecto a la valuación v, con valores en el grupo Γ'. Entonces v induce una valuación v_0 sobre F. Bajo estas condiciones se dice que L/F es una extensión de cuerpos valuados.

Definición 2.32. El número $e = |v(L^*)/v_0(F^*)|$ es llamado el índice de ramificación $e(L/F, v)$ de la extensión L/F.

Definición 2.33. El número $f = |\overline{F}_v : \overline{F}_{v_0}|$ es llamado el grado residual de L/F y se denota $f(L/F, v)$.

Sea K un cuerpo de valuación discreta completo con cuerpo residual $\overline{K}$ de característica positiva p.

En el caso de característica diferente, es decir $Char(K) = 0$, fijamos el cuerpo k, el cual consiste de todos los elementos que son algebraicos sobre el cuerpo de fracciones k_0 de $W(F)$, donde $F = \cap \overline{K}^{p^i}$.

En el caso de igual característica, fijamos un subcuerpo de la base k_0 en K el cual es completo con respecto a la valuación inducida y su cuerpo residual es $\mathbb{F}_p$. Es claro que k_0 es igual a $k_0((\alpha))$ para algún $\alpha \in K$, donde la valuación de α es positiva. En este caso, k denota la clausura algebraica de k_0F en K. En ambos casos, k se llamará el subcuerpo constante de K.

Teorema 2.34. *(Teorema de Epp) Sea L/K una extensión finita de un cuerpo de valuación discreta completo, k el subcuerpo constante de K. Entonces existe una extensión finita l/k tal que $e(lL/kK) = 1$.*

Capítulo 3

Cuerpos Locales n-dimensionales

En esta capítulo se presentarán algunas definiciones y teoremas de estructura para los cuerpos locales de dimensión superior. Todas las definiciones y demostraciones son tomados de [11].

3.1. Definición

Definición 3.1. Un cuerpo K se dice que tiene estructura de cuerpo local n-dimensional sobre un cuerpo finito K_0, si K es un cuerpo de valuación discreta completo con respecto a $v = v_n$ y existe una cadena de cuerpos

$$K = K_n, K_{n-1}, \cdots, K_1, K_0,$$

donde cada K_{i+1} es un cuerpo de valuación discreta completo con respecto a la valuación v_{i+1} con cuerpo residual K_i para $1 \leq i \leq n-1$, y K_0 es un cuerpo finito. El cuerpo $k_K = K_{n-1}$ es llamado el primer cuerpo residual de K y K_0 el último cuerpo residual.
El cuerpo finito $\mathbb{F}_q$ con q elementos es llamado un cuerpo local 0-dimensional.

3.1.1. Ejemplos

1. $F = \mathbb{F}_q((X))$ es un cuerpo local 1−dimensional,

$$K_1 = F_q((X)),$$
$$K_0 = F_q.$$

2. Sea F una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$. F es cuerpo local 1−dimensional,

$$K_1 = F,$$
$$K_0 = \mathbb{F}_q,$$

donde $q = p^f$.

3. Sea F un cuerpo local $(n-1)$−dimensional y $K = F((X))$ el cuerpo de series de Laurent con coeficientes en F, con la valuación

$$\upsilon\left(\sum_{i=-m}^{\infty} a_i X^i\right) = -m$$

Esta valuación hace a $F((X))$ un cuerpo local n−dimensional con cuerpo residual F.

$F = \mathbb{Q}_p((X_1))\cdots((X_n))$ y $F = K((X_1))\cdots((X_{n-1}))$, donde K es una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$, son cuerpos locales n−dimensionales.

4. Dado un cuerpo de valuación discreta completo F sea

$$K = F\{\{T\}\} = \left\{\sum_{-\infty}^{+\infty} a_i T^i \ : \ a_i \in F, \ \inf \upsilon_F(a_i) > -\infty, \ \lim_{i\to-\infty} \upsilon_F(a_i) = +\infty\right\}$$

el cuerpo de series formales de Laurent acotadas con coeficientes en K, se define sobre K la siguiente valuación

$$\upsilon_K\left(\sum_{-\infty}^{\infty} a_i T^i\right) = \inf(\upsilon_F(a_i)),$$

entonces K es un cuerpo local 2-dimensional,

$$K_2 = F\{\{T\}\},$$
$$K_1 = k_F((t)),$$
$$K_0 = k_F.$$

Primero veamos que v_K es una valuación, puesto que $\inf_{v_F}(a_i) > -\infty$ el mínimo siempre existe. Sean $f = \sum f_i X^i$ y $g = \sum g_i X^i$, se sabe que $v_F(f_i + g_i) \geq \text{mín}(v_F(f_i), v_F(g_i))$, así

$$\text{mín}_{i\in\mathbb{N}} v_F(f_i + g_i) \geq \text{mín}_{i,j\in\mathbb{N}}(v_F(f_i), v_F(g_j)) = \text{mín}(v_F(f), v_F(g))$$

entonces $v_K(f + g) \geq \text{mín}(v_K(f), v_K(g))$.

