



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Problemas Inversos de Valores Propios

Ingrid Milena Cholo Camargo

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas y Estadística
Manizales, Colombia
2012

Problemas Inversos de Valores Propios

Ingrid Milena Cholo Camargo

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Matemática Aplicada

Director:

Dr. Carlos Daniel Acosta Medina

Línea de Investigación:

Álgebra Lineal Numérica

Grupo de Investigación:

Cálculo Científico y Modelamiento Matemático

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas y Estadística
Manizales, Colombia

2012

Inverse Eigenvalue Problems

Ingrid Milena Cholo Camargo

Thesis for the degree of:

Master in Science - Applied Mathematics

Supervisor:

Dr. Carlos Daniel Acosta Medina

Line of Research:

Numerical Linear Algebra

Research Group

Cálculo Científico y Modelamiento Matemático

Universidad Nacional de Colombia

Faculty of Natural and Exact Science

Department of Mathematics and Statistics

Manizales, Colombia

2012

A mis padres y hermana

Agradecimientos

Agradezco a mi familia, compañeros y profesores que estuvieron acompañandome en el proceso. Además, a la vicerrectoria de Investigación Universidad Nacional de Colombia. Proyecto 20201006570 y Proyecto Colciencias 1118-489-25120.

Resumen

En un problema inverso se busca determinar o estimar los parámetros de un sistema a partir de lo observado o del comportamiento esperado. En esta tesis busca resolver el problema inverso de valores propios (IEP) por las siglas en inglés, estructurado para una familia de matrices, mediante transformaciones de similaridad y resolviendo flujos isospectrales. La información que contienen estas matrices, por ejemplo, se puede interpretar como la rigidez de un sistema.

Como caso especial del (IEP) está el problema trascendental de valor propio (TIEP). Para entender en qué consiste y poderlo trabajar se considera primero el caso directo (TEP), con el fin de dar solución a problemas de vibración como son, conocer algunas características de vibración del sistema para controlar y regular la respuesta de éste (TEP), y a partir de las frecuencias y unos datos adicionales encontrar parámetros físicos de ciertas estructuras para problemas de localización y severidad de daño (TIEP). En ambos problemas se usa un algoritmo basado en el algoritmo de Newton, y como un aporte de la tesis se propone usar una función de optimización para resolver ambos problemas. En el caso directo no resulta ser efectivo el algoritmo usando la función de optimización, ya que, sólo arroja una buena aproximación para un número de divisiones pequeño, mientras que en el caso inverso resulta ser un algoritmo muy estable. Por otro lado el aporte que se hizo fue matemático ya que se deduce la ecuación de frecuencia de una barra de longitud, densidad y rigidez unitaria con área seccional cosenoidal.

Palabras clave: Problema estructurado, problema de valor propio, vibración, barras axialmente vibrantes, problema trascendental, estimación de parámetro.

Abstract

In an inverse problem is to determine or estimate the parameters of a system from the observed or expected behavior. This paper seeks to solve the inverse eigenvalue problem (IEP) for a family of structured matrices by similarity transformations and solving isospectra flows. The information contained in these matrices can be interpreted as the rigidity of a system.

A special case of (IEP) is the transcendental eigenvalue problem (TIEP); to understand this problem and how to solve it, it first consider the direct (PET) case, in order to solve vibration problems such as: how to control the system output knowing some of the vibration characteristics (direct), and how to stimate physical parameters for certain structures, starting from the frequencies and some additional data (inverse). A Newton-based algorithm is used for both cases;this work proposes the used of an optimization function to solve both cases. In the direct case, this approach is only effective for a small number of divisions; however,

in the case inverse, the proposed algorithm turns out to be very stable. On the other hand the contribution that was made was mathematic, it deduce the frequency equation of a bar of unit length, density and rigidity and cosine cross-sectional area.

Keywords: Structured problem, eigenvalue problem, vibration, axially vibrating rods, trascendental problem, parameter stimation

Contenido

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
1. Introducción	2
2. Problema Inverso Estructurado	4
2.1. Matriz Jacobi	5
2.1.1. Algoritmo	6
2.2. Matriz Circulante	7
2.2.1. Algoritmo	8
2.3. Matrices simétricas centrosimétricas con estructura Toeplitz-plus-Hankel	9
2.3.1. Algoritmo	9
2.4. Matrices τ -Matrices	10
2.4.1. Algoritmo	11
2.5. Matriz Toeplitz Simétrica	12
2.5.1. Algoritmo	12
2.6. Ejemplos Numéricos	13
3. Problema Trascendental de Valor Propio (TEP)	18
3.1. Ecuaciones de Frecuencia	19
3.1.1. Área Constante	19
3.1.2. Área Cuadrática	21
3.1.3. Área Lineal	25
3.1.4. Área Exponencial	28
3.1.5. Área Cosenoidal	30
3.2. Aproximaciones Numéricas	33
3.2.1. Aproximación por Diferencias Finitas (MDF)	33
3.2.2. Aproximación por Elementos Finitos (MEF)	34
3.2.3. Modelo Trascendental	37
3.2.4. Función de Optimización.	40
3.3. Ejemplos Numéricos	41
3.4. Conclusiones	48

4. Problema Trascendental Inverso de Valor Propio (TIEP)	51
4.1. Preliminares	53
4.2. Desarrollo del Algoritmo-Base Newton	54
4.2.1. Algoritmo	55
4.3. Desarrollo del Algoritmo: Función Optimización	56
4.3.1. Algoritmo	56
4.4. Ejemplos Numéricos	58
4.5. Conclusiones	65
5. Aplicación	66
5.1. Salud Estructural	66
5.2. TEP	68
5.3. TIEP	69
6. Conclusiones y recomendaciones	70
Bibliografía	72

1 Introducción

Las matrices, además de resolver ecuaciones, contienen cierta información que sirve para conocer características de un sistema, por ejemplo al resolver problemas de sistemas masa-resorte resultan matrices con una estructura específica cuya información indica la rigidez de éste. Se trabaja con matrices tridiagonales simétricas, circulantes, Toeplitz-plus-Hankel en el caso par e impar y matrices Toeplitz simétricas. Con ayuda de su espectro una matriz se puede construir usando métodos como el de Lanczos, transformaciones discretas de similitud Fourier, coseno y seno y resolviendo flujos isoespectrales.

Al construir estas matrices con ayuda del espectro se está resolviendo el problema IEP estructurado el cual consiste en:

Dado un conjunto de escalares $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \subset F$ y una familia de matrices χ , encontrar una matriz A , tal que, $A \in \chi$ y $\sigma(A) \subset \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ donde F es un campo y $\sigma(A)$ es el espectro de la matriz.

El problema trascendental de valor propio surge en el área de estabilidad estructural y sistemas continuos de vibración [20], está relacionado con estructuras que no tienen propiedades físicas constantes tales como densidad, rigidez y área seccional en toda su extensión. Recibe el nombre de trascendental ya que los elementos de las matrices con las que se trabaja son funciones trascendentales (trigonométricas, exponencial, logarítmica). En el caso directo del problema trascendental se trata de encontrar los valores de ω (frecuencias del sistema), mientras que el caso inverso se convierte en un problema multivariable donde las variables son los parámetros físicos de la estructura.

Se han desarrollado métodos para dar solución a los problemas inversos ya mencionados, los cuales se mencionan a continuación:

En 1987 Friedland, Nocedal y Overton [17], formulan métodos numéricos basados en el método de Newton que tiene convergencia cuadrática.

En el 2002 Hendrickx y Van [9], construyen matrices de la forma $T - H$ donde T es una Toeplitz simétrica y H es una matriz Hankel mediante la transformada discreta del seno y su espectro.

En el 2003 Chu y Plemmons [4] utilizan la transformación discreta de Fourier para encontrar la matriz circulante a partir de su espectro. En este mismo año Diele y Sgura [7], construyen matrices Toeplitz simétrica resolviendo flujos isospectrales. Además Singh [18], resuelve el problema trascendental aplicado a vibración de vigas y barras.

En el 2005 Chu y Golub [3], estudian varios tipos de matrices dentro de las cuales está la matriz Jacobi, construida a partir del método de Lanczos.

En el 2006 Singh y Ram [20], usan el TIEP para estimar el área de una barra usando los parámetros físicos los cuales se consiguen a partir de las primeras 8 frecuencias de distintas configuraciones y de la masa total de la barra.

Estudios más recientes fueron en el 2008. Rojo [16] introduce una nueva matriz simultáneamente diagonalizable utilizando la transformada discreta de coseno. Esta matriz es de la forma $T + H$ donde T es una Toeplitz simétrica y H es una matriz Hankel. Estas matrices sirven para hacer una aproximación de matrices de menor rango y en el 2009 Singh [19], resuelve el problema para identificar la localización y severidad de los parámetros de daños de una barra.

En el caso trascendental directo se trabaja con barras con distinta área seccional para las cuales se encuentran sus ecuaciones de frecuencia. Se propone el uso de una función de optimización *fminsearch*, función que está basada en Nelder-Mead [11] para resolver el problema trascendental tanto directo como inverso para evitar el uso de derivadas. Éste resulta estable en el caso del problema inverso.

2 Problema Inverso Estructurado

En un problema inverso se busca determinar o estimar los parámetros de un sistema a partir de lo observado o del comportamiento esperado. Aquí se trabaja el problema inverso de valores propios (IEP) asociado con matrices. En este contexto el problema consiste en construir una matriz a partir del espectro dado. Resolver este problema sin ninguna restricción sobre la estructura de la matriz no tendría tanto sentido, por eso se imponen ciertas condiciones sobre la estructura de la misma; este problema es estructurado, así lo que se busca es resolver (IEP) estructurado, donde se hace referencia a la construcción de las siguientes clases matriciales [3]: tridiagonales simétricas, circulantes, Toeplitz-plus-Hankel en el caso par e impar y matrices Toeplitz simétricas.

Usando el método de Lanczos, y las transformaciones discretas de similaridad Fourier, coseno y seno, respectivamente, se busca construir la matriz, mientras que las Toeplitz simétricas se construyen resolviendo flujos isoenergéticos.

Preliminares

Un vector $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]' \in \mathbb{C}^n$ que cumple la condición (2-1) es llamado un vector conjugado par.

$$\lambda_1 \in \mathbb{R} \text{ y } \overline{\lambda_k} = \lambda_{n-k+2} \text{ con } k = 2, \dots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \quad (2-1)$$

donde $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ es el máximo entero que no excede a $\frac{n+1}{2}$.

Una matriz Toeplitz simétrica T de tamaño $n \times n$ es una matriz de la forma:

$$T = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & \cdot & \cdot & t_{n-2} & t_{n-1} \\ t_1 & t_0 & t_1 & \cdot & \cdot & t_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & t_1 \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \cdot & \cdot & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

Una matriz A es centrosimétrica si y sólo si $JAJ = A$ donde J es una matriz con unos en la antidiagonal principal y ceros en las otras posiciones. Ejemplos de matrices centrosimétricas que además sean simétricas son las matrices Toeplitz simétricas, Hankel centrosimétricas y las matrices circulantes simétricas [7].

Una matriz Hankel es una matriz que es constante a través de las antidiagonales. Ésta es simétrica. Además cualquier matriz Hankel centrosimétrica $H(h)=\text{hankel}(h')$ está definida por las entradas de su primera columna donde $h = [h_0, h_1, \dots, h_n]'$ y se tiene que $JH(h) = T(Jh)$ [7], donde

$$H = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \cdot & \cdot & h_{n-1} & h_n \\ h_1 & \cdot & \cdot & \cdot & h_n & h_{n-1} \\ \vdots & \cdot & & & \cdot & \vdots \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ h_{n-1} & \cdot & & & \cdot & h_1 \\ h_n & h_{n-1} & \cdot & \cdot & h_1 & h_0 \end{bmatrix}$$

Un vector v es llamado un vector simétrico (antisimétrico) si y sólo si $Jv = v$ ($Jv = -v$), el valor propio asociado se dice que es par(impar) [16].

Una matriz Toeplitz simétrica T se dice regular si, para todo $k = 1, \dots, n$, la matriz T tiene distintos valores propios, si están organizados descendentemente y alternados en paridad con el mayor valor propio par.

2.1. Matriz Jacobi

Las matrices tridiagonales simétricas describen las vibraciones del sistema mecánico, que consiste de masas enlazadas por resortes: observando durante mucho tiempo las frecuencias de las vibraciones del sistema obtenemos los valores propios de esta matriz y el movimiento de las masas es descrito por los valores propios.

Se busca resolver el IEP para matrices tridiagonales simétricas, las cuales tienen la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

donde b_i son positivos para todo i . Las matrices son caracterizadas por las $2n - 1$ entradas $\{a_i\}_{i=1}^n$ y $\{b_i\}_{i=1}^{n-1}$.

Los valores propios de una matriz tridiagonal simétrica son todos reales y distintos [3]. La primera y última componente de un vector propio asociado a un valor propio son no nulas [8]. Además del espectro de la matriz, se necesita información adicional por ejemplo la masa total para resolver el problema.

2.1.1. Algoritmo

Un algoritmo que resuelve este problema es el algoritmo Lanczos, el cual es un algoritmo constructivo y numéricamente bien condicionado, basado en un conjunto espectral dado y los correspondientes vectores propios normalizados.

Suponga que la última columna q_n de la matriz cuyos vectores columna son vectores propios de la matriz, es conocida. Entonces las entradas a_i y b_i de la matriz con valores propios $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ es construida en un número finito de pasos con Λ matriz diagonal cuyos elementos son los valores propios [3].

Input: q_n vector propio de la matriz y v vector de valores propios,

Output: Matriz A tridiagonal simétrica con valores propios v

1. Defina

$$\begin{aligned} a_n &:= q_n' \Lambda q_n \\ b_{n-1} &:= \|\Lambda q_n - a_n q_n\|_2 \\ q_{n-1} &:= (\Lambda q_n - a_n q_n) / b_{n-1}. \end{aligned}$$

2. Para $i = 1, \dots, n - 2$ calcule recursivamente

$$\begin{aligned} a_{n-i} &:= q_{n-i}' \Lambda q_{n-i} \\ b_{n-i-1} &:= \|\Lambda q_{n-i} - a_{n-i} q_{n-i} - b_{n-i} q_{n-i+1}\|_2 \\ q_{n-i-1} &:= (\Lambda q_{n-i} - a_{n-i} q_{n-i} - b_{n-i} q_{n-i+1}) / b_{n-i-1}. \end{aligned}$$

3. Defina $a_1 := q_1' \Lambda q_1$

2.2. Matriz Circulante

Este tipo de matrices están determinadas por el primer vector fila $c = [c_0, c_1, \dots, c_{n-1}]$ y son de la forma:

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & \cdots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & & & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & c_2 \\ c_2 & & & & & c_1 \\ c_1 & c_2 & & & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix}$$

El conjunto de matrices circulantes es cerrado para la suma y producto y el producto es conmutativo. Además, la transpuesta y la inversa de una matriz circulante también es circulante.

Los valores propios de esta matriz C de tamaño $n \times n$ están dados por las componentes del vector columna $\lambda = F * c$ donde F es la matriz de tamaño $n \times n$ definida como

$$F_{j,k} = \omega^{(j-1)(k-1)} \quad 1 \leq j, k \leq n$$

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

F es simétrica y $F\bar{F} = \bar{F}F = I_n$ donde I_n es la matriz identidad de tamaño $n \times n$. La matriz $\frac{1}{\sqrt{n}}F$ es conocida como matriz de Fourier. Los vectores columna de esta matriz son los vectores propios de cualquier matriz circulante [16].

El vector que determina la matriz circulante se obtiene a partir del vector de valores propios λ .

$$c = \frac{1}{n}\bar{F}\lambda$$

Cada valor propio se puede calcular de la siguiente forma:

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^n c_{j-1} \omega^{(k-1)(j-1)}$$

En particular,

$$\lambda_1 = c_0 + c_1 + \cdots + c_{n-1}$$

por tanto

$$Ce = \lambda_1 e$$

$e = [1, 1, 1, \dots, 1]'$ es un vector propio asociado al valor propio λ_1 de $C(c')$.

Una condición necesaria para que un conjunto de números complejos sea el espectro de una matriz circulante real es que sea un vector conjugado par [15].

Si $n = 2m$ entonces

$$\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_{m+1} \ \overline{\lambda_m} \ \overline{\lambda_{m-1}} \ \dots \ \overline{\lambda_2}]$$

con λ_1 y λ_m números reales. Si $n = 2m + 1$ entonces

$$\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_{m+1} \ \overline{\lambda_{m+1}} \ \overline{\lambda_m} \ \overline{\lambda_{m-1}} \ \dots \ \overline{\lambda_2}]$$

con $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ [4].

2.2.1. Algoritmo

Un algoritmo que construye una matriz circulante utiliza la matriz F de tal forma que se le ingresa el vector de valores propios v .

Input: v

Output: C matriz circulante cuyos valores propios son las componentes del vector v .

1. Construya la matriz F de tamaño n que es el tamaño del vector v .

$$f = F$$

2. Construya el vector c

$$c = (1/n) * conj(f) * v'$$

3. Construya la matriz con el vector c

$$C = C(c)$$

2.3. Matrices simétricas centrosimétricas con estructura Toeplitz-plus-Hankel

Una matriz A de este tipo es de la forma $A = T + H$ donde T y H son matrices Toeplitz real simétrica y Hankel real centrosimétrica.

$$T = \text{Toeplitz}([t_0, t_1, \dots, t_{n-1}]) \quad \text{y} \quad H = \text{Hankel}([t_1, t_2, \dots, t_n])$$

La primera fila está dada por

$$[t_0 + t_1 \quad t_1 + t_2 \quad t_2 + t_3 \quad \cdots \quad t_{n-2} + t_{n-1} \quad t_{n-1} + t_n]$$

Los valores propios están organizados en orden descendente y alternados en paridad, empezando con par.

Los vectores propios de cualquier matriz A de este tipo son los vectores columna de la matriz u definida como sigue:

$$\begin{cases} u_{k,1} = \frac{1}{\sqrt{(n)}}, & 1 \leq k \leq n \\ u_{k,j} = \sqrt{\frac{2}{n}} \cos\left(\frac{(j-1)(2k-1)\pi}{2n}\right), & 2 \leq j \leq n, \quad 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

los cuales son alternadamente simétricos y antisimétricos [16]. Esta matriz es la transformación discreta coseno [16], esta transformación es de valor real [22].

2.3.1. Algoritmo

A continuación se presenta el algoritmo desarrollado en [16]. Input: v vector de valores propios

Output: A , T y H

1. Construya una matriz circulante de tamaño $2n \times 2n$ via Transformada Rápida de Fourier (FFT)

$$c = \frac{1}{2n} \overline{F}_{2n} v$$

donde

$$v = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n \quad \lambda_1 \quad \lambda_n \quad \dots \quad \lambda_3 \quad \lambda_2]$$

2. Construya las matrices T cuya primera fila es

$$c = [c_0 \quad c_1 \quad \dots \quad c_{n-2} \quad c_{n-1}]$$

y H cuya primera fila es

$$c = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{n-1} \quad c_n]$$

3. Forme la matriz $A = T + H$.

2.4. Matrices τ -Matrices

Son usadas para resolver sistemas de la forma $Tx = b$ donde T es una matriz Toeplitz banda, además según Diele y Sgura [7] puede ser una matriz inicial adecuada para resolver flujos isoespectrales, debido a que son matrices simultáneamente diagonalizables por la transformada discreta seno. Estas matrices cumplen con la condición siguiente:

$$a_{i-1,j} + a_{i+1,j} = a_{i,j-1} + a_{i,j+1} \quad i, j = 1, \dots, n$$

asumiendo que

$$a_{n+1,j} = a_{i,n+1} = a_{0,j} = a_{i,0} = 0.$$

La factorización espectral $A = SVS'$ donde V es una matriz diagonal de los valores propios de A y S es la matriz simétrica y ortogonal cuyos vectores columna son los vectores propios de A . S está dada por:

$$S(i, j) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\left(\frac{ij\pi}{n+1}\right)$$

S es la transformación discreta seno. Esta transformación es de valor real [22].

