UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Andrés Aníbal Guerra González

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2012

PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Andrés Aníbal Guerra González

Trabajo final de maestría presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Directora:

M.Sc. Martha Cecilia Moreno Penagos

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2012

A mi familia

Resumen

Dentro de los Estándares de Matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional se encuentra uno asociado a los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales. Partiendo de este punto y de la sospecha que en los programas de las matemáticas escolares no se vislumbra más allá de intentos por estudiar uno que otro método de solución, deja de lado la posibilidad de descubrir y reflexionar sobre los alcances y limitaciones que en otros subyace. Puede entonces, resultar interesante la consideración de otros métodos de solución de sistemas lineales junto con las aplicaciones de estos sistemas en la enseñanza de las matemáticas escolares.

Palabras clave: Sistemas de ecuaciones lineales, aplicaciones, métodos

Abstract

Within the Mathematic standards proposed by the National Education Ministry there is one related to solution to linear equation systems. From this perspective on and supposing that only some of the schools mathematics curriculum take into account some of the methods, leaves aside the possibility of finding and reflecting about the achievements and limitations that underline them. It is interesting then, to recognize and study other methods of linear equation systems and the application of these systems to schools mathematics teaching.

Keywords: methods, systems of linear equations, applications.

Contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Introducción

Revisando los Estándares Curriculares de Matemáticas, documento rector propuesto por el Ministerio de Educación Nacional, que da pautas sobre los criterios que permiten establecer los niveles básicos de calidad de la educación [5], se encuentra un estándar en el grupo de octavo a noveno grado de Educación Básica Secundaria e incluido dentro del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos que reza: “Identificar diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales”[5]. Este estándar constituye la base para esta propuesta.

Reflexionar sobre la manera en que los estudiantes de noveno grado del colegio Gimnasio Vermont trabajan para asimilar el estándar mencionado, se llega a la conclusión que si bien se hace un gran esfuerzo por presentarle a los estudiantes distintos métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales, esto no es una práctica común en la mayoría de las instituciones educativas.

Partiendo de la sospecha que en los programas de las matemáticas escolares no se vislumbran intentos por estudiar más de dos métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales, lo cual dejaría de lado la posibilidad de descubrir y reflexionar sobre los alcances y limitaciones que en estos subyace; se consideran en este documento diversos métodos para solucionar sistemas lineales, los cuales podrían ser incluidos en los planes de estudios de noveno grado de Educación Básica Secundaria.

Al parecer, algunas instituciones dan cuenta de ese estándar con la enseñanza de los métodos de sistemas de ecuaciones lineales que se pueden identificar como “convencionales” estos son, el gráfico, sustitución y cuando mucho el de reducción o eliminación; no se aprovecha, por ejemplo, la sistematización de este último para introducir la eliminación gaussiana.

Si se trata de analizar las aplicaciones que se hacen de los sistemas lineales, estas pueden quedar reducidas al mero planteamiento de ejercicios que por lo menos no generan una relación interdisciplinar o son poco llamativos para los estudiantes, por ejemplo: “Encuentre dos números tales que la suma de ellos sea el doble que la diferencia y el mayor exceda al menor en seis”. Sin el ánimo de emitir un juicio valorativo sobre el hecho de proponer este tipo de ejercicios, sería necesario también, considerar la enseñanza de este tópico en situaciones contextualizadas [4].

La presente propuesta pretende presentar diversos métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales y proponer el estudio de situaciones contextualizadas[1] en las que el estudiante, además de generar ciertas habilidades con su desarrollo, devele las limitaciones y alcances de cada método estudiado, de tal forma que cuente con las herramientas necesarias para decidir cuál método le resulte “mejor” para plantear y resolver el sistema lineal asociado a cada situación.

Al estudiar los métodos expuestos en este trabajo, el estudiante se encontrará con el estudio de un nuevo objeto matemático: las matrices, que sin lugar a dudas constituyen una gran herramienta que no sólo surgen para solucionar sistemas lineales, sino que se configuran como una teoría matemática rica en aplicaciones y que a modo de ver del autor, resultaría interesante su consideración en la enseñanza de las matemáticas escolares.

Reconociendo el invaluable aporte de la historia de las matemáticas a la enseñanza de esta disciplina, en cuanto permite un recorrido por la evolución y maduración de los conceptos y que según Guzmán “… nos proporciona un cuadro en el que los elementos aparecen en su verdadera perspectiva… y permite entender mejor la ilación de las ideas, de los motivos y variaciones de la sinfonía matemática” [7], por ello, se dedica el capítulo 1 a un acercamiento histórico y epistemológico de los sistemas de ecuaciones lineales.

En el capítulo 2 se encuentra una descripción sucinta de algunos conceptos básicos asociados a matrices por ser de gran utilidad para el estudio de algunos métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales y luego se presentan métodos matriciales y numéricos para la solución de este tipo de sistemas.

El capítulo 3 se centra en la presentación de una propuesta de actividades trabajadas desde algunas aplicaciones de los sistemas lineales y enmarcadas en diversos contextos provenientes de las matemáticas o de otras ciencias. Su implementación, constituye una excelente oportunidad para contribuir al desarrollo de habilidades relativas al razonamiento, la resolución de problemas, la comunicación, la modelación y la ejercitación de procedimientos; procesos que según los lineamientos curriculares, tienen que ver con el aprendizaje de las matemáticas y deben trabajarse en las aulas.

Partiendo de que el uso de la tecnología incrementa la viabilidad para que los alumnos trabajen en contextos de problemas atractivos, en la sección 3.4 se platea una actividad para ser trabajada con herramientas tecnológicas, como calculadoras graficadoras.
Finalmente, se dedican unas líneas a las conclusiones y recomendaciones que se generan desde lo trabajado en este documento.

---

[1] El autor hace especial énfasis que tales aplicaciones deben ser abordadas una vez se hayan presentado los distintos métodos de solución de sistemas de situaciones lineales, para sacarle más provecho a las mismas.

1. Perspectiva histórica y epistemológica de los sistemas de ecuaciones lineales

Naturalmente, el hombre desde siempre ha procurado buscar la manera de solucionar, como parte de su proceso evolutivo, situaciones complejas que emergen en su diario vivir. De aquí el aprecio a las matemáticas, dado que estas han permitido que los grandes esfuerzos del hombre por mejorar sus condiciones de vida fueran posibles gracias a esta venerable disciplina; conforme al deseo de mejora permitió la creación de nuevas teorías y un avance en el estudio de las matemáticas.

Problemas como la distribución de cosechas o el cálculo de la órbita de un planeta y muchos otros que presentaban forma lineal, o más bien podían ser vistos como sistemas de ecuaciones lineales ocuparon a muchos personajes en la historia de las matemáticas. A continuación se hace un recorrido por la historia de las diversas culturas que trabajaron este tipo de problemas y aportaron a su solución.

Una muestra de las matemáticas, más específicamente de la aritmética y del álgebra, que se desarrollaron en Egipto se encuentran en el Papiro de Rhind, escrito por el escriba Ahmés, hacia 1650 a.C. Este documento que es una copia de otra más antigua (2000 – 1800 a.C) arroja evidencia del uso de ecuaciones lineales y más aún de sistemas de ecuaciones simultáneas, no necesariamente lineales. Aceptando el simbolismo actual[2], se plantearon problemas que implicaban la solución de sistemas como

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ \quad y = \frac{3}{4}x. \end{cases} \tag{1.1}$$

En el Papiro de Rhind, los problemas 24 a 29 se refieren a la manera de solucionar ecuaciones lineales de una incógnita a través de la “regula falsi”, o la regla de falsa posición. Según Orts (véase [17]) el problema 24 enuncia: “Una cantidad y su séptima parte suman 19. ¿Cuál es esa cantidad?”

---

[2] No está demás comentar que nuestros antepasados, particularmente, carecían del simbolismo que hoy en día le asociamos al álgebra.

Claramente, en tiempos modernos el problema pediría resolver la ecuación $x + \frac{x}{7} = 19$. Para este problema, se toma 7 como si fuera la solución, quizás porque le permite realizar de manera más sencilla los cálculos, y a partir de este supuesto encuentra el valor real. Calcula $7 + \frac{7}{7} = 8 \neq 19$, la cual es una falsa posición. Posteriormente, dice que hay que encontrar un número de tal forma que al multiplicarlo por el resultado de aplicar el valor remplazado resulte 19, es decir se necesitaría obtener $\frac{19}{8}$.

Pulpón en [21], presenta un listado de valores que se ajustan a lo pedido, así: cuando $x = 7$, el resultado es 8, entonces se procede a multiplicar diferentes valores por 8, como se muestran algunos de ellos en la tabla 1.1:

Tabla 1-1: Relación entre n y $8n$

n	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$8n$	8	16	4	2	1

Si se seleccionan los resultados 16, 2, 1 y al sumarlos se obtiene 19, al tomar los respectivos *n*, se obtiene: $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{19}{8}$. Este valor se multiplica por 7, descomponiendo el 7, por ejemplo 7 = 2 + 4 + 1. Así,

$$1\left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + 2\left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + 4\left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

De esta forma, a partir de una falsa suposición, los egipcios solucionaban sus ecuaciones lineales.

Los babilonios hacia el año 2000 a.C, también contribuyeron al surgimiento del álgebra a tal punto que sus aportaciones son consideradas de los avances más notables en la historia de las matemáticas, y no es para menos, los babilonios sabían como resolver problemas que involucraban la solución de ecuaciones lineales, cuadráticas, cúbicas e incluso sistemas de ecuaciones lineales y no lineales. Ellos registraban sus notas en ladrillos que luego de enfrentarlos a altas temperaturas permanecían grabadas de forma perdurable en el tiempo, es así como hoy por hoy se cuentan con tablas babilónicas que aún son objeto de estudio. En tales tablillas se ofrecen instrucciones netamente verbales para solucionar ecuaciones.

Según Kline, en [12] Uno de los problemas pedía hallar un número tal que sumado a su inverso multiplicativo diera un número dado; este problema genera una ecuación cuadrática[3]. De presentarse problemas más complicados, los algebristas babilonios tendían a reducir y transformar ecuaciones a una forma típica o conocida.

Bell (véase [1]) expresa que los babilonios basándose en sus tablas resolvían ecuaciones simultáneas lineales con dos incógnitas y ecuaciones simultáneas de segundo grado. Los babilonios pudieron resolver sistemas de ecuaciones de hasta diez ecuaciones con diez incógnitas para estudiar una situación referida a observaciones astronómicas. Como ya se había mencionado, los problemas algebraicos se formulaban y resolvían de forma retórica, sin hacer uso del simbolismo algebraico; sin embargo, en ocasiones se valían de palabras asociadas a cantidades geométricas, como *us* que significaba longitud, para representar incógnitas, inclusive para problemas que no estuvieran relacionados con situaciones geométricas. Esta especie de símbolos especiales para las incógnitas pudo marcar un inicio de álgebra simbólica; no obstante, pasó por alto este hecho.

Rey Pastor en su libro *Historia de la Matemática* [22] ofrece en una de sus notas complementarias a la sección dedicada a los babilonios, un problema que da idea de cómo los babilonios resolvían situaciones que requería sistemas de ecuaciones lineales:
“Se conoce la extensión total (1800) de un campo compuesto por dos parcelas, en cada una de las cuales el rendimiento del grano por unidad de área está afectado por coeficientes diferentes (2/3 y 1/2). Se desea saber la extensión de cada parcela conociendo la diferencia (500) del producido de la cosecha”

En notación actual el problema requiere la formulación y resolución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y=1800 \\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y=500. \end{cases} \tag{1.2}$$

Cuya solución es $x=1200$ e $y=600$.

La manera como el calculista de la época solucionaba el problema se basaba en una falsa posición.

- Inicia suponiendo que cada una de las parcelas es igual a 900 (la mitad de 1800)
- Bajo esta suposición, encuentra la diferencia de producido, que para este caso es 150, así

$$\frac{2}{3}(900)-\frac{1}{2}(900)=600-450=150\neq 500$$

[3] Las ecuaciones con coeficiente de x^2 igual a uno, las solucionaban completando cuadrados y si era diferente de una las normalizaban multiplicando todos los términos de la ecuación por este coeficiente.

- Para remediar el error de 350, pues $500 - 150 = 350$, el calculista reconoce que el error[4] de $\frac{7}{6}$ de un valor que se desconoce y que al ser sumado y restado al dato errado del inicio, dará las medidas buscadas. De otra forma, se trata de encontrar el valor de *a*:

$\frac{2}{3}(x+a) - \frac{1}{2}(y-a) = 500$ que puede ser expresada como
$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y + \frac{7}{6}a = 500$, luego
$\frac{7}{6}a = 500 - \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y\right)$ partiendo de la suposición inicial $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 150$
$\frac{7}{6}a = 500 - 150$, finalmente
$a = 300.$

El calculista omite todo esto pensando que debe dividir los 350 por $\frac{7}{6}$ y para ellos, se pregunta por cuánto debe multiplicar $\frac{7}{6}$ para obtener 350 y así encuentra la respuesta de 300.

- Por último, suma y resta 300 a los 900 de la suposición inicial:

$$x = 900 + 300 = 1200$$
$$y = 900 - 300 = 600.$$

Hacia los años 200 a.C. los matemáticos chinos resolvieron sistemas de ecuaciones lineales 3×3 trabajando con los coeficientes numéricos de las ecuaciones, evidenciado en su famoso tratado *nueve capítulos sobre el arte matemático*. En esta obra escrita por Chuan Tsanom en el año 152 a.C. donde se recogió los avances matemáticos de la época, aparece un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales conocido como la regla “fan-chen” que se podría comparar con la eliminación gaussiana que conocemos hoy [15]. Este libro contiene alrededor de 250 problemas sobre agricultura, pertenencia de bienes, solución de ecuaciones, agrimensura, propiedades de triángulos rectángulos [3].

En la sección VIII del Arte Matemático el problema 1 dice: “Hay tres clases de granos; tres gavillas de primera clase, dos de la segunda clase y una de la tercera hacen 39 medidas; dos de la primera, tres de la segunda y una de la tercera hacen 34 medidas; y una de la primera, dos de segunda y tres de la tercera hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de granos están contenidas en una gavilla de cada clase?" [15].

Hoy por hoy, se plantearía un sistema de ecuaciones para encontrar su solución:

[4] Evidentemente, $\frac{7}{6}$ resulta de la suma entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases} \tag{1.3}$$

Según Boyer (véase [2]) Los chinos se valían de cuadrados (ver figura 1.1) para organizar la información y finalmente solucionar el problema:

Figura 1-1: forma de organización de datos ideado por los chinos.

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

En donde la primera fila de números se referían a los coeficientes de la variable *x*, la segunda a los coeficientes de la variable *y*, la tercera fila a los de *z* y la última fila se ubicaban las constantes, a diferencia de cuando aplicamos la eliminación gaussiana en la actualidad, puesto que la matriz aumentada sería diferente a la presentada por los chinos en el cuadrado, dado que en las matrices se ubican los respectivos coeficientes de las variables en columnas y no en flas. Luego mediantes ciertas operaciones por columnas, obtuvieron:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{bmatrix} \cdots \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{bmatrix} & \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ \end{matrix} \end{array}$$

Por practicidad se presentan corchetes en lugar de cuadrados. Luego, la última matriz presenta las ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ \quad 5y + z = 24 \\ \quad\ 36z = 99. \end{cases} \tag{1.4}$$

A partir de (1.4) se encuentra por sustitución regresiva que $x = \frac{37}{4}, y = \frac{17}{4}, z = \frac{11}{4}$. Como se puede apreciar los chinos se aproximaron muy bien al método de eliminación gaussiana 2000 años antes que Gauss y otros matemáticos trabajaran en ello.