Ahora, supongamos que $v_K(f) = v(f_n)$ y $v_K(g) = v(g_m)$ donde $v_F(f_i) > v_F(f_n)$ y $v_F(g_j) > v_F(g_m)$ con $i < n$ y $j < m$. Sea $fg = h = \sum h_s X^s$. Vamos a mostrar que

$$\text{mín}\, v_F(h_s) = v_F(h_{n+m}) = v_F\left(\sum_{i+j=n+m} f_i g_j\right).$$

Si $i < n$ entonces como $v(f_n)$ y $v(g_m)$ son mínimos y sus índices también son mínimos, $v_F(f_i) > v_F(f_n)$ y $v_F(g_j) \geq v_F(g_m)$, de esto se concluye la siguiente desigualdad estricta

$$v_F(f_i g_i) \gneqq v_F(g_n g_m) \qquad \text{con } i \neq n$$

entonces $v(h_{n+m}) = v(f_n g_m)$. También está claro que $\text{mín}_{i,j} \geq v_F(f_n g_m)$, así $v_K(h) \geq v_K(f) + v_K(g)$. Por lo tanto, se obtiene $v_K(h) = v_K(f) + v_K(g)$. Así v es realmente una valuación.

Ahora veamos que $F\{\{X\}\}$ es completo con respecto a la valuación v_K. Sea f_n una sucesión de Cauchy en $F\{\{X\}\}$. Esto significa que cuando n, m tienden a infinito $v_K(f_n - f_m) = \text{mín}\, v_F(f_{n_i} - f_{m_i})$ tiende a infinito. Por tanto, para cada $i \in \mathbb{Z}$, f_{n_i} es una sucesión de Cauchy en F con respecto a v_F. Dado que F es un cuerpo completo, la sucesión f_{n_i} converge a un único punto en F. Sea

$$\alpha_i = \text{lím}\, f_{n_i} \qquad \text{para}\, i \in \mathbb{Z}.$$

Ahora, uno puede fácilmente demostrar que $\sum \alpha_i X^i = \text{lím}\, f_n$, lo cual significa que $F\{\{X\}\}$ es completo con respecto a v_K.

Un elemento $f \in F\{\{X\}\}$ es un elemento del anillo de enteros $\mathcal{O}_{v_K}$ si y sólo si $\text{mín}\, v_F(f_i) \geq 0$, y $f \in \mathcal{M}_{v_K}$ si y sólo si $\text{mín}\, v_F(f_i) > 0$. Esto significa $\mathcal{O}_{v_K} = \mathcal{O}_{v_F}\{\{X\}\}$ y $\mathcal{M}_{v_K} = \mathcal{M}_{v_F}\{\{X\}\}$. Definiendo

$$\varphi : \mathcal{O}_{v_K} = \mathcal{O}_{v_F}\{\{X\}\} \to \mathcal{O}_{v_F}/\mathcal{M}_{v_F}((t))$$

como $\sum a_i X^i \mapsto \sum \overline{a_i} t^i$ se tiene que φ es un homomorfismo de anillos, el cual es sobre y su núcleo es $\mathcal{M}_{v_K}\{\{X\}\}$. Así, el cuerpo residual de $F\{\{X\}\}$ es el cuerpo de series de Laurent con coeficientes en el cuerpo residual de F.

5. Sea F un cuerpo de valuación discreta completo y consideremos el cuerpo $K = F\{\{X\}\}\{\{Y\}\}$. Entonces el cuerpo residual de K es $F'((t_1))$ donde F' es el cuerpo residual de $F\{\{X\}\}$, $F' = \overline{F}((t_2))$. Por lo tanto, el cuerpo residual de K es $\overline{F}((t_1))((t_2))$. Así $K = F\{\{X\}\}\{\{Y\}\}$ es un cuerpo local $3-$dimensional

$$\begin{aligned} K_3 &= F\{\{X\}\}\{\{Y\}\}, \\ K_2 &= k_F((t_1))((t_2)), \\ K_1 &= k_F((t_1)), \\ K_0 &= k_F. \end{aligned}$$

Definición 3.2. Sea k un cuerpo local, los cuerpos

$$k\{\{X_1\}\}\cdots\{\{X_m\}\}((X_{m+2}))\cdots((X_n)) \qquad 0 \leq m \leq n-1,$$

son cuerpos locales n-dimensionales y son llamados Cuerpos Estándar.

Lema 3.3. *$K_1 = K((X))\{\{Y\}\}$ es isomorfo a $K_2 = K((Y))((X))$*

Demostración. Se define $\Phi : K((X))\{\{Y\}\} \to K((Y))((X))$ como sigue, dado $\alpha \in K((X))\{\{Y\}\}$

$$\alpha = \sum_{-\infty}^{\infty} f_i(X) Y^i \in K((X))\{\{Y\}\},$$

donde

$$f_i(X) = \sum_{j \gg -\infty}^{\infty} a_j^{(i)} X^j,$$

y

$$\Phi(\alpha) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_r(Y) X^r$$

donde $g_r(Y) = \sum a_r^{(i)} Y^i$. Primero veamos que el rango de Φ es realmente $K((Y))((X))$. Para ver esto, debemos mostrar que $g_r(Y) = 0$ para la mayoría de números negativos r. Supongamos que para todo $k \in \mathbb{Z}$ existe $r < k$ tal que $g_r(Y) = \sum a_r^{(i)} Y^i \neq 0$. Esto significa, para algún $i \in \mathbb{Z}$, el coeficiente $a_r^{(i)} \neq 0$. Así concluimos que $v(f_r) = r < k$, por lo tanto $\operatorname{ínf} v(f_j) = -\infty$, lo cual es imposible. Sea

$$v_{K_1}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} f_i(X) Y^i\right) = k,$$

lo cual significa

$$\begin{aligned} \operatorname{mín}\{v_X(f_i(X)) : i \in \mathbb{Z}\} &= \operatorname{mín}_{i,j \in \mathbb{Z}}\{j \in \mathbb{Z} : a_j^{(i)} \neq 0\} \\ &= v_X(f_k(X)) \\ &= \operatorname{mín}\{j \in \mathbb{Z} : a_j^{(k)} \neq 0\} \end{aligned}$$

y por otra parte

$$\begin{aligned} v_{K_2}(\Phi(\alpha)) &= v_{K_2}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} g_r(Y) X^r\right) \\ &= \operatorname{mín}_{r \in \mathbb{Z}}\{v_Y(g_r(Y))\} \\ &= \operatorname{mín}_{r \in \mathbb{Z}}\{j \in \mathbb{Z} : a_r^{(j)} \neq 0\} \\ &= \operatorname{mín}\{j \in \mathbb{Z} : a_j^{(k)} \neq 0\} \\ &= k. \end{aligned}$$