De acuerdo a Hendrickx y Van [9], los valores propios pueden ser calculados de la siguiente forma utilizando el hecho de que $A = SVS'$:

$$\lambda_j = \left(\sin\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) \right)^{-1} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{jk\pi}{n+1}\right) a_{1,k}$$

.

Además pueden ser escritas como la suma especial de una matriz Toeplitz y una Hankel, donde el elemento $a_{i,j}$ es:

$$a_{i,j} = \frac{2}{n+1} \sum_{t=1}^n \sin\left(\frac{it\pi}{n+1}\right) \sin\left(\frac{jt\pi}{n+1}\right) \lambda_t$$

Usando fórmulas trigonométricas se llega a que

$$A = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & & & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ c_2 & \cdot & & \cdot & c_1 & \\ c_1 & c_2 & & c_{n-1} & c_0 & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_2 & c_3 & \dots & \dots & c_n & c_{n+1} \\ c_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ c_n & \cdot & & & \cdot & c_3 \\ c_{n+1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_3 & c_2 \end{bmatrix}$$

donde c_r puede encontrarse a partir de los valores propios [9]

$$c_r = \frac{1}{n+1} \sum_{t=1}^n \cos\left(\frac{rt\pi}{n+1}\right) \lambda_t. \quad (2-2)$$

2.4.1. Algoritmo

Hay dos formas de construir una τ -matriz: una es utilizando la matriz S transformación discreta seno y otra es construyendo el vector c para conocer explícitamente T y H .

1. En el primer caso:

Input: v vector de valores propios.

Output: A τ -matriz

- a) Construya la matriz S
- b) Haga $A = SAS$ donde Λ es la matriz diagonal de valores propios.

2. Para el segundo caso

Input: v vector de valores propios.

Output: A τ -matriz, T y H

- a) Construya el vector c (2-2)
- b) Construya T con primera fila

$$c = [c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{n-2} \ c_{n-1}]$$

y H con primera fila

$$c = [c_2 \ c_3 \ \dots \ c_n \ c_{n+1}]$$

- c) Forme la matriz $A = T - H$

2.5. Matriz Toeplitz Simétrica

Para construir numéricamente matrices Toeplitz simétricas con valores propios prescritos, se resuelven flujos isospectrales en el espacio de las matrices centrosimétricas [7]. Usando el operador $F = K$ introducido por Chu en [13], se resuelve el flujo isoespectral:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= [X(t), F(X(t))] \\ X(0) &= X_0 = X'_0\end{aligned}$$

donde $[X(t), F(X(t))] = X(t)F(X(t)) - F(X(t))X(t)$, es el conmutador de $X(t)$ y $F(X(t))$.

En [10] se prueba la existencia de una matriz regular Toeplitz simétrica real, si los valores propios prescritos son reales y distintos. Como se dijo antes, se utiliza el operador K el cual está definido como sigue:

$$K(X) = \begin{cases} X_{i+1,j} - X_{i,j-1} & 1 \leq i < j \leq n \\ 0 & 1 \leq i = j \leq n \\ X_{i-1,j} - X_{i,j+1} & 1 \leq j < i \leq n. \end{cases}$$

Este operador tiene la propiedad $K(X) = 0$ si y sólo si X es una matriz Toeplitz simétrica. Si X_0 es centrosimétrica simétrica entonces $X(t)$ es centrosimétrica simétrica para todo t . Una matriz inicial adecuada para resolver el flujo y por consiguiente construir la Toeplitz simétrica es una τ -matriz [7].

2.5.1. Algoritmo

A continuación se presenta el algoritmo desarrollado en [7]. Input: v vector de valores propios. Output: T

1. Construya $X_0 = SAS$ con Λ matriz diagonal de valores propios.
2. Resuelva el flujo aplicando Runge-Kutta de cuarto orden con un tamaño de paso $h = 0,01$.
Un criterio de parada es $\|X_k - X_{k-1}\|_2 \leq 10^{-15}$

La matriz Toeplitz simétrica es la solución estacionaria del flujo, por tanto se debe tener un t grande.

2.6. Ejemplos Numéricos

Se realizaron algunos ejemplos numéricos tomando distintos vectores de valores propios y trabajando siempre en la misma máquina. Al momento de programar pueda que no se hayan tenido en cuenta condiciones que los autores si, por ello, se puede presentar algún sesgo en los resultados.

1. Caso en el que las componentes de $v > 0$.

$$V = [7,3166 \quad 2,0000 \quad 0,6834 \quad 15,0000]$$

Jacobi

$$q = [0,5 \quad 9 \quad 3 \quad 1]$$

$$J = \begin{bmatrix} 6,5094 & 2,3206 & 0 & 0 \\ 2,3206 & 2,9624 & 3,9048 & 0 \\ 0 & 3,9048 & 13,5011 & 1,4490 \\ 0 & 0 & 1,4490 & 2,0272 \end{bmatrix}$$

Circulante

$$C = \begin{bmatrix} 6,2500 & 1,6583 + 3,2500i & -2,2500 - 0,0000i & 1,6583 - 3,2500i \\ 1,6583 - 3,2500i & 6,2500 & 1,6583 + 3,2500i & -2,2500 - 0,0000i \\ -2,2500 - 0,0000i & 1,6583 - 3,2500i & 6,2500 & 1,6583 + 3,2500i \\ 1,6583 + 3,2500i & -2,2500 - 0,0000i & 1,6583 - 3,2500i & 6,2500 \end{bmatrix}$$

Toeplitz-plus-Hankel

$$A = \begin{bmatrix} 7,4226 & 4,4226 & 2,0774 & 1,0774 \\ 4,4226 & 5,0774 & 3,4226 & 2,0774 \\ 2,0774 & 3,4226 & 5,0774 & 4,4226 \\ 1,0774 & 2,0774 & 4,4226 & 7,4226 \end{bmatrix}$$

donde

$$T = \begin{bmatrix} 6,2500 & 1,1726 & 3,2500 & -1,1726 \\ 1,1726 & 6,2500 & 1,1726 & 3,2500 \\ 3,2500 & 1,1726 & 6,2500 & 1,1726 \\ -1,1726 & 3,2500 & 1,1726 & 6,2500 \end{bmatrix}$$

y

$$H = \begin{bmatrix} 1,1726 & 3,2500 & -1,1726 & 2,2500 \\ 3,2500 & -1,1726 & 2,2500 & -1,1726 \\ -1,1726 & 2,2500 & -1,1726 & 3,2500 \\ 2,2500 & -1,1726 & 3,2500 & 1,1726 \end{bmatrix}$$

τ -Matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5,5382 & 4,3901 & 1,4236 & 0,0549 \\ 4,3901 & 6,9618 & 4,4451 & 1,4236 \\ 1,4236 & 4,4451 & 6,9618 & 4,3901 \\ 0,0549 & 1,4236 & 4,3901 & 5,5382 \end{bmatrix}$$

donde

$$T = \begin{bmatrix} 5,0000 & 2,6451 & -0,5382 & -1,7451 \\ 2,6451 & 5,0000 & 2,6451 & -0,5382 \\ -0,5382 & 2,6451 & 5,0000 & 2,6451 \\ -1,7451 & -0,5382 & 2,6451 & 5,0000 \end{bmatrix}$$

y

$$H = \begin{bmatrix} -0,5382 & -1,7451 & -1,9618 & -1,8000 \\ -1,7451 & -1,9618 & -1,8000 & -1,9618 \\ -1,9618 & -1,8000 & -1,9618 & -1,7451 \\ -1,8000 & -1,9618 & -1,7451 & -0,5382 \end{bmatrix}$$

Toeplitz Simétrica

$$T = \begin{bmatrix} 6,2500 & 4,3559 & 1,7936 & 0,1441 \\ 4,3559 & 6,2500 & 4,3559 & 1,7936 \\ 1,7936 & 4,3559 & 6,2500 & 4,3559 \\ 0,1441 & 1,7936 & 4,3559 & 6,2500 \end{bmatrix}$$

2. Caso en el que $v < 0$

$$v = [\sqrt{11} - 4 \quad -11 \quad -\sqrt{11} \quad -5]$$

Jacobi

$$q = [0,5 \ 9 \ 3 \ 1]$$

$$J = \begin{bmatrix} -3,4481 & 1,9568 & 0 & 0 \\ 1,9568 & -2,2585 & 0,7363 & 0 \\ 0 & 0,7363 & -4,1452 & 2,4048 \\ 0 & 0 & 2,4048 & -10,1482 \end{bmatrix}$$

Circulante

$$C = \begin{bmatrix} -5,0000 & 0,6583 + 1,5000i & 3,0000 & 0,6583 - 1,5000i \\ 0,6583 - 1,5000i & -5,0000 & 0,6583 + 1,5000i & 3,0000 \\ 3,0000 & 0,6583 - 1,5000i & -5,0000 & 0,6583 + 1,5000i \\ 0,6583 + 1,5000i & 3,0000 & 0,6583 - 1,5000i & -5,0000 \end{bmatrix}$$

Toeplitz-plus-Hankel

$$A = \begin{bmatrix} -3,6418 & 2,4374 & -0,2791 & 0,8001 \\ 2,4374 & -6,3582 & 3,5166 & -0,2791 \\ -0,2791 & 3,5166 & -6,3582 & 2,4374 \\ 0,8001 & -0,2791 & 2,4374 & -3,6418 \end{bmatrix}$$

 τ -Matriz

$$A = \begin{bmatrix} -4,6236 & 2,6833 & -0,7528 & 0,8167 \\ 2,6833 & -5,3764 & 3,5000 & -0,7528 \\ -0,7528 & 3,5000 & -5,3764 & 2,6833 \\ 0,8167 & -0,7528 & 2,6833 & -4,6236 \end{bmatrix}$$

Toeplitz Simétrica

$$T = \begin{bmatrix} -5,0000 & 2,8985 & -0,8711 & 1,4181 \\ 2,8985 & -5,0000 & 2,8985 & -0,8711 \\ -0,8711 & 2,8985 & -5,0000 & 2,8985 \\ 1,4181 & -0,8711 & 2,8985 & -5,0000 \end{bmatrix}$$

3. Caso en el que v tiene componentes positivas y negativas.

$$v = [9 \quad -20 \quad 0,5 \quad -11,6]$$

Jacobi

$$q = [6 \quad 2 \quad 11 \quad 0,3]$$

$$J = \begin{bmatrix} -11,6155 & 0,7508 & 0 & 0 \\ 0,7508 & -6,8554 & 13,2161 & 0 \\ 0 & 13,2161 & -5,5129 & 4,9748 \\ 0 & 0 & 4,9748 & 1,8838 \end{bmatrix}$$

Circulante

$$C = \begin{bmatrix} -5,5250 & 2,1250 + 2,1000i & 10,2750 & 2,1250 - 2,1000i \\ 2,1250 - 2,1000i & -5,5250 & 2,1250 + 2,1000i & 10,2750 \\ 10,2750 & 2,1250 - 2,1000i & -5,5250 & 2,1250 + 2,1000i \\ 2,1250 + 2,1000i & 10,2750 & 2,1250 - 2,1000i & -5,5250 \end{bmatrix}$$

Toeplitz-plus-Hankel

$$A = \begin{bmatrix} -1,9011 & 8,7739 & 1,5261 & 0,6011 \\ 8,7739 & -9,1489 & 7,8489 & 1,5261 \\ 1,5261 & 7,8489 & -9,1489 & 8,7739 \\ 0,6011 & 1,5261 & 8,7739 & -1,9011 \end{bmatrix}$$

τ -Matriz

$$A = \begin{bmatrix} -5,5362 & 9,1902 & 0,0224 & -0,3701 \\ 9,1902 & -5,5138 & 8,8201 & 0,0224 \\ 0,0224 & 8,8201 & -5,5138 & 9,1902 \\ -0,3701 & 0,0224 & 9,1902 & -5,5362 \end{bmatrix}$$

Toeplitz Simétrica

$$T = \begin{bmatrix} -5,5250 & 9,0641 & 0,0283 & -0,6141 \\ 9,0641 & -5,5250 & 9,0641 & 0,0283 \\ 0,0283 & 9,0641 & -5,5250 & 9,0641 \\ -0,6141 & 0,0283 & 9,0641 & -5,5250 \end{bmatrix}$$

4. Caso en el que v es complejo.

$v = [1 \ 2 + i \ 3 - 7i \ 8]$ Si un complejo es raíz de un polinomio con coeficientes reales, entonces su conjugado también lo es.

Jacobi

Todos los valores propios de una matriz tridiagonal simétrica son reales y distintos [3].

Circulante

$$C = \begin{bmatrix} 3,1667 & 0,3987 & -1,6427 & -0,8333 & 2,9761 & -3,0654 \\ -3,0654 & 3,1667 & 0,3987 & -1,6427 & -0,8333 & 2,9761 \\ 2,9761 & -3,0654 & 3,1667 & 0,3987 & -1,6427 & -0,8333 \\ -0,8333 & 2,9761 & -3,0654 & 3,1667 & 0,3987 & -1,6427 \\ -1,6427 & -0,8333 & 2,9761 & -3,0654 & 3,1667 & 0,3987 \\ 0,3987 & -1,6427 & -0,8333 & 2,9761 & -3,0654 & 3,1667 \end{bmatrix}$$

Toeplitz-plus-Hankel, τ -matriz y Toeplitz simétrica

El espectro de este tipo de matrices es real, debido a que se trabaja con las transformaciones discretas seno y coseno.

3 Problema Trascendental de Valor Propio (TEP)

Con ayuda de las frecuencias de vibración se puede conocer qué tanto y de qué forma se mueve cierta estructura, y saber así con qué propiedades debe construirse de tal modo que tengan mayor resistencia a cualquier movimiento brusco. Las frecuencias de vibración se obtienen a partir de la ecuación de frecuencia, que en algunos casos no tienen solución analítica. Esta ecuación resulta de la ecuación de movimiento de la estructura dependiendo de su configuración.

La variación del área puede ayudar a reducir el peso de la estructura y se pueden mejorar la fuerza y estabilidad también [6]. En este trabajo se considera una barra con movimiento axial de longitud 1, área seccional variable, con rigidez y densidad constantes, para la cual se buscan las frecuencias exactas de vibración.

Barras con área constante ya han sido estudiadas en [21]. Eisenberger en [6], con el método exacto encuentra las frecuencias para el caso lineal y cónica. Abrate en [1], haciendo un cambio de variable en la ecuación de movimiento encuentra la ecuación de frecuencia en el caso cuadrático y en este trabajo haciendo una generalización de este método se obtiene la ecuación en el caso cosenoidal. Para dar solución a estas ecuaciones de frecuencia se han utilizado métodos de discretización tales como Método de Diferencias Finitas (MDF) y Método de Elementos Finitos (MEF) los cuales llevan a resolver un problema de valor propio generalizado, en el que mayor sea la discretización de la barra mejor será la aproximación. En [18] Singh propone un nuevo método: el trascendental, que lleva a resolver el problema matricial $A(\omega)z = 0$ en donde los elementos de la matriz A son funciones trascendentales (de ahí el nombre). Además, a diferencia de los anteriores, basta con una pequeña discretización de la barra para obtener una buena aproximación usando un algoritmo basado en el de Newton. En el presente trabajo se propone un algoritmo usando una función de optimización llamada *fminsearch*.

3.1. Ecuaciones de Frecuencia

A partir de la ecuación de movimiento de la estructura se consigue la ecuación de frecuencia y dependiendo de la configuración de ésta, se van a tener las condiciones de frontera.

Ecuación de movimiento axial de una barra con área variable.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EA(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \rho A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3-1)$$

donde E es el modulo de Young y ρ es la densidad de estructura.

3.1.1. Área Constante

En el caso en que el área sea constante, la ecuación (3-1) se convierte en la ecuación de onda.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (3-2)$$

Por separación de variables, suponga que

$$u(x, t) = \phi(x)q(t).$$

Luego

$$u_{xx} = \phi''(x)q(t), \quad u_{tt} = \phi(x)q''(t),$$

y reemplazando en la ecuación de onda resulta

$$\begin{aligned} \phi(x)q''(t) &= \phi''(x)q(t) \\ \frac{q''(t)}{q(t)} &= c^2 \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}. \end{aligned}$$

Para que se satisfaga esta última igualdad cada una debe de ser igual a una constante. Sea $-\omega^2$ esa constante, así resultan las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\phi''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \phi(x) = 0, \quad q''(t) + \omega^2 q(t) = 0,$$

que tienen por solución

$$\phi(x) = A_1 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + B_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right), \quad (3-3)$$

$$q(t) = A_2 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t). \quad (3-4)$$

Dependiendo de la configuración de la barra se van a tener las condiciones de frontera.

- Fijo - Libre: En este caso se tiene las siguientes condiciones de frontera

$$u(0, t) = 0 \quad u_x(L, t) = 0$$

las cuales llevan a:

$$\phi(0) = 0 \quad \phi'(L) = 0$$

Si $\phi(0) = 0$ entonces $B_1 = 0$, luego

$$u(x, t) = A_1 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) q(t)$$

y si $\phi'(L) = 0$ entonces

$$\begin{aligned} A_1 \omega \cos\left(\frac{\omega}{c}L\right) q(t) &= 0 \\ \cos\left(\frac{\omega}{c}L\right) &= 0 \end{aligned}$$

Así las frecuencias naturales de una barra uniforme con configuración Fijo - Libre son:

$$\omega_i = \frac{(2i-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3-5)$$

- Fijo - Fijo: Las condiciones de frontera para esta configuración son:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0,$$

las cuales llevan a:

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(L) = 0.$$

Si $\phi(0) = 0$ entonces

$$u(x, t) = A_1 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) q(t),$$

así $\phi(L) = 0$ implica

$$\begin{aligned} A_1 \sin\left(\frac{\omega}{c}L\right) q(t) &= 0, \\ \sin\left(\frac{\omega}{c}L\right) &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto las frecuencias naturales son:

$$\omega_i = \frac{i\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (3-6)$$

las cuales resultan ser las mismas para una barra con configuración Libre - Libre.

3.1.2. Área Cuadrática

Si se hace un cambio de variable $v = xu$ el movimiento de la barra es gobernado por la ecuación de onda. Así la ecuación (3-1) queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 [\phi(x)u]}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 [\phi(x)u]}{\partial t^2} \quad c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (3-7)$$

Expandiendo la ecuación (3-1) se obtiene,

$$\begin{aligned} EA'(x)u_x + EA(x)u_{xx} &= \rho A(x)u_{tt} \\ A'(x)u_x + A(x)u_{xx} &= \frac{1}{c^2} A(x)u_{tt} \\ A'(x)u_x + A(x) \left[u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{A'(x)}{A(x)} u_x + \left[u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} \right] = 0 \quad (3-8)$$

y expandiendo (3-7) se tiene que

$$\begin{aligned} \phi''(x)u + \phi'(x)u_x + \phi'(x)u_x + \phi(x)u_{xx} &= \frac{1}{c^2} \phi(x)u_{tt} \\ \phi''(x)u + 2\phi'(x)u_x + \phi(x)u_{xx} &= \frac{1}{c^2} \phi(x)u_{tt} \\ 2\phi'(x)u_x + \phi(x) \left[u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} \right] &= 0 \end{aligned}$$

luego

$$\frac{2\phi'(x)}{\phi(x)} u_x + \left[u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} \right] = 0 \quad (3-9)$$

Comparando (3-8) y (3-9) resulta que

$$\frac{2\phi'(x)}{\phi(x)} = \frac{A'(x)}{A(x)} \quad (3-10)$$

Si

$$A(x) = A_0 \left(1 + \frac{\alpha}{L} x \right)^2$$

entonces

$$A'(x) = 2A_0 \frac{\alpha}{L} \left(1 + \frac{\alpha}{L} x \right)$$

y

$$\begin{aligned}\frac{A'(x)}{A(x)} &= \frac{2A_0 \frac{\alpha}{L} \left(1 + \frac{\alpha}{L}x\right)}{A_0 \left(1 + \frac{\alpha}{L}x\right)^2} \\ &= \frac{2\frac{\alpha}{L}}{\left(1 + \frac{\alpha}{L}x\right)} \\ &= \frac{2\phi'}{\phi}.\end{aligned}$$

Así

$$\phi(x) = 1 + \frac{\alpha}{L}x. \quad (3-11)$$

Resolviendo la ecuación de onda, se encuentra que

$$v(x, t) = (A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x)) q(t) \quad \beta = \frac{\omega}{c} \quad (3-12)$$

por otro lado se tiene que

$$v(x, t) = \phi(x)u(x, t)$$

y como ya se conoce $\phi(x)$ se puede conocer $u(x, t)$.