Entre tanto, Según Babini en [22], los matemáticos griegos no mostraron mayor interés por los problemas que requirieran el planteamiento algebraico de sistemas de ecuaciones lineales; Sin embargo, se dice que en el siglo IV d.C el pitagórico Thymaridas de Paros contó con un método para resolver sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas (Véase [16]): " Si se conoce la suma de varias incógnitas, así como también las sumas parciales de una de ellas con cada una de las otras, y se suman todas estas sumas parciales , restando después la primera suma total y se divide la diferencia por el número de incógnitas disminuido en 2, se obtiene el valor de la primera; y de éste se deducen los demás" [24].

Este método se conoce como “la flor de Thymaridas”. Usando la notación actual, se obtendría el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} = s \\ x + x_1 = k_1 \\ x + x_2 = k_2 \\ x + x_3 = k_3 \\ \vdots \\ x + x_{n-1} = k_{n-1}. \end{cases} \tag{1.5}$$

Así,

$$x = \frac{(k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_{n-1})}{n-2}. \tag{1.6}$$

Aproximadamente en el siglo III d.C el álgebra greco-alejandrina alcanza un punto interesante para la evolución de las matemáticas con Diofanto de Alejandría, del cual se desconocen con certeza su origen y detalles sobre su vida, pero si se tiene es información sobre su edad a través de un acertijo encontrado en alguna colección griega [3]: se encuentra “su niñez duró $1/6$ de su vida; le creció barba después de $1/12$; tras $1/7$ más se casó y tuvo un hijo 5 años más tarde; su hijo vivió la mitad de la edad del padre y finalmente el padre pereció 4 años después ” [9].

Para la solución de este problema se puede plantear la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{1}{6}\right)x + \left(\frac{1}{12}\right)x + \left(\frac{1}{7}\right)x + 5 + \left(\frac{1}{2}\right)x + 4 = x. \tag{1.7}$$

A partir de (1.7) se encuentra que $x = 84$, de aquí podríamos comentar, por ejemplo, que su hijo murió a la edad de 42, cuando Diofanto tenía 80 años.

Diofanto fue el autor de diversas obras, de las cuales no se tiene información en su totalidad debido a la destrucción de la biblioteca de Alejandría. Su mayor trabajo, sin lugar a dudas fue *La Arithmética*, la cual estaba compuesta por trece libros, de los cuales tan sólo seis fueron conocidos. Esta obra contiene diversos problemas independientes unos de otros, y se evidencia el nacimiento del simbolismo en el álgebra[5]. El primer libro, trata sobre problemas que llevan a la formulación de ecuaciones con una o más variables, los cuatro siguientes consisten en ecuaciones indeterminadas de segundo grado y en el sexto Diofanto se centra en triángulos rectángulos, cuyos lados fueran racionales [12].

Una de las grandes habilidades que poseía Diofanto era reducir ecuaciones de diversos tipos a formas conocidas o que pudiera manejar, generalmente lineales. Diofanto también resolvió sistemas de ecuaciones, pese a disponer de sólo un símbolo que representaba la cantidad desconocida, que llamaba aritmo. Kline afirma que "cada uno de los 189 problemas de la *Arithmética* está resuelto por un procedimiento distinto. Hay más de 50 tipos diferentes de problemas, pero no se hace ningún intento por clasificarlos" [12].

Hawking (véase [9]) presenta algunos problemas seleccionados de la *Arithmética* con un análisis de la solución desde la mirada de Diofanto. Por ejemplo, el problema 11 del libro 2 enuncia: "Sumar el mismo número (buscado) a dos números dados de modo que cada uno de ellos sea un cuadrado. Números dados 2,3; número buscado x"

De lo anterior se deduce que

$$\left.\begin{matrix} x+2 \\ x+3 \end{matrix}\right\} \; deben\ ser\ cada\ uno\ cuadrados \tag{1.8}$$

Diofanto conocía a (1.8) como una ecuación doble. Este matemático pretendía reducir esta ecuación doble a una lineal. Para ello, tomaba la diferencia entre las expresiones presentadas y lo descomponía en dos factores bastantes convenientes. Como la diferencia es 1, para este caso toma 4 y $\frac{1}{4}$. Seguidamente tomaba el cuadrado de la semidiferencia entre estos factores y lo igualaba a la expresión menor o escogía el cuadrado de la semisuma y lo igualaba al mayor. Si se decide tomar el cuadrado de la semidiferencia, se obtiene:

$$\left(\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right)\right)2 = \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{225}{64}, \tag{1.9}$$

Así al igualar (1.9) a la expresión menor, se logra:

$$x+2 = \frac{225}{64} \tag{1.10}$$

[5] El álgebra de Diofanto caracterizada, entre otras cosas, por usar abreviaciones para las incógnitas, también es conocida como álgebra sincopada

Luego, al resolver la ecuación (1.10), se encuentra que $x = \frac{97}{64}$, de esta forma los cuadrados son $\frac{225}{64}$ y $\frac{289}{64}$.

Si se toma el cuadrado de la semisuma, se tiene

$$\left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{17}{4}\right)^2 = \frac{289}{64}. \tag{1.11}$$

Si se iguala (1.11) a la expresión mayor, se consigue

$$x + 3 = \frac{289}{64}. \tag{1.12}$$

De (1.12) se obtiene, también, que los cuadrados son $\frac{225}{64}$ y $\frac{289}{64}$.

En el libro IV de la *Arithmética*, titulado “De cuadrados y cubos”, se plantea el problema titulado: Descomponer un número dado en dos cubos cuya suma de raíces sea dada:

> Si el número es 370 y la suma de las raíces 10, supongamos que la raíz del primer cubo es 1 aritmo y 5 unidades, o sea: la mitad de la suma de las raíces. Por tanto, la raíz del otro cubo será 5 unidades menos 1 aritmo; luego la suma de los cubos valdrá 30 cuadrados de aritmo más 250 unidades que igualaremos a las 370 unidades del número dado, de donde se deduce que 1 aritmo tiene 2 unidades; la raíz del primer cubo tendrá entonces 7 y la del segundo 3, y, por consiguientes, los cubos serán 343 y 27. [19].

Siguiendo la notación actual, Diofanto resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 370 \\ x + y = 10. \end{cases} \tag{1.13}$$

Inicialmente se parte de un valor para x y para y, así:

$$x = a + 5 \qquad y = 5 - a. \tag{1.14}$$

Donde a representa el aritmo.

Al Sustituir las expresiones dadas en (1.14) en la primera ecuación del sistema, se obtiene:

$$(a + 5)^3 + (5 - a)^3 = 30a^2 + 250 = 370. \tag{1.15}$$

Y al hacer $a = 2$, se obtiene $x = 7,\ y = 3$.

Siglos más tarde, los métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales tomaron otra forma que permitirían el avance hacia una nueva rama de las matemáticas: *el álgebra lineal*.

La manera moderna de estudiar los sistemas de ecuaciones lineales se deben en cierta forma a Leibniz, quien en el año 1963 introdujo la noción de determinante para hacerle frente a su objetivo, aunque no fue el único que trabajó en este tema; casi al tiempo Seki Kowa, matemático japonés, trabajaba en esta idea, de hecho escribió *Métodos para resolver problemas disimulados*, en donde ofrece métodos para calcular determinantes en situaciones específicas; no obstante, el matemático Girolamo Cardano en su obra *Ars Magna*, expuso una regla para solucionar sistemas de dos ecuaciones lineales a la cual llamó *regula de modo*, que más adelante se conocería como la regla de *Cramer*, aún así, Cardano no ofreció una definición formal de determinante, pero si vislumbra las primeras nociones de este importante concepto (véase [15]). No es de extrañarse entonces, que históricamente haya aparecido la noción de determinante sin antes hablar de matrices.

Según collette en [3], a Leibniz se le conoce como el primer matemático en Occidente que hace uso de un métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, evidencia de ello se encuentra en una carta enviada por Leibniz al marqués de L'Hopital, en donde hace uso de subíndices para los coeficientes de un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Según Boyer (véase [2]), en esta misma carta estos subíndices indicaban filas y columnas en un sistema de ecuaciones lineales, así:

$$\begin{array}{lcl} 10+11x+12y=0 & & 1_0+1_1x+1_2y=0 \\ 20+21x+22y=0 & \text{o también} & 2_0+2_1x+2_2y=0 \\ 30+31x+32y=0 & & 3_0+3_1x+3_2y=0. \end{array} \tag{1.16}$$

En notación moderna (1.16) se puede escribir como

$$\begin{array}{l} b_1+a_{11}x+a_{12}y=0 \\ b_2+a_{21}x+a_{22}y=0 \\ b_3+a_{31}x+a_{32}y=0. \end{array} \tag{1.17}$$

Se parte del sistema (1.16), y para eliminar, por ejemplo, y, se multiplica la primera ecuación por 22 y la segunda por -12 y se suman las ecuaciones obtenidas, entonces:

$$\begin{array}{l} 10\cdot 22+11\cdot 22x+12\cdot 22y=0 \\ \underline{-12\cdot 20-12\cdot 21x-12\cdot 22y=0\quad} \\ 10\cdot 22-12\cdot 20+11\cdot 22x-21\cdot 12x=0\,. \end{array} \tag{1.18}$$

Se prosigue por eliminar la misma variable, y, realizando el mismo proceso con la primera y tercera ecuación:

$$\begin{array}{l} 32 \cdot 10 + 32 \cdot 11x + 32 \cdot 12y = 0 \\ \underline{-30 \cdot 12 - 31 \cdot 12x - 32 \cdot 12y = 0} \\ 10 \cdot 32 - 12 \cdot 30 + 11 \cdot 32x - 12 \cdot 31x = 0\,. \end{array} \tag{1.19}$$

Se realiza el mismo procedimiento para eliminar *x* usando (1.18) y (1.19) y se obtiene en notación de subíndices:

$$\begin{array}{lll} 1_0 \cdot 2_1 \cdot 3_2 & & 1_0 \cdot 2_2 \cdot 3_1 \\ 1_1 \cdot 2_2 \cdot 3_0 & = & 1_1 \cdot 2_0 \cdot 3_2 \\ 1_2 \cdot 2_0 \cdot 3_1 & & 1_2 \cdot 2_1 \cdot 3_0. \end{array} \tag{1.20}$$

Que es equivalente a:

$$\begin{array}{l} 1_0 \cdot 2_1 \cdot 3_2 - 1_0 \cdot 2_2 \cdot 3_1 \\ 1_1 \cdot 2_2 \cdot 3_0 - 1_1 \cdot 2_0 \cdot 3_2 = 0 \\ 1_2 \cdot 2_0 \cdot 3_1 - 1_2 \cdot 2_1 \cdot 3_0 \end{array} \tag{1.21}$$

En notación actual, (1.21) se escribe:

$$\begin{array}{l} \quad a_{10}a_{21}a_{32} - a_{10}a_{21}a_{32} \\ +a_{11}a_{22}a_{30} - a_{11}a_{20}a_{32} = 0 \\ +a_{12}a_{20}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{30} \end{array} \tag{1.22}$$

O en términos modernos, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 20 & 21 & 22 \\ 30 & 31 & 32 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.23}$$

Esta anticipación de los determinantes sólo se conoció hasta 1850.

Maclaurin en su libro póstumo Treatise of Algebra (tratado de álgebra), publicado en 1748 presenta la solución de sistemas de ecuaciones lineales por eliminación sucesivas de variables y también lo hizo a través del método de determinantes para sistemas de dos, tres y cuatro ecuaciones simultáneas [3].En este tratado se encuentra lo que conocemos hoy por hoy como “regla de Cramer”.

Así, para dos ecuaciones lineales simultáneas:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c \\ a_2x + b_2y = d. \end{cases} \tag{1.24}$$

Se tiene como solución:

$$x = \frac{cb_2 - b_1 d}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \qquad y = \frac{a_1 d - a_2 c}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \tag{1.25}$$

Para un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = e \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = f. \end{cases} \tag{1.26}$$

La solución para *z*, por ejemplo, estaría dada por:

$$z = \frac{a_1 b_2 f - a_1 b_3 e + a_2 b_3 d - a_2 b_1 f + a_3 b_1 e - a_3 b_2 d}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1}. \tag{1.30}$$

Al igual que Maclaurin y bajo la misma dirección, Cramer también trabajó en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, particularmente trabajó en un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas. Es de extrañarse entonces el por qué este método hace honores con su nombre a Cramer y no a el primero quién publicó su trabajo dos años antes que Cramer. Al respecto Collette expresa :“Esta regla fue, pues, conocida por el tratado de Cramer más que por el de Maclaurin, debido quizá, a la superioridad de la notación de Cramer ” [3].

Gauss fue el primero en usar el termino “determinante” en su obra *“Disquisitiones Arithmeticae”* publicada en 1801 aunque no corresponde al concepto que hoy usamos, fue Cauchy en 1812 que hizo uso de este término en el sentido moderno e introduce propiedades asociadas a los determinantes, a menores y adjuntos [15]. El trabajo de Gauss estuvo centrado en mínimos cuadrados y presentó su método “*Eliminación Gaussiana*” sin conocer sobre la teoría de matrices.

El primer matemático en usar el término “matriz” fue Joseph Sylvester en el año 1850 definiéndolo como un arreglo cuadrilongo de términos. Arthur Cayley se interesó por las matrices y publica en 1853 *memoir on the theory of matrices* que presenta la primera definición abstracta de matriz y desarrolla el álgebra matricial definiendo la suma, multiplicación por un escalar y entre matrices así como la inversa de una matriz [15].

Cayley expresó que los determinantes lo llevaron al concepto de matriz. Representar el sistema de ecuaciones $x' = ax + by$; $y' = cx + dy$ en un arreglo rectangular que contenía los coeficientes de las variables, así $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ le permitió indudablemente desarrollar su álgebra de matrices [1]. Esta parte de la historia de las matemáticas, muestra una vez más que una buena notación es una herramienta de gran importancia para el desarrollo y evolución de las ideas o conceptos matemáticos. Muy seguramente, si Cayley no se hubiera valido de tan particular distribución, se hubiera puesto de manifiesto un atraso en la evolución de las matemáticas, en la medida en que el avance hacia el álgebra lineal se hubiera hecho lento y con ello las posibilidades de contemplar una desmedida teoría llena de aplicaciones se vería algo lejano.

Los métodos iterativos se han usado para la solución de grandes sistemas de ecuaciones lineales asociados a matrices diagonalmente dominantes, algoritmos privilegiado para ser usado por las computadoras. Los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel son ejemplos de tales métodos. En 1846 Jacobi trabajó en matrices de rotación para encontrar mayor dominancia diagonal y de esta forma reducir el número de cálculos. Jacobi tuvo que resolver varios sistemas de ecuaciones lineales de orden 7 para su trabajo en el cálculo de eigenvalores [23].

Según Saad y Vorst (véase [23]), el método de Gauss–Seidel fue desarrollado en el siglo XIX, originalmente por Gauss, a mediados de la década de 1820 y, posteriormente, por Seidel en 1874. Gauss expuso un proceso iterativo en una carta dirigida a Gerling; en ésta, el considerado príncipe de las matemáticas, describe una técnica para calcular la medida exacta de los ángulos que se producen en geodesia, que no es otra cosa, más que la iteración de Gauss-Seidel.

2. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

En este apartado se exponen de manera sucinta algunos conceptos básicos asociados a matrices y que más adelante serán de gran utilidad para el estudio de algunos métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Las matrices han significado un potente objeto que no solo posibilita una escritura que organiza datos, sino que permite sistematización de métodos, agilidad en cálculos y procedimientos más eficaces. Las matrices terminan constituyéndose junto a otros conceptos del álgebra lineal en herramientas que hacen frente a la solución de problemas propios de las matemáticas o relativos a otras ciencias, disciplinas o áreas como física, química, biología, medicina, ingeniería, estadística, sicología, sociología, economía, entre otras, de hecho se usa con frecuencia en la cotidianidad como apoyo para organizar información.