Así tenemos el lema. □

Nota 2. En particular $\mathbb{F}_q\{\{X\}\} = \mathbb{F}_q((X))$.

3.2. Sistema de Parámetros Locales

Definición 3.4. Una $n-$upla de elementos $(t_1 \cdots t_n) \in K^n$ es llamada un sistema de parámetros locales de K, si t_i es una unidad en K_j para $j > i$ y la clase residual de t_i en K_i es un elemento primo para $1 \leq i \leq n$.

Lema 3.5. *Sea k un cuerpo local. Para el Cuerpo Estándar*

$$K = k\{\{X_1\}\} \cdots \{\{X_m\}\}((X_{m+2})) \cdots ((X_n)),$$

la n-upla $(X_1, \cdots, X_m, \pi, X_{m+2}, \cdots, X_n)$ donde π es un elemento primo de k, forma un sistema de parámetros locales para K.

Demostración. Sea i un índice donde $m + 1 < n - i \leq n$. Entonces

$$K_{n-i} = k\{\{X_1\}\} \cdots \{\{X_m\}\}((X_{m+2})) \cdots ((X_{m-i})).$$

De este modo X_{m-i} es un elemento primo de K_{n-i}, y se sabe que X_{m-i} es constante en K_{n-i+1} lo cual significa que es una unidad en $\mathcal{O}_j$ para $j > m - i$. □

Este sistema de parámetros locales es llamado el sistema canónico de parámetros locales.

Dado un cuerpo local $n-$dimensional, sea m el máximo subíndice tal que $Char(K_m) = p$; tenemos $0 \leq m \leq n$. Así, hay $n + 1$ tipos de cuerpos locales $n-$dimensionales: Cuerpos de característica p y cuerpos con $Char(K_{m+1}) = 0$, $char(K_m) = p$, $0 \leq m \leq n - 1$. Así el caso de característica mixta es el caso $m = n - 1$.

Supongamos $Char(k_K) = p$, es decir, m es igual a $n - 1$ o n. Entonces el conjunto de representantes de Teichmüller T en $\mathcal{O}_K$ es un cuerpo isomorfo a K_0.

3.3. Teorema de Clasificación

Podemos clasificar un cuerpo local K cin respecto a su característica y la de $\overline{K}$, existen 3 casos:

1. $Char(K) = Char(\overline{K}) = 0$
2. $Char(K) = Char(\overline{K}) = p > 0$
3. $Char(K) = 0$, $Char(\overline{K}) = p > 0$

El siguiente Teorema dado por Parshin, clasifica los Cuerpos Locales n-dimensionales en términos de los Cuerpos Estándar.

Teorema 3.6. ***Teorema de Clasificación (Parshin)*** *Sea K un cuerpo local n-dimensional y*

$$K = K_n, K_{n-1}, ..., K_1, K_0$$

su correspondiente cadena de cuerpos de valuación discreta completos entonces,

1. *Si $Char(K_n) = p > 0$, entonces K es isomorfo a:*

$$\mathbb{F}_q((X_1)) \cdots ((X_n));$$

2. *Si $Char(K_1) = 0$, entonces K es isomorfo a:*

$$k((X_1)) \cdots ((X_{n-1}));$$

   donde k es un cuerpo local de característica 0.

3. *Si $Char(K_{m+1}) = 0$ y $Char(K_m) = p$, entonces K es isomorfo a una extensión finita de un cuerpo estándar de la forma*

$$k\{\{X_1\}\} \cdots \{\{X_m\}\}((X_{m+2})) \cdots ((X_n));$$

   además, existe una extensión finita de K la cual es un cuerpo estándar.

3.3.1. Prueba en el Caso de Igual Característica

1. Si $Char(K) = p > 0$. Entonces $Char(K_i) = p > 0$ para todo i, en particular $Char(K_1) = p > 0$, es decir K_1 es un cuerpo de valuación discreta completo de característica p. Por el teorema de estructura de los cuerpos de valuación discreta completos de característica p, K_1 es isomorfo a $\overline{K_1}((X_1)) = K_0((X_1))$. Pero K_0 es un cuerpo finito, de este modo $K_1 = \mathbb{F}_q((X_1))$, donde $q = p^f$, para algún entero positivo f. Usando de nuevo el mismo argumento se deduce que $K = \mathbb{F}_q((X_1)) \cdots ((X_n))$.

2. Si la característica de K_1 es cero entonces,
$Char(K_0) = p > 0$ y $Char(K_n) = \cdots = Char(K_1) = 0$, usando el teorema de estructura de los cuerpos de valuación discreta completos de igual característica, se deduce que:

$$K_n = K_{n-1}((X_{n-1})),$$

$$K_{n-1} = K_{n-2}((X_{n-2})),$$

$$\vdots$$

$$K_2 = K_1((X_1)),$$

donde $K_1 \simeq k$ y k es una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$ de esta forma tenemos $K = k((X_1)) \cdots ((X_{n-1}))$.