Dependiendo de la configuración de la barra se van a tener las condiciones de frontera.

- Fijo-Libre: En este caso se tienen las siguientes condiciones de frontera

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0,$$

las cuales llevan a:

$$\begin{aligned}v(0, t) &= \phi(0)u(0, t) \\ v(0, t) &= 0\end{aligned} \quad (3-13)$$

y

$$\begin{aligned}v_x(x, t) &= \phi_x(x)u(x, t) + \phi(x)u_x(x, t) \\ v_x(L, t) &= \phi_x(L)u(L, t) + \phi(L)u_x(L, t) \\ v_x(L, t) &= \phi_x(L)u(L, t) \\ v_x(L, t) &= \frac{\alpha}{L} \frac{v(L, t)}{\phi(L)}\end{aligned}$$

$$v_x(L, t) = \frac{\alpha}{L} \frac{v(L, t)}{1 + \alpha} \quad (3-14)$$

Ahora reemplazando en la ecuación (3-12) la condición (3-13), se obtiene

$$Bq(t) = 0 \quad B = 0$$

luego

$$v(x, t) = A \sin(\beta x) q(t) \quad (3-15)$$

derivando (3-15), reemplazando $x = l$ e igualándola a (3-14) resulta:

$$\begin{aligned} v_x(x, t) &= A\beta_i \cos(\beta x) q(t) \\ A\beta \cos(\beta L) q(t) &= \frac{\alpha v(L, t)}{L(1 + \alpha)} \\ A\beta \cos(\beta L) q(t) &= \frac{\alpha}{L(1 + \alpha)} A \sin(\beta L) q(t) \\ \beta \cos(\beta L) &= \frac{\alpha}{L(1 + \alpha)} \sin(\beta L) \\ \beta L &= \frac{\alpha}{(1 + \alpha)} \tan(\beta L). \end{aligned}$$

Por tanto las frecuencias se pueden obtener a partir de

$$\beta L = \frac{\alpha}{(1 + \alpha)} \tan(\beta L) \quad (3-16)$$

- Fijo - Fijo: Para esta configuración se tienen las siguientes condiciones de frontera

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0,$$

las cuales llevan a

$$v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0,$$

lo que implica que tienen las mismas frecuencias naturales que una barra con área constante.

- Libre - Libre: En este caso se tienen las siguientes condiciones de frontera:

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0.$$

las cuales llevan a

$$\begin{aligned} v_x(x, t) &= \phi_x(x)u(x, t) + \phi(x)u_x(x, t) \\ v_x(0, t) &= \phi_x(0)u(0, t) + \phi(0)u_x(0, t) \\ v_x(0, t) &= \phi_x(0)u(0, t) \\ v_x(0, t) &= \frac{\alpha v(0, t)}{L \phi(0)} \end{aligned}$$

$$v_x(0, t) = \frac{\alpha}{L}v(0, t) \quad (3-17)$$

y

$$v_x(L, t) = \frac{\alpha}{L} \frac{v(L, t)}{(1 + \alpha)}. \quad (3-18)$$

Derivando la ecuación (3-12) y reemplazando la condición (3-16) se tiene

$$\begin{aligned} v_x(x, t) &= (A\beta x \cos(\beta x) - B\beta \sin(\beta x)) q(t) \\ v_x(0, t) &= A\beta q(t) \\ \frac{\alpha}{L}v(0, t) &= A\beta q(t) \\ \frac{\alpha}{L}Bq(t) &= A\beta q(t). \end{aligned}$$

Lo cual implica

$$\frac{\alpha}{L}B = A\beta. \quad (3-19)$$

Derivando la ecuación (3-12) y reemplazando la condición (3-17) y (3-18) se tiene

$$\begin{aligned} (A\beta \cos(\beta L) - B\beta \sin(\beta L)) q(t) &= \frac{\alpha}{L(1 + \alpha)} v(L, t) \\ (A\beta \cos(\beta L) - B\beta \sin(\beta L)) &= \frac{\alpha}{L(1 + \alpha)} [(A \sin(\beta L) + B \cos(\beta L))] \\ \left(\frac{\alpha}{L}B \cos(\beta L) - B\beta \sin(\beta L)\right) &= \frac{\alpha}{L(1 + \alpha)} [(A \sin(\beta L) + B \cos(\beta L))] \\ (\alpha B \cos(\beta L) - BL\beta \sin(\beta L)) &= \frac{\alpha}{(1 + \alpha)} [(A \sin(\beta L) + B \cos(\beta L))] \\ (\alpha B - B\beta L \tan(\beta L)) &= \frac{\alpha}{(1 + \alpha)} [(A \tan(\beta L) + B)] \\ \alpha B - \frac{\alpha B}{1 + \alpha} &= \frac{\alpha A}{1 + \alpha} \tan(\beta L) + B\beta L \tan(\beta L) \\ \alpha B - \frac{\alpha B}{1 + \alpha} &= \left[\frac{\alpha A}{1 + \alpha} + B\beta L \right] \tan(\beta L). \end{aligned}$$

Por tanto las frecuencias β se obtiene a partir de la siguiente ecuación

$$\tan(\beta L) = \frac{\alpha^2 \beta L}{\alpha^2 + (1 + \alpha)(\beta L)^2}. \quad (3-20)$$

3.1.3. Área Lineal

Si $A(x) = 2 - x$ entonces suponga la solución de la ecuación (3-1)

$$u(x, t) = \phi(x) \sin(\omega t).$$

Reemplazando en (3-8) resulta

$$(2 - x)\phi''(x) - \phi'(x) + \lambda^2(2 - x)\phi(x) = 0, \quad \lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Esta ecuación se puede expresar como una ecuación de Bessel paramétrica, es decir

$$(2 - x)^2\phi''(x) + (2 - x)\phi'(x) + \lambda^2(2 - x)^2\phi(x) = 0 \quad \lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (3-21)$$

Sea

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(2 - x)^{n+r} \quad (3-22)$$

hallando ϕ' y ϕ'' se obtiene

$$\phi'(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n + r)(2 - x)^{n+r-1} \quad (3-23)$$

$$\phi''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n + r)(n + r - 1)(2 - x)^{n+r-2} \quad (3-24)$$

reemplazando en (3-21) resulta

$$\begin{aligned}
& (2-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)(2-x)^{n+r-2} + (2-x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(2-x)^{n+r-1} + \\
& \qquad \qquad \qquad \lambda^2(2-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n(2-x)^{n+r} = 0 \\
& \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)(2-x)^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(2-x)^{n+r} + \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n(2-x)^{n+r+2} = 0 \\
& \qquad \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n [(n+r)(n+r-1) + (n+r)] (2-x)^{n+r} + \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n(2-x)^{n+r+2} = 0 \\
& \qquad \qquad \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)^2(2-x)^{n+r} + \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n(2-x)^{n+r+2} = 0 \\
& \qquad \qquad \qquad (2-x)^r \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)^2(2-x)^n + \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n(2-x)^{n+2} \right] = 0 \\
& \qquad \qquad \qquad (2-x)^r \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+r)^2(2-x)^k + \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2}(2-x)^k \right] = 0 \\
& \qquad \qquad \qquad (2-x)^r \left[c_0r^2 + c_1(1+r)^2(2-x) \sum_{k=2}^{\infty} c_k(k+r)^2(2-x)^k + \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2}(2-x)^k \right] = 0 \\
& \qquad \qquad \qquad (2-x)^r \left[c_0r^2 + c_1(1+r)^2(2-x) \sum_{k=2}^{\infty} [c_k(k+r)^2 + \lambda^2 c_{k-2}] (2-x)^k \right] = 0.
\end{aligned}$$

Se obtiene la ecuación indicial $r^2 = 0$ y así $r_1 = 0 = r_2$. Si $r = 0$ se encuentra $\phi_1(x)$, entonces

$$c_1(2-x) + \sum_{k=2}^{\infty} [c_k(k)^2 + \lambda^2 c_{k-2}] (2-x)^k = 0$$

así $c_1 = 0$ y de

$$\begin{aligned}
c_k(k)^2 + \lambda^2 c_{k-2} &= 0 \\
c_k &= \frac{-\lambda^2 c_{k-2}}{k^2}
\end{aligned}$$

se obtiene que $c_1 = c_3 = c_5 = \dots = 0$ y

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m c_0 \lambda^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} \quad (3-25)$$

luego

$$\phi_1(\lambda x) = c_0 \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m c_0 [\lambda(2-x)]^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} \right] = J_0(\lambda x). \quad (3-26)$$

Ahora para conseguir la segunda solución $\phi_2(x)$ se necesita encontrar $c'_{2m}(0)$ entonces,

$$c_{2m}(r) = \frac{(-1)^m c_0 \lambda^{2m}}{(r+2)^2 \cdots (r+2m)^2}, \quad m \geq 3. \quad (3-27)$$

Obsérvese que si

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{\beta_1} (x - \alpha_2)^{\beta_2} \cdots (x - \alpha_n)^{\beta_n},$$

y si $x \notin \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ se tiene que

$$\frac{f(x)'}{f(x)} = \frac{\beta_1}{(x - \alpha_1)} + \frac{\beta_2}{(x - \alpha_2)} + \cdots + \frac{\beta_n}{(x - \alpha_n)}.$$

Aplicando este resultado a (3-27) e igualando r a cero se tiene

$$c'_{2m}(0) = -2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m} \right] c_{2m}(0).$$

Si se sustituye (3-25) y se define

$$H_m := \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} \right],$$

se obtiene finalmente

$$c'_{2m}(0) = -H_m \frac{(-1)^m c_0 \lambda^{2m}}{2^{2m} (m!)^2}, \quad m = 1, 2, 3 \cdots \quad (3-28)$$

finalmente

$$\phi_2(\lambda x) = J_0(\lambda x) \ln(x) + \sum_{m=1}^{\infty} H_m \frac{(-1)^{m+1} (\lambda x)^{2m}}{2^{2m} (m!)^2}. \quad (3-29)$$

En lugar de tomar ϕ_2 como la segunda solución se toma en su lugar una combinación lineal de J_0 y ϕ_2 conocida como función de Bessel de segunda clase de orden cero y se denota por Y_0 . De acuerdo a Copson (Capítulo 12) se define

$$Y_0(\lambda x) = \frac{2}{\pi} [\phi_2(\lambda x) + (\gamma - \ln 2) J_0(\lambda x)] \quad (3-30)$$

donde γ es una constante conocida como la constante de Euler-Mascheroni definida como

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln n) \cong 0,5772.$$

La solución general de la ecuación de Bessel paramétrica de orden cero para $x > 0$ es (ver [2])

$$\phi(\lambda x) = AJ_0(\lambda x) + BY_0(\lambda x). \quad (3-31)$$

En el caso en que la configuración sea Fijo-Libre se cumple

$$\lambda J_0(2\lambda)Y_1(\lambda) - \lambda J_1(\lambda)Y_0(2\lambda) = 0. \quad (3-32)$$

3.1.4. Área Exponencial

Ahora si $A(x) = e^x$ suponga que en la ecuación (3-1)

$$u(x, t) = \phi(x) \sin(\omega t).$$

Reemplazando en, (3-8) se tiene

$$\phi''(x) + \phi'(x) + \lambda\phi(x) = 0, \quad \lambda = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (3-33)$$

y resolviendo (3-33) se obtiene

$$\phi(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left[A \cos \left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}x \right) + B \sin \left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}x \right) \right].$$

Según la configuración de la barra se van a tener las condiciones de frontera siguientes

- Fijo - Libre.

Condiciones de frontera

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0,$$

las cuales implican

$$\phi(0) = 0, \quad \phi'(L) = 0. \quad (3-34)$$

Como $\phi(0) = 0$ entonces $A = 0$ así

$$\phi(x) = e^{-\frac{1}{2}x} B \sin \left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}x \right).$$

Luego

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= -\frac{1}{2}Be^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}x\right) + B\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}x\right) \\ &= Be^{-\frac{1}{2}x} \left[-\frac{1}{2} \sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}x\right) + \sqrt{\lambda - \frac{1}{4}} \cos\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}x\right) \right].\end{aligned}$$

De esta manera, la ecuación $\phi'(L) = 0$ se escribe como

$$\begin{aligned}Be^{-\frac{1}{2}L} \left[-\frac{1}{2} \sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}L\right) + \sqrt{\lambda - \frac{1}{4}} \cos\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}L\right) \right] &= 0, \\ -\frac{1}{2} \sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}L\right) + \sqrt{\lambda - \frac{1}{4}} \cos\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}L\right) &= 0, \\ -\frac{1}{2} \tan\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}L\right) + \sqrt{\lambda - \frac{1}{4}} &= 0,\end{aligned}$$

es decir, las frecuencias respectivas satisfacen

$$L \tan\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}L\right) = 2\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}L. \quad (3-35)$$

■ Fijo - Fijo.

Condiciones de frontera

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0,$$

las cuales implican

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(L) = 0. \quad (3-36)$$

Ya que $\phi(0) = 0$ entonces $A = 0$, por tanto

$$\phi(x) = e^{-\frac{1}{2}x} B \sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}x\right),$$

y como $\phi(L) = 0$ se tiene

$$\begin{aligned}e^{-\frac{1}{2}L} B \sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}L\right) &= 0, \\ \sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}L\right) &= 0.\end{aligned}$$

3.1.5. Área Cosenoidal

Ahora suponga

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EA(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = -\rho\omega^2 A(x)u(x).$$

Además suponga

$$\frac{\partial^2 [\phi(x)u]}{\partial x^2} = -\kappa\phi(x)u.$$

Expandiendo ambas ecuaciones se tiene

$$u'' + \frac{A'(x)}{A(x)}u' + \frac{\omega^2}{c^2}u = 0, \quad (3-37)$$

$$u'' + 2\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}u' + \left[\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} + \kappa \right] u = 0. \quad (3-38)$$

Comparando (3-37) y (3-38) resulta

$$\frac{A'(x)}{A(x)} = 2\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}, \quad (3-39)$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \left[\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} + \kappa \right]. \quad (3-40)$$

$$(3-41)$$

Así

$$\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = \frac{\omega^2}{c^2} - \kappa. \quad (3-42)$$

De (3-39) se puede deducir que

$$A(x) = \phi^2(x). \quad (3-43)$$

Resolviendo (3-42) se encuentra $\phi(x)$ dependiendo de κ . Sea $\kappa = \alpha\frac{\omega^2}{c^2}$, entonces

$$\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = (1 - \alpha)\frac{\omega^2}{c^2} \quad (3-44)$$

Si $\alpha = 1$, entonces $\phi(x)$ es una función lineal que es el caso en que el área es cuadrática.

Si $\alpha \in [0, 1)$, entonces $\phi(x)$ es una función exponencial que ya fue analizada.

Si $\alpha \in (1, +\infty)$, entonces $\phi(x)$ es una función cosenoidal o senoidal.

Si $\alpha \in (-\infty, 0)$, entonces $\phi(x)$ es una función exponencial.

Si $\phi(x) = \cos(3x)$ entonces $A(x) = \cos^2(3x)$ y $\kappa = 9 + \frac{\omega^2}{c^2}$.

Tomando $v(x) = \phi(x)u(x)$ (3-38) se convierte en

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\kappa v, \quad (3-45)$$

cuya solución es

$$v(x) = A \cos(\sqrt{\kappa}x) + B \sin(\sqrt{\kappa}x). \quad (3-46)$$

- Fijo - Libre: Condiciones de frontera $u(0) = u'(L) = 0$.
La condición $u(0) = 0$ implica que $v(0) = 0$ por tanto $A = 0$. Así

$$v(x) = B \sin(\sqrt{\kappa}x) \quad (3-47)$$

y

$$v'(x) = B\sqrt{\kappa} \cos(\sqrt{\kappa}x). \quad (3-48)$$

Por otro lado, como $u'(L) = 0$ entonces

$$\begin{aligned} v'(L) &= \phi'(L)u(L) \\ &= \phi'(L) \frac{v(L)}{\phi(L)} \\ &= -3 \sin(3L) \frac{B \sin(\sqrt{\kappa}L)}{\cos(3L)}, \end{aligned}$$

es decir

$$v'(L) = -3 \sin(3L) \frac{B \sin(\sqrt{\kappa}L)}{\cos(3L)}. \quad (3-49)$$

Reemplazando $x = L$ en (3-48) e igualándola a (3-49)

$$\begin{aligned} B\sqrt{\kappa} \cos \sqrt{\kappa}L &= -3 \sin(3L) \frac{B \sin(\sqrt{\kappa}L)}{\cos(3L)} \\ \sqrt{\kappa} \cos \sqrt{\kappa}L &= -3 \sin(3L) \frac{\sin(\sqrt{\kappa}L)}{\cos(3L)} \\ \sqrt{\kappa} &= -3 \tan(3L) \tan(\sqrt{\kappa}L). \end{aligned}$$

En consecuencia κ satisface

$$-L \tan(\sqrt{\kappa}L) = \frac{1}{3 \tan(3L)} \sqrt{\kappa}L. \quad (3-50)$$

- Fijo - Fijo: Condiciones de frontera $u(0) = u(L) = 0$.

Como $u(0) = 0$ se tiene la ecuación (3-47).

Dado que $u(L) = 0$ se tiene $v(L) = 0$. Por tanto, se obtiene la siguiente ecuación de frecuencia:

$$\sin(\sqrt{\kappa}L) = 0 \quad (3-51)$$

- Libre - Libre: Condiciones de frontera $u'(0) = u'(L) = 0$.

Como $u'(0) = 0$ se tiene

$$v'(0) = \phi'(0)u(0)$$

$$v'(0) = \phi'(0) \frac{v(0)}{\phi(0)}$$

$$v'(0) = \phi'(0)0$$

así

$$v'(0) = 0 \quad (3-52)$$

Si $u'(L) = 0$ se tiene la ecuación (3-49). Ahora derivando la ecuación (3-46)

$$v'(x) = -A\sqrt{\kappa} \sin(\sqrt{\kappa}x) + B\sqrt{\kappa} \cos(\sqrt{\kappa}x).$$

Aplicando la condición (3-52) se deduce que $B = 0$. Luego

$$v'(x) = -A\sqrt{\kappa} \sin(\sqrt{\kappa}x), \quad (3-53)$$

y tomando $x = L$ en la anterior ecuación e igualándola a (3-49) se llega a la ecuación de frecuencia (3-51).