Los motores de búsqueda que se utilizan para localizar determinada información en internet emplean las matrices para ubicarla y determinar ciertas pautas de rastreos como la relación con palabras claves que facilitan la búsqueda. Google, por ejemplo, utiliza las matrices para saber qué sitios están referenciados en otros [13, p 13].

2.1 Matrices

En los Juegos Olímpicos (versión número 29) realizados entre el 8 y 24 de agosto de 2008 y celebrados en Beijing (Pekín) capital China, se finalizó con un medallero, que resume las medallas de oro, plata y bronce entregadas a los deportistas ganadores de 87 países. A modo de ejemplo, en la tabla 2-1 se presentan os resultados de los países China, EEUU, Rusia quienes lograron el mayor número de medallas respectivamente, Brasil y Colombia quienes ocuparon el puesto 23 y 65 en el medallero.

Como se puede observar, en la tabla 2-1 se lista el número de medallas que recibieron los deportistas ganadores de algunos países, por ejemplo, China el país anfitrión obtuvo 51 medallas de oro, 21 de plata y 28 de bronce. Esta información también podría organizarse de la manera como se muestra en la figura 2.1.

Tabla 2-1: Medallero de algunos países en las Olimpiadas de 2008.

$Tipo\ de\ medalla \rightarrow$ $país \downarrow$	**Oro**	**Plata**	**Bronce**
China	51	21	28
EEUU	36	38	36
Rusia	23	21	28
Brasil	3	4	8
Colombia	0	1	1

Figura 2-1: Medallero Beijing 2008.

$$\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{ccc} \text{Oro} & \text{Plata} & \text{Bronce} \end{array} \\
\begin{array}{r} \text{China} \\ \text{EEUU} \\ \text{Rusia} \\ \text{Brasil} \\ \text{Colombia} \end{array} & \begin{pmatrix} 51 & 21 & 28 \\ 36 & 38 & 36 \\ 23 & 21 & 28 \\ 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Si se organiza todas las medallas entregadas a los deportistas ganadores de los Juegos Olímpicos 2008, de forma similar a la de arriba, se tendrían 87 renglones y 3 columnas. En el renglón tres, por ejemplo, indica que Rusia recibió 23 medallas de oro, 21 de plata y 28 de bronce. Aquí, la información está organizada de tal forma que los números dispuestos horizontalmente representan un renglón y los organizados verticalmente forman una columna. Así, el arreglo de las medallas presentadas tendría 5 filas[6] y 3 columnas, si nos situamos en el número 8 del arreglo presentado, que está en el renglón 4 y columna 3, se deriva que Brasil obtuvo 8 medallas de bronce.

Un arreglo de números dispuestos de esta manera se conoce como matriz.

2.1.1 Definición

Una matriz A de tamaño $m \times n$ es un arreglo rectangular de mn números reales, o inclusive complejos, ordenados en m renglones y n columnas (ver figura 2-2).

El tamaño de una matriz está determinado por el número de filas y columnas que la componen, guardando ese orden. El número que aparece en la posición a_{ij}, indica que se encuentra en el i –ésimo renglón y la j –ésima columna de A.

[6] Se hace uso de la palabra renglón para hacer referencia a la fila

Figura 2-2: Definición de matriz

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ Para } 1 \le i \le m \text{ y } 1 \le j \le n$$

2.1.2 Clasificación de las matrices según su tamaño

Sea una matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, entonces:

- Si $m = 1$, entonces la matriz A se conoce como matriz renglón.
- Si $n = 1$, entonces la matriz A se conoce como matriz columna.
- Si $m = n$, entonces A es cuadrada. La diagonal principal de una matriz cuadrada es el conjunto de los elementos a_{ij} tales que i = j.

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{n\times n}$, pueden clasificarse de la siguiente manera:

- Si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, se conoce como matriz diagonal.
- Si $a_{ij} = c$, para $i = j$ y $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, se llama matriz escalar.
- Si $a_{ij} = 1$, para $i = j$ y $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, se llama matriz identidad y se denota por I_n.
- Si $a_{ij} = 0$ para $i > j$ es triangular superior.
- Si $a_{ij} = 0$ para $i < j$ es triangular inferior.

2.1.3 Operaciones entre matrices

Sean $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$, entonces para todo $1 \le i \le m$ y $1 \le j \le n$, $A = B$, si $a_{ij} = b_{ij}$. Por ejemplo, las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & -5 \\ \pi & -2 & 3 \\ 0 & y & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & -5 \\ z & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Son iguales en el caso en que $x = \sqrt{2}$, $y = -1$ y $z = \pi$.

- **Suma**

Si se quisiera saber el número total de cada tipo de medallas que han conseguido China, Brasil, Rusia, Brasil y Colombia en los dos últimos Juegos Olímpicos, Atenas 2004 y Beijing 2008, se debe organizar la información del primer medallero conservando el orden presentado en el segundo medallero, como sigue:

Figura 2-3: Medallero Atenas 2004.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{Oro} & \text{Plata} & \text{Bronce} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{China} \\ \text{EEUU} \\ \text{Rusia} \\ \text{Brasil} \\ \text{Colombia} \end{array} & \begin{pmatrix} 32 & 17 & 14 \\ 36 & 39 & 27 \\ 27 & 27 & 38 \\ 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sea $\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$ el total de medallas conseguido por los países China, Brasil, Rusia, Brasil y Colombia en los Juegos Olímpicos de 2004 y 2008, siendo A la matriz que resume los resultados del 2004 y B la matriz de los resultados del 2008, de estos países, se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 32 & 17 & 14 \\ 36 & 39 & 27 \\ 27 & 27 & 38 \\ 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 51 & 21 & 28 \\ 36 & 38 & 36 \\ 23 & 21 & 28 \\ 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = C = \begin{pmatrix} 83 & 38 & 42 \\ 72 & 77 & 63 \\ 50 & 48 & 66 \\ 8 & 6 & 11 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

De aquí, se puede concluir que mientras China en los dos últimos Juegos Olímpicos alcanzó 83 medallas de oro, Brasil tan sólo 8 y Colombia ninguna. Ojalá Colombia alcance al menos una en Londres 2012. Adquiere sentido, pensar que para sumar matrices, estas deben ser del mismo tamaño.

Definición: Sean $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$, entonces $(c_{ij}) = C = A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

- **Multiplicación de una matriz por un escalar**

Si se parte del supuesto que en los Juegos Olímpicos Beijing 2008, los jugadores de los países de China, EEUU, Rusia, Brasil y Colombia recibieron por parte de marcas patrocinadoras cierta cantidad de dinero para cubrir algunos de los gastos que se

presentaran en las olimpiadas y se cree que para los juegos de Londres 2012, tales marcas de manera coincidencial incrementarían sus aportes en un 20% para los jugadores de los países mencionados. Se analiza la cantidad recibida por esos países:
Sea A la matriz que representa la cantidad de dinero en dólares recibida por los jugadores de esos países en Beijing 2008:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 20{,}000 \\ 30{,}000 \\ 27{,}000 \\ 25{,}000 \\ 10{,}000 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \text{China} \\ \text{EEUU} \\ \text{Rusia} \\ \text{Brasil} \\ \text{Colombia} \end{array} \end{array}$$

Así, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 20{,}000 \\ 30{,}000 \\ 27{,}000 \\ 25{,}000 \\ 10{,}000 \end{pmatrix} + 0{,}2 \begin{pmatrix} 20{,}000 \\ 30{,}000 \\ 27{,}000 \\ 25{,}000 \\ 10{,}000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24{,}000 \\ 36{,}000 \\ 32{,}400 \\ 30{,}000 \\ 12{,}000 \end{pmatrix}$$

De esta forma, se sabría por ejemplo que los Jugadores para Londres 2012, recibirían de las marcas patrocinadoras, \$12,000US.

<u>Definición</u>: Si $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces $kA = \left(ka_{ij}\right)_{m\times n}$.

Es necesario mencionar que el conjunto de matrices $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$, junto con las operaciones de suma matricial y Multiplicación por un escalar tiene estructura de espacio vectorial. Para mayor profundidad sobre espacios vectoriales puede consultar en [13].

▪ Transpuesta de una matriz

<u>Definición</u>: *Si* $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces $A^T = \left(a_{ji}\right)_{n\times m}$, Donde A^T denota la transpuesta de A.

▪ Multiplicación

Producto interior

Definición: Sea **a** = $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y **b** $= (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n)$ matrices columna y renglón, respectivamente, entonces:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \in \mathbb{R} \qquad (2.1)$$

Multiplicación entre matrices

Retomando la situación de las medallas conseguida por los deportistas ganadores en los Juegos Olímpicos de Beijing 2008, se parte del supuesto que en estos Juegos, cada participante ganador de cualquiera de los metales, se llevaba además de estas, dinero según la medalla recibida:

Figura 2-4: Cantidad de dinero por tipo de medalla.

$$\begin{array}{c c} & \text{Euros(€)} \\ \begin{array}{r} \text{oro} \\ \text{Plata} \\ \text{Bronce} \end{array} & \begin{pmatrix} 94{,}000 \\ 48{,}000 \\ 30{,}000 \end{pmatrix} \end{array}$$

Para determinar, el total de dinero recibido por los deportistas ganadores de China, Brasil, Rusia, Brasil y Colombia, siendo A la matriz que resume los resultados de los Juegos Olímpicos y B la matriz columna que presenta la información de dinero que se recibe por ganar algún metal, se podría desarrollar el producto interior entre el primer renglón de A, que representa las medallas de China y la matriz columna B, encontrando de esta manera que los jugadores de este país recibieron $6{,}642{,}000$€; No obstante, si se quiere tener información para el grupo de países que estamos considerando, sería más práctico realizar el producto de las dos matrices, en lugar de hacerlo por países.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{Oro} & \text{Plata} & \text{Bronce} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{China} \\ \text{EEUU} \\ \text{Rusia} \\ \text{Brasil} \\ \text{Colombia} \end{array} & \begin{pmatrix} 32 & 17 & 14 \\ 36 & 39 & 27 \\ 27 & 27 & 38 \\ 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c c} & \text{Euros(€)} \\ \begin{pmatrix} 94{,}000 \\ 48{,}000 \\ 30{,}000 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{oro} \\ \text{Plata} \\ \text{Bronce} \end{array} \end{array}$$

Es decir,

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 51 & 21 & 28 \\ 36 & 38 & 36 \\ 23 & 21 & 28 \\ 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 94{,}000 \\ 48{,}000 \\ 30{,}000 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \begin{pmatrix} (51)(94{,}000) + (21)(48{,}000) + (28)(30{,}000) \\ (36)(94{,}000) + (38)(48{,}000) + (36)(30{,}000) \\ (23)(94{,}000) + (21)(48{,}000) + (28)(30{,}000) \\ (3)(94{,}000) + (4)(48{,}000) + (8)(30{,}000) \\ (0)(94{,}000) + (1)(48{,}000) + (1)(30{,}000) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}642{,}000 \\ 6{,}288{,}000 \\ 4{,}010{,}000 \\ 714{,}000 \\ 78{,}000 \end{pmatrix}$$

De esta forma se puede concluir, por ejemplo, que los jugadores ganadores de China recibieron en total $6{,}642{,}000€$.

Nótese que fue posible desarrollar la multiplicación, en particular porque el número de columnas de la primera matriz (figura 2-1) que se refieren al número de medallas ganadas por países, es el mismo que el número de filas de la segunda matriz (figura 2-3) que trata sobre el dinero pagado por el tipo de medalla obtenida.

Definición: Si $A = (a_{ij})_{m\times p}$ y $B = (b_{ij})_{p\times n}$, entonces el producto de A y B, es la matriz $C = (c_{ij})$ de $m \times n$, definida como:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}, \qquad (2.2)$$

es decir c_{ij} es el producto interior del *i*-ésimo renglón de la matriz A y la *j*-ésima columna de B. Así, por ejemplo, si se tienen las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Entonces, el producto AB dado que A tiene dos columnas y B dos filas, está definido y

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{pmatrix}_{3\times 3}.$$

Es importante mencionar que en general, AB está definido, pero si $n \neq m$, entonces BA no está definido. Si $n = m$, BA está definido, pero AB y BA podrían tener tamaños diferentes. En el últimos de los casos si se presentara que AB y BA resultaran ser del mismo tamaño, es posible que sean iguales o diferentes.

Para $A, B\ y\ C$ matrices con tamaños adecuados, se cumple que $(AB)C = A(BC)$, $A(B + C) = AB + AC$ y además $(A + B)C = AC + BC$.

Si nos centramos en el caso de las matrices cuadradas, la matriz identidad (I_n) hace el papel de módulo en la multiplicación, de manera análoga al 1 como elemento neutro en la multiplicación de los números reales. Así, $AI_n = I_nA = A$, que implica que I_n conmute con toda matriz cuadrada.

Por lo anterior, y haciendo analogía con los números reales, resulta conveniente preguntarse por una matriz B de tamaño $n \times n$, que al ser multiplicada en cualquier orden por una matriz A, de igual tamaño, resulte la identidad I_n. Sin embargo, a diferencia de los números reales, esto no puede suceder con todas las matrices cuadradas, pues como ya ha especificado, el producto de matrices en general no es conmutativo.

2.1.4 Determinantes

Se define el determinante de una matriz como una función:

$$\det : \begin{array}{c} \mathcal{M}_{\mathrm{n\times n}} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathrm{A} \longmapsto \det \mathrm{A} \end{array}. \tag{2.3}$$

donde $\det a = a$.

- **Menores y cofactores**

Se expone un método recursivo para calcular el determinante de $A = (a_{ij})_{n\times n}$.

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$, con $n > 1$, entonces el **menor** del elemento a_{ij} **,** denotado aquí por M_{ij}, es la matriz que se obtiene al eliminar el renglón *i* y la columna *j* de A, de aquí que el tamaño de esta matriz sea de $(n-1)\times(n-1)$.

El cofactor A_{ij} del elemento a_{ij} es

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|. \tag{2.4}$$

Sea la matriz A, de $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

el determinante de A está dado por:

$$\det A = |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}. \tag{2.5}$$

Aunque en la fórmula se define el determinante a través de los cofactores del i –ésimo renglón, el cálculo del determinante no varía si se toma en lugar de éste, cualquier columna.

Para la matriz formada por los datos de las medallas recibidas por Rusia, Brasil y Colombia en las Olimpiadas de Beijing, su determinante, obtenida mediante la expansión del tercer renglón está dado por:

$$\det\begin{pmatrix} 23 & 21 & 28 \\ 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1\begin{vmatrix} 23 & 28 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 23 & 21 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -1(184 - 84) + (92 - 63) = -71$$

Algunas de las propiedades de los determinantes son:

- Si $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ es una matriz triangular superior o inferior, entonces $\det A$=$a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$.
- Sean A y B dos matrices de tamaño $n \times n$, entonces $\det AB = \det A \cdot \det B$.
- Si cualquier renglón o columna de A consta de sólo ceros, entonces $\det A = 0$.
- Los determinantes de una matriz y de su transpuesta son iguales.
- Si dos renglones (o columnas) de A son iguales, entonces $\det A = 0$.
- Si un renglón (o columna) de A es un múltiplo escalar de otro renglón (columna), entonces $\det A = 0$.

Entre estas y otras propiedades de los determinantes, se resalta el siguiente hecho:
Una matriz A es no singular s y sólo si $\det A \neq 0$. Las demostraciones de estas propiedades se pueden consultar en [8].

2.1.5 Inversa de una matriz

Una matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ de tamaño $n \times n$ es no singular o invertible si existe una matriz $B = (b_{ij})_{n\times n}$ también de $n \times n$ tal que $AB = BA = I_n$. La matriz B se conoce como la inversa de A y se denota por A^{-1}. De este modo se tiene $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Si A no tiene .inversa, entonces A es singular o no invertible.