3.3.2. Prueba en el Caso de Característica Diferente

Suponiendo que estamos en la tercera situación, sin pérdida de generalidad vamos a asumir que la característica de K es igual a cero, y la característica de K_{n-1} es igual a p. Entonces, por los anteriores argumentos

$$K_{n-1} = \mathbb{F}_q((X_1)) \cdots ((X_{n-1})).$$

Sea $k_0 = Q(W(\mathbb{F}_q))$ el cuerpo de fracciones del anillo de witt $W(\mathbb{F}_q)$ sobre $\mathbb{F}_q$, se sabe que k_0 es un cuerpo de valuación discreta completo con cuerpo residual $\mathbb{F}_q$. Ahora sea

$$K' = \{\{t_1\}\} \cdots \{\{t_{n-1}\}\}$$

donde $t_1, \cdots, t_{n-1}, \pi$ es un sistema de parámetros locales de K. Entonces el cuerpo residual de K' es igual al cuerpo

$$k_0\{\{\overline{t_1}\}\} \cdots \{\{\overline{t_{n-1}}\}\} \simeq \mathbb{F}_q((X_1)) \cdots ((X_{n-1})) = K_{n-1}$$

Se sabe que el cuerpo K se sumerge en K'. Dado que el grado residual

$$f = f(K/K') = [\overline{K} : \overline{K'}]$$

es finito. La extensión K/K' es finita. Ahora por el Teorema de Epp existe una extensión finita $k = k_0(\alpha)$ de k_0, tal que $e(kK/kK') = 1$. De este modo solo se debe mostrar que el cuerpo kK, el cual es una extensión finita sobre K, es un cuerpo estándar. Lo cual se sigue del siguiente lema.

Lema 3.7. *Sea L una extensión finita de un cuerpo estándar*

$$K = k\{\{X_1\}\} \cdots \{\{X_m\}\}((X_{m+2})) \cdots ((X_n))$$

Si $e(L/K) = 1$, entonces L es un cuerpo estándar.

Demostración. Sin perdida de generalidad se asume que

$$L = K(\alpha),$$

para algún α en la clausura algebraica de K. Obsérvese que el lema se tiene si α es algebraico sobre el cuerpo

$$K_{n-1} = k\{\{X_1\}\} \cdots \{\{X_m\}\}((X_{m+2})) \cdots ((X_{n-1})).$$

Supongamos que α no es algebraico sobre K_{n-1}. Se sabe que la clausura algebraica de K esta contenida en el cuerpo de series de Puiseux sobre k^a en las variables $X_1, \cdots, X_m, X_{m+2}, \cdots, X_n$ dado por

$$k^a\{\{X_1^{\mathbb{Q}}\}\} \cdots \{\{X_m^{\mathbb{Q}}\}\}((X_{m+2}^{\mathbb{Q}})) \cdots ((X_n^{\mathbb{Q}})).$$

Sea

$$\alpha = \sum_{q \in \mathbb{Q}} c_q X_n^q,$$

donde c_q es un elemento de la serie de Puiseux sobre K_{n-1}. Como α no es algebraico sobre K_{n-1}, existe $q \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, tal que $c_q \neq 0$. Multiplicando por una potencia adecuada de X_n, se puede asumir que $c_q < 0$. En este caso se tendría que la valuación de α dada por la norma trazada es un número racional, lo cual contradice el hecho que el índice de ramificación $e(L/K)$ de L/K es 1. $\square$

3.4. Estructura del Ideal $\mathcal{O}_k$

Primero se dará una definición no estándar para el orden lexicográfico en $\mathbb{Z}^n$, dada por Madnuts y Zhukov.

Definición 3.8. El orden lexicográfico de $\mathbb{Z}^n$ es definido de la siguiente forma. Se dirá que $i = (i_1, \cdots, i_n) < j = (j_1, \cdots, j_n)$ si y sólo si

$$i_l < j_l, i_{l+1} = j_{l+1}, \cdots, i_n = j_n \qquad \text{para algún } l \leq n.$$

Ahora se introducirá la aplicación:

$$\upsilon = (v^{(1)}, \cdots, v^{(n)}) : K^* \to \mathbb{Z}^n$$

definida por

$$v^{(i)}(\alpha) = v_i(\overline{\alpha t_n^{-v^n(\alpha)}, \cdots t_{i+1}^{-v^{i+1}(\alpha)}}), \qquad \text{para } 1 \leq i \leq n.$$

Lema 3.9. *La valuación $\upsilon : K^* \to\ Z^n \cup \{\infty\}$ definida anteriormente, es una valuación discreta de rango n.*

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in K$. Se tiene que mostrar que $v^{(n-j)}(\alpha\beta) = v^{(n-j)}(\alpha)+ v^{(n-j)}(\beta)$ para $0 = j < i \leq n-1$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
v^{(n-i)}(\alpha\beta) =&\ v_i(\overline{\alpha\beta t_n^{-v^{(n)}(\alpha\beta)} \cdots t_{i+1}^{-v^{(i+1)}(\alpha\beta)}}) \\
&= v_i(\overline{\alpha t_n^{-v^{(n)}(\alpha)} \cdots t_{i+1}^{-v^{(i+1)}(\alpha)} \beta t_n^{-v^{(n)}(\beta)} \cdots t_{i+1}^{-v^{(i+1)}(\beta)}}) \\
&= v_i(\overline{\alpha t_n^{-v^{(n)}(\alpha)} \cdots t_{i+1}^{-v^{(i+1)}(\alpha)}}) + v_i(\overline{\beta t_n^{-v^{(n)}(\beta)} \cdots t_{i+1}^{-v^{(i+1)}(\beta)}}) \\
&= v^{(i)}(\alpha) + v^{(i)}(\beta),
\end{aligned}$$

lo cual significa que υ es un homomorfismo de grupos.