3.2. Aproximaciones Numéricas

3.2.1. Aproximación por Diferencias Finitas (MDF)

El método de diferencias finitas es un método de discretización en el que se aproxima cada una de las derivadas. Se considera una barra uniforme, fija-libre, axialmente vibrante de longitud L . El modelo discreto asociado a ésta es un sistema de masa-resorte. El problema consiste en dividir la estructura en n partes, de igual longitud $h = L/n$. El problema diferencial de valor propio asociado, está dado por:

$$(pv')' + \lambda qv = 0, \quad \lambda = \omega^2$$

$$v(0) = 0 \quad v'(L) = 0$$

con $p = EA$ y $q = \rho A$, rigidez axial y densidad por unidad de longitud de la barra respectivamente, definidas para cada subintervalo como p_i y q_i . Sea la partición $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots$, $v_i \approx v(x_i)$.

Se aproxima la primera derivada por el punto medio del i -ésimo intervalo mediante

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

para que haya un menor error de aproximación, se tiene

$$(EA v')_{x=ih-\frac{h}{2}} \cong \left((EA)_i \frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right)$$

y

$$\left((EA)_i \frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right)'_{x=ih} = \frac{(EA)_{i+1} \frac{v_{i+1} - v_i}{h} - (EA)_i \frac{v_i - v_{i-1}}{h}}{h}$$

sustituyendo la expresión correspondiente a cada derivada en el modelo diferencial de valor propio asociado, resulta el siguiente esquema:

$$-k_i v_{i-1} + (k_i + k_{i+1}) v_i - k_{i+1} v_{i+1} - \lambda m_i v_i = 0$$

$$v_0 = 0 \quad v_{n+1} = v_n$$

donde

$$k_i = \frac{p_i}{h}, \quad m_i = h q_i$$

Aplicando las condiciones se concluye que, para encontrar una aproximación de la solución, se resuelve el siguiente problema de valor propio generalizado

$$(K - \lambda M)v = 0,$$

donde la matriz de rigidez axial K y la matriz de masa M vienen dadas por

$$(pv')' + \lambda qv = 0, \quad \lambda = \omega^2 \quad (3-54)$$

$$v(0) = 0, \quad v'(L) = 0,$$

con $p = EA(x)$ y $q = \rho A(x)$, rigidez axial y densidad por unidad de longitud de la barra respectivamente, que para cada subintervalo se define como p_i y q_i .

Al integrar por partes y multiplicar por la función *test* ψ tal que $\psi(0) = 0$, en ambos lados de la igualdad en (3-54) se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (pv')' + \lambda qv &= 0 \\ \int_{\Omega} (pv')'\psi + \int_{\Omega} \lambda qv\psi &= 0 \\ \int_{\Omega} pv'\psi' - \int_{\Omega} \lambda qv\psi &= 0 \\ E \int_{\Omega} Av'\psi' - \lambda\rho \int_{\Omega} Av\psi &= 0. \end{aligned}$$

Así la formulación variacional asociada es: Hallar $v \in H := \{z \in H^1(\Omega) : z(0) = 0\}$ tal que $a(u, v) = F(v) \forall v \in H$, donde

$$a(v, \psi) = E \int_{\Omega} Av'\psi' - \lambda\rho \int_{\Omega} Av\psi \quad \forall v, \psi \in H \quad (3-55)$$

$$F(v) = 0 \quad \forall v \in H. \quad (3-56)$$

Esto conduce a resolver el problema de valor propio $(K - \lambda M)v = 0$. Sea la partición $x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < x_{n+2}$. La función base discreta ψ_i se define de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= \begin{cases} \frac{x-x_i}{h} & x_i < x < x_{i+1} \\ \frac{x_{i+2}-x}{h} & x_{i+1} < x < x_{i+2} \end{cases} \\ \psi_n(x) &= \begin{cases} \frac{x-x_n}{h} & x_n < x < x_{n+1} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

Las matrices K y M están definidas por: $K_{i,j} = E \int_{\Omega} Av'\psi'$ y $M_{i,j} = \int_{\Omega} \lambda qv\psi$ además son matrices tridiagonales simétricas.

$$K_{i,i} = \frac{E}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} A(x) dx + \frac{E}{h^2} \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} A(x) dx,$$

$$K_{i,i+1} = -\frac{E}{h^2} \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} A(x) dx,$$

$$K_{n,n} = \frac{E}{h^2} \int_{x_n}^{x_{n+1}} A(x) dx,$$

y

$$M_{i,i} = \frac{\rho}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} A(x)(x - x_i)^2 dx + \frac{\rho}{h^2} \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} A(x)(x_{i+2} - x)^2 dx,$$

$$M_{i,i+1} = \frac{\rho}{h^2} \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} A(x)(x_{i+2} - x)(x - x_{i+1}) dx,$$

$$M_{n,n} = \frac{\rho}{h^2} \int_{x_n}^{x_{n+1}} A(x)(x - x_n)^2 dx.$$

Algoritmo:

input: n número de elementos finitos,

E , ρ , A vectores de longitud n

output: v vector de valores propios de longitud n

a) Encuentre $p_i = E_i A_i$ y $q_i = \rho_i A_i$.

b) Construya las matrices K y M .

c) Encuentre $vf = eig[K, M]$.

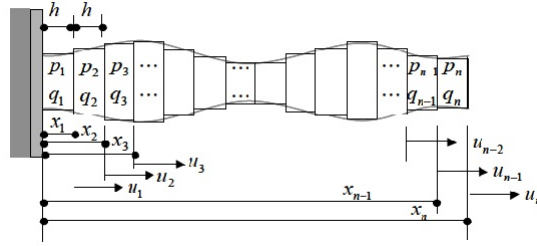


Figura 3-1: Barra no uniforme dividida en n porciones con propiedades físicas constantes.

3.2.3. Modelo Trascendental

Consiste en dividir la estructura en n partes de longitud L_i de tal forma que cada porción de ésta tenga parámetros físicos constantes. Se asume que el movimiento es armónico en toda la estructura y de manera similar en cada porción, lo cual lleva a problemas de valor propio.

Para garantizar que la estructura no se parte y continúe el movimiento aparecen unas condiciones de empalme.

Para cada división resulta una ecuación en términos de valor propio. Resolviendo este sistema y aplicando las condiciones de frontera dadas y las condiciones de empalme, resultan ecuaciones que se pueden organizar de la forma $A(w)z = 0$ donde A es una matriz en función de w .

A continuación se tiene la ecuación de movimiento de una barra con parámetros físicos no constantes:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) = q(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0$$

Asumiendo que el movimiento es armónico

$$(pv')' + \lambda qv = 0 \quad 0 < x < L$$

$$v(0) = 0, \quad \frac{\partial v(L)}{\partial x} = 0 \quad \lambda = \omega^2$$

La barra no uniforme se puede dividir en n barras uniformes, así, la ecuación de

movimiento queda:

$$\begin{cases} p_1 \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} = q_1 \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2}, & 0 < x < L_1, \quad t > 0 \\ p_2 \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} = q_2 \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2}, & L_1 < x < L_2, \quad t > 0 \\ \vdots \\ p_n \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2} = q_n \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial t^2}, & L_{n,1} < x < L_n, \quad t > 0 \end{cases} \quad (3-57)$$

y

$$u_1(0, t) = 0 \quad \frac{\partial u_n(L, t)}{\partial x} \quad (3-58)$$

Aparecen las condiciones de empalme

$$\begin{cases} u_1(L_1, t) = u_2(L_1, t) & p_1 \frac{\partial u_1(L_1, t)}{\partial x} = p_2 \frac{\partial u_2(L_1, t)}{\partial x} \\ u_2(L_2, t) = u_3(L_2, t) & p_2 \frac{\partial u_2(L_2, t)}{\partial x} = p_3 \frac{\partial u_3(L_2, t)}{\partial x} \\ \vdots & \vdots \\ u_{n-1}(L_{n-1}, t) = u_n(L_{n-1}, t) & p_{n-1} \frac{\partial u_{n-1}(L_{n-1}, t)}{\partial x} = p_n \frac{\partial u_n(L_{n-1}, t)}{\partial x} \end{cases}$$

Asumiendo que el movimiento es armónico en cada porción se sigue que:

$$\begin{cases} u_1(x, t) = v_1(x) \sin(\omega t) \\ u_2(x, t) = v_2(x) \sin(\omega t) \\ \vdots \\ u_n(x, t) = v_n(x) \sin(\omega t) \end{cases}$$

Así (3-57) se convierte en

$$\begin{cases} v_1'' + \frac{\lambda}{c_1^2} v_1 = 0, & 0 < x < L_1 \\ v_2'' + \frac{\lambda}{c_2^2} v_2 = 0, & L_2 < x < L_2 \\ \vdots \\ v_n'' + \frac{\lambda}{c_n^2} v_n = 0, & L_{n-1} < x < L \end{cases}$$

con $\lambda = \omega^2$ y $c_i = \sqrt{\frac{p_i}{q_i}}$. Las condiciones (3-58) se escriben ahora como

$$v_1(0) = 0, \quad v_n'(L) = 0. \quad (3-59)$$

Las condiciones de empalme son ahora

$$\begin{cases} v_1(L_1) = v_2(L_1) & p_1 v_1'(L_1) = p_2 v_2'(L_1) \\ v_2(L_2) = v_3(L_2) & p_2 v_2'(L_1) = p_3 v_3'(L_2) \\ \vdots \\ v_{n-1}(L_{n-1}) = v_n(L_{n-1}) & p_n v_n'(L_{n-1}) = p_n v_n'(L_{n-1}). \end{cases}$$

La solución general del sistema viene dada por:

$$\begin{cases} v_1(x) = Q_1 \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{c_1}x\right) + R_1 \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{c_1}x\right) & 0 < x < L_1 \\ v_2(x) = Q_2 \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{c_2}x\right) + R_2 \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{c_2}x\right) & L_1 < x < L_2 \\ \vdots \\ v_n(x) = Q_n \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{c_n}x\right) + R_n \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{c_n}x\right) & L_{n-1} < x < L. \end{cases}$$

Aplicando las condiciones (3-59) y de empalme en la solución general, queda un sistema de ecuaciones que se pueden organizar de forma matricial $A(w)z = 0$.

Luego, todo se reduce a resolver el problema $A(w)z = 0$. Para ello debemos encontrar la solución no trivial de este sistema. Con este fin, se diseñó un algoritmo de tal forma que se encuentra la solución sin necesidad de evaluar el determinante que es bastante costoso, ya que la matriz tiene funciones trascendentales y requiere de un elevado número de operaciones.

La matriz $A(w)$ está definida como:

$$A(w) = \begin{bmatrix} - & - & -p^T & - & - \\ - & - & -U & - & - \\ - & - & -V & - & - \\ - & - & -q^T & - & - \end{bmatrix}$$

donde

$$p = (0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0) \quad (3-60)$$

$$U(w) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & -\alpha_2 & -\beta_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & -\alpha_3 & -\beta_3 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \alpha_{n-2} & \beta_{n-2} & -\alpha_{n-1} & -\beta_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & & & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & -\alpha_n & -\beta_n \end{bmatrix} \quad (3-61)$$

$$V(w) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & -\sigma_{11} & -\gamma_{12} & \sigma_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{22} & -\sigma_{22} & -\gamma_{23} & \sigma_{23} & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \gamma_{n-2,n-2} & -\sigma_{n-2,n-2} & -\gamma_{n-1,n-1} & \sigma_{n-2,n-1} & 0 & 0 \\ 0 & & & & \gamma_{n-1,n-1} & -\sigma_{n-1,n-1} & -\gamma_{n-1,n} & \sigma_{n-1,n} \end{bmatrix} \quad (3-62)$$

$$q = \left(0 \quad \dots \quad 0 \quad \frac{w}{c_n} \cos \frac{w}{c_n} L \quad - \frac{w}{c_n} \operatorname{sen} \frac{w}{c_n} L \right) \quad (3-63)$$

$$\alpha_i = \sin \frac{w}{c_i} L_i$$

$$\beta_i = \cos \frac{w}{c_i} L_i$$

$$\gamma_{ij} = p_j \frac{w}{c_j} \cos \frac{w}{c_j} L_i$$

$$\sigma_{ij} = p_j \frac{w}{c_j} \sin \frac{w}{c_j} L_i.$$

Algoritmo base-Newton

(ver [18])

Input: $A(w)$, $B(w) = \frac{\partial A(w)}{\partial w}$, δ , w^0

Output: w solución no trivial del problema.

- a) Encuentre los valores propios usando $\operatorname{eig}(A, B)$
- b) $\epsilon =$ valor propio que tiene menor valor absoluto.
- c) Calcule el nuevo w , $w^{k+1} = w^k + \epsilon$.
- d) Calcule $A(w)$ y $B(w)$ con el nuevo w .
- e) Repita a)-d) hasta que $|\epsilon| < \delta$

Por cada valor inicial, se obtendrá un valor propio.

3.2.4. Función de Optimización.

Muchas veces al trabajar con derivadas los resultados son muy sensibles a un ruido, por ello se ha propuesto trabajar con una función de optimización la cual no usa derivadas y es sin restricciones.

Se trabaja con el problema $F(x) = 0$, lo cual implica encontrar el valor x^* tal que $F(x^*) = 0$. Si se aplica norma al cuadrado en ambos lados de la igualdad resulta que

ésta es cero y como la norma es mayor e igual a cero, tomando $f(x) = ||F(x)||^2$ da como resultado que para todo x $f(x) \geq f(x^*) = 0$

$$\begin{aligned} F(x^*) &= 0 \\ 0 &\leq ||F(x^*)||^2 = 0 \\ 0 &\leq f(x^*) = 0 \\ f(x^*) &= 0. \end{aligned}$$

Para encontrar x^* debemos conocer la función que se va a minimizar la cual se encuentra usando $dirnew(\omega_i)$.

$dirnew(\omega_i)$

Input: ω_i : frecuencia inicial

Output: ro Norma cuadrada del vector determinante.

- a) Evalúe la frecuencia en la matriz A .
- b) Construya $F = det(A(\omega_i))$
- c) $ro = (F_1^2)$.

Ya conociendo la función, se minimiza con la función $fminsearch$.

Algoritmo

Input: ω_0 : valor inicial de la frecuencia

Output: ω frecuencia.

- a) Use $dirnew$ para evaluar la frecuencia en la matriz y encontrar la función F a minimizar.
- b) $\omega = fminsearch(@(x) dirnew(\omega), \omega_i)$

Como se puede observar en las figuras (3-2), la función tiene varios mínimos y en un intervalo pequeño se encuentran varios de ellos. Por tanto, si se toma un ruido pequeño puede que el algoritmo no converja, debido a que no arroja el valor deseado.

3.3. Ejemplos Números

Una de las aplicaciones del (PET) es encontrar el comportamiento espectral de estructuras físicas. Se trabaja con una barra no uniforme axialmente vibrante, de configuración fijo-libre, es decir, una barra con parámetros físicos no constantes de longitud $L = 1$: área $A(x) = e^x$ y $E, \rho = 1$.

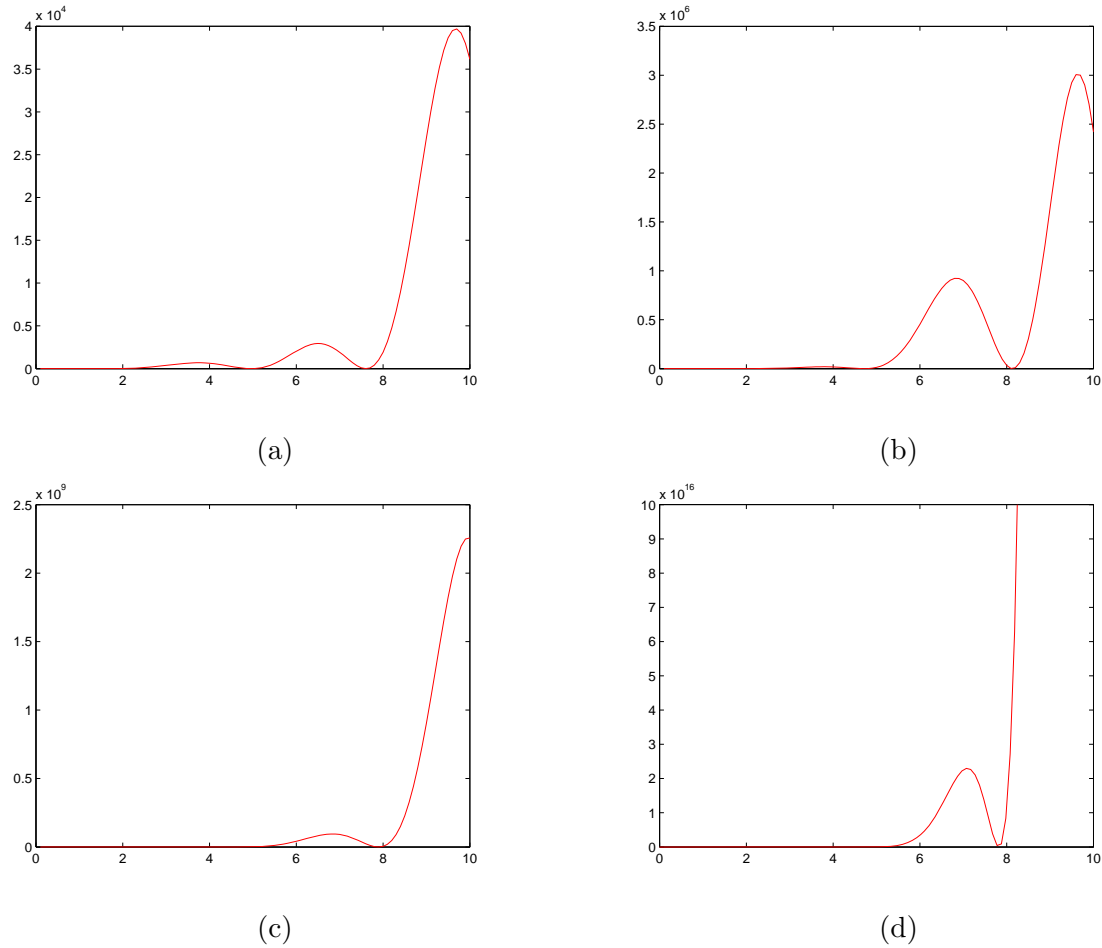


Figura 3-2: Comportamiento de la función a minimizar, variando el único valor con distinto número de divisiones. **a** $n = 2$, **b** $n = 3$, **c** $n = 4$, **d** $n = 8$

Para cada método de aproximación se trabajaron distintos órdenes $n = 3, 4, \dots, 20, 100$. Entiendase como orden el número de divisiones que se le hace a la estructura.

El problema se reduce a encontrar las raíces de la siguiente ecuación de frecuencia:

$$\tan\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}\right) = 2\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}$$

la cual es el determinante de la matriz $A(\omega)$. Así, estas raíces indican para qué valores de ω el sistema $A(\omega)z = 0$ tiene solución no trivial.

Como para el método trascendental se necesitan valores iniciales, primero se toman como valores iniciales las frecuencias naturales de una barra uniforme con configuración

fijo-libre y luego los valores que arroja el MEF. Se analizan las primeras diez frecuencias.

Se toma como solución exacta la encontrada mediante el método de iteración de Newton.

En el modelo trascendental, tomando como valores iniciales las frecuencias naturales, y un número de divisiones $n = 3$ en la figura (3-3) se observa que hay una buena aproximación para las primeras 20 frecuencias a diferencia de los otros dos métodos como se muestra en la figura (3-4) para un $n = 20$, mientras que con $n = 100$ para estos métodos mejora la aproximación: figura (3-5).