Se expone una forma para calcular la inversa de una matriz cuadrada, no sin antes trabajar en una definición importante: la adjunta de una matriz.

- **Adjunta de una matriz**

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de tamaño $n \times n.$ La adjunta de A , denotada adj A, matriz donde el i, j –ésimo elemento es el cofactor A_{ji} de a_{ji}. De esta forma,

$$\text{adj A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2.6)$$

Así, la adjunta de la matriz del ejemplo anterior se calcula de la siguiente forma:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}23 & 21 & 28\\ 3 & 4 & 8\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Los cofactores de A son

$$\mathrm{A}_{11}=1\begin{vmatrix}4 & 8\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-4 \qquad \mathrm{A}_{21}=-1\begin{vmatrix}21 & 28\\ 1 & 1\end{vmatrix}=7 \qquad \mathrm{A}_{31}=1\begin{vmatrix}21 & 28\\ 4 & 8\end{vmatrix}=56$$

$$\mathrm{A}_{12}=-1\begin{vmatrix}3 & 8\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-3 \qquad \mathrm{A}_{22}=1\begin{vmatrix}23 & 28\\ 0 & 1\end{vmatrix}=23 \qquad \mathrm{A}_{32}=-1\begin{vmatrix}23 & 28\\ 3 & 8\end{vmatrix}=-100$$

$$\mathrm{A}_{13}=1\begin{vmatrix}3 & 4\\ 0 & 1\end{vmatrix}=3 \qquad \mathrm{A}_{23}=-1\begin{vmatrix}23 & 21\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-23 \qquad \mathrm{A}_{33}=1\begin{vmatrix}23 & 21\\ 3 & 4\end{vmatrix}=29$$

Luego,

$$\operatorname{adj} A=\begin{pmatrix}-4 & 7 & 56\\ -3 & 23 & -100\\ 3 & -23 & 29\end{pmatrix}.$$

Si A es una matriz de tamaño $n \times n$ y $\det A \neq 0$, entonces:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot \operatorname{adj} A \tag{2.7}$$

A partir del teorema anterior, se puede encontrar la inversa de la matriz A que se ha venido trabajando en los anteriores ejemplos, es decir, aquella formada por los datos de las medallas recibidas por Rusia, Brasil y Colombia en las Olimpiadas de Beijing:

$$A=\begin{pmatrix}23 & 21 & 28\\ 3 & 4 & 8\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Dado que $\det A=-71$, entonces A es no singular, así

$$A^{-1}=-\frac{1}{71}\begin{pmatrix}-4 & 7 & 56\\ -3 & 23 & -100\\ 3 & -23 & 29\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{71} & -\frac{7}{71} & -\frac{56}{71}\\ \frac{3}{71} & -\frac{23}{71} & \frac{100}{71}\\ -\frac{3}{71} & \frac{23}{71} & \frac{-29}{71}\end{pmatrix}.$$

2.1.6 Matrices escalonadas por renglones

Una matriz de $m \times n$ está en forma escalonada cuando cumple las siguientes propiedades:

- Si en la matriz existen renglones que consisten sólo de ceros, deben estar en la parte inferior de la matriz.
- La primera entrada, diferente de cero, de cada renglón es un 1(entrada principal).

- La entrada principal de cada renglón aparece a la derecha de las entradas principales de los renglones que le preceden.

Una matriz de $m \times n$ está en forma escalonada reducida por renglones si cumple las anteriores propiedades y además si

- Si una columna contiene la entrada principal de cualquier renglón, entonces las demás entradas en esta columna son ceros.

Conforme a las anteriores propiedades se pueden citar como ejemplos de matrices en forma escalonadas y escalonadas reducidas las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las matrices A, D y F están en forma escalonada y las matrices B, C y E están en forma escalonada reducida por renglones.

Una matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$, es equivalente por renglones a una matriz $B = (b_{ij})_{n \times n}$ siempre que B se pueda obtener aplicando una serie finita de operaciones elementales por renglones a A. Tales operaciones consisten en:

- Intercambiar dos renglones: $R_i \leftrightarrow R_j$
- Multiplicar un renglón por un número diferente de cero: kR_i
- Remplazar un renglón por la suma de un múltiplo de un renglón con ese renglón: $kR_i + R_j \rightarrow R_j$

Donde R_i, R_j se refieren al i –ésimo y j –ésimo renglones respectivamente. En la tercera operación, la flecha indica que se cambia un renglón por aquel que se ha conseguido al aplicar la operación.

En la siguiente matriz A se aplican a modo de ejemplo cada una de las operaciones elementales expuestas; no sobra decir que para transformar una matriz dada en una de la forma escalonada o escalonada reducida, se deben aplicar las operaciones tantas veces como sea necesario, es decir tanto como lo requiera la matriz inicial.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Al intercambiar los renglones dos y tres de A $(R_2 \leftrightarrow R_3)$, se obtiene:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si se multiplica $\frac{1}{2}$ por el renglón uno de A por $\left(\frac{1}{2}R_2\right)$, se consigue:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Al sumar 2 veces el renglón uno de C al renglón tres de C, $(2R_1 + R_3 \rightarrow R_3)$ se consigue:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

2.2 Sistemas de ecuaciones lineales

En la situación descrita al inicio de este capítulo referida a las medallas recibidas por los jugadores ganadores en los Juegos Olímpicos, se podría pensar en el dinero que recibe cada jugador por ganar un tipo de medalla, a partir de cierta información dada. Por ejemplo, si se parte del supuesto que en Beijing 2008, los jugadores ganadores recibieron cierta cantidad de dinero desconocida, y en lugar de ello, se sabe el número y el tipo de medalla por delegación y la cantidad de dinero total que se llevaron las ganadores de los países relacionados, ¿Se podría hallar la información desconocida a partir de la información suministrada? En pocas palabras se tiene, la matriz A, que relaciona cantidad y tipo de medalla recibida por cada país, la matriz C, que asocia la cantidad de dinero recibida por los ganadores de cada país y se representa por B, la matriz que contiene las variables que desconocemos, es decir el dinero pagado por ganar una medalla de oro, plata o bronce. Entonces:

$$\mathrm{A} = \begin{array}{c} \\ \text{China} \\ \text{EEUU} \\ \text{Rusia} \\ \text{Brasil} \\ \text{Colombia} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Oro} & \text{Plata} & \text{Bronce} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 51 & 21 & 28 \\ 36 & 38 & 36 \\ 23 & 21 & 28 \\ 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \mathrm{B} = \begin{array}{c} \\ \text{oro} \\ \text{Plata} \\ \text{Bronce} \end{array} \begin{array}{c} \text{Euros(€)} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathrm{C} = \begin{array}{c} \\ \text{China} \\ \text{EEUU} \\ \text{Rusia} \\ \text{Brasil} \\ \text{Colombia} \end{array} \begin{array}{c} \text{Euros (€)} \\ \begin{pmatrix} 6{,}235{,}000 \\ 5{,}850{,}000 \\ 3{,}715{,}000 \\ 650{,}000 \\ 70{,}000 \end{pmatrix} \end{array}$$

La situación planteada y lo expuesto en la sección 2.1.3 lleva a escribir el problema así:

$$\begin{pmatrix} 51 & 21 & 28 \\ 36 & 38 & 36 \\ 23 & 21 & 28 \\ 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}235{,}000 \\ 5{,}850{,}000 \\ 3{,}715{,}000 \\ 650{,}000 \\ 70{,}000 \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$\begin{cases} 51x + 21y + 28z = 6235000 \\ 36x + 38y + 36z = 5{,}850{,}000 \\ 23x + 21y + 28z = 3{,}715{,}000 \\ 3x + 4y + 8z = 650{,}000 \\ y + z = 70{,}000. \end{cases} \tag{2.8}$$

Un sistema de ecuaciones de ecuaciones lineales, es un conjunto de m ecuaciones lineales, cada una con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.9}$$

Todo sistema lineal puede ser escrito como una ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A es la matriz formada por los coeficientes de las ecuaciones lineales, x se refiere a la matriz columna compuesta por las incógnitas del sistema y b la matriz columna formada por las constantes del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Kolman en [13] enuncia un teorema que es de gran utilidad para la solución de sistemas lineales, el cual expone que si se tienen dos sistemas lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ y si las matrices aumentadas $[\mathrm{A} \vdots \mathbf{b}]$ y $[\mathrm{C} \vdots \mathbf{d}]$ son equivalentes por renglones, entonces ambos sistemas lineales tienen exactamente las mismas soluciones.

Un sistema de $m \times n$ ecuaciones lineales se llama **homogéneo** si **b** = 0 y es no homogéneo si **b**$\neq$ 0. En un sistema homogéneo **x** = 0, se conoce como solución trivial. En general, un sistema de ecuaciones lineales puede tener solución o no, de presentarse el primer caso, se dice que el sistema es *consistente* que implica tener exactamente una solución o una cantidad infinita de soluciones (*dependiente*) y en el segundo caso se dice que el sistema de ecuaciones lineales es *inconsistente*.

Se exponen diversos método para solucionar sistemas de ecuaciones lineales agrupados en métodos matriciales y numéricos.

2.2.1 Métodos matriciales

En esta sección se presentan los métodos que usan el concepto de matriz para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. Cada uno de ellos con sus bondades y limitaciones da paso a un abanico de posibilidades en el análisis de sistemas lineales.

- **Eliminación Gaussiana**

El método de eliminación Gaussiana para resolver el sistema de ecuaciones lineales expresado como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, inicia considerando la matriz aumentada $[\mathrm{A} \; \vdots \; \mathrm{b}]$, seguidamente a esta matriz se le aplican operaciones elementales entre renglones para transformarla y conseguir una matriz equivalente por renglones $[\mathrm{C} \; \vdots \; \mathrm{d}]$. Una vez se escriba la matriz $[\mathrm{C} \; \vdots \; \mathrm{d}]$ en la forma $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se debe utilizar una sustitución hacia atrás, obteniendo de esta forma el conjunto solución del sistema.

Retomando el problema descrito en la sección 2.2 cuya solución supone resolver el sistema (2.8):

$$\begin{cases} 51x + 21y + 28z = 6{,}235{,}000 \\ 36x + 38y + 36z = 5{,}850{,}000 \\ 23x + 21y + 28z = 3{,}715{,}000 \\ \quad 3x + 4y + 8z = 650{,}000 \\ \qquad\quad y + z = 70{,}000 \end{cases} \tag{2.10}$$

Se tiene,

$$A = \begin{pmatrix} 51 & 21 & 28 \\ 36 & 38 & 36 \\ 23 & 21 & 28 \\ 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6{,}235{,}000 \\ 5{,}850{,}000 \\ 3{,}715{,}000 \\ 650{,}000 \\ 70{,}000 \end{pmatrix}$$

Por facilidad se escribe cada dato de $\mathbf{b}$ dividido por 1000 y al final, la solución se multiplicará por 1000.

Inicialmente, se escribe la matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 51 & 21 & 28 & | & 6{,}235 \\ 36 & 38 & 36 & | & 5{,}850 \\ 23 & 21 & 28 & | & 3{,}715 \\ 3 & 4 & 8 & | & 650 \\ 0 & 1 & 1 & | & 70 \end{pmatrix}$$

Luego, se reduce la matriz aumentada a una forma escalonada equivalente por renglones, aplicando las operaciones elementales entre renglones:

$$\xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_5]{R_1 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 & | & 650 \\ 0 & 1 & 1 & | & 70 \\ 23 & 21 & 28 & | & 3{,}715 \\ 51 & 21 & 28 & | & 6235 \\ 36 & 38 & 36 & | & 5850 \end{pmatrix}$$

Se intercambian los renglones primero y cuarto.

Se intercambian los renglones segundo y quinto.

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & | & \frac{650}{3} \\ 0 & 1 & 1 & | & 70 \\ 23 & 21 & 28 & | & 3{,}715 \\ 51 & 21 & 28 & | & 6{,}235 \\ 36 & 38 & 36 & | & 5{,}850 \end{pmatrix}$$

Se multiplica el primer renglón por $\left(\frac{1}{3}\right)$.

$$\xrightarrow[\substack{-51R_1+R_4 \to R_4 \\ -36R_1+R_5 \to R_5}]{-23R_1+R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & | & \frac{650}{3} \\ 0 & 1 & 1 & | & 70 \\ 0 & -\frac{29}{3} & -\frac{100}{3} & | & -\frac{3{,}805}{3} \\ 0 & -47 & -108 & | & -4{,}815 \\ 0 & -10 & -60 & | & -1{,}950 \end{pmatrix}$$

Se suma (-23) veces el primer renglón a su tercer renglón.

Se suma (-51) veces el primer renglón a su cuarto renglón.

Se suma (-36) veces el primer renglón a su quinto renglón.

$$\xrightarrow[\substack{47R_2+R_4 \to R_4 \\ 10R_2+R_5 \to R_5}]{\frac{29}{3}R_2+R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & | & \frac{650}{3} \\ 0 & 1 & 1 & | & 70 \\ 0 & 0 & -\frac{71}{3} & | & -\frac{1{,}775}{3} \\ 0 & 0 & -61 & | & -1{,}525 \\ 0 & 0 & -50 & | & -1{,}250 \end{pmatrix}$$

Se suma $\left(\frac{29}{3}\right)$ veces el segundo renglón a su tercer renglón.

Se suma (47) veces el segundo renglón a su cuarto renglón.

Se suma (10) veces el segundo renglón a su quinto renglón.

$$\xrightarrow{-\frac{3}{71}R_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & | & \frac{650}{3} \\ 0 & 1 & 1 & | & 70 \\ 0 & 0 & 1 & | & 25 \\ 0 & 0 & -61 & | & -1{,}525 \\ 0 & 0 & -50 & | & -1{,}250 \end{pmatrix}$$

Se multiplica el tercer renglón por $\left(-\frac{3}{71}\right)$.

$$\xrightarrow[50R_3+R_5\to R_5]{61R_3+R_4\to R_4}\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & | & \frac{650}{3} \\ 0 & 1 & 1 & | & 70 \\ 0 & 0 & 1 & | & 25 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Se suma (61) veces el tercer renglón a su cuarto renglón.

Se suma (50) veces el tercer renglón a su quinto renglón.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & | & \frac{650}{3} \\ 0 & 1 & 1 & | & 70 \\ 0 & 0 & 1 & | & 25 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

La matriz (2.11) es equivalente por renglones en la forma escalonada a la matriz (2.10). Como se puede observar, en esta matriz escalonada, el número de ecuaciones no nula coincide con el número de incógnitas, lo que hace que el sistema tenga una única solución.

El sistema de ecuaciones correspondiente a la última matriz obtenida es

$$\begin{cases} x + \frac{4}{3}y + \frac{8}{3}z = \frac{650}{3} \\ \quad y + z = 70 \\ \qquad z = 25 \end{cases} \tag{2.12}$$

Al recurrir a una sustitución hacia atrás, se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= 90 \\ y &= 45 \\ z &= 25 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Que en el contexto de la situación propuesta, significa que por una medalla de oro el jugador recibiría 90,000€; por una medalla de plata se recibiría 45,000€ y por la de bronce 25,000€.

▪ Eliminación Gauss-Jordan

Como complemento de la Eliminación Gaussiana, este método a partir de la matriz aumentada $[\mathrm{A} \vdots \mathrm{b}]$ se obtiene una matriz $[\mathrm{C} \vdots \mathrm{d}]$ en forma escalonada reducida equivalentes por renglones.

Se considera la siguiente situación sobre un “modelo de intercambio” en economía, propuesta a modo de ejercicio en [14]:

Una economía consiste de tres sectores: químicos y metales, combustibles y energía, y maquinaria. Químicos vende el 30% de su producción a combustibles, un 50% a maquinaria y retiene el resto. Combustibles vende un 80% de su producción a químicos, el 10% a maquinaria y retiene el 10%. Maquinaria vende el 40% a químicos, el 40% a combustibles y conserva el resto.