□

Lema 3.10. *Sea K un cuerpo local $n-$dimensional con respecto a una valuación υ de rango n. Entonces el anillo local $O_\upsilon = \{\alpha \in K : \upsilon(\alpha) \geq 0\}$ es llamado el anillo de enteros de K, con ideal maximal $M_\upsilon = \{\alpha \in K : \upsilon(\alpha) > 0\}$.*

Lema 3.11. *El cuerpo residual O_v/M_v es isomorfo a el último cuerpo residual K_0 de K.*

Definición 3.12. Para $1 \leq l \leq n$ sea $P(i_l, \cdots, i_n) = P_K(i_l, \cdots, i_n) = \{\alpha \in K : (v^{(l)}(\alpha), \cdots, v^{(n)}(\alpha)) \leq (i_l, \cdots, i_n)\}$. En particular $P(\underbrace{0, \cdots, 0}_{n-veces}) = \mathcal{O}_K$ y $P(1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{(n-1)-veces}) = \mathcal{M}_K$

Lema 3.13. *El anillo $\mathcal{O}_K$ no es Noetheriano.*

3.5. Estructura del Grupo K^*

Definición 3.14. El grupo multiplicativo

$$U_K = \mathcal{O}_K^*$$

es llamado el grupo de las unidades con respecto a v, y el subgrupo multiplicativo

$$V_K = 1 + \mathcal{M}_K$$

de U_K es llamado las unidades principales con respecto a v. Para $1 \leq l \leq n$ los grupos multiplicativos

$$U_K(i_l, \cdots, i_n) = 1 + P(i_l, \cdots, i_n),$$

para todo $(i_l, \cdots, i_n) \in \mathbb{Z}^{n-l}$ son llamados altos grupos de unidades con respecto a v.

Lema 3.15. *Consideremos los representantes de Teichmüller $T = \{[\alpha] : \alpha \in K_0\}$ del último cuerpo residual K_0 en K. Entonces*

$$U_K \simeq T \oplus V_K.$$

Si además $(t_n, \cdots, t_1)$ es un sistema de parámetros locales de K, entonces

$$K^* \simeq \mathbb{Z}t_1 \oplus \cdots \mathbb{Z}t_n \oplus U_K.$$

3.6. Extensiones

Sea L/K una extensión finita de un cuerpo. Si K es un cuerpo local $n-$dimensional, entonces L también lo es.

Definición 3.16. Sean $t_1, \cdots, t_n$ un sistema de parámetros locales de K y $t'_1, \cdots, t'_n$ un sistema de parámetros locales de L. Sean v, v' sus valuaciones correspondientes. Sea

$$E(L|K) := (v'_j(t_i))_{i,j} = \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & e_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & e_n \end{pmatrix},$$

donde $e_i = e_i(L|K) = e(L_i|K_i)$ para $i = 1, \cdots, n$. Entonces e_i no depende de la elección de los parámetros y

$$[L : K] = f(L|K) \det(E(L|K)),$$

donde $f(L|K) = |L_0 : K_0|$.

Capítulo 4

Topología de los Cuerpos Locales de Dimensión Superior

En este capítulo se definirá de manera inductiva la topología sobre K^+ y K^*, donde K es un cuerpo local $n-$dimensional. Se presentarán algunas propiedades de las topologías, todos los resultados y demostraciones son tomados de [3], [8], [11] y [12].

4.1. Topología sobre K^+

La topología dada por la valuación discreta en un cuerpo local $n-$dimensional K no es adecuada para el estudio de las propiedades aritméticas de K, puesto que no es localmente compacta. Es por esta razón que Parshin buscó otras formas de dotar a K de una topología que esté íntimamente ligada con la topología de los otros cuerpos de la cadena $K = K_n,\ K_{n-1},\ \ldots,\ K_0$. La construcción es inductiva por esta razón es suficiente estudiar el caso de un cuerpo local $2-$dimenional, aquí tenemos tres casos, dos de igual característica y uno de característica diferente

a) $K_0 = \mathbb{F}_q$, $\mathrm{Char}(K_1) = \mathrm{Char}(K_2) = p$, en este caso $K_2 = \mathbb{F}_q((x_1))((x_2))$.

b) $K_0 = \mathbb{F}_q$, $\mathrm{Char}(K_1) \neq \mathrm{Char}(K_2) = p$, en este caso $K_2 = K\{\{T_1\}\}$, donde

$K/\mathbb{Q}_p$ es finita.

c) $K_0 = \mathbb{F}_q$, $\mathrm{Char}(K_1) = \mathrm{Char}(K_2) = 0$, en este caso $K_2 = K((x_1))$, donde $K/\mathbb{Q}_p$ es finita.

Primero estudiaremos el caso de igual característica, en este caso K_2 es un cuerpo de series de Laurent. Supondremos inductivamente que K es un cuerpo con una topología Hausdorff tal que la adición y la multiplicación por un elemento fijo son continuas, supongamos que F es un cuerpo de valuación discreta con cuerpo residual K y con la misma característica de K. En este caso podemos suponer que $F = K((t))$, usando esta identificación levantaremos la topología de K a F y mostraremos que de esta manera las propiedades que teníamos en K se mantienen en F.