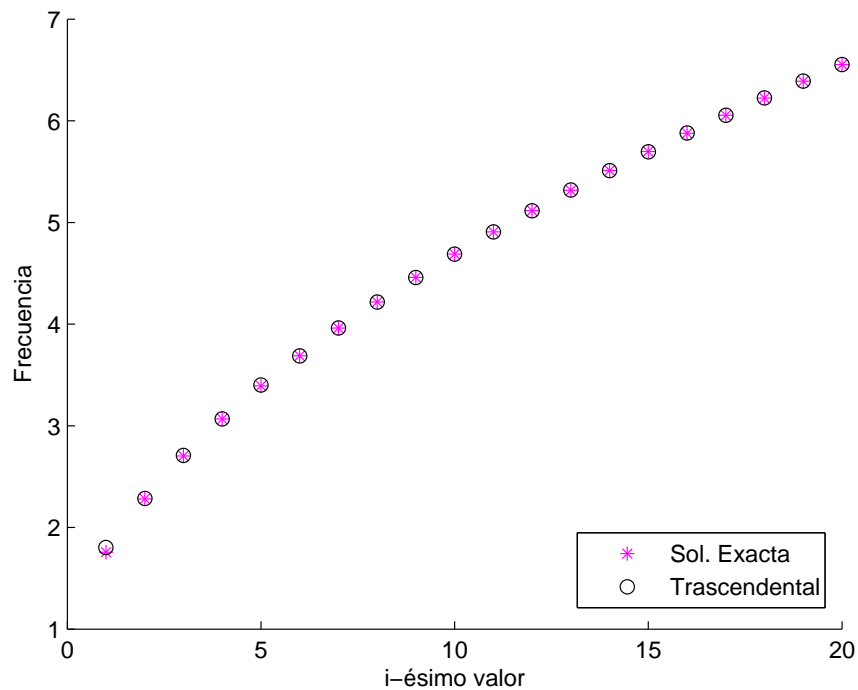


Figura 3-3: Trascendental $n=3$ valores iniciales:Frecuencias naturales - Solución Exacta

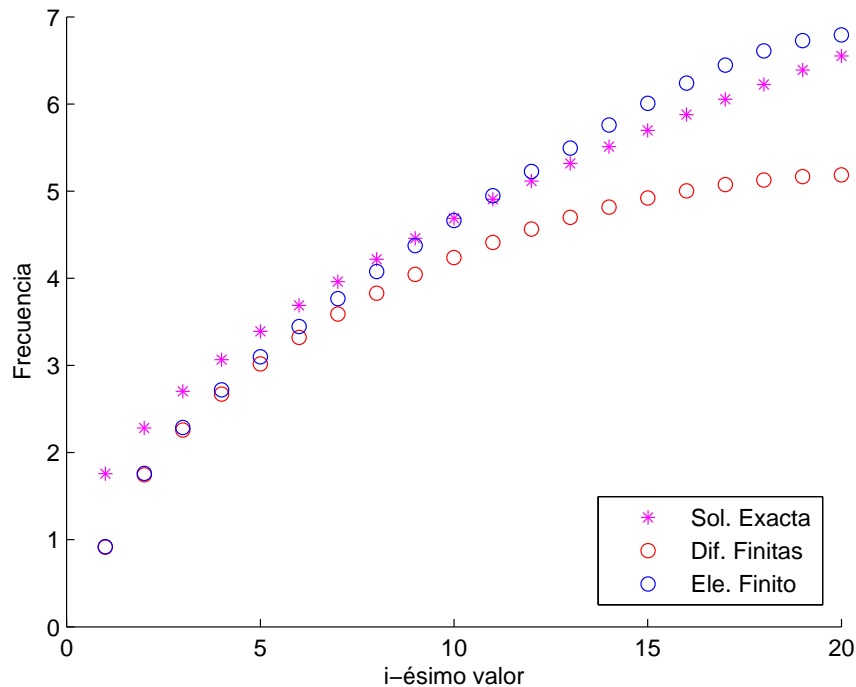


Figura 3-4: Elemento Finito- Solución Exacta- Diferencias Finitas $n=20$

Al hacer la aproximación por cualquier método la carga computacional es alta y no hay un 100% de confiabilidad, por tanto se permite cierto umbral de error. En la Tabla (3-1) donde para $n = 10, 20, 30, 40, 60$ se analizan las primeras 10 frecuencias, se puede ver que a pesar de que el Trascendental con frecuencias naturales comparado con MEF y MDF toma más tiempo, es el que menor error comete con número de divisiones pequeños y el que le sigue es el MEF. A partir de esto se analiza también el Trascendental usando como valores iniciales, los valores que arroja éste y se observa que no hay cambio significativo para algún n ya que para otros disminuye el tiempo. Ver Figura: (3-6) Tabla: (3-1).

Cabe mencionar que el modelo Trascendental gasta tiempo en calcular los valores iniciales mientras que los otros dos métodos no los requieren. Una característica del modelo Trascendental es que por cada número de divisiones que se le haga a la estructura se pueden obtener diferente número de frecuencias a diferencia de los otros métodos. Además, el tiempo que utilice el método dependerá del número de frecuencias que se requiera.

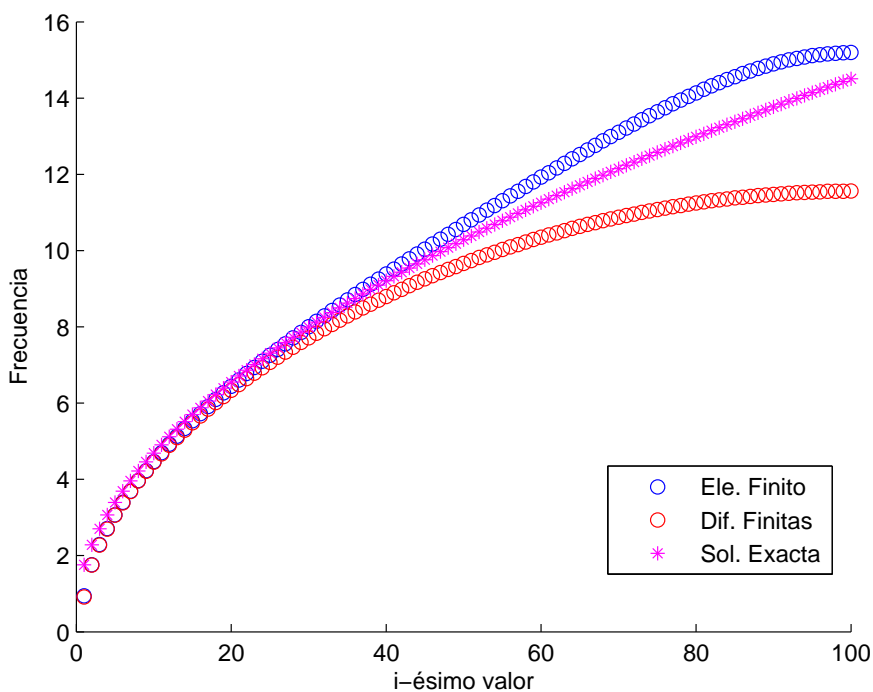


Figura 3-5: Elemento Finito-Solución Exacta-Diferencias Finitas $n=100$

$$A(x) = e^x$$

n	Trascendental				Elemento Finito		Diferencias Finitas	
	V.I Elemento Finito		V.I Frecuencias Naturales		Tiempo	re	Tiempo	re
	Tiempo	re	Tiempo	re				
10	1.0442	0.0644	0.4532	0.0634	0.0710	0.3740	0.0257	0.4588
20	3.2088	0.0630	3.4962	0.0631	0.0823	0.1590	0.0259	0.1553
30	6.8923	0.0636	25.1397	0.0636	0.1055	0.0693	0.0259	0.0779
40	27.1792	0.0633	27.1792	0.0633	0.1277	0.0386	0.0260	0.0478
60	52.4675	0.0640	52.4675	0.0640	0.1678	0.0170	0.0312	0.0243

Tabla 3-1: Errores relativos (re) y tiempo de CPU para un $A(x) = e^x$

Para estudiar la efectividad del método se trabaja con una barra de longitud, densidad y rigidez unitaria con distinta área seccional.

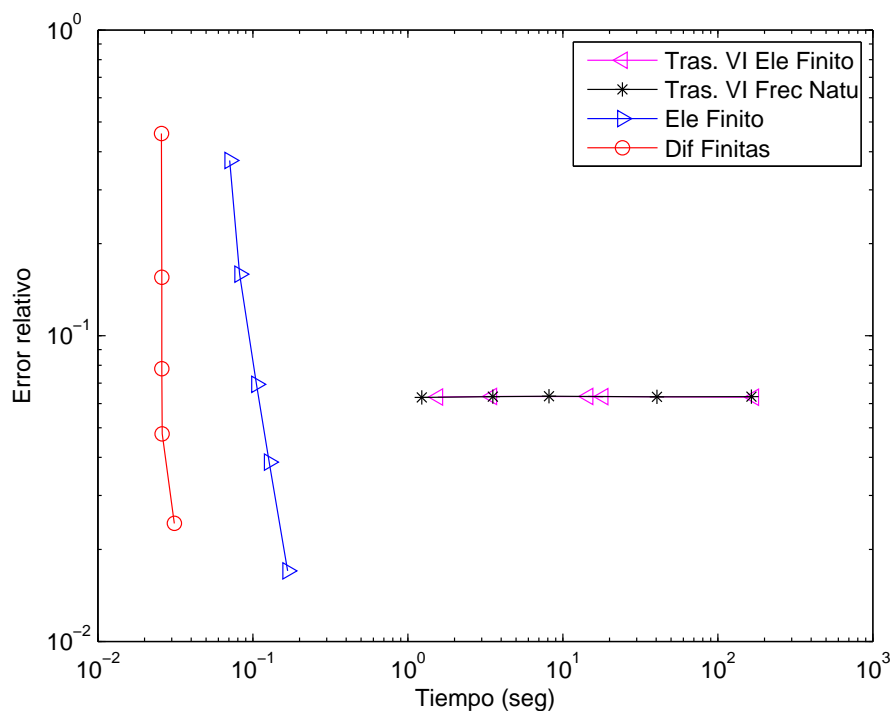


Figura 3-6: Diferentes métodos en el caso del área e^x

$$A(x) = (1 + x)^2$$

n	Trascendental				Elemento Finito		Diferencias Finitas	
	V.I Elemento Finito		V.I Frecuencias Naturales		Tiempo	re	Tiempo	re
	Tiempo	re	Tiempo	re				
10	4.7780	0.1018	4.1331	0.1018	0.0723	0.1649	0.0260	0.2318
20	1.2010	4.6835e-004	0.4934	4.6835e-004	0.0959	0.0675	0.0260	0.0683
30	1.4320	1.9503e-004	0.8828	1.9503e-004	0.1363	0.0300	0.0263	0.0328
40	1.9059	1.0767e-004	1.4047	1.0767e-004	0.1637	0.0168	0.0260	0.0196
60	3.3905	4.7480e-005	3.2364	4.7480e-005	0.2191	0.0075	0.0280	0.0096

Tabla 3-2: Errores relativos (re) y tiempo de CPU para $A(x) = (1 + x)^2$

$$A(x) = (1 - \frac{1}{2}x)^2$$

n	Trascendental		Elemento Finito		Diferencias Finitas			
	V.I Elemento Finito	V.I Frecuencias Naturales	Tiempo	re	Tiempo	re		
10	0.7349	0.0099	8.5638	0.0367	0.0855	0.1599	0.0293	0.2800
20	0.8869	9.5482 e-004	4.4284	0.0353	0.1000	0.0668	0.0262	0.0988
30	1.3712	4.2231e-004	7.5807	0.0353	0.1279	0.0298	0.0262	0.0542
40	18.1674	2.4647e-004	15.2172	0.0353	0.1577	0.0167	0.0262	0.0360
60	57.6003	1.2350e-004	77.0037	0.0353	0.2197	0.0074	0.0275	0.0208

Tabla 3-3: Errores relativos (re) y tiempo de CPU para $A(x) = (x - (1/2)x)^2$

$$A(x) = e^{-x}$$

n	Trascendental		Elemento Finito		Diferencias Finitas			
	V.I Elemento Finito	V.I Frecuencias Naturales	Tiempo	re	Tiempo	re		
10	0.8506	0.0050	1.2144	0.0073	0.0797	0.3655	0.0333	0.5092
20	2.4980	0.0050	3.4213	0.0073	0.0815	0.1582	0.0345	0.1959
30	6.5173	0.0063	8.1066	0.0075	0.1032	0.0690	0.0259	0.1078
40	24.0079	0.0064	29.6544	0.0081	0.1312	0.0384	0.0265	0.0710
60	111.5296	0.0073	98.2460	0.0077	0.1685	0.0169	0.0359	0.0403

Tabla 3-4: Errores relativos (re) y tiempo de CPU para $A(x) = e^x$

$$A(x) = 2 - x$$

n	Trascendental		Elemento Finito		Diferencias Finitas			
	V.I Elemento Finito	V.I Frecuencias Naturales	Tiempo	re	Tiempo	re		
10	2.6837	0.0047	0.1444	0.0047	0.0608	0.0651	0.0255	0.1161
20	6.3872	4.1489e-004	0.3118	4.1866e-004	0.0822	0.0163	0.0255	0.0469
30	10.8521	1.8021e-004	0.6297	1.5817e-004	0.1041	0.0072	0.0259	0.0284
40	21.0829	1.0441e-004	1.2396	8.0814e-005	0.1244	0.0041	0.0266	0.0202
60	58.7240	5.1863e-005	3.4811	3.0904e-005	0.1769	0.0018	0.0309	0.0127

Tabla 3-5: Errores relativos (re) y tiempo de CPU para $A(x) = 2 - x$

Usando la función de optimización se encontraron los resultados que se muestran en la tabla (3-8)

$$A(x) = 2x^2 - 4x + 3$$

n	Trascendental		Elemento Finito		Diferencias Finitas			
	V.I Elemento Finito	V.I Frecuencias Naturales	Tiempo	re	Tiempo	re		
10	1.6705	0.0019	4.5513	0.0970	0.0786	0.0651	0.0327	0.1244
20	2.5424	4.3604e-004	4.5943	0.0970	0.0865	0.0163	0.0261	0.0516
30	4.1216	1.9119e-004	44.0393	0.0970	0.1092	0.0072	0.0266	0.0317
40	6.2104	1.0698e-004	408.7334	0.0970	0.1300	0.0041	0.0263	0.0227
60	13.2877	4.7279e-005	243.0970	0.0970	0.1726	0.0018	0.0270	0.0144

Tabla 3-6: Errores relativos (re) y tiempo de CPU para $A(x) = 2x^2 - 4x + 3$

$$A(x) = \cos^2(3x)$$

n	Trascendental		Elemento Finito		Diferencias Finitas			
	V.I Elemento Finito	V.I Frecuencias Naturales	Tiempo	re	Tiempo	re		
10	6.1560	0.1045	5.6956	0.0578	0.0522	0.4953	0.0227	0.3387
20	27.6086	0.1047	13.3110	0.0578	0.0686	0.2255	0.0220	0.2079
30	61.4084	0.1060	27.8235	0.0583	0.0835	0.1515	0.0228	0.0730
40	139.5168	0.1048	63.6614	0.0574	0.1014	0.1305	0.0230	0.0546
60	96.3464	0.1066	90.32430	0.0569	0.1334	0.1147	0.0232	0.0704

Tabla 3-7: Errores relativos (re) y tiempo de CPU para $A(x) = \cos^2(3x)$

n	Trascendental							
	Lineal		Cuadratica		Exponencial		Cosenoidal	
	CPU(seg)	re	CPU(seg)	re	CPU(seg)	re	CPU(seg)	re
4	0.9662	0.0078	0.9162	0.0151	2.1904	0.0491	1.7069	0.0438
8	1.8875	0.0060	1.4463	0.4124	2.4906	0.0866	2.7611	0.0735
10	2.8034	0.0316	1.7309	0.5213	2.9573	0.2161	2.6901	0.2307
20	3.9670	0.0313	3.8781	0.0353	2.4390	0.5742	3.9855	0.1216
30	5.9932	0.0894	5.6239	0.1433	3.4749	0.9478	5.7904	0.5212

Tabla 3-8: Errores relativos (re) y tiempo de CPU para distintas areas con *fminsearch*

3.4. Conclusiones

El modelo trascendental resulta ser un método muy conveniente en cuanto al error relativo aunque no lo sea al tiempo de ejecución. Tiene como ventaja que se necesita un número pequeño de divisiones de la estructura a diferencia de los otros dos métodos

n	Trascendental							
	Lineal $2 - x$		Cuadratica $(1 - \frac{1}{2}x)^2$		Exponencial e^{-x}		Cosenoidal $\cos^2(3x)$	
	CPU(seg)	re	CPU(seg)	re	CPU(seg)	re	CPU(seg)	re
10	1.1465	0.0047	9.4750	0.0367	2.8063	0.0073	7.4128	0.0578
20	1.1492	4.1866e-004	5.1463	0.0353	4.4610	0.0073	14.5393	0.0578
30	1.2904	1.5817e-004	8.1295	0.0353	7.5675	0.0075	28.1708	0.0583
40	1.4399	8.0814e-005	15.2148	0.0353	12.5578	0.0081	63.8796	0.0574
60	2.1127	3.0904e-005	75.2476	0.0353	25.1144	0.0077	88.4627	0.0569

Tabla 3-9: Errores relativos (re) y tiempo de CPU para distintas areas con *fminsearch* como valores iniciales

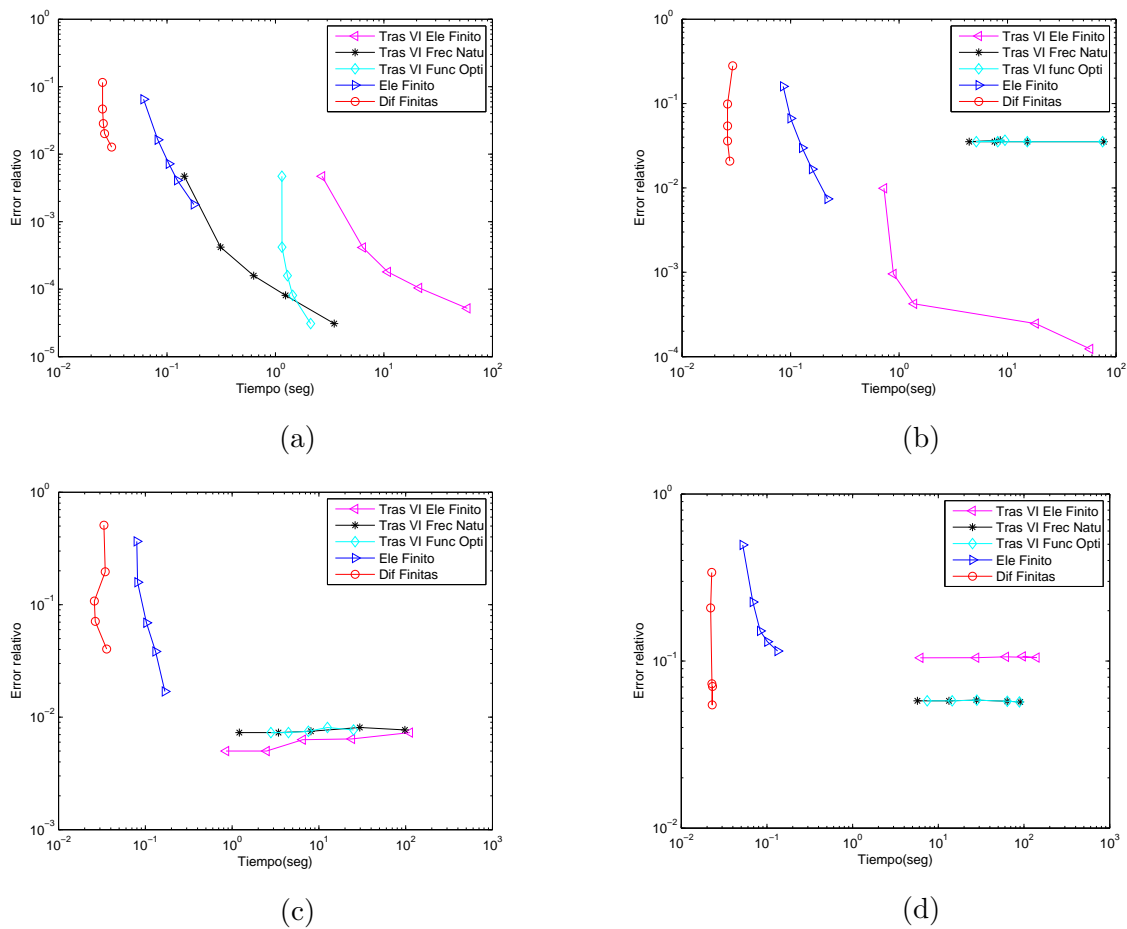


Figura 3-7: Comparación de los métodos usando distinta área seccional a. Lineal b. Cuadratica, c. Exponencial, d. Cosenoidal

para obtener buenos resultados; además, hay que tener en cuenta que éste requiere tiempo para calcular las frecuencias iniciales y depende también del número de frecuencias que se requiera, debido a que para cada número de divisiones que se le haga a la estructura se obtienen un número cualquiera de frecuencias.