Se debe desarrollar un sistema de ecuaciones que lleve a precios con los cuales los ingresos de cada sector equivalgan a sus gastos.

Inicialmente, Se considera conveniente organizar la información que presenta la situación en una tabla que de cuenta de la manera en que el rendimiento de cada sector se distribuye en otros:

Tabla 2-2: Distribución del rendimiento por sector.

	Distribución de la producción		
consumidos por	Químicos y Metales	Combustible y Energía	Maquinaria
Químicos y Metales	0.2	0.8	0.4
Combustible y Energía	0.3	0.1	0.4
Maquinaria	0.5	0.1	0.2

Como se mencionó al inicio de este capítulo, se puede organizar la información de la tabla en una matriz:

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.5 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, los datos de las columnas se refieren a la fracción de la producción total de cada sector, de ahí que la suma de las fracciones por cada columna debe ser 1, es decir la producción total, el 100%. Los elementos de las filas dan una idea de lo que necesita un sector de los otros. El sector químicos y metales, como se enuncia en el problema, vende el 30% de su producción a combustibles, un 50% a maquinaria y un 20% a el mismo (ver primera columna). El mismo sector, recibe el 80% de la producción de combustible, lo que implica pagar por ello, también se beneficia del 40% de maquinaria y desde luego recibe el 20% de su misma producción (ver fila correspondiente a químicos y metales).

Se designa por $p1,\ p2,\ p3$ el precio de la producción total de los sectores químicos y metales, combustibles y energía, y maquinaria, respectivamente. Se debe encontrar los precios de equilibrio que permiten igualar los ingresos y los gastos de cada sector. Así, por ejemplo, el sector químico, debe gastar $0.8p2$ dolares por su parte de producción de combustible, $0.4p3$ dólares por el beneficio del sector de maquinaria y $0.2p1$ por su gasto en químicos. Es decir, sus gastos están dados por $0.2p1 + 0.8p2 + 0.4p3$ y si se parte de la base que los gastos deben igualar al ingreso, se tiene:

$$p1 = 0.2p1 + 0.8p2 + 0.4p3. \tag{2.14}$$

Y si se hace el mismo análisis a los otros sectores, resulta para combustible:

$$p2 = 0.3p1 + 0.1p2 + 0.4p3. \tag{2.15}$$

Y para maquinaria:

$$p3 = 0.5p1 + 0.1p2 + 0.2p3. \tag{2.16}$$

De las ecuaciones (2.14), (2.15) y (2.16) se forma el siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{cases} -0.8p1 + 0.8p2 + 0.4p3 = 0 \\ 0.3p1 - 0.9p2 + 0.4p3 = 0 \\ 0.5p1 + 0.1p2 - 0.8p3 = 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Se soluciona este sistema por el método Gauss–Jordan. Para contar con la respuesta exacta en la reducción por renglones, se opta por escribir un sistema equivalente con coeficientes fraccionarios

$$\begin{cases} -\frac{4}{5}p1 + \frac{4}{5}p2 + \frac{2}{5}p3 = 0 \\ \frac{3}{10}p1 - \frac{9}{10}p2 + \frac{2}{5}p3 = 0 \\ \frac{1}{2}p1 + \frac{1}{10}p2 - \frac{4}{5}p3 = 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

La matriz aumentada para (2.18) es:

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & | & 0 \\ \frac{3}{10} & -\frac{9}{10} & \frac{2}{5} & | & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & -\frac{4}{5} & | & 0 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

Luego, se reduce la matriz aumentada a una forma escalonada reducida equivalente por renglones, aplicando las operaciones elementales entre renglones:

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & | & 0 \\ \frac{3}{10} & -\frac{9}{10} & \frac{2}{5} & | & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & -\frac{4}{5} & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{5}{4}R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & | & 0 \\ \frac{3}{10} & -\frac{9}{10} & \frac{2}{5} & | & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & -\frac{4}{5} & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}R_1+R_3 \to R_3]{-\frac{3}{10}R_1+R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{11}{20} & | & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{11}{20} & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{5}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{12} & | & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{11}{20} & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{3}{5}R_2+R_3 \to R_3]{R_2+R_1 \to R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{17}{12} & | & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{12} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema correspondiente a esta matriz escalonada reducida por renglones equivalente a la matriz aumentada es

$$\begin{cases} p1 - \frac{17}{12}p3 = 0 \\ p2 - \frac{11}{12}p3 = 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

El sistema (2.20) es dependiente, es decir tiene infinitas soluciones y se puede notar desde la matriz escalonada reducida por renglones, en la medida en que el número de ecuaciones no nulas es estrictamente menor que el número de incógnitas:

$$\begin{aligned} p1 &= \tfrac{17}{12}p3 = 0 \\ p2 &= \tfrac{11}{12}p3 = 0. \end{aligned} \qquad (2.21)$$

Como se puede notar, el valor de $p1$ y $p2$, depende exclusivamente del valor real que se le asigne a $p3$. En el contexto de la situación planteada se deben excluir valores negativos para $p3$, pues se está hablando de dinero. De este modo cualquier selección no negativa para $p3$ constituye una opción de precios de equilibrios. Por ejemplo, si se selecciona \$100 millones de dólares como valor para $p3$, implica que $p1 = 141.7$ y $p2 = 91.7$. Es decir que los ingresos y gastos serán iguales si la producción de químicos y metales se valoran en \$141.7 millones de dólares, la producción de combustible y energía en \$91.7 millones y la producción de acero en \$100 millones de dólares.

▪ Método por la inversa

Este método es aplicable para algunos sistemas lineales, aquellos que presentan igual número de incógnitas que de variables y además la matriz de coeficientes debe ser invertible, esto implica que una matriz es no singular si y sólo si el sistema de ecuaciones lineales asociado a tal matriz tiene única solución.

Dado el sistema lineal $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$, se multiplica a izquierda por la inversa de A a ambos miembros de la igualdad:

$A^{-1}Ax = A^{-1}b$	
$(A^{-1}A)x = A^{-1}b$	Propiedad asociativa de la multiplicación de matrices
$(I_n)x = A^{-1}b$	Propiedad de las inversas $A^{-1}A = I_n$
	Propiedad de la matriz identidad $(I_n)x = x$
$x = A^{-1}b$	(2.22)

En algunas situaciones en donde se pretende diseñar una dieta nutritiva para perder peso, se proporcionan cantidades exactas de nutrientes por ingrediente de la dieta, además del total de nutrientes que se requiere y se debe encontrar la combinación que permita el cumplimiento de tales condiciones

Por ejemplo, en [14] se plantea la siguiente situación a modo de ejercicio:

Un dietista planea una comida que proporcione ciertas cantidades de vitaminas C, calcio y magnesio, para ello usa tres alimentos cuyas cantidades se miden en unidades apropiadas. Los nutrientes proporcionados por estos alimentos y los requisitos dietéticos son los siguientes aparece en la tabla 2-3:

Tabla 2-3: Ingredientes y nutrientes.

	Miligramos (Mg) de nutrimento por unidad comestible			Total de nutrientes requeridos (mg)
Nutrientes	Alimento 1	Alimento 2	Alimento 3	
Vitamina C	10	20	20	100
Calcio	50	40	10	300
Magnesio	30	10	40	200

¿Cuántas unidades de cada alimento se necesitan para cumplir con el total de nutrientes requeridos?

Sean x, y, z la cantidad de unidades de estos comestibles, es decir lo que se quiere encontrar. Entonces se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 10x + 20y + 20z = 100 \\ 50x + 40y + 10z = 300 \\ 30x + 10y + 40z = 200. \end{cases} \tag{2.23}$$

De aquí,

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 20 \\ 50 & 40 & 10 \\ 30 & 10 & 40 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz **x** es la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, para ello se encuentra la inversa de A haciendo uso del procedimiento expuesto en la sección 2.1.5:

$$A^{-1} = \frac{1}{-33{,}000}\begin{pmatrix} 1500 & -600 & -600 \\ -1700 & -200 & 900 \\ -700 & 500 & -600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{22} & \frac{1}{55} & \frac{1}{55} \\ \frac{17}{330} & \frac{1}{165} & -\frac{3}{110} \\ \frac{7}{330} & -\frac{1}{66} & \frac{1}{55} \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{22} & \frac{1}{55} & \frac{1}{55} \\ \frac{17}{330} & \frac{1}{165} & -\frac{3}{110} \\ \frac{7}{330} & -\frac{1}{66} & \frac{1}{55} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{50}{11} \\ \frac{50}{33} \\ \frac{40}{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.55 \\ 1.52 \\ 1.21 \end{pmatrix}.$$

Entonces se necesitarían 4.55 unidades del alimento 1, 1.52 unidades del alimento 2 y 1.21 unidades del alimento 3.

▪ Método por la inversa

En la ecuación matricial $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$ que representa un sistema de ecuaciones lineales de n ecuaciones en n incógnitas, si $\det \mathrm{A} \neq 0$, entonces el sistema tiene una única solución y está dada por:

$$x_1 = \frac{\det \mathrm{A}_1}{\det \mathrm{A}} \qquad x_2 = \frac{\det \mathrm{A}_2}{\det \mathrm{A}} \qquad \ldots \qquad x_n = \frac{\det \mathrm{A}_\mathrm{n}}{\det \mathrm{A}}. \tag{2.24}$$

Donde A_i es la matriz que se obtiene de A al intercambiar la i –ésima columna de A por b. (véase la demostración en [13]).

Se muestra la forma en que se soluciona un sistema de ecuaciones lineales mediante la Regla de Cramer en un ejemplo de interpolación polinomial:

A menudo cuando se desea investigar una situación en la que se cuenta con una serie de datos experimentales, es de gran utilidad pensar en estos datos como un conjunto de puntos en el plano para modelar tal situación a través de alguna función. Encontrar una función –por ejemplo, polinomial- que pase o mejor, que interpole, exactamente por los puntos estudiados, definitivamente posibilitaría extraer información de esa serie de datos. En otras palabras, Un polinomio de interpolación para unos datos es un polinomio cuya gráfica pasa por el conjunto de puntos asociados a los datos; Si se proporcionan n puntos, entonces se puede determinar un polinomio de grado $\mathrm{n} - 1$ o menor que interpole esos datos [14].

Al considerar datos representados por tres puntos distintos, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, donde $x_1 \neq x_2, x_2 \neq x_3$ y $x_1 \neq x_3$, se debe encontrar un polinomio de la forma $\mathrm{y} = \mathrm{a}_2\mathrm{x}^2 + \mathrm{a}_1\mathrm{x} + \mathrm{a}_0$. Al sustituir las coordenadas en las incógnitas a_0, a_1 y a_2, desde luego se tiene un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} y_1 = a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 \\ y_2 = a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 \\ y_3 = a_2x_3^2 + a_1x_3 + a_0 \end{cases} \tag{2.25}$$

Por ejemplo, si se quiere encontrar el polinomio cuadrático que interpole los puntos$(1,3), (2,6)$ y $(3,13)$, implicaría determinar a_2, a_1 y a_0 tales que:

$$\begin{cases} a_2 + a_1 + a_0 = 3 \\ 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 6 \\ 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 13. \end{cases} \tag{2.26}$$

Se soluciona el sistema lineal (2.26) por la regla de Cramer:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{x} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Además,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 13 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 9 & 13 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 9 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

Que se obtienen de intercambiar la primera, segunda y tercera columna de A por b, respectivamente. Entonces, por (2.24) se consigue:

$$\det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$a_2 = \frac{\det \mathrm{A}_1}{\det \mathrm{A}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 13 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$a_1 = \frac{\det \mathrm{A}_2}{\det \mathrm{A}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 9 & 13 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$$

$$a_0 = \frac{\det \mathrm{A}_3}{\det \mathrm{A}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 9 & 3 & 13 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4.$$

Luego, el polinomio interpolador de los puntos presentados es $y = 2x^2 - 3x + 4$

- **Factorización LU**

Es posible expresar algunas matrices cuadradas como el producto de dos matrices triangulares, en otras palabras se abre la posibilidad de factorizar algunas matrices. Tal factorización es de gran utilidad para resolver sistemas de ecuaciones lineales. El algoritmo propio de este método ofrece gran utilidad a la hora de resolver sistemas lineales mediante computadoras dado su economía y eficiencia en procedimientos.

Si se tiene una matriz triangular, con entradas de la diagonal principal diferente de cero, asociada a un sistema de ecuaciones lineales, no demandaría encontrar una matriz aumentada equivalente a su forma escalonada o escalonada reducida por renglones, dado que resultaría sencillo encontrar la solución del sistema con sólo realizar una sustitución regresiva o hacia adelante dependiendo si la matriz es triangular superior o inferior respectivamente.

Se parte suponiendo que A es una matriz de tamaño $n \times n$ y que se puede escribir como el producto de dos matrices L y U, siendo estas triangular inferior y superior, respectivamente, o sea $A = LU$. De presentarse tal situación se dice que A tiene una factorización LU. Se quiere usar este atractivo método para resolver sistemas lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Al sustituir LU por A, se tiene $(LU)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y por ser asociativo el producto de matrices, se tiene $L(U\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, de llamar $U\mathbf{x}$ = z, la ecuación matricial sería $L\mathbf{z} = \mathbf{b}$, lo cual implicaría, dada la naturaleza de L, aplicar una sustitución hacia atrás para determinar z y luego, por como fue definida U, se desarrolla una sustitución hacia adelante y de esta forma queda solucionado $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (véase [13]).

Como se puede apreciar, lo exigente de la factorización no estaría en solucionar $(LU)\mathbf{x} = \mathbf{b}$, pues solo se necesitan sustituciones, sino en expresar A como una descomposición LU.

Se Soluciona el problema del polinomio interpolador del apartado 6.1.4 través de factorización LU:

Se quiere encontrar el polinomio cuadrático que interpole los puntos$(1,3), (2,6)$ y $(3,13)$, lo que implica determinar en (2.26) a_2, a_1 y a_0. De aquí,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Se expone un procedimiento para encontrar dos matrices U y L. Para obtener una matriz triangular superior U, Se hacen ceros debajo de cada entrada de la diagonal principal, se empieza por hacer ceros debajo de a_{11}:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-9R_1+R_3]{-4R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

Ahora se construye una matriz triangular inferior con unos en la diagonal principal y se usan los factores negativos utilizados en las operaciones por renglón en la primera columna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 9 & * & 1 \end{pmatrix}$$

Se repite el proceso hasta obtener L y U

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3\mathrm{R}_2+\mathrm{R}_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Para resolver el sistema del ejemplo mediante factorización LU, se procede de la manera como se expone:

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se puede escribir como $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y haciendo $U\mathbf{x} = \mathbf{z}$, se tiene la ecuación $L\mathbf{z} = \mathbf{b}$, la que se desea resolver por medio de usa sustitución hacia adelante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

De (2.27), se tiene:

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 \\ z_2 &= -6 \\ z_3 &= 4 \end{aligned} \tag{2.28}$$

A continuación se resuelve $U\mathbf{x} = \mathbf{z}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

Aplicando a 2.29 una sustitución hacia atrás, se obtiene

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -3 \\ x_3 &= 4. \end{aligned}$$

2.2.2 Métodos Numéricos

Los métodos iterativos también ofrecen alternativas para solucionar sistemas lineales. Tales Métodos, al igual que el de Regula Falsi[7], usado por los egipcios para solucionar ecuaciones lineales, parten de la suposición de unos valores iniciales que a medida que

[7] En el apartado histórico se hace alusión al método de falsa posición

se repitan los procedimientos, se va llegando a una estimación bastante aproximada a la realidad. Se dice que el método converge o diverge si las aproximaciones sucesivas tienden a la solución o no, respectivamente.