Después estudiaremos el caso de característica diferente, en este caso K_2 es un cuerpo estándar. La construcción de la topología en este caso es similar al caso de la series de Laurent.

Para un cuerpo estándar de característica mixta, que es

$$K_n = k\{\{X_1\}\}\cdots\{\{X_m\}\}((X_{m+2}))\cdots((X_n)),$$

la combinación de estas dos construcciones lo dotará de una topología.

4.1.1. Topología de las series de Laurent $K((X))$

Sea C la subclase de las sucesiones de vecindades de cero en K, donde un sucesión de vecindades de cero $(U_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ está contenida en C si y solo si $U_i = K$ para casi todos los enteros positivos i.

Se supondrá que K que tiene una estructura topológica sobre él. Por razones técnicas, siempre se asumirá que la suma es una aplicación continua y la multiplicación es secuencialmente continua.

Se construirá la topología sobre $F = K((X))$ de la siguiente forma: para

$(U_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in C$ sea,

$$U_{\{U_i\}} := \left\{ \sum_{i\gg -\infty}^{\infty} a_i X^i \ :\ a_i \in U_i \right\}.$$

Es claro que para $(U_i)_{i\in\mathbb{Z}}, (V_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in C$ se tiene $(U_i \cap V_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in C$ y $U_{\{U_i\}} \cap U_{\{V_i\}} = U_{\{U_i \cap V_i\}}$, así se hace del conjunto de conjuntos

$$\mathfrak{B} := \{U_{(U_i)} \ :\ (U_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in C\}$$

una base de vecindades de 0 en $K((X))$. Sea $u^{(n)}$ una sucesión en $K((X))$ convergente a cero con respecto a la topología definida anteriormente. Sea $k \in \mathbb{Z}$ fijo y V una vecindad de cero en K. Sea $U_i = K$ si $i \neq k$ y $U_k = V$. Dado que $u^{(n)} \to 0$, existe un entero positivo N tal que para $m > N$ se tiene

$$u^{(m)} \in U_{(U_i)} := \left\{ \sum_{i\gg -\infty}^{\infty} a_i X^i \ :\ a_i \in U_i \right\},$$

lo cual significa $a_i^{(m)} \subset V$. Así se concluye que para un entero fijo k, la sucesión $a_k^{(m)}$ tiende a 0. Ahora, se asumirá que la topología sobre K es T_0. Supongamos que el conjunto $\{i \ :\ a_i^n \neq 0\}$ no es acotado inferiormente. En este caso, sin pérdida de generalidad se puede asumir que $a_{-n}^n \neq 0$. Así K es un espacio topológico T_0, en efecto para todo $n \in \mathbb{N}$, existe una vecindad abierta V_{-n} de 0 tal que $a_{-n}^{(n)} \notin V_{-n}$. Sea,

$$U_i = \begin{cases} V_i & \text{si } i < 0, \\ K & \text{si } i \geq 0. \end{cases}$$

Entonces claramente, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $u^{(n)} \notin U_{-n}$ lo cual contradice con el hecho que $u^{(n)}$ converge a 0. Así, el conjunto $\{i \ :\ a_i^n \neq 0\}$ es acotado inferiormente. Recíprocamente, sea

$$u^{(n)} = \sum_{i\gg -\infty}^{\infty} a_i^n X^i$$

una sucesión en $K((X))$. Supongamos que para un entero fijo i, la sucesión $a_i^{(n)}$ tiende a 0 como n va a infinito, y existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $u^{(n)} \in X^m K[[X]]$. Sea $(U_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in C$. Entonces por la definición de C, existe

$M \in \mathbb{N}$ tal que para $k > M$, existe N_i tal que cuando $n > N_i$ entonces $a_i^n \subset U_i$. Sea $N = \text{máx}\{N_i\}$, entonces para $n > N$ se tiene $a_i^{(n)} \in U_{U_i}$, lo cual significa que la sucesión $a_i^{(n)}$ tiende a cero en $K((X))$ con respecto a la topología definida anteriormente.

Así se tiene el siguiente lema.

Lema 4.1. *Una sucesión* $u^{(n)} = \sum_{i \gg -\infty}^{\infty} a_i^{(n)} X^i \in K((X))$ *converge a cero si y solo si existe un entero* m *tal que* $u^{(n)} \in X^m K[[X]]$ *para todo* n *y para cada* i *la sucesión* $a_i^{(n)}$ *es convergente a* $0 \in K$ *con respecto a la topología sobre* K.

Proposición 4.2. *La adición* $F \times F \to F$ *y la multiplicación por un elemento fijo* $F \to F$ *son continuas.*

Demostración. Es suficiente mostrar que la adición es continua en cero. Así supongamos que $U = \sum_i U_i X^i$ es una vecindad de cero en F. Como K es un grupo topológico existen vecindades de zero V_i tales que $V_i + V_i \subseteq U_i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Si $U_i = K$ podemos elegir $V_i = K$, en cualquier caso $V = \sum_i V_i X^i$ es una vecindad de cero en F tal que $V + V \subseteq U$, por lo tanto la adición es continua en F.