Al variar el área y hacer las pruebas respectivas se encuentra que en todos los casos, excepto en el caso cosenoidal en el MEF se comete menor error relativo que en el MDF (ver Tabla: (4-2d)). Por ello se hacen pruebas tomando como valores iniciales los resultados que arroja MEF donde la diferencia entre los resultados varía de acuerdo al caso de estudio. Por ejemplo, en el caso cosenoidal se comete mayor error al tomar como valores iniciales los de Elemento Finito en lugar de las frecuencias naturales a diferencia del caso cuadrático (Tabla (3-3)). Para esta área es conveniente usar el método trascendental para ordenes pequeños, mientras para mayor orden se recomienda el método de diferencias finitas.

El modelo trascendental con la función de optimización se obtienen buenos resultados para ordenes pequeños como se observa en la Tabla: (3-8), por lo anterior se trabaja con un orden 4 para tomar como valores iniciales estos resultados y se observa que en algunos casos el algoritmo basado en el de Newton se comporta de manera similar que en el caso de tomar como valores iniciales las frecuencias naturales.(Tabla: (3-9) y (??)).

Es posible que en algunos casos el algoritmo arroje frecuencias cero como ocurre cuando el área es $A(x) = 2x^2 - 4x + 3$ de ahí el error relativo que arroja cuando se usan como valores iniciales las frecuencias naturales, (Tabla: (3-6)).

4 Problema Trascendental Inverso de Valor Propio (TIEP)

En la sección anterior, el problema $A(\omega)z = 0$ con $z \neq 0$ es univariado. En el caso del problema inverso, éste se convierte en un problema multivariado. Se trata de resolver un sistema de ecuaciones no lineal, conociendo uno o dos conjuntos de frecuencias dependiendo de la configuración de la estructura, ya que según los estudios de Gladwell si el sistema es simétrico alrededor del punto medio y las condiciones de frontera son simétricas también, entonces en general un espectro correspondiente a un conjunto de condiciones es suficiente de lo contrario dos espectros, correspondientes a diferentes condiciones de frontera en un extremo son requeridos [8]. Las variables del sistema a resolver son los parámetros físicos de la estructura. Para resolver este problema, Singh en [18] propone un algoritmo basado en el algoritmo de Newton. En esta tesis se propone un algoritmo basado en la función de optimización *fminsearch*.

Al igual que en el caso directo se trabaja con una barra axialmente vibrante de longitud 1 con propiedades físicas no constantes en toda su extensión. La barra se divide en dos porciones iguales de tal forma que cada porción tenga propiedades físicas constantes. El problema de valor propio asociado a la configuración Fijo- Libre está dado por:

$$\begin{aligned} p_1 v_1'' + \lambda_1^2 q_1 v_1 &= 0, & \lambda_1 &= \frac{\omega}{c_1}, & 0 < x < x_1, \\ p_2 v_2'' + \lambda_2^2 q_2 v_2 &= 0, & \lambda_1 &= \frac{\omega}{c_2}, & x_1 < x < 1. \end{aligned}$$

Las condiciones de empalme son:

$$\begin{aligned} v_1(x_1) &= v_2(x_1) \\ p_1 v_1(x_1) &= p_2 v_2(x_1) \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} v_1(0) &= 0 \\ v_2'(1) &= 0 \end{aligned}$$

La solución general

$$v_1(x) = A_1 \sin\left(\frac{\omega x}{c_1}\right) + B_1 \cos\left(\frac{\omega x}{c_1}\right) \quad 0 < x < x_1 \quad (4-1)$$

$$v_2(x) = A_2 \sin\left(\frac{\omega x}{c_2}\right) + B_2 \cos\left(\frac{\omega x}{c_2}\right) \quad x_1 < x < 1 \quad (4-2)$$

Aplicando las condiciones de frontera y de empalme se llega al problema trascendental $A(\omega)z = 0$.

Fijo-libre

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\left(\frac{\omega}{2c_1}\right) & \cos\left(\frac{\omega}{2c_1}\right) & -\sin\left(\frac{\omega}{2c_2}\right) & -\cos\left(\frac{\omega}{2c_2}\right) \\ \frac{p_1\omega}{c_1} \cos\left(\frac{\omega}{2c_1}\right) & -\frac{p_1\omega}{c_1} \sin\left(\frac{\omega}{2c_1}\right) & -\frac{p_2\omega}{c_2} \cos\left(\frac{\omega}{2c_2}\right) & \frac{p_2\omega}{c_2} \sin\left(\frac{\omega}{2c_2}\right) \\ 0 & 0 & \frac{\omega}{c_2} \cos\left(\frac{\omega}{c_2}\right) & -\frac{\omega}{c_2} \sin\left(\frac{\omega}{c_2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ G_1 \\ F_2 \\ G_2 \end{bmatrix} = 0,$$

similarmente se tiene para el caso fijo-fijo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\left(\frac{\mu}{2c_1}\right) & \cos\left(\frac{\mu}{2c_1}\right) & -\sin\left(\frac{\mu}{2c_2}\right) & -\cos\left(\frac{\mu}{2c_2}\right) \\ \frac{p_1\mu}{c_1} \cos\left(\frac{\mu}{2c_1}\right) & -\frac{p_1\mu}{c_1} \sin\left(\frac{\mu}{2c_1}\right) & -\frac{p_2\mu}{c_2} \cos\left(\frac{\mu}{2c_2}\right) & \frac{p_2\mu}{c_2} \sin\left(\frac{\mu}{2c_2}\right) \\ 0 & 0 & \sin\left(\frac{\mu}{c_2}\right) & \cos\left(\frac{\mu}{c_2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ G_1 \\ F_2 \\ G_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Tomando $r_i = \frac{p_i}{p_1}$ las matrices A se convierten en:

fijo-libre

$$A = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\omega}{2c_1}\right) & -\sin\left(\frac{\omega}{2c_2}\right) & -\cos\left(\frac{\omega}{2c_2}\right) \\ \frac{\omega}{c_1} \cos\left(\frac{\omega}{2c_1}\right) & -\frac{r_2\omega}{c_2} \cos\left(\frac{\omega}{2c_2}\right) & \frac{r_2\omega}{c_2} \sin\left(\frac{\omega}{2c_2}\right) \\ 0 & \frac{\omega}{c_2} \cos\left(\frac{\omega}{c_2}\right) & -\frac{\omega}{c_2} \sin\left(\frac{\omega}{c_2}\right) \end{bmatrix}$$

fijo -fijo

$$A = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\mu}{2c_1}\right) & -\sin\left(\frac{\mu}{2c_2}\right) & -\cos\left(\frac{\mu}{2c_2}\right) \\ \frac{\mu}{c_1} \cos\left(\frac{\mu}{2c_1}\right) & -\frac{r_2\mu}{c_2} \cos\left(\frac{\mu}{2c_2}\right) & \frac{r_2\mu}{c_2} \sin\left(\frac{\mu}{2c_2}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{\mu}{c_2}\right) & \cos\left(\frac{\mu}{c_2}\right) \end{bmatrix}$$

ω_i y μ_i son los dos conjuntos de datos: frecuencias de la barra con distintas configuraciones. Fijo -libre ω , fijo-fijo μ .

Para determinar los parámetros físicos c_1 , c_2 , r_2 , se busca la solución no trivial de los sistemas de ecuaciones $A_i(\omega_i)z = 0$ y $A_i(\mu_i)z = 0$. Para encontrar tal solución se usa el determinante, resultando un sistema de 3 ecuaciones no lineales con 3 incógnitas.

$$\begin{aligned} F_1 &= \det(A(c_1, c_2, r_2, \omega_1)) = 0, \\ F_2 &= \det(A(c_1, c_2, r_2, \omega_2)) = 0, \\ F_3 &= \det(A(c_1, c_2, r_2, \mu_1)) = 0. \end{aligned}$$

4.1. Preliminares

Conociendo una aproximación de un vector propio asociado a un valor propio se puede obtener este valor por el Cociente de Rayleigh

$$\lambda = \frac{x^t A x}{x^t x}. \quad (4-3)$$

Cuando la matriz no es simétrica se tienen los vectores propios derechos ϕ e izquierdos ψ

$$\lambda = \frac{\psi^t A \phi}{\psi^t \phi}. \quad (4-4)$$

Por otro lado, el determinante de una matriz cuadrada es el producto de los valores propios.

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n. \quad (4-5)$$

Si la matriz A depende de un parámetro c , entonces tanto los valores como vectores propios también dependen de ese parámetro. Se tendrían $A(c)$, $\lambda(c)$, $\psi(c)$, $\phi(c)$.

A partir de (4-5) se obtiene que

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial c} = \frac{\partial \lambda_1}{\partial c} \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_n + \frac{\partial \lambda_2}{\partial c} \lambda_1 \lambda_3 \cdots \lambda_n + \frac{\partial \lambda_3}{\partial c} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n + \frac{\partial \lambda_n}{\partial c} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1} \quad (4-6)$$

donde

$$\frac{\partial \lambda}{\partial c} = \frac{\psi^t \frac{\partial A}{\partial c} \phi}{\psi^t \phi}. \quad (4-7)$$

Esto último se deduce de la ecuación (4-4)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \lambda}{\partial c} &= \frac{\left[\frac{\partial \psi^t}{\partial c} A \phi + \psi^t \frac{\partial A}{\partial c} \phi + \psi^t A \frac{\partial \phi}{\partial c} \right] \psi^t \phi - \psi^t A \phi \left[\frac{\partial \psi^t}{\partial c} \phi + \psi^t \frac{\partial \phi}{\partial c} \right]}{(\psi^t \phi)^2} \\
&= \frac{\left[\frac{\partial \psi^t}{\partial c} \lambda \phi + \psi^t \frac{\partial A}{\partial c} \phi + \lambda \psi^t \frac{\partial \phi}{\partial c} \right] \psi^t \phi - \lambda \psi^t \phi \left[\frac{\partial \psi^t}{\partial c} \phi + \psi^t \frac{\partial \phi}{\partial c} \right]}{(\psi^t \phi)^2} \\
&= \frac{\left[\frac{\partial \psi^t}{\partial c} \lambda \phi + \psi^t \frac{\partial A}{\partial c} \phi + \lambda \psi^t \frac{\partial \phi}{\partial c} - \lambda \frac{\partial \psi^t}{\partial c} \phi - \lambda \psi^t \frac{\partial \phi}{\partial c} \right] \psi^t \phi}{(\psi^t \phi)^2} \\
&= \frac{\psi^t \frac{\partial A}{\partial c} \phi}{\psi^t \phi}.
\end{aligned}$$

Recordar que los vectores izquierdos de una matriz A son los vectores propios derechos de A^t .

4.2. Desarrollo del Algoritmo-Base Newton

Expresar cada ecuación del sistema a resolver como

$$F_i = \det(A_i), i = 1, 2, \dots, n,$$

donde

$$A_i = A(x_1, x_2, \dots, x_n, \omega_i).$$

Defina

$$F^k = [F_1^k \quad F_2^k \quad \dots \quad F_n^k]^t, \quad (4-8)$$

donde $k = 0$ representa la estimación inicial y sea el vector

$$x^k = [x_1^k \quad x_2^k \quad \dots \quad x_n^k].$$

Se usa serie de Taylor para hacer una aproximación de la solución alrededor de x^k así:

$$F^k(x^k + \epsilon^k) = F^k(x^k) + J^k \epsilon^k + O(\epsilon^k)^2 \quad (4-9)$$

donde la matriz jacobiana J^k está definida como

$$J^k = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1^k}{\partial x_1^k} & \frac{\partial F_1^k}{\partial x_2^k} & \dots & \frac{\partial F_1^k}{\partial x_n^k} \\ \frac{\partial F_2^k}{\partial x_1^k} & \frac{\partial F_2^k}{\partial x_2^k} & \dots & \frac{\partial F_2^k}{\partial x_n^k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n^k}{\partial x_1^k} & \frac{\partial F_n^k}{\partial x_2^k} & \dots & \frac{\partial F_n^k}{\partial x_n^k} \end{bmatrix}$$

, y $\epsilon^k = [\epsilon_1^k, \epsilon_2^k \dots \epsilon_n^k]$. Despreciando el término de más alto orden e igualando a cero la ecuación (4-9), se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\epsilon^k = -(J^k)^{-1}F^k. \quad (4-10)$$

De (4-5) se puede ver que

$$F_i(x) = \lambda_1^i(x)\lambda_2^i(x)\lambda_3^i(x) \dots \lambda_m^i(x) \quad (4-11)$$

donde los λ_l^i ($l = 1, 2, \dots, m$) son los valores propios del sistema

$$(A_i - \lambda^i I)\phi = 0. \quad (4-12)$$

Las derivadas parciales de la ecuación (4-11) son

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \lambda_1^i}{\partial x_j} \lambda_2^i(x) \dots \lambda_m^i(x) + \frac{\partial \lambda_2^i}{\partial x_j} \lambda_1^i(x) + \dots \lambda_m^i(x) + \frac{\partial \lambda_m^i}{\partial x_j} \lambda_1^i(x) \dots \lambda_{m-1}^i(x) \quad (4-13)$$

de donde $\frac{\partial \lambda_l^i}{\partial x_j}$ se puede obtener a partir de (4-7):

$$\frac{\partial \lambda_l^i}{\partial x_j} = \frac{(\psi_l^i)^t \frac{\partial A(\omega_i)}{\partial x_j} \phi_l^i}{(\psi_l^i)^t \phi_l^i}. \quad (4-14)$$

Así, construyendo la matriz jacobiana, se resuelve el sistema (4-10).

4.2.1. Algoritmo

Input: Conjunto de valores $n - \omega$, $(n - 1) - \mu$

x_i : vector inicial de parámetros

A , $B = \frac{\partial A(\omega_i)}{\partial x_j}, \delta$

Output: x : vector solución

- a) Evalúe las frecuencias y x_i en las matrices A y B
- b) Encuentre $F = [F_1 F_2 \dots F_{2n-1}]$
- c) Calcule la matriz jacobiana J
- d) Resuelva el sistema $\epsilon = -J^{-1}F$
- e) Calcule el nuevo $x = x_i + \epsilon$
- f) Repita a)-e) hasta $|\epsilon| < \delta$

4.3. Desarrollo del Algoritmo: Función Optimización

Se considera el problema $F(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^n$, lo cual implica encontrar x^* tal que $F(x^*) = 0$. Si se aplica norma al cuadrado a ambos lados de la igualdad, resulta que ésta es cero y como la norma es mayor e igual a cero, tomando $f(x) = \|F(x)\|^2$ da como resultado que para todo $x \quad f(x) \geq f(x^*) = 0$

$$\begin{aligned} F(x^*) &= 0 \\ 0 \leq \|F(x^*)\|^2 &= 0 \\ 0 \leq f(x^*) &= 0 \\ f(x^*) &= 0 \end{aligned}$$

Se necesita conocer la función a minimizar para encontrar cuando los determinantes son cero. Para ello se usa la función *invnew* en la que se ingresan las frecuencias de distintas configuraciones y un vector inicial para obtener la norma al cuadrado del vector de determinantes de la matriz A del sistema.

invnew(xi)

Input: xi : vector inicial de parámetros

Output: ro Norma al cuadrado del vector de determinantes

- a) Conjunto de valores $n - \omega, n - 1 - \mu$
- b) Evalúe las frecuencias en la matriz A de acuerdo a su configuración.
- c) Construya $F(i) = \det(A(\omega_i, xi))$
- d) $ro = \text{sum}(F^2(i))$

Luego con ayuda de un vector inicial y la función *fminsearch* se minimiza la función *invnew* para obtener los parámetros buscados.

4.3.1. Algoritmo

Input: Conjunto de valores $n - \omega, n - 1 - \mu$

xi : vector inicial de parámetros

Output: x vector solución

- a) Use *invnew* para evaluar las frecuencias y el vector inicial en las matrices y encontrar la función F a minimizar.
- b) $x = \text{fminsearch}(@x) \text{invnew}(x, xi)$

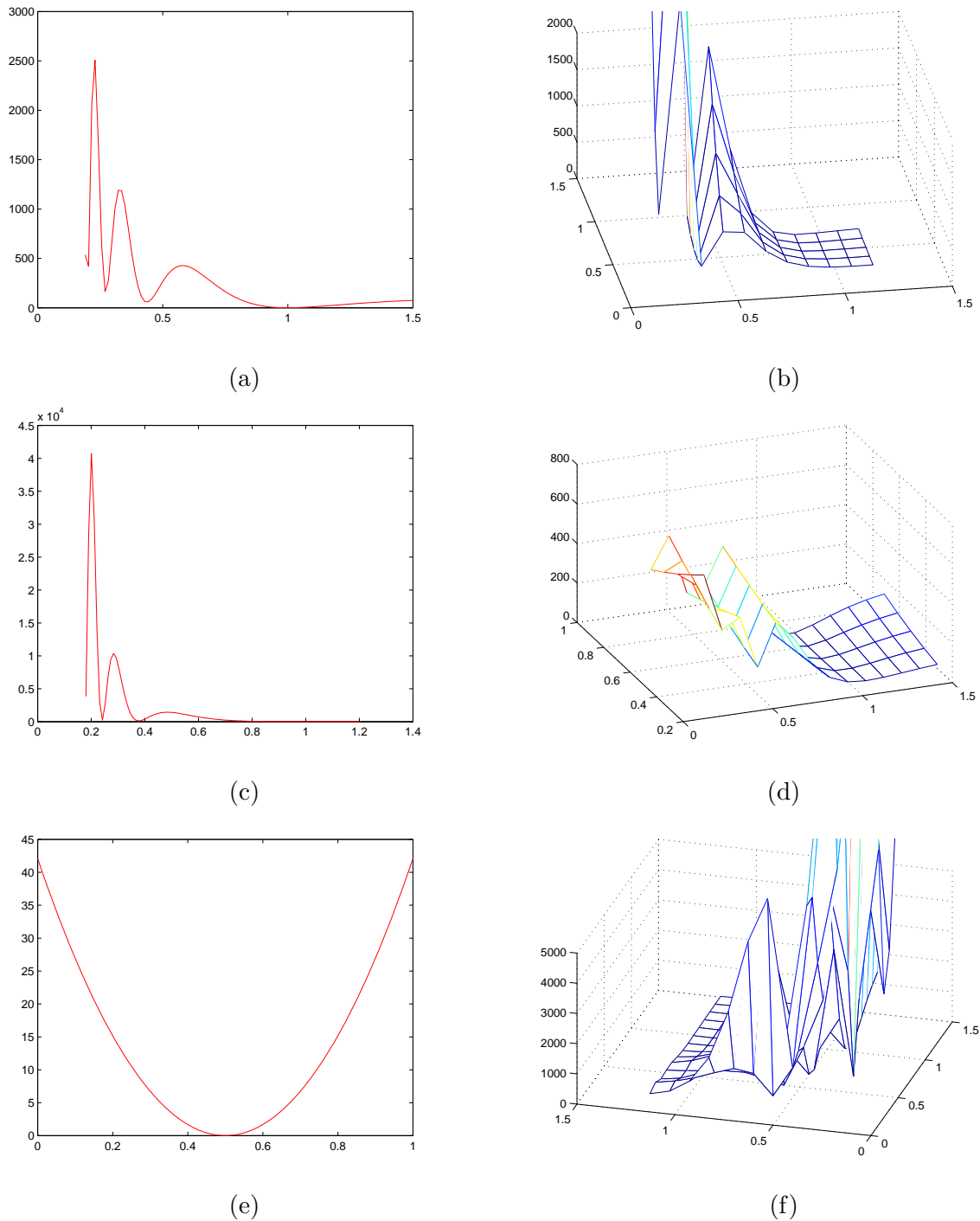


Figura 4-1: Comportamiento de la función a minimizar variando y fijando parámetros.