Los métodos iterativos podrían verse en desventajas frente a otros métodos de solución de sistemas lineales dado que la solución es aproximada; sin embargo, terminan siendo una gran alternativa cuando los otros métodos presentan dificultades con el redondeo y el número de iteraciones es mínimo.

En estos métodos se parten nuevamente de un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, en donde se supone que A es no singular y que las entradas de la diagonal principal de A no son todas ceros. En últimas son útiles para sistemas con única solución. Los métodos que se presentan aquí son método iterativo de Jacobi y de Gauss–Seidel (véase [13]).

Aplicar estos métodos a la solución de sistemas de ecuaciones lineales implica que la matriz A debe ser diagonalmente dominante, es decir que el valor absoluto de todo elemento de la diagonal principal de A es mayor que la suma de los valores absolutos de las demás entradas de su renglón. De otro modo,

$$\left|a_{ij}\right| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right| \qquad (1 \leq i \leq n). \tag{2.30}$$

- **Método iterativo de Jacobi**

Se ilustra este método en la solución del siguiente problema que conduce a la resolución de un sistema lineal:

Un nutricionista está realizando un experimento relacionado con la preparación de una dieta determinada la cual consta de los alimentos A, B y C. Cada onza del alimento A contiene 3 unidades de carbohidratos, 2 unidades de grasa y 1 unidad de proteína. Cada onza del alimento B contiene 1 unidad de carbohidratos, 4 unidades de grasa y 2 unidades de proteína. Cada onza del alimento C contiene 1 unidad de carbohidratos, 1 unidad de grasa y 4 unidades de proteína. El nutriólogo necesita que la dieta le proporcione con exactitud 13 unidades de carbohidratos, 18 unidades de grasa y 23 unidades de proteína, ¿Cuántas onzas de cada comida se necesitarían?

En la sección 2.2.1, apartado “método por la inversa”, se hace una introducción al diseño de dietas como una aplicación de los sistemas lineales. Para este caso, el sistema de ecuaciones está dado por:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 18 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 23. \end{cases} \tag{2.31}$$

Donde x_1, x_2 y x_3 representan el número de onzas de cada alimento.

Se inicia expresando x_{i} en la i –ésima ecuación en términos de las demás variables. Se opta por trabajar con tres cifras decimales después de cada multiplicación o división

$$\begin{aligned} x_1 &= 4.333 - 0.333x_2 - 0.333x_3 \\ x_2 &= 4.5 - 0.500x_1 - 0.250x_3 \\ x_3 &= 5.750 - 0.250x_1 - 0.500x_2. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Se elige una aproximación[8] inicial de la solución, por ejemplo $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$.

Se sustituyen los valores iniciales en las ecuaciones anteriores y se repite el procedimiento, requiriendo la $(k-1)$ –ésima iteración. En este ejemplo, en la primera iteración se obtiene $x_1^{(1)} = 4.333$, $x_2^{(1)} = 4.500$, $x_3^{(1)} = 5.750$.

En la tabla 2.4 se muestran las primeras catorce iteraciones:

Tabla 2-4: Primeras catorce iteraciones de la solución del sistema lineal por Jacobi.

k –ésima iteración	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	4.333	4.500	5.750
2	0.920	0.896	2.417
3	3.230	3.436	5.072
4	1.500	1.617	3.225
5	2.721	2.944	4.567
6	1.832	1.998	3.598
7	2.470	2.685	4.293
8	2.009	2.192	3.790
9	2.341	2.548	4.152
10	2.102	2.292	3.891
11	2.274	2.476	4.079
12	2.150	2.343	3.943
13	2.240	2.439	4.041

Así la solución aproximada obtenida en catorce iteraciones del sistema lineal planteado es:

---

[8] Se denota la k –ésima aproximación de x_i por $x_i^{(k)}$

$x_1 \approx 2.240$ $\quad x_2 \approx 2.439$ $\quad x_3 \approx 4.041.$

La calidad de la aproximación mejora a medida que se cuente con mayor número de iteraciones. La solución exacta es:

$x_1 = 2.2$ $\quad x_2 = 2.4$ $\quad x_3 = 4.$

▪ Método iterativo de Gauss-Seidel

El método Gauss-Seidel es bastante parecido al de Jacobi. En este método, a diferencia del de Jacobi, se utilizan valores de las incógnitas encontrados en la misma iteración.
Se sigue con el mismo ejemplo planteado en la sección anterior.

Se inicia expresando x_i en la i –ésima ecuación en términos de las demás variables, para (2.31) se tiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4.333 - 0.333x_2 - 0.333x_3 \\ x_2 &= 4.5 - 0.500x_1 - 0.250x_3 \\ x_3 &= 5.750 - 0.250x_1 - 0.500x_2. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Se elige una aproximación inicial de la solución, por ejemplo $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0.$ Se sustituyen estos valores en la primera ecuación para así obtener $\mathrm{x}_1^{(1)}$. Así,

$$x_1^{(1)} = 4.333. \tag{2.34}$$

Se usa el valor de (2.34) y además $x_3^{(0)} = 0$, para calcular $x_2^{(1)}$ en la segunda ecuación de (2.33), de esta manera:

$$x_2^{(1)} = 2.334. \tag{2.35}$$

Ahora se sustituye $x_1^{(1)} = 4.333$ *y* $x_2^{(1)} = 2.334$ en la tercera ecuación de (2.33) para encontrar $x_3^{(1)}$, así:

$$x_3^{(1)} = 3.500. \tag{2.36}$$

En la tabla 2-5 se muestran las primeras cinco iteraciones y a partir de estas se obtiene la solución aproximada del sistema (2.31):

$x_1 \approx 2.202$ $\quad x_2 \approx 2.399$ $\quad x_3 \approx 4.000.$

Es preciso anotar que Aunque con el método Gauss-Seidel utilizó menos iteraciones para llegar a una mejor aproximación que con el método de Jacobi, esto no siempre sucede.

Tabla 2-5: Primeras seis iteraciones de la solución del sistema lineal por Gauss-Seidel.

k –ésima iteración	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0,000	0,000	0,000
1	4,333	2,334	3,500
2	2,390	2,430	3,938
3	2,213	2,409	3,992
4	2,201	2,401	3,999
5	2,202	2,399	4,000

3. Propuesta de actividades

En esta sección se presentan algunas actividades cuyo propósito principal es estudiar algunas aplicaciones de los sistemas lineales, para ello es fundamental que antes de considerar la secuencia de actividades aquí expuestas, el profesor haya llevado al salón de clases los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales presentados en el capítulo 2. Se espera, entonces que los estudiantes hayan asimilado estos métodos, para así garantizar que cuenten con las herramientas matemáticas necesarias para poder estudiar algunas situaciones. Se vislumbra así, como otra intención de este apartado el afianzamiento de estos métodos

Los métodos de solución de sistemas lineales presentados en este trabajo, se consideran alternativos dado que estos generalmente no son considerados en la enseñanza de las matemáticas escolares[9] a pesar que generan importantes habilidades en el estudio de las matemáticas (e.g. abstraer, resolver problemas, representar, argumentar, etc.). En los Estándares Curriculares de Matemáticas de octavo a noveno grado un estándar reza " identificar diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales" [5]; como se puede observar en ningún momento se hace una restricción de métodos.

La elaboración de las actividades requirió la atención de los procesos, contexto y pensamientos expuestos en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, lo que implica que estas actividades se pueden sustentar desde estos aspectos.
En [4] se proponen tres aspectos organizadores del currículo, a saber:

- Procesos generales asociados al aprendizajes: *el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos*
- Conocimientos básicos relacionados con el desarrollo del pensamiento numérico, el especial, el métrico, el aleatorio y el variacional entre otros.
- El contexto relativo a los ambientes en que se pueden situar las situaciones problemáticas que garantizan un acercamiento de los estudiantes a las matemáticas. Se hablan de situaciones procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias.

---

[9] El autor no desconoce que los métodos convencionales presentados en la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales (sustitución, eliminación y gráfico) también generen habilidades que deban estar presentes en toda actividad matemática.

Polya en [20] creía que la actividad de resolver problemas requería un análisis bastante cuidadoso: definir el problema, planificar una estrategia para la solución, ejecutar la estrategia y validar los resultados. Polya consideraba el uso de "analogías[10]", la descomposición de un problema en otros más pequeños, realización de dibujos, reformulación del problema, entre otros, como estrategias o heurísticas para resolver problemas.

Las actividades están compuestas por un conjunto de situaciones, todas ellas presentadas en un contexto ya sea desde otras ciencias o de las matemáticas mismas. Cada una de las cuatro actividades denominadas: balanceo de ecuaciones químicas, polinomio interpolador, modelo económico lineal y redes de flujo, están acompañadas de sugerencias relativas a la forma en que se podrían orientar y algunos comentarios que se suscitan a partir de elementos históricos, didácticos y disciplinares expuestos en capítulos anteriores.

Guzmán refiriéndose a los retos de la tecnología, plantea:

> El acento habrá que ponerlo, también por esta razón, en la comprensión de los procesos matemáticos más bien que en la ejecución de ciertas rutinas que en nuestra situación actual, ocupan todavía gran parte de la energía de nuestros alumnos, con el consiguiente sentimiento de esterilidad del tiempo que en ello emplean. Lo verdaderamente importante vendrá a ser su preparación para el diálogo inteligente con las herramientas que ya existen, de las que algunos ya disponen y otros van a disponer en un futuro que ya casi es presente [7].

Resaltando con esto la importancia de realizar una reflexión sobre la incidencia de las herramientas tecnológicas en la educación matemática. Acorde a lo planteado por Guzmán la actividad de la sección 3.4 se ideó para ser ejecutada con apoyo de la calculadora $casio\ fx - 9860G\ SD$, como recurso tecnológico.

Partiendo de la importancia que es para la construcción del conocimiento, la interacción social, se sugiere que las actividades sean desarrolladas individualmente, por parejas y por grupos, esto posibilita que el profesor no actúe como orador durante toda la sesión de clase y los estudiantes no permanezcan callados escuchando y tomando notas, así se potencia las interacciones entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor.

[10] Problemas que ya han sido resueltos o son fáciles de resolver

3.1 Actividad: Balanceo de ecuaciones químicas

Objetivos.
Con esta actividad se pretende:

- ✓ Propiciar una oportunidad para que los estudiantes aprecien la relación de las matemáticas con otras ciencias.
- ✓ Modelar la situación presentada a través del planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales.
- ✓ Analizar los métodos de solución de sistemas lineales estudiados para que los estudiantes adquieran elementos que le permitan evaluar la pertinencia en la elección de un método u otro.
- ✓ Contextualizar la respuesta encontrada en relación a la situación presentada.

Considere la siguiente situación:

En una clase de química la profesora propone como ejercicio balancear la ecuación química de la fotosíntesis $CO_2 + H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2$. Un grupo de estudiantes comentan sus opiniones respecto al ejercicio propuesto:

- *Juan expresa que hay infinitas formas de balancear la ecuación, dado que al resolver el sistema de ecuaciones asociado a la ecuación presentada, se encuentra que éste es dependiente, luego habría tantas soluciones como valores se tome para la variable libre.*
- *Marcela por su parte, comenta que está en desacuerdo con la postura de Juan, pues el problema no admite soluciones negativas, no tendría sentido que los coeficientes de cada uno de los reactivos de la ecuación fueran negativos.*

La profesora se muestra satisfecha por las observaciones de Juan y Marcela; sin embargo, insiste en que desea la solución concreta para el ejercicio.

Para balancear la ecuación, se deben encontrar números enteros x_1, x_2, x_3 y x_4 tales que el número total de átomos de oxígeno (O), carbono (C) e hidrogeno (H) ubicados a la izquierda de la reacción sea el mismo que los situados a la derecha. De otro modo:

$$(x_1)CO_2 + (x_2)H_2O = (x_3)C_6H_{12}O_6 + (x_4)O_2$$

a. Ubique el número de átomos por molécula en matrices columnas, tenga presente que el orden en que disponga los elementos químicos de cada molécula debe conservarse para cada una de éstas.
b. Con base en el literal anterior, plantee el sistema homogéneo.

c. De los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales estudiados en clase, ¿Cuál seleccionaría para resolver el sistema? Justifique su respuesta.
d. Solucione el sistema homogéneo con el método escogido en el literal anterior.

Con base en la situación presentada al inicio, responda:

e. ¿Con cuál de las posturas presentadas se identifica?
f. ¿Por qué cree que la profesora se muestra satisfecha con lo comentado por ambos estudiantes?
g. ¿Cuál hubiera sido su posición? ¿Mejoraría la idea de alguno de estos dos estudiantes? ¿Cómo?

En este ejercicio se aprovecha las dinámicas que se dan normalmente en las clases, para presentar por un lado, la relación de las matemáticas con otras ciencias, específicamente con química y por otro, la necesidad de conocer un contexto para poder dar una respuesta acertada que corresponda al sentido mismo de la situación.

Si bien es necesario resaltar la importancia que adquiere el hecho de que el estudiante plantee y resuelva un sistema de ecuaciones lineales, se debe hacer énfasis en el tipo de respuesta que admite el balanceo de ecuaciones químicas. Es por esto, que el profesor debe guiar a los estudiantes para que ellos puedan llegar a este tipo de conclusiones. Para este caso, los coeficientes deben ser enteros positivos, pero además es preferencia de los químicos usar una ecuación balanceada cuyos coeficientes sean los números enteros positivos más “pequeños” posibles [14].

Tan importante como lo anterior resulta indagar en la actividad por los métodos que los estudiantes emplearían para solucionar el sistema de ecuaciones de la situación, comentando las limitaciones que estos presentan, generando así un momento adecuado para trabajar en la comunicación como habilidad de la actividad matemática.

3.2 Actividad: Polinomio Interpolador

Objetivos.
Con esta actividad se pretende:

a. Propiciar una oportunidad para que los estudiantes aprecien la relación de las matemáticas con otras ciencias.
b. Modelar la situación presentada a través del planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales.
c. Analizar los métodos de solución de sistemas lineales estudiados para que los estudiantes adquieran elementos que le permitan evaluar la pertinencia en la

elección de un método u otro.

d. Contextualizar la respuesta encontrada en relación a la situación presentada.

e. Afianzar el estudio de la función cuadrática.

En una actividad de campo, un estudiante lanza una pelota como se ilustra en la figura 1, sus compañeros, apoyados de un sensor sónico de movimiento, tomaron los datos que aparecen registrados en la tabla 3-1. En la primera columna de la tabla se encuentra la distancia que la bola ha viajado horizontalmente y en la segunda, la altura sobre el nivel del suelo, ambas medidas en pies.

Figura 3-1: Lanzamiento de una pelota.

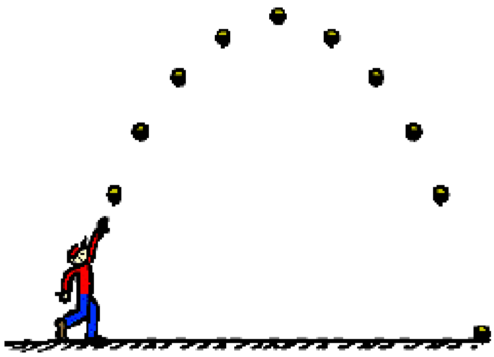


Tabla 3-1: Relación entre la distancia horizontal y la altura.

Distancia horizontal (pies)	***Altura (pies)***
0	5
20	23
40	47
100	55
120	53
140	47
160	37
200	5

f. Defina las variables e identifique las restricciones sobre los datos

g. Ubique los puntos dados en un plano cartesiano. Llame x la distancia horizontal e y la altura que alcanza la pelota.

h. Realice un comentario sobre el tipo de gráfica que sugiere la ubicación de tales puntos.

i. ¿Tiene sentido unir los puntos mediante una línea continua? ¿Por qué?

j. Suponga que la ecuación que modela la trayectoria de la pelota está dada por $y = ax^2 + bx + c$. Seleccione tres puntos cualesquiera de la tabla 1 y plantee un sistema de ecuaciones lineales para determinar a, b y c.

k. De los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales estudiados en clase, ¿Cuál seleccionaría para resolver el sistema? Justifique su respuesta.

l. Solucione el sistema lineal con el método escogido en el literal anterior.
m. Valide la ecuación cuadrática encontrada con algunos de los puntos presentado en la tabla 3-1.
n. ¿Qué representa el dato $(100,55)$ en la situación presentada?