Ahora miremos la multiplicación por un elemento fijo de F, es claro que la multiplicación por cero es continua. Un elemento de $F^\times$ puede escribirse como fX^n donde $f \in \mathcal{O}_F^\times$ y $n \in \mathbb{Z}$, la multiplicación por X^n es continua, así solo debemos estudiar la multiplicación por la unidad f. Así sea $f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i$, y $U = \sum_i U_i X^i$ una vecindad de cero en F, sea l tal que $U_i = K$ para $i \geq l$, como K es un grupo topológico para cada $i \geq 0$ existen vecindades abiertas de cero $U_i^{(0)}, U_i^{(1)}, \ldots \subseteq K$ tales que

$$U_i^{(j)} + U_i^{(j)} \subseteq U_i^{(j-1)},$$

donde $U_i^{(-1)} = U_i$. Ahora definamos

$$V_j = \begin{cases} K & \text{si } j \geq l, \\ \cap_{r=j}^{l-1} \mu_{a_{r-j}}^{-1}(U_r^{(r-j)}) & \text{si } j < l, \end{cases}$$

donde $x \in \mu_{a_m}^{-1}(U)$ si, y sólo si $xa_m \in U$. De esta manera tenemos que para todo j, V_j es una vecindad de cero en K y por lo tanto $V = \sum V_j X^j$ es una vecindad de cero en F. Sea $g = \sum_{i \geq J} b_i X^i \in V$ debemos mostrar que $fg \in U$, para esto es suficiente verificar que para todo $r < l$ el $r-$ésimo coeficiente de fg está en U_r.

Si $r < J$ dicho coeficiente es cero, y si $r \geq j$ esto es inmediato de la definición de V_j. □

Definición 4.3. Sean T_1 y T_2 dos espacios topológicos, una función

$$f : T_1 \to T_2$$

se dice continua por sucesiones, si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en T_1 convergente a x la correspondiente sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ en T_2 converge a $f(x)$.

Proposición 4.4. *La multiplicación en la topología definida sobre $K((X))$ es continua por sucesiones.*

Demostración. Sean α_n y β_n dos sucesiones en $K((X))$ convergentes a cero. Se tiene que mostrar que la sucesión $\alpha_n\beta_n$ también converge a cero. Sean

$$\alpha_n = \sum_{i \gg -\infty}^{\infty} f_i^{(n)} X^i,$$

$$\beta_n = \sum_{i \gg -\infty}^{\infty} g_i^{(n)} X^i.$$

Dado que α_n y β_n convergen a cero, por el lema anterior para un i fijo, las sucesiones $f_i^{(n)}$ y $g_i^{(n)}$ convergen a cero y existe un $m \in \mathbb{Z}$ tal que α_n, β_n están contenidos en $X^m K[[X]]$, para todo n. Sea

$$\alpha_n\beta_n = \theta_n = \sum_{i \gg -\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=k+l} f_k^{(n)} g_l^{(n)} \right) X^i.$$

Es claro que $\theta_n \in X^{2m} K[[X]]$. Así para mostrar que θ_n tiende a cero, tenemos que mostrar que para un i fijo, la sucesión

$$\sum_{i=k+l} f_k^{(n)} g_l^{(n)}$$

converge a cero. Dado que K es secuencialmente compacto, vemos que para l, k fijos, la sucesión

$$f_k^{(n)} g_l^{(n)}$$

converge a cero. Dado que sólo hay un número finito de k, l tales que $i = k + l$ y $f_k^{(n)} \neq 0$, $g_l^{(n)} \neq 0$. La suma de estas converge a cero y así se tiene la proposición. $\square$

Lema 4.5. *Sea $(U_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in C$, entonces la clausura topológica $\overline{U}_{U_i}$, de los conjuntos U_{U_i} es igual a*

$$U_{\overline{U}_{i\mathbb{Z}}} := \left\{ \sum_{i \gg -\infty}^{\infty} a_i X^i \ : \ a_i \in \overline{U}_i \right\}$$

.

Proposición 4.6. *Sea K un cuerpo topológico T_0. Entonces la topología sobre $K((X))((Y)))$ definida anteriormente no es localmente compacta.*

4.1.2. Topología de las series de Laurent Acotadas $K\{\{X\}\}$

Igual que en la sección anterior se supondrá que K que tiene una estructura topológica sobre él. Por razones técnicas, siempre se asumirá que la suma es una aplicación continua y la multiplicación es secuencialmente continua.

Se sabe que $K\{\{X\}\}$ es un cuerpo local $2-$dimensional con cuerpo residual $k_K((t))$. Consideremos la subclase $C(K)$ de vecindades de cero en K, donde una sucesión de vecindades de cero $(U_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ está contenida en C si y sólo si

1. La intersección de U_i contiene un ideal diferente de cero $P_E(c)$,
2. Para todo ideal $P_E(l)$, existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que $P_E(l) \subset U_s$.

Para tal sucesión U_i, sea

$$U_{\{U_i\}} = \left\{ \sum_{i \gg -\infty} a_i X^i : a_i \in U_i \right\}.$$

Entonces la colección de todos estos conjuntos $U_{\{U_i\}}$ forma una base de vecindades de 0 en $K\{\{X\}\}$. La topología introducida de está forma satisface las propiedades listadas en la sección anterior y las pruebas son idénticas.

4.1.3. Topología sobre un cuerpo local $n-$dimensional en General

Sea K un cuerpo local $n-$dimensional. Se sabe por el teorema de clasificación de Parshin que K puede ser una extensión finita de un cuerpo $n-$dimensional estándar

$$K_n = k\{\{X_1\}\}\cdots\{\{X_m\}\}((X_{m+2}))\cdots((X_n)),$$

donde k es un cuerpo local $1-$dimensional. Introduciendo una topología sobre K para que esté sea un K_n-espacio vectorial de dimensión finita sobre K. Esto es equivalente a decir que la topología sobre K es homeomorfa a la topología producto sobre $K^{[K:K_n]}$, inducida de K_n, la cual se construyó en forma inductiva en las dos secciones anteriores.