Como se puede observar en la Figura (4-1) al fijar dos de los parámetros y variar el otro, la función que se busca minimizar tiene varios mínimos. Por tanto al aumentar el ruido en los valores iniciales es posible que el algoritmo arroje el mínimo no deseado.

4.4. Ejemplos Numéricos

Cada uno de los ejemplos que se presentan a continuación se realizarón en la misma máquina y con la misma tolerancia. Debido a que *fminsearch* trabaja con una tolerancia de $10e-4$ se hizo un cambio en esta tolerancia por $10e-12$ haber si arrojaba los mismos resultados. Tener en cuenta que al momento de programar el algoritmo ya trabajado, se pudo no haber tenido presente condiciones que el autor sí, por ello se puede presentar algún sesgo en los resultados.

- a) Reconstrucción de los parámetros físicos de una barra continua a trozos de longitud 1. Barra que se enunció al comienzo del capítulo. El espectro está dado por:

$$\omega_1 = 2 \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right), \quad \omega_2 = 2\pi - 2 \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right), \quad \mu_1 = \pi \quad (4-15)$$

PARÁMETROS OBTENIDOS CON *fminsearch*

valores iniciales	Parámetros obtenidos	valores iniciales	Parámetros obtenidos
(0.8, 0.8, 0.4)	(1, 1, 0.5)	(1.2, 0.8, 0.4)	(1, 1, 0.4999)
(0.8, 0.8, 0.6)	(1, 1, 0.5)	(1.2, 0.8, 0.6)	(1, 1, 0.5)
(0.8, 1.2, 0.4)	(1, 1, 0.5)	(1.2, 1.2, 0.4)	(1, 1, 0.5)
(0.8, 1.2, 0.6)	(1, 1, 0.5)	(1.2, 1.2, 0.6)	(1, 1, 0.5)

Tabla 4-1: Valores iniciales con 20 % de ruido

VI	Algoritmo base-Newton			Función <i>fminsearch</i>		
	P_j	<i>CPU(seg)</i>	e_∞	P_j	<i>CPU(seg)</i>	e_∞
A	(1, 1, 0.5)	0.0148	1.8365e-11	(1, 1, 0.5)	0.3195	3.0563e-5
B	(1, 1, 0.5)	0.0204	5.4626e-10	(1, 1, 0.5)	0.1640	5.2483e-5
C	(1, 1, 0.5)	0.0194	3.0997e-13	(1, 1, 0.5)	0.1920	6.1809e-5
D	(0.9537 1.0983 0.6217)	0.0153	0.2434	(1, 1, 0.5)	0.1671	4.1278e-5
E	(1, 1, 0.5)	0.0243	4.1186e-10	(1.0001, 1, 0.4999)	0.2330	1.4360e-4
F	(-0.2038, 1.4893, 1.4946)	0.0077	1.9892	(1, 1, 0.5)	0.1856	2.0161e-5
G	(1.3907, -0.2461, -0.1449)	0.0159	1.2899	(1, 1, 0.5)	0.2689	2.9263e-5
H	No converge	No aplica	No aplica	(1, 1, 0.5)	0.2390	4.1818e-5

Tabla 4-2: Valores iniciales con 20 % de ruido

VI	Algoritmo base-Newton			Función fminsearch		
	P_j	$CPU(seg)$	e_∞	P_j	$CPU(seg)$	e_∞
A	(1, 1, 0.5)	0.0435	6.6707e-16	(1, 1, 0.5)	0.5906	4.1256e-13
B	(1, 1, 0.5)	0.0256	7.2056e-16	(1, 1, 0.5)	0.4850	7.2056e-16
C	(1, 1, 0.5)	0.0210	1.6055e-16	(1, 1, 0.5)	0.6322	2.8511e-13
D	(0.9537 1.0983 0.6217)	0.0293	0.2434	(1, 1, 0.5)	0.3786	5.2447e-13
E	(1, 1, 0.5)	0.0264	5.4737e-16	(1, 1, 0.5)	0.5371	1.9273e-13
F	(-0.2038, 1.4893, 1.4946)	0.0105	1.9892	(1, 1, 0.5)	0.4687	1.1879e-13
G	(1.3907, -0.2461, -0.1449)	0.0097	1.2899	(1, 1, 0.5)	0.5401	1.2899e-12
H	No converge	No aplica	No aplica	(1, 1, 0.5)	0.4452	2.2027e-13

Tabla 4-3: Valores iniciales con 20 % de ruido, Tolerancia $1e - 12$

Con una confianza del 95 % calculada con una distribución t student y 99 grados de libertad se encuentra un intervalo de confianza para el error en cada caso y diferente ruido como se observa en las Tablas (4-4) y (4-5).

Algoritmo base-Newton			
Ruido (%)	$\bar{e}_\infty \pm \sigma$	IC	CPU(seg)
10	$4.4353e-009 \pm 1.7753e-008$	$[1,4865e - 009, 7,3841e - 009]$	0.0104
15	0.0192 ± 0.0874	$[0,0047, 0,0337]$	0.0127
20	0.0910 ± 0.3922	$[0,0259, 0,1561]$	0.0125

Tabla 4-4: Valores iniciales aleatorios con distinto ruido

Función fminsearch			
Ruido (%)	$\bar{e}_\infty \pm \sigma$	IC	CPU(seg)
10	$4.6345e-005 \pm 2.9424e-005$	$[4,1458e - 005, 5,1232e - 005]$	0.1656
15	$7.1712e-005 \pm 2.1984e-004$	$[3,5197e - 005, 1,0823e - 004]$	0.1802
20	$4.9445e-005 \pm 3.4668e-005$	$[4,3687e - 005, 5,5203e - 005]$	0.1751

Tabla 4-5: Valores iniciales aleatorios con distinto ruido

Algoritmo base-Newton			
Ruido (%)	$\bar{e}_\infty \pm \sigma$	IC	CPU(seg)
10	6.6203e-016 \pm 4.2224e-016	[5,9190e - 016, 7,3216e - 016]	0.0154
15	0.0572 \pm 0.2358	[0,0545, 0,0599]	0.0162
20	0.0562 \pm 0.1936	[0,0240, 0,0884]	0.0177

Tabla 4-6: Valores iniciales aleatorios con distinto ruido. Tolerancia 1e-12

Función fminsearch			
Ruido (%)	$\bar{e}_\infty \pm \sigma$	IC	CPU(seg)
10	5.4244e-013 \pm 2.8841e-013	[4,9454e - 013, 5,9034e - 013]	0.4215
15	5.2818e-013 \pm 3.8679e-013	[4,6393e - 013, 5,9243e - 013]	0.4331
20	5.0424e-013 \pm 3.8425e-013	[4,4042e - 013, 5,6806e - 013]	0.4384

Tabla 4-7: Valores iniciales aleatorios con distinto ruido. Tolerancia 1e-12

Algoritmo base-Newton			
Ruido (%)	$\bar{e}_\infty \pm \sigma$	IC	CPU(seg)
10	4.4353e-009 \pm 1.7753e-008	[1,4865e - 009, 7,3841e - 009]	0.0104
15	0.0192 \pm 0.0874	[0,0047, 0,0337]	0.0127
20	0.0910 \pm 0.3922	[0,0259, 0,1561]	0.0125

Tabla 4-8: Valores iniciales aleatorios con distinto ruido y en las frecuencias

Función fminsearch			
Ruido (%)	$\bar{e}_\infty \pm \sigma$	IC	CPU(seg)
10	4.6345e-005 \pm 2.9424e-005	[4,1458e - 005, 5,1232e - 005]	0.1656
15	7.1712e-005 \pm 2.1984e-004	[3,5197e - 005, 1,0823e - 004]	0.1802
20	4.9445e-005 \pm 3.4668e-005	[4,3687e - 005, 5,5203e - 005]	0.1751

Tabla 4-9: Valores iniciales aleatorios con distinto ruido y ruido en las frecuencias

- b) Barra no uniforme, axialmente vibrante de longitud 1 , dividida en dos partes de tal forma que cada porción tiene parámetros físicos constantes. La solución exacta del problema para este caso (0,5 0,5 0,125). El espectro está dado por:

$$\omega_1 = 1,2309, \quad \omega_2 = 2 \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right), \quad \mu_1 = 1,5708 \quad (4-16)$$

PARÁMETROS OBTENIDOS CON *fminsearch*

valores iniciales	Parámetros obtenidos	valores iniciales	Parámetros obtenidos
(0.4 0.4 0.1)	(0.5, 0.5, 0.1249)	(0.6, 0.4, 0.1)	(0.5, 0.5, 0.1249)
(0.4 0.4 0.15)	(0.5, 0.5, 0.125)	(0.6, 0.4, 0.15)	(0.5, 0.5, 0.125)
(0.4 0.6, 0.1)	(0.5, 0.5, 0.125)	(0.6, 0.6, 0.1)	(0.5, 0.5, 0.125)
(0.8, 0.6, 0.15)	(0.5, 0.5, 0.125)	(0.6, 0.6, 0.15)	No converge

Tabla 4-10: Valores iniciales con 20 % de ruido. Sol Exacta (0,5,0,5,0,125)

VI	Algoritmo base-Newton			Función <i>fminsearch</i>		
	P_j	$CPU(seg)$	e_∞	P_j	$CPU(seg)$	e_∞
A	(0.5, 0.5289, -0.0004)	0.0229	1.0031	(0.5, 0.5, 0.1249)	0.1935	0.0011
B	(0.5007, 0.4874, 0.0715)	0.0265	0.4576	(0.5, 0.5, 0.125)	0.1602	6.9181e-5
C	(0.4966, 0.5459, 0.0880)	0.0272	0.3067	(0.5 0.5 0.125)	0.1957	4.7706e-5
D	No converge	No aplica	No aplica	(0.5, 0.5, 0.125)	0.1265	3.5364e-4
E	(0.5, 0.5, 0.125)	0.0181	2.3993e-004	(0.5, 0.5, 0.1249)	0.2133	7.1984e-4
F	(0.4960, 0.5300, 0.1591)	0.0383	0.3619	(0.5, 0.5, 0.125)	0.1767	1.4900e-4
G	No converge	No aplica	No aplica	(0.5, 0.5, 0.125)	0.1573	8.0516e-5
H	No converge	No aplica	No aplica	No converge	No aplica	No aplica

Tabla 4-11: Valores iniciales con 20 % de ruido.(0,5, 0,5, 0,125)

Con una confianza del 95 % calculada con una distribución *t* student y 99 grados de libertad se encuentra un intervalo de confianza para el error con diferentes condiciones de ruido en los valores iniciales en el caso de la función de optimización. En el caso del algoritmo ya trabajado, se realiza con la misma confiabilidad pero distinto número de grados de libertad debido a que no en todas las pruebas converge el método. Tablas (4-12) y (4-13)

Algoritmo Base-Newton			
Ruido (%)	$\bar{e}_\infty \pm \sigma$	IC	CPU(seg)
10	0.0665 ± 0.0948	[0,0502, 0,0828]	0.0113
15	0.1292 ± 0.1376	[0,1055, 0,1529]	0.0132
20	0.1611 ± 0.2135	[0,1223, 0,1999]	0.0131

Tabla 4-12: Valores iniciales aleatorios con distinto ruido (0,5, 0,5, 0,125)

Función <i>fminsearch</i>			
Ruido (%)	$\bar{e}_\infty \pm \sigma$	IC	CPU(seg)
10	$2.8984e-004 \pm 2.4038e-004$	[2,4991e - 004, 3,2977e - 004]	0.1135
15	$2.7165e-004 \pm 2.2947e-004$	[2,3354e - 004, 3,0976e - 004]	0.1221
20	$2.8704e-004 \pm 4.0957e-004$	[2,1901e - 004, 3,5507e - 004]	0.1244

Tabla 4-13: Valores iniciales aleatorios con distinto ruido (0,5, 0,5, 0,125)

- c) Barra no uniforme, axialmente vibrante de longitud 1, dividida en dos partes de tal forma que cada porción tiene parámetros físicos constantes. La solución exacta del problema para este caso (0,125 0,25 0,5313). El espectro está dado por:

$$\omega_1 = 0,3398, \quad \omega_2 = 0,7854, \quad \mu_1 = 0,4456 \quad (4-17)$$

PARÁMETROS OBTENIDOS CON *fminsearch*

valores iniciales	Parámetros obtenidos	valores iniciales	Parámetros obtenidos
(0.1 0.2 17/40)	(0.1250 0.2500 0.5317)	(0.15 0.2 17/40)	(0.1250 0.2500 0.5317)
(0.1 0.2 51/80)	(0.1250 0.2500 0.5318)	(0.15 0.2 51/80)	(0.1250 0.2500 0.5317)
(0.1 0.3 17/40)	(0.1250 0.2500 0.5317)	(0.15 0.3 17/40)	(0.1253 0.2497 0.5064)
(0.1 0.3 51/80)	(0.1250 0.2500 0.5317)	(0.15 0.3 51/80)	(0.1250 0.2500 0.5317)

Tabla 4-14: Valores iniciales con 20 % de ruido. Solución Exacta (0,125 0,25 0,5313)

Con una confianza del 95 % calculada con una distribución *t* y 99 grados de libertad se encuentra un intervalo de confianza para el error para diferente ruido en los valores iniciales en el caso de la función de optimización. En el caso del algoritmo ya trabajado, se realiza con la misma confiabilidad pero distinto número de grados de libertad debido a que no en todas las pruebas converge el método. Tablas (4-16) y (4-17)

VI	Algoritmo base-Newton			Función fminsearch		
	P_j	$CPU(seg)$	e_∞	P_j	$CPU(seg)$	e_∞
A	(0.1185, 0.2549, 0.3783)	0.0260	0.2879	(0.125, 0.25, 0.5317)	0.2456	8.8672e-4
B	(0.1241, 0.2512, 0.5170)	0.0311	0.0268	(0.125, 0.25, 0.5318)	0.2177	9.4491e-4
C	(0.1291, -0.1195, 0.4735)	0.0255	1.4931	(0.125, 0.25, 0.5317)	0.2552	8.3724e-4
D	(0.1275, -0.2513, -1.8197)	0.0188	4.4259	(0.125, 0.25, 0.5317)	0.1789	8.2037e-4
E	No converge	No aplica	No aplica	(0.125, 0.25, 0.5317)	0.1568	8.7743e-4
F	(0.1525, 0.2110, 0.6533)	0.0208	0.2301	(0.125, 0.25, 0.5317)	0.2455	8.9365e-4
G	No converge	No aplica	No aplica	(0.1253, 0.2497, 0.5064)	0.1754	0.0468
H	(0.1416, 0.0642, 0.3517)	0.0158	0.7549	(0.125, 0.25, 0.5317)	0.2172	8.6213e-4

Tabla 4-15: Valores iniciales con 20 % de ruido.(0,125 0,25 0,5313)

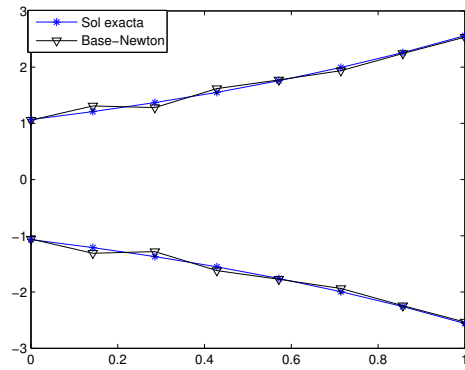
Algoritmo Base-Newton			
Ruido (%)	$\bar{e}_\infty \pm \sigma$	IC	CPU(seg)
10	0.1391 ± 0.0938	[0,1202, 0,1580]	0.0198
15	0.1767 ± 0.1114	[0,1526, 0,2008]	0.0168
20	0.1782 ± 0.1214	[0,1544, 0,2020]	0.0122

Tabla 4-16: Valores iniciales aleatorios con distinto ruido (0,125 0,25 0,5313)

Función fminsearch			
Ruido (%)	$\bar{e}_\infty \pm \sigma$	IC	CPU(seg)
10	0.0022 ± 0.0077	[9,2103e - 004, 0,0035]	0.1546
15	0.0019 ± 0.0105	[1,5595e - 004, 0,0036]	0.6641
20	$9.6623e-004 \pm 7.7306e-004$	[8,3782e - 004, 0,0011]	0.1658

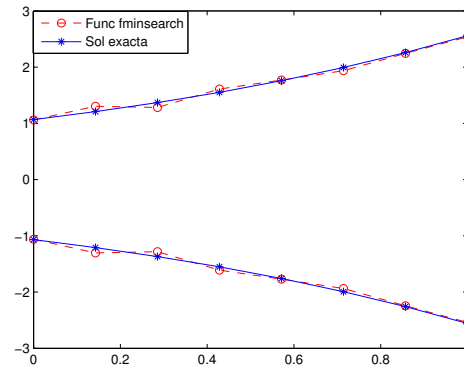
Tabla 4-17: Valores iniciales aleatorios con distinto ruido (0,125 0,25 0,5313)

Base Newton

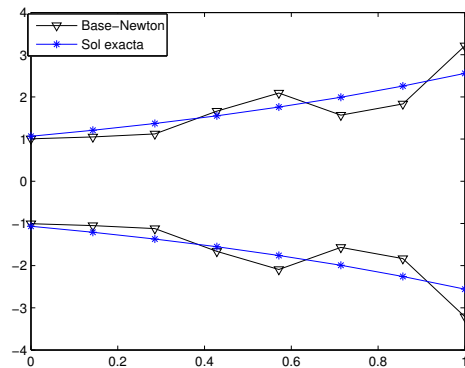


(a)

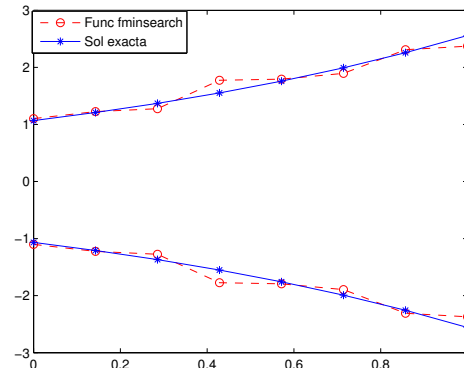
Función de optimización



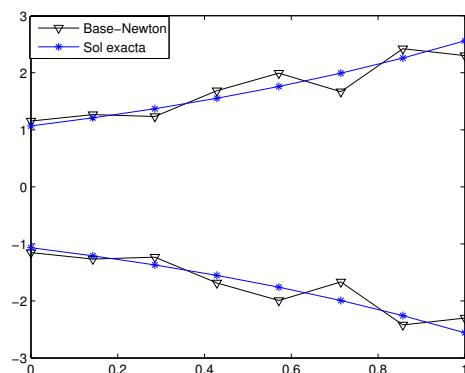
(b)



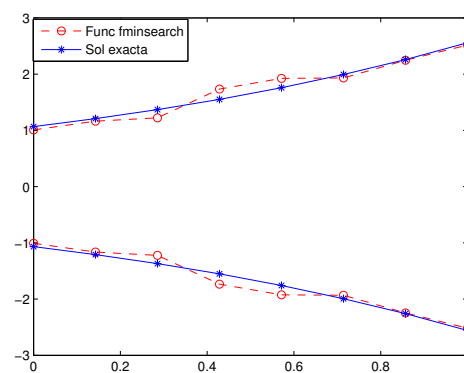
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 4-2: Estimación del área a partir de las primeras 8 frecuencias y el valor de la masa total, usando diferente ruido en los valores iniciales: 10 % a. y b. 15 % c. y d.. 20 % e. y f.