Con el desarrollo de esta actividad, se pretende que los estudiantes además de plantear un sistema lineal y analizar los métodos para su solución, afianzar su conocimiento sobre función cuadrática, que hace parte del plan de estudios de alguno de los niveles de la educación Básica Secundaria, dado que desde los Estándares de Matemáticas se motiva su estudio [5].

Es oportuno, entonces, recalcar como este problema se presta para ser trabajado desde la matemática misma, convirtiéndose una oportunidad para que los alumnos muestren su capacidad de utilizar esta parte de las matemáticas (sistemas lineales y función cuadrática) para aproximarse al desarrollo, aplicación y análisis de modelos matemáticos. En esta actividad, una vez más, se evidencia la relación entre las matemáticas y otras ciencias, como la física en este caso.

Sería grandioso considerar este problema, para crear un espacio de exploración con métodos iterativos, como el de Jacobi o Gauss Seidel, que también puede parecerles llamativo a los estudiantes, pues ellos tienden a realizar sustituciones, a veces arbitrarias, como método intuitivo para solucionar alguna ecuación. En el capítulo dos se muestra como los egipcios se valían de falsas suposiciones para encontrar solución a ecuaciones lineales.

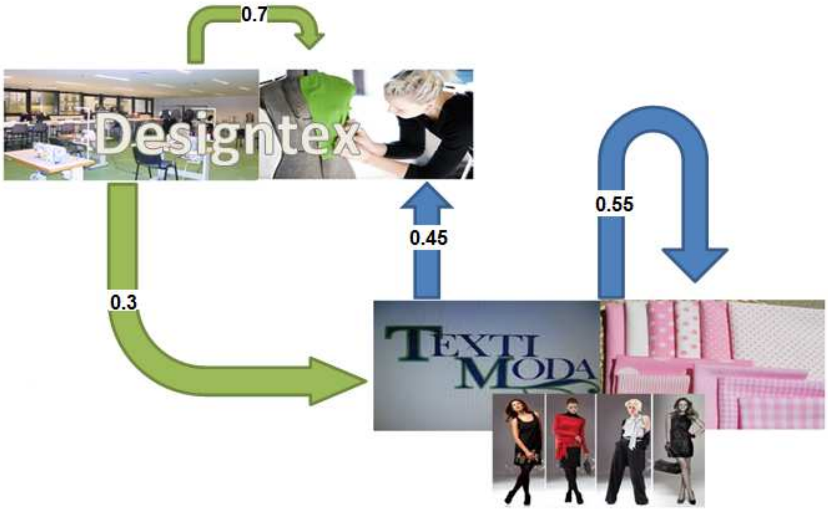
3.3 Actividad: Modelo económico lineal

Objetivos.
Con esta actividad se pretende:

a. Propiciar una oportunidad para que los estudiantes aprecien la relación de las matemáticas con otras ciencias.
b. Modelar la situación presentada a través del planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales.
c. Analizar los métodos de solución de sistemas lineales estudiados para que los estudiantes adquieran elementos que le permitan evaluar la pertinencia en la elección de un método u otro.
d. Contextualizar la respuesta encontrada en relación a la situación presentada.

Un grupo de estudiantes de diseño de moda crean una empresa denominada, Designtex, y se encarga de prestar servicio de diseño de uniformes y de diseño textil. Esta microempresa se provee de tela de la empresa Textimoda, la cual a su vez recibe de ellos, servicios de diseño textil. Designtex vende el 30 % de su producción a Textimoda y se queda con el resto, mientras que Textimoda vende el 45% de su producción a Designtex y retiene el resto. En la figura 3-2 se ilustra esta interacción:

Figura 3-2: Interacción entre dos sectores.



a. Complete la tabla 3-2 con los porcentajes en que se distribuye la producción de cada sector. Escriba estos porcentajes en representación decimal.

Tabla 3-2: Distribución del rendimiento por sector.

Distribución de la producción		Comprado por
Designtex	Textimoda	
		Designtex
		Textimoda

b. La tabla que completó en el literal a se conoce en economía como tabla de intercambio para una economía. Organice la información de esta tabla de intercambio en una matriz, llámela A.
c. Como se puede notar los datos de las columnas Designtex y Textimoda se refieren a la fracción de la producción total de cada sector ¿Cuánto suman los datos de cada una de estas columnas? ¿Cuál es la razón que justifica ese resultado?

d. ¿Qué interpretación puede hacer de los datos ubicados en las filas Designtex y Textimoda?
e. En la matriz A ¿Qué representa el elemento a_{22}?

Llame pD y pT a los precios (en pesos) de la producción total de Designtex y Textimoda, respectivamente. Se debe encontrar *los precios de equilibrio que permiten igualar los ingresos y los gastos de cada sector*.

f. ¿Cuánto dinero debe gastar Designtex por comprar telas a Textimoda y por lo que retiene de su producción? Iguale ese gasto al precio de su producción total (pD).
g. Repita el ejercicio anterior con Textimoda.
h. Plantee el sistema de ecuaciones lineales con base en los literales d. y e.
i. De los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales estudiados en clase, ¿Cuál seleccionaría para resolver el sistema? Justifique su respuesta.
j. Solucione el sistema homogéneo con el método escogido en el literal anterior.
k. Si la producción de Textimoda se valorara en 200 millones de pesos, ¿De cuánto debería ser la producción de Designtex para que los gastos y los ingresos de cada empresa sean iguales?

Estudiar los sistemas de ecuaciones lineales, aplicándolo a situaciones relacionadas con economía, puede llamar la atención en los estudiantes, generando cierta motivación por su aprendizaje. Esta actividad puede parecerle atractiva a los estudiantes, en especial a aquellos que han mostrado cierta afinidad por tópicos relacionados con la administración, economía o finanzas, y que ya han empezado a perfilarse como posibles estudiantes de estas carreras. De ser así, desarrollarían esta actividad por el placer y la satisfacción que puede experimentar, mientras explora o trata de entender algo nuevo [6].

3.4 Actividad: Flujo de redes

Objetivos.
Con esta actividad se pretende:

a. Propiciar una oportunidad para que los estudiantes aprecien la relación de las matemáticas con otras ciencias.
b. Modelar la situación presentada a través del planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales.
c. Disponer de herramientas tecnológicas para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
d. Aplicar Gauss- Jordan en la solución de sistemas lineales.
e. Contextualizar la respuesta encontrada en relación a la situación presentada.

En la figura 3-3 se muestran algunas calles y carreras del barrio Chapinero en la ciudad de Bogotá, obtenidas desde Google Maps. Allí, se resaltan con color rojo la Avenida Chile (calle 72), calle 68, Avenida NQS (carrera 30), carrera 24 y la Avenida Caracas. Partiendo del supuesto que estas calles y carreras están habilitadas en un solo sentido (indicado por flechas) y que además se conoce el número promedio de vehículos por hora que transita por cada intersección (A, B, C, D, E y F), visibles en la figura 3-4.

Figura 3-3: Algunas calles y carreras de Chapinero.

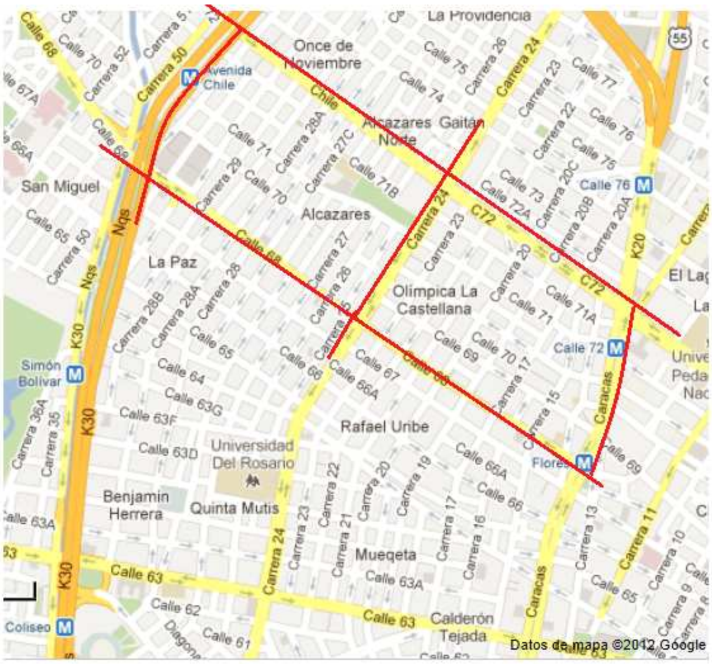
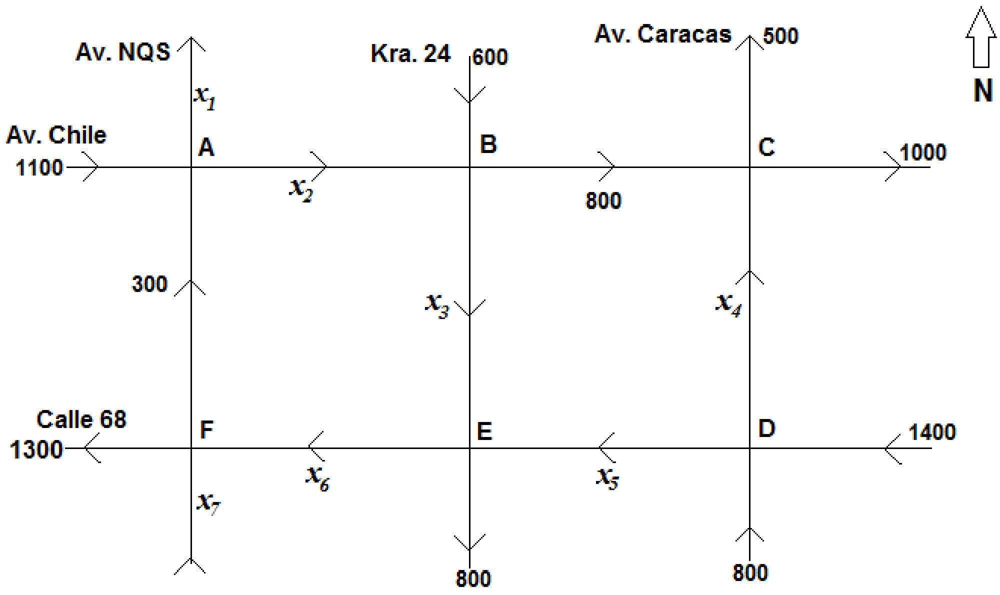


Figura 3-4: Flujo vehicular de algunas calles de Chapinero.



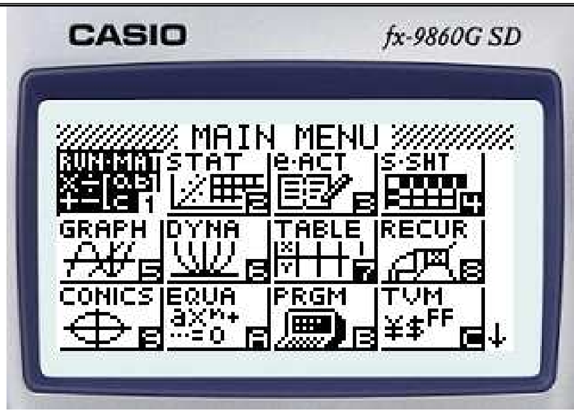
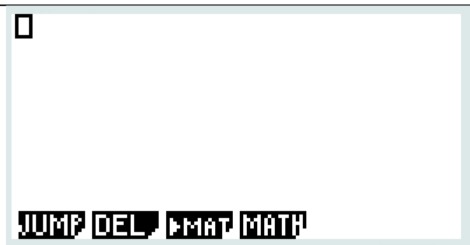
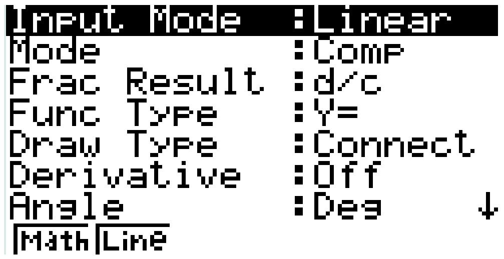
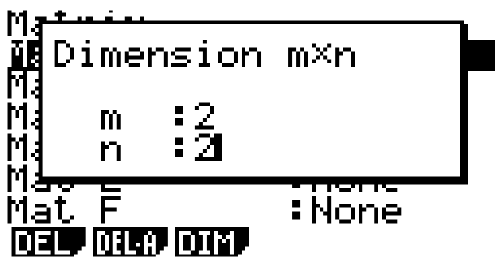
Un supuesto básico del flujo de redes es que el número de vehículos que entra a cada intersección o nodo es el mismo que sale de ésta. Por ejemplo, en la intersección A el número de vehículos que llega es $1100 + 300$ y el número de vehículos que sale es $x_1 + x_2$. De esta forma, el flujo de tráfico en la intersección A esta dado por la ecuación:

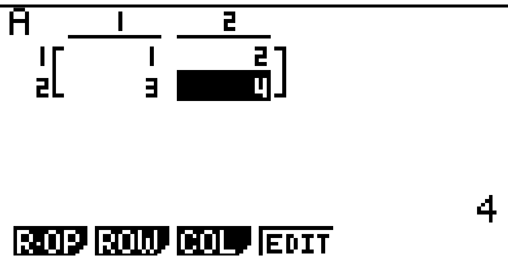
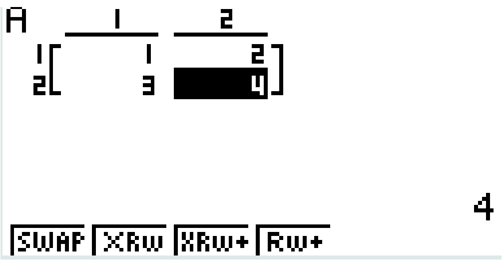
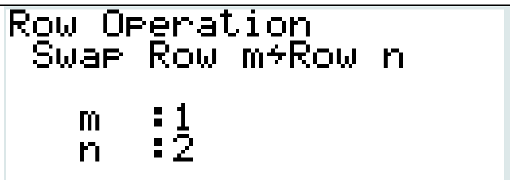
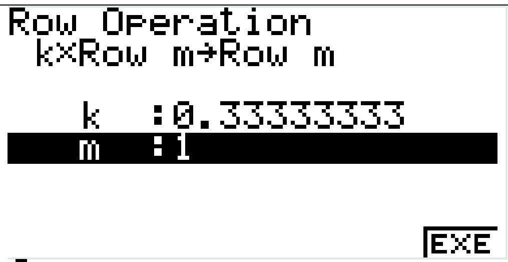
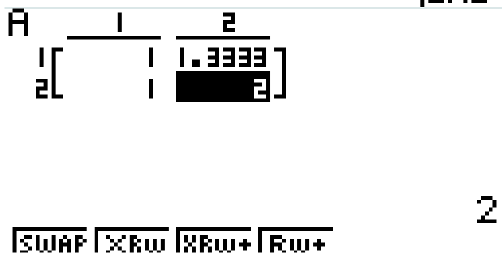
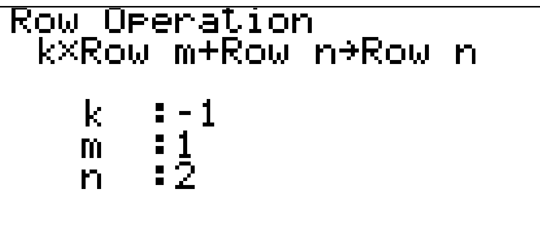
$$x_1 + x_2 = 1400$$