4.1.4. Propiedades de la Topología secuencial sobre K^+

En esta sección, se enumeran algunas de las propiedades de la topología introducida sobre el grupo aditivo K^+ de un cuerpo local $n-$dimensional.

1. $(K, +, 0)$ es un grupo topológico completo y separable.

2. Si $n > 1$, entonces toda base de vecindades de cero es no enumerable.

3. Si $n > 1$, entonces la multiplicación definida sobre K es continua por sucesiones, pero no es continua.

4. Para cada $c \in K - \{0\}$, la aplicación

$$\begin{aligned} cA : K &\to K \\ \alpha &\mapsto c\alpha, \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in K$, es un homomorfismo.

4.2. Topología sobre K^*

Sea K un cuerpo local $n-$dimensional con su correspondiente cadena de cuerpos de valuación discreta completos.

$$K = K_n, K_{n-1}, \cdots, K_1, K_0$$

con respectivas valuaciones $v_n, v_{n-1}, \cdots, v_1$. Además, sea $(t_n, \cdots, t_1)$ un sistema de parámetros locales.

4.2.1. $Char(K_{n-1}) = p$

En este caso se define la topología sobre K^* vía el isomorfismo

$$K^* \simeq \mathbb{Z}t_1 \oplus \cdots \mathbb{Z}t_n \oplus U_K$$

de la siguiente forma. La topología sobre U_K está dada por el isomorfismo

$$U_K \simeq T \oplus V_K,$$

donde el grupo de unidades principales V_k tiene la topología inducida de la topología secuencial de K, y T tiene la topología discreta. Ahora, la topología sobre K^* es definida por la topología producto sobre

$$\mathbb{Z}t_1 \oplus \cdots \mathbb{Z}t_n \oplus U_K,$$

donde la parte abeliana libre

$$\mathbb{Z}t_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}t_n.$$

tiene la topología discreta y U_K tiene la topología definida anteriormente.

4.2.2. $Char(K) = \cdots = Char(K_{m+1}) = 0, Char(K_m) = p$

En este caso se define la topología de K^* nuevamente por isomorfismos

$$K^* \simeq \mathbb{Z}t_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}t_n \oplus U_K$$

donde la parte abeliana libre

$$\mathbb{Z}t_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}t_n,$$

tiene la topología discreta, y U_K tiene la topología débil, la cual hace la aplicación proyección

$$proj \ : U_K \rightarrow U_{K_{m+1}}$$

continua. Esto es, un conjunto U_K es abierto si y sólo si $proj(U)$ es abierto en $U_{K_{m+1}}$.

Note que, esta aplicación proyección se encuentra en la sucesión exacta

$$1 \rightarrow 1 + P_K(1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-m-2}) \rightarrow U_K \rightarrow U_{k_{m+1}} \rightarrow 1$$

4.2.3. Propiedades de la Topología secuencial sobre K^*

En esta sección, se enumeran algunas de las propiedades de la topología introducida sobre el grupo aditivo K^* de un cuerpo local $n-$dimensional.

1. K^* es un espacio Topológico Completo.

2. La multiplicación sobre K^* es continua por sucesiones, pero no es continua para $n > 2$.

3. Si $n \leq 2$ entonces K^* es un grupo topológico con una base contable de subgrupos abiertos.

Bibliografía

[1] Cámara, Alberto *Topology on rational points over higher local fields*, arxiv.org/pdf/1106.0191v2

[2] Albís, Víctor; Zúñiga-Galindo, Wilson, *An elementary introduction to the theory of Igusa local zeta functions.*, Lect. Mat.**20**,(1999), no. 1, 5–33.

[3] I.B. Fesenko, S. Vostokov, *Local Fields and Their Extensions,* Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1993

[4] Fesenko, Ivan *Analysis on arithmetic schemes. I.* (English summary) Kazuya Kato's fiftieth birthday. Doc. Math. 2003, Extra Vol., 261–284 (electronic).

[5] Fesenko, Ivan *Measure, integration and elements of harmonic analysis on generalized loop spaces.* Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society. Vol. XII, 149–165, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. **2**, **219**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[6] Fesenko, Ivan *Analysis on arithmetic schemes. II.* Preprint

[7] Madunts, Zhukov A.I *Multidimensional complete fields: topology and other basic constructions*, Trudy St.-Pb. Mat. Obshch. (1995); Eng. transl. in

[8] Morrow, Matthew *An introduction to higher dimensional local fields and adeles* http://math.uchicago.edu/ mmorrow/Morrow

[9] Parshin, A. N. *Local class field theory. Algebraic geometry and its applications* Trudy Mat. Inst. Steklov. **165** (1984), 143–170.

[10] S. Özden *Basic theory of n-local fields*, preprint.

[11] Zhukov, Igor *Higher dimensional local fields. Invitation to higher local fields (Münster, 1999)*, 5–18 (electronic), Geom. Topol. Monogr., **3**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2000.

[12] Zhukov, Igor *Structure theorems for complete fields (1995)*, Trudy St.-Pb. Mat. Obshch. ; Eng. transl. in Amer. Math. Soc. Transl. (Ser.2) 165(1995), 175-192.