4.5. Conclusiones

Como se puede observar en cada uno de los ejemplos presentados, el algoritmo en el que se usa la función de optimización en la mayoría de los casos resulta ser estable a medida que se aumenta el ruido en los valores iniciales. El error se mantiene en un mismo rango (Tablas:(4-5),(4-13),(4-17)) a diferencia del algoritmo que está basado en el algoritmo de Newton aunque el tiempo de ejecución sea mayor. En el algoritmo de Newton se necesitan valores iniciales muy cercanos a la solución, ya que puede no converger (Tablas (4-2),(4-11),(4-15)).

Los resultados no se ven afectados si se agrega ruido a las frecuencias con las que se trabaja como se observa en las Tablas (4-8) y (4-9) ni tampoco si se cambia la tolerancia (ver Tablas (4-6) y (4-7)).

Al estimar el área de la estructura se usa un dato adicional que es la masa total de ésta, con el fin de estimar los parámetros físicos. El algoritmo en el que se usa *fminsearch* tiene una mejor aproximación del área sin importar el ruido que se le agregue a los valores iniciales como se ve en la Figura:(4-2).

5 Aplicación

5.1. Salud Estructural

Un daño en una estructura es un cambio físico que sufre ésta [8]. Generalmente los daños como son grietas o aberturas de una barra se representan por un resorte lineal [14], n resortes dividen la barra en $n + 1$ porciones. La localización de los resortes y la rigidez de éstos indican la localización y severidad del daño, respectivamente. Las características modales (frecuencias, vectores propios) son funciones de los parámetros físicos, por tanto cambios en las propiedades físicas causarán cambios en las características modales [5].

Al desarrollar el modelo de una barra dañada resulta el problema trascendental de valor propio tanto directo como inverso, problemas que se trabajaron anteriormente.

Se considera una barra uniforme de longitud L , con modulo de elasticidad E , masa por unidad de longitud ρ y área seccional A con n resortes los cuales dividen la barra uniforme en $n + 1$ barras uniformes. El problema de valor propio asociado a cada una de las barras es el siguiente:

$$v_i'' + \lambda^2 v_i = 0 \quad s_{i-1} < s < s_i \quad i = 1, 2, \dots, n + 1 \quad (5-1)$$

donde

$$\lambda = \frac{\omega}{c} \quad c = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \quad p = EA \quad (5-2)$$

ubicación del resorte

$$s_i = \frac{x_i}{L} \quad x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} \quad (5-3)$$

Las condiciones de frontera son:

$$v_1(s_0) = 0 = v'_{n+1}(s_{n+1}) = 0, \quad v'_1(s_0) = 0 = v'_{n+1}(s_{n+1}) = 0. \quad (5-4)$$

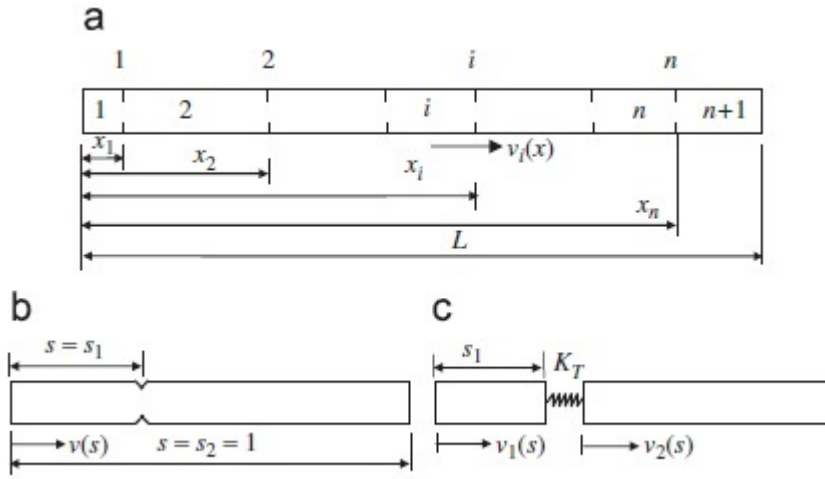


Figura 5-1: a. barra uniforme axialmente vibrante libre-libre con multiples grietas. b. Barra uniforme con una grieta en la posición s_1 . c. Resorte lineal representando la única grieta y divide la barra en dos porciones.

Las condiciones de empalme son:

$$v'_i(s_i) = v'_{i+1}(s_i) = 0, \quad v_i(s_i) + pK_i v'_i(s_i) = v_{i+1}(s_i) \quad (5-5)$$

K_i es la rigidez del resorte que representa la severidad del daño.

Solución general de (5-1)

$$v_i = F_i \sin(\lambda s_i) + G_i \cos(\lambda s_i) \quad s_{i-1} < s < s_i \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (5-6)$$

donde F_i y G_i son constantes. Aplicando las condiciones de frontera y de empalme resulta el problema $A(\lambda)z = 0$.

fijo-libre:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos \omega_1 s_1 & -\sin \omega_1 s_1 & -\cos \omega_1 s_1 & \sin \omega_1 s_1 \\ \sin \omega_1 s_1 + pK_1 \omega_1 \cos \omega_1 s_1 & \cos \omega_1 s_1 - pK_1 \omega_1 \sin \omega_1 s_1 & -\sin \omega_1 s_1 & -\cos \omega_1 s_1 \\ 0 & 0 & \cos \omega_1 & -\sin \omega_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ G_1 \\ F_2 \\ G_2 \end{bmatrix} = 0$$

libre-libre

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \lambda_1 s_1 & -\sin \lambda_1 s_1 & -\cos \lambda_1 s_1 & \sin \lambda_1 s_1 \\ \sin \lambda_1 s_1 + pK_1 \lambda_1 \cos \lambda_1 s_1 & \cos \lambda_1 s_1 - pK_1 \lambda_1 \sin \lambda_1 s_1 & -\sin \lambda_1 s_1 & -\cos \lambda_1 s_1 \\ 0 & 0 & \cos \lambda_1 & -\sin \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ G_1 \\ F_2 \\ G_2 \end{bmatrix} = 0$$

5.2. TEP

Trabajando el caso directo del problema lo que se obtiene son las características modales de la barra dañada.

En la Tabla (5-2) se analiza la primera y segunda frecuencia de una barra de longitud 1, en el caso en que tiene una grieta y con distinta configuración. Se varia la posición y severidad del daño.

En algunos casos no importa que tan grave es el daño, la frecuencia no cambia. Por ejemplo cuando el daño se encuentra en la posición 0.5 la frecuencia 2 de la barra libre-libre no se ve afectada al variar la severidad como se observa en la Tabla (5-2). Lo mismo ocurre con la otra configuración de la barra solo que en otra posición.

En las posiciones simétricas se pueden obtener las mismas frecuencias, esto sugiere que se requiere mas datos para la unicidad de la identificación del daño [19].

D_{00} frecuencias correspondientes a una barra uniforme sin daños. D_{1i} frecuencias de barras con una grieta y distinto parámetro físico. En la Tabla A1 del artículo [19] se

encuentran los parámetros físicos con los que se trabajó para distintas barras dañadas.

N° solución	Función de Optimización			
	Frecuencias	Vector inicial	Val obtenido	Val exacto
I	$\lambda_1 = 3,0105$	$s_1^0 = 0,2731$	$s_1 = 0,2002$	$s_1 = 0,2002$
	$\lambda_2 = 5,6670$	$K_1^0 = 0,2548$	$K_1 = 0,1144$	$K_1 = 0,1144$
II	$\lambda_1 = 3,0105$	$s_1^0 = 0,1708$	$s_1 = 0,2002$	$s_1 = 0,2002$
	$\lambda_2 = 5,6670$	$K_1^0 = 0,9943$	$K_1 = 0,1144$	$K_1 = 0,1144$
III	$\omega_1 = 1,4278$	$s_1^0 = 0,0493$	$s_1 = 0,2002$	$s_1 = 0,2002$
	$\lambda_1 = 3,0105$	$K_1^0 = 0,5711$	$K_1 = 0,1144$	$K_1 = 0,1144$
IV	$\omega_1 = 1,4278$	$s_1^0 = 0,2319$	$s_1 = 0,2002$	$s_1 = 0,2002$
	$\lambda_1 = 3,0105$	$K_1^0 = 0,2393$	$K_1 = 0,1144$	$K_1 = 0,1144$

Tabla 5-1: Valores estimados para una barra con una fisura $s_1 = 0,2002$, $K_1 = 0,1144$

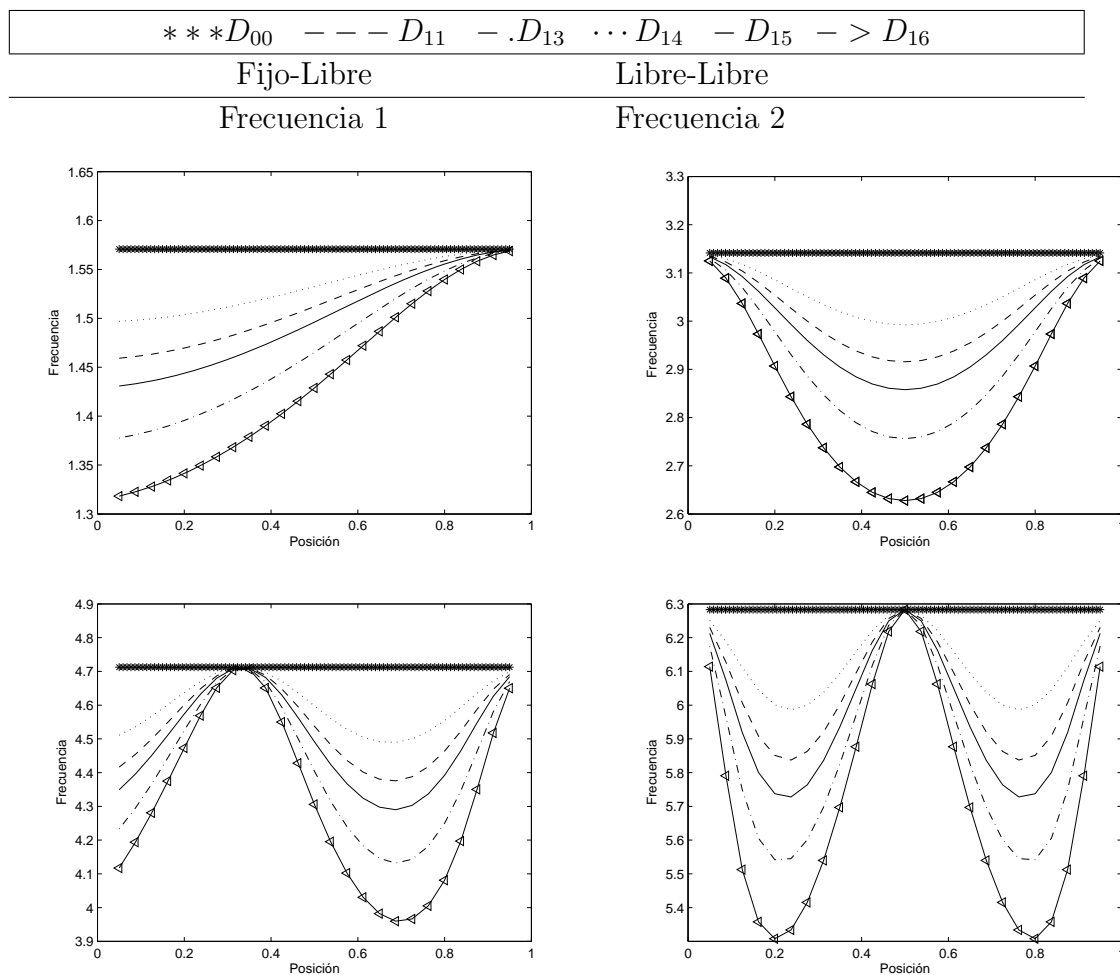


Tabla 5-2: Comportamiento de las primeras dos frecuencias de la barra con una grieta y distinta configuración variando severidad y localización.

5.3. TIEP

En el caso inverso, se busca encontrar los parámetros que son la localización y severidad del daño a partir de las frecuencias. Como se trabajó con una barra uniforme de configuración libre-libre es suficiente un solo espectro. Usando la función de optimización y uno o dos espectros se observa en la Tabla (5-1) que el algoritmo arroja una muy buena aproximación con respecto a la solución exacta. Recordemos que s_i es la posición y K_i es la magnitud de la grieta.

6 Conclusiones y recomendaciones

Las frecuencias de vibración y los vectores propios del sistema ayudan a controlar y regular la respuesta de éste. Usualmente, métodos de discretización tales como MEF y MDF se usan para lograr una aproximación a estas características de vibración; estos métodos llevan a resolver un problema de valor propio generalizado relacionado con un tipo de matriz que se consideró en el IEP estructurado; estos métodos no dan buenos resultados. Por ello se diseñó un nuevo método llamado trascendental, que consiste en dividir la estructura con la cual se está trabajando en n porciones iguales de tal forma que cada porción tenga propiedades físicas constantes. La solución del problema se reduce a resolver un sistema matricial, del cual se deriva una ecuación de frecuencia, cuya solución se basa en el algoritmo de Newton. Conociendo las frecuencias de vibración y unos datos adicionales se pueden conocer los parámetros físicos de la estructura como densidad, rigidez y el área seccional TIEP. Con el fin de no usar derivadas, debido a su alta sensibilidad, se propone el uso de la función de optimización *fminsearch* para ambos casos, tanto trascendental directo como trascendental inverso.

En TEP al hacer un número pequeño de divisiones a la estructura se obtienen buenas aproximaciones a la solución usando el modelo trascendental a diferencia de los otros dos métodos independientemente del área seccional, aunque la carga computacional es mayor, debido a que se deben calcular los valores iniciales y el número de frecuencias de acuerdo a la cantidad de divisiones. (Se obtuvieron igual cantidad de frecuencias que número de divisiones).

Al usar *fminsearch* se obtienen buenos resultados para un número de divisiones pequeño. Si se toman los datos obtenidos como valores iniciales, el algoritmo basado en el algoritmo de Newton arroja resultados parecidos al caso en que se utilizan las frecuencias naturales como valores iniciales.

En el TIEP, al agregar ruido a los valores iniciales, el algoritmo en el que se usa *fminsearch*, la mayoría de las veces tiene una buena aproximación, converge. El error permanece en un mismo rango para este caso a diferencia del algoritmo basado en el algoritmo de Newton. No hay efecto alguno al poner ruido en las frecuencias.

Respecto al problema de la salud estructural las frecuencias se pueden ver afectadas por la posición y gravedad del daño. Para encontrar la posición y magnitud del daño

fue sólo necesario un espectro debido a que la barra con que se trabajo era uniforme y de configuración libre-libre.

Como trabajo futuro se propone la implementación del algoritmo usando *fminsearch*, para la solución del problema de vigas definido con ecuaciones de diferente orden.

Además trabajar con estructuras como platos o antenas.

Bibliografía

- [1] ABRATE, Serge: Vibration of Non-Uniform Rods and Beams. En: *Journal of Sound and Vibration* (1995), p. 703–716
- [2] BOYCE, William E. ; DIPRIMA, Richard C. ; LIMUSA (Ed.): *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. 2000
- [3] CHU, Moody T. ; GOLUB, Gene H. ; EDITORS, Series (Ed.): *Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications*. Numerical Mathematics and Scientific Computation, 2005
- [4] CHU, Moody T. ; PLEMMONS, Robert J.: Real-value, low rank, circulant approximation. En: *SIAM* 24 (2003), p. 645–659
- [5] DOEBLING, Farrar C. R. ; PRIME, M. B.: A summary review of vibration-based damage identification methods. En: *The Shock and Vibration Digest* 30 (1998), p. 91–105
- [6] EISENBERGER, Moshe: Exact Longitudinal Vibration Frequencies of a Variable Cross-Section Rod. En: *Applied Acoustics* 34 (1991), p. 123–130
- [7] F.DIELE, I S.: Centrosymmetric isospectral flows and some inverse eigenvalue problems. En: *Linear Algebra and its Applications* 366 (2003), p. 199–214
- [8] GLADWELL, Graham M.: *Inverse Problems in Vibration*. Kluwer, 2004
- [9] JEF HENDRICKX, Marc Van B.: Fast direct solution methods for symmetric banded Toeplitz systems, based on the sine transform. En: *Linear Algebra and its Applications*. 2 (2002), p. 211–232
- [10] LANDAU, H.J.: The inverse eigenvalue problem for real symmetric Toeplitz matrices. En: *American Mathematical Society* 7 (1994), p. 749–767
- [11] M.A LUERSEN, R. Le R.: Globalized Nelder-Mead method for engineering optimization. En: *Computers and Structures* (2004), p. 2251–2260
- [12] MEIROVITCH, Leonard ; HILL, Mc G. (Ed.): *Fundamentals of Vibrations*. 2001
- [13] M.T.CHU: Inverse eigenvalue problem. En: *SIAM Rev.*40 (1998), p. 1–39
- [14] P.F. RIZOS, A.D. D.: Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes. En: *Journal of Sound and Vibration* 138 (1990), p. 381–388

-
- [15] ROJO, O. ; ROJO, H.: Constructing Symmetric Nonnegative Matrices via the Fast Fourier Transform. En: *Computers and Mathematics with Applications* 45 (2003), p. 1655–1672
- [16] ROJO, Oscar: A new algebra of Toeplitz-plus-Hankel matrices and applications. En: *Computers and Mathematics with Applications* 55 (2008), p. 2856–2869
- [17] S. FRIEDLAND, J. N. ; OVERTON, M. L.: The formulation and analysis of numerical methods for inverse eigenvalue problems. En: *SIAM, Journal on Numerical Analysis* 24 (1987), p. 634–667
- [18] SINGH, Kumar V. *Transcendental eigenvalue problem and its applications in system identification.* 2003
- [19] SINGH, Kumar V.: Transcendental inverse eigenvalue problems in damage parameter estimation. En: *Mechanical Systems and Signal Processing* 23 (2009), p. 1870–1883
- [20] SINGH, Kumar V. ; RAM, Yitshak M.: Transcendental Inverse Eigenvalue Problem Associated with Longitudinal Vibrations in Rods. En: *AIAA* 44 (2006)
- [21] TIMOSHENKO, S.: *Vibration Problems in Engineering.* D. Van Nostrand Company, 1937
- [22] VLADIMIR BRITANAK, Patrick C. Y. ; RAO, K. R. ; ELSEVIER (Ed.): *Discrete Cosine and Sine Transforms.* 2007