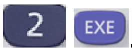
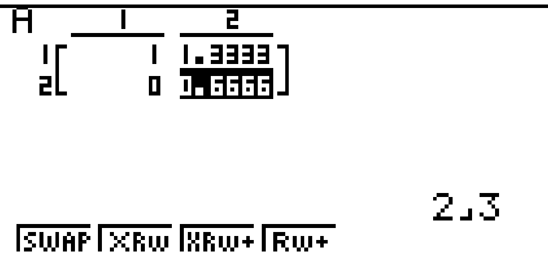
x_i representa la cantidad de flujo de tráfico que se desconoce en cada una de las intersecciones.

a. Para cada una de las intersecciones, conocidas como nodos, plantee las correspondientes ecuaciones de flujo de tráfico.
b. El conjunto de las ecuaciones de flujo halladas constituye un sistema de ecuaciones lineales. Haga uso de la calculadora $casio\ fx - 9860G\ SD$ para resolver el sistema por Gauss-Jordan. A continuación se presentan algunos comandos que le servirá para lograr este propósito:

Descripción	Visualización en la calculadora

<table>
<tr>
<td>1. Presione  para visualizar el menú principal.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>2. Utilice las teclas del cursor  para moverse al icono que desea y luego oprima  Para este caso, la opción que se necesita es RUN-MAT. Se usa este modo para cálculos aritméticos y matriciales.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Para escoger la opción lineal, presione   y en la primera opción del listado que aparece (INPUT/OUTPUT) oprima   , así selecciona el modo Linear. Los cálculos con matrices también pueden hacerse en el modo Math.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>4. Oprima  para ingresar y editar matrices. Por ejemplo, si se quiere ingresar una matriz A, presione  para determinar el tamaño de la matriz m (renglones) n (columnas). Ingrese por ejemplo, una matriz de tamaño 2 × 2. Una vez seleccione el tamaño de la matriz, puede presionar  para salir de la pantalla de ingreso de matriz.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

	
5. Para obtener una matriz escalonada reducida equivalente por renglones a una dada, debe usar las operaciones elementales por renglones. La opción R-OP permite realizar este procedimiento. Presione F1 para seleccionarla.	
6. La opción Swap intercambia renglones. Presione F1 e ingrese los renglones que quiera intercambiar. Por ejemplo renglón 1 con el renglón 2. Presione EXE.	
7. La opción XRw multiplica un escalar (k) por una fila seleccionada (m). Presione F2 e ingrese el valor multiplicador (k), por ejemplo $\frac{1}{3}$: 1 a b/c 3 EXE. Seguidamente, especifique el número del renglón al que le quiere multiplicar $\frac{1}{3}$, por ejemplo al renglón 1: 1 EXE.	
8. WRw+ permite sumar el producto escalar de un renglón a otro. Presione F3 y seleccione el valor multiplicador, por ejemplo -1: (−) 1 EXE. Seguidamente, especifique el número del renglón al que le quiere multiplicar -1, por ejemplo al renglón 1: 1 EXE y finalmente,	

especifique el número del renglón en donde el resultado debe ser sumado: . La opción Rw+ suma de un renglón especificado a otro renglón	

c. Analizando la solución obtenida, determine el flujo máximo y mínimo de $x_1, x_2, \ldots x_7$

d. ¿Tiene sentido considerar flujos negativos? ¿por qué?

e. Si por reparaciones en la avenida NQS entre la calle 68 y la avenida Chile se cierra el camino cuyo flujo es x_7, ¿cuáles será el flujo promedio en la Carrera 24, entre la Av. Chile y la calle 68; en la Av. Caracas entre Av. Chile y la calle 68 y en la Calle 68 entre Av. Caracas y Carrera 24?

El autor reconoce la tecnología como una herramienta de grandes alcances en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por ello no podía pasar por alto el uso de la misma en esta propuesta. En este ejercicio se recomienda usar la calculadora $casio\ fx - 9860G\ SD$ porque los estudiantes[11] de la institución donde el autor labora se benefician de ella, en esa medida le resulta familiar. No por ello, se debe deducir que la aplicación de esta actividad está supeditada a esta herramienta. Hoy por hoy existen programas informáticos de distribución libre o comercial que también cuentan con sistemas de álgebra computacional (e.g. Maxima, Derive y Axiom).

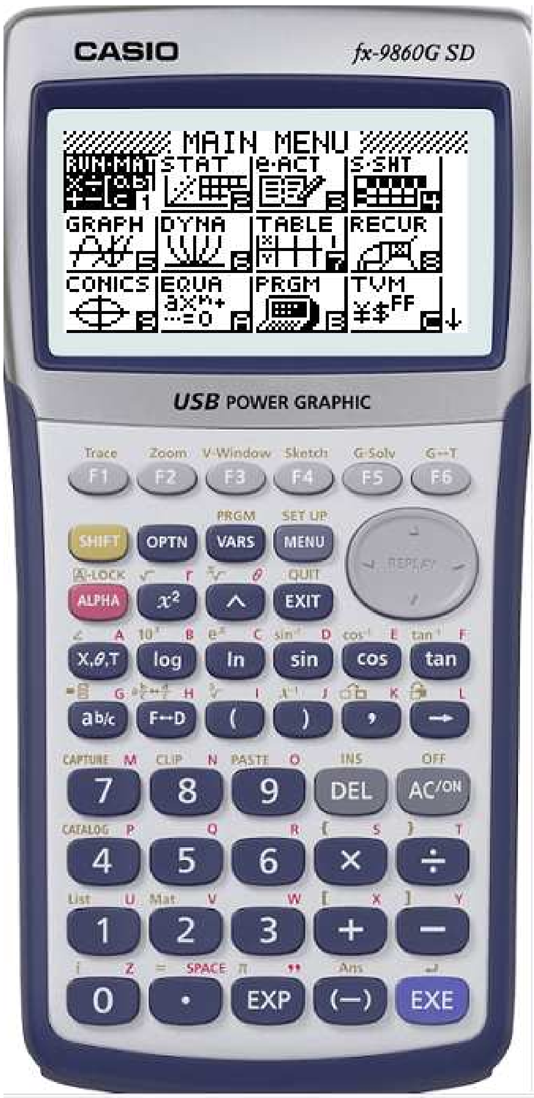
Si bien es importante que el estudiante desarrolle destrezas de tipo algorítmicas, para el autor, el propósito de enseñanza del método Gauss- Jordan está centrado en la comprensión de la aplicación de operaciones elementales entre renglones para la obtención de matrices escalonadas reducidas equivalentes por renglones. Con cálculos a lápiz y papel que se suelen tornar dispendiosos, el estudiante fácilmente puede incurrir en un error de tipo aritmético y quizás habiendo comprendido las operaciones entre renglones, pero después de un tiempo considerable que el estudiante dedica a su trabajo, llega a una respuesta errada, generando frustración y abandono del método, sobre todo si estas acciones han sido repetitivas. Con el uso de la tecnología no se está exento de errores, pero devolverse o empezar de nuevo no genera tantas molestias, pues la calculadora aligera y supera la capacidad de cálculo de la mente humana, eso sí, debe entender muy bien el funcionamiento de la misma y por supuesto el concepto en sí.

[11] Cada estudiante cuenta con su propia calculadora.

El desarrollo de esta actividad trae consigo muchos beneficios para el aprendizaje, no sólo por la aplicación del método en cuestión, ni por la relación matemática – ingeniería y la contextualización de la situación, sino por que se pone de manifiesto otros temas de la matemática escolar, se habla en especial de la solución de desigualdades lineales que el estudiante se ve en la necesidad de usar cuando decida encontrar flujos máximos y mínimos en la red.

Se sugiere dedicar más de una sesión al desarrollo de esta actividad. La figura 3-4 muestra la imagen de la calculadora $casio\ fx - 9860G\ SD$.

Figura 3-5: Calculadora $casio\ fx - 9860G\ SD$.



4. Conclusiones y recomendaciones

4.1 Conclusiones

Queda claro que abordar los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales y sus aplicaciones en la enseñanza de las matemáticas escolares, permite generar habilidades en los aprendices que los acercarán y familiarizarán con la actividad matemática, en cuanto exige a los estudiantes el desarrollo de la comunicación, el razonamiento, la resolución de problemas, la ejercitación de procedimientos y la modelación.

La particularidad del estudio de sistemas de ecuaciones lineales demanda un trabajo interdisciplinar, lo que permitiría contar con un bagaje de situaciones que, por un lado sea atractivo a los estudiantes y por otro, posibilite a los profesores relacionar las matemáticas con otras ciencias. Dicha relación facilitaría la posibilidad de proponer proyectos transversales al interior de las instituciones educativas, así como el trabajo en equipo por parte de los docentes de las distintas áreas.

Permitiendo un trabajo interdisciplinar los estudiantes podrían trabajar en las aulas situaciones relacionadas con la química (sección 3.1), la física (Sección 3.2), la economía (sección 3.3), o situaciones de la vida real (sección 3.4). Este recorrido didáctico ampliaría la visión y percepción de las matemáticas a docentes y estudiantes.

Otro aporte de esta propuesta es la inclusión directa de las matrices como contenido a abordar en el currículo, preferiblemente en el último año de la Educación Básica Secundaria y/o en la Educación Media, tópico que no es considerado de manera directa en los Estándares Curriculares de Matemáticas.

Al estudiar los métodos expuestos en este trabajo, el estudiante se encontrará con el estudio de un nuevo objeto matemático: las matrices, que sin lugar a dudas constituyen una gran herramienta que no sólo surgen para solucionar sistemas lineales, sino que se configuran como una teoría matemática rica en aplicaciones y que a modo de ver del autor, resultaría interesante su consideración en la enseñanza de las matemáticas escolares.

La propuesta aquí presentada podría contribuir de alguna manera en la proyección profesional de los estudiantes; en especial de aquellos que han mostrado cierta afinidad por tópicos relacionados con la administración, economía, ingenierías, ciencias exactas, finanzas, entre otras, y que ya han empezado a perfilarse como posibles estudiantes de estas carreras.

Indudablemente el abordaje de los tópicos aquí propuestos, facilitaría a futuro, el desempeño de los aprendices que bien decidan interesarse en carreras relacionadas con los mismos, en la educación superior.

4.2 Recomendaciones

Se espera que la presenta propuesta pueda ser implementada en las diversas instituciones educativas, con el fin de evaluar sus alcances y aportes.

De igual manera, sería deseable la continuidad del trabajo aquí propuesto, a través del diseño de nuevas actividades que apunten a los objetivos trazados en este documento.

También se busca invitar a los docentes a proponer trabajos investigativos que apunten a indagar por los resultados que generaría la inclusión de los tópicos señalados en la enseñanza de las matemáticas escolares ya sea en el último año de la Educación Básica Secundaria o en la Educación Media.

Finalmente, se espera que este estudio también genere en los profesores el deseo de transformar la manera en que se concibe la enseñanza de las matemáticas en el contexto escolar.

Bibliografía

[1] BELL, Eric Temple. Historia de las matemáticas. Traducido por R. Ortiz. Mexico: Fondo de Cultura Económica, 1985. 656 p.

[2] BOYER, Carl. Historia de la matemática. Traducido por Mariano Martínez. Madrid: Alianza Editorial, 1986. 808p.

[3] COLLETTE, Jean-Paul. Historia de las matemáticas. Traducido por Pilar González y Alfonso Casal. Madrid: Siglo XXI de España Editores, 1985. 2v.

[4] COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN COLOMBIANA. Lineamientos curriculares para matemáticas. Bogotá: Editorial Magisterio, 1999.

[5] _________. MINISTERIO DE EDUCACIÓN COLOMBIANA. Estándares básicos para las competencias matemáticas. Bogotá: Editorial Magisterio, 2006.

[6] GÓMEZ, Inés. Motivar a los alumnos de secundaria para hacer matemáticas. En : Matemáticas: Pisa en la práctica. Madrid. [En línea]. [consultado 7 may. 2012]. Disponible en <http://www.mat.ucm.es/~imgomezc/almacen/pisa-motivar >

[7] GUZMAN, Miguel de. Tendencias innovadoras en educación matemática. [En línea]. [consultado 7 may. 2012]. Disponible en <http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/educacion/tendenciasInnovadoras>

[8] GROSSMAN, Stanley. Álgebra lineal. 6 ed. México: McGraw-Hill Interamericana, 2008. 762p.

[9] HAWKING, Stephen William. Dios creó los números: los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia. Barcelona: Crítica, 2010. 1030p.

[10] HEFFERON, Jim. Linear algebra. [en línea]. [consultado 7 may. 2012]. Disponible en <http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra >.

[11] INSTITUTO COLOMBIANO DE NORMAS TÉCNICAS Y CERTIFICACIÓN. Documentación : Citas y notas de pie de página. Bogotá :ICONTEC, 2002. 23 p. (NTC 1487).

[12] KLINE, Morris. El pensamiento matemático de la antigüedad hasta nuestros días. Traducido por Mariano Martínez, et al. Madrid: Alianza Editorial, 1992. 3v.

[13] KOLMAN, Bernard. Álgebra lineal: con aplicaciones y matlab. Traducido por Óscar Palma. 6 ed. Mexico : Prentice Hall, 1996. 608p.

[14] LAY, David. Álgebra lineal y sus aplicaciones. Traducido por Jesús Murrieta. 3 ed. México: Pearson Education, 2007. 492 p.

[15] LUZARDO, Deivi y PEÑA, Alirio. Historia del álgebra lineal hasta los albores del siglo XX. En : Divulgaciones Matemáticas. [en línea]. Vol. 14, No. 2 (2006). [consultado 12 dic. 2011]. Disponible en <http://www.emis.de/journals/DM/vol14-2.htm>.

[16] FLEGG, Graham. *Numbers: Their History and Meaning*. 1983.

[17] ORTS, Abilio. Resolución de problemas mediante la regla de falsa posición: un estudio histórico. En : Suma. [en línea]. Vol. 56 (2006). [consultado 9 mar. 2012]. Disponible en <http://revistasuma.es/IMG/pdf/56/055-061.pdf>.

[18] NAKOS, George y JOYNER, David. Álgebra Lineal con aplicaciones. Traducido por Virgilio González. México : International Thomson Editores, 1999.

[19] PINO, Javier del. La aritmética de Diofanto. [en línea]. [consultado 25 may. 2012]. Disponible en <http://javierdelpino.wordpress.com/category/matematicas/la-aritmetica-de-diofanto/>.

[20] POLYA, George. Cómo plantear y resolver problemas. Mexico: Trillas, 1969. 215p.

[21] PULPÓN, Angel. Historia del papiro de Rhind y similares. [en línea]. [consultado 9 mar. 2012]. Disponible en <http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/165/el_papiro_de_Rhind.pdf>.

[22] REY, Julio y BABINI, J. Historia de la matemática. Barcelona: Gedisa,1985.

[23] SAAD, Yousef y VORST, Henk van der. Iterative solution of linear systems in the 20th century. En : Journal of computational and applied mathematics. [en línea]. No. 123 (jan. 2000); p. 1 – 33. [consultado 25 may. 2012]. Disponible en <http://math.ecnu.edu.cn/~jypan/research/paper_ essay /Iterative%20solution%20of%20linear%20systems%20in%20the%2020th%20century.pdf >.

[24] TENEMBAUN, Saúl. Matemáticas. [en línea]. [consultado 25 may. 2012]. Disponible en <http://www.x.edu.uy/sistemas.htm >

[25] WINICHI, G. The Analysis of Regula Falsi as an Instance for Professional Development of Elementary School Teachers. In V. Katz (Ed.), Using History to Teach Mathematics: An International Perspective . Washington: Mathematical Association of America, 2000.