UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Aproximación didáctica al concepto de función en el ámbito de la educación telepresencial

Adriana Maldonado Currea

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Leticia, Colombia

2012

Aproximación didáctica al concepto de función en el ámbito de la educación telepresencial

Adriana Maldonado Currea

Trabajo de profundización presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

Matemático maestro en educación Crescencio Huertas

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Leticia, Colombia

2012

Dedicatoria

A todos los que me llenan día a día la cabeza de ideas para hacer mejor mi trabajo

Agradecimientos

Agradezco a Ángela González, por todos sus concejos, por acompañarme en todo el proceso de elaboración del trabajo y por escuchar todas las ideas que pasaron por mi cabeza, a Dany Mahecha por su disposición y por la oportunidad que me ha dado de trabajar a su lado y cerca del grupo de investigación, a Crescencio por su paciencia, su tiempo y sus comentarios. Agradezco al Grupo de Investigación en Educación, Pedagogía y Género en la Amazonia, a la Dirección Nacional de Innovación Académica de la Universidad Nacional, pero en especial quiero agradecerle a mi papá por leer, releer y volver a leer mi trabajo.

Resumen

Debido al bajo rendimiento académico en el área de matemáticas en el programa PEAMA de la de la Universidad Nacional de Colombia Sede Amazonia, se hace fundamental la reflexión y estudio de los obstáculos para abordar las temáticas y conceptos propuestos en estos cursos; por tal motivo, inicialmente se indaga sobre las dificultades de los estudiantes con el primer concepto propuesto al iniciar el programa de cálculo diferencial: el concepto de función que los estudiantes del programa van a encontrar a lo largo de los cursos de cálculo diferencial, cursos posteriores y, en su práctica profesional, pues la comprensión y utilización de este concepto constituye elemento esencial para la interrelación de variables en todas las áreas del conocimiento y del ejercicio profesional.

Este trabajo mostrará las etapas seguidas para indagar sobre las dificultades didácticas y académicas de dicho concepto, principal insumo de la unidad didáctica elaborada para acompañar la clase de cálculo diferencial, respondiendo a los hallazgos hechos, teniendo en cuenta las condiciones de tele-presencia propias de los cursos de matemáticas dictados actualmente por la Universidad.

Palabras clave: funciones reales, enseñanza de la matemática, tele-presencia

Abstract

In due to the academic underachievement in Mathematics in PEAMA program of Universidad Nacional de Colombia Sede Amazonia, it makes very important the study and reflection of the obstacles to consider the topics and concepts proposed in those courses, that's why in first place it is looked about the students' difficulties with the first concept of the program differential calculus, following courses and in their professional practice, for the understanding and comprehension of this concept, it is a very relevant concept to the relation of variables in all the professional areas of knowledge and professional practice. This paper will show the followed steps used to investigate about the didactic and academic difficulties of that concept, main input of the didactic unit, it's made to support the differential calculus class, answering to the discovery made taking into account the conditions of telepresence own to the Mathematics courses that are offered nowadays in the university,

Keywords: Real functions, Math theaching, E-learning

Contenido

Introducción

Durante los tres años y medio que tiene el programa PEAMA en la Universidad Nacional de Colombia sede Amazonia se ha visto un muy bajo rendimiento académico en la asignatura de cálculo diferencial reflejado en un alto índice de repitencia del curso de Cálculo Diferencial, lo mismo que en el número de estudiantes que entran en retiro académico sin que puedan concluir sus estudios profesionales en las áreas de Ciencias Económicas, Ciencias Básicas e Ingeniería y en las dificultades que presentan en los cursos posteriores.

Por este motivo se hizo indispensable hacer una reflexión y un estudio exploratorio de los obstáculos y dificultades que están presentando los estudiantes para abordar las temáticas y conceptos que se proponen dentro del programa de cálculo diferencial; por tal motivo se decidió trabajar el problema de enseñanza y aprendizaje del concepto de función, como parte esencial del desarrollo curricular de los programas de Matemáticas a nivel superior.

Para estudiar los obstáculos de aprendizaje de dicho concepto se contemplaron los siguientes aspectos:

1) Las dificultades históricas y epistemológicas que él ha presentado, dificultades que de una u otra manera, reflejan cambios en el pensamiento del ser humano y a los cuales el estudiante deberá enfrentarse a lo largo de su experiencia académica.

2) Las ideas previas que tiene el estudiante, se identificaron las construcciones que el estudiante había elaborado como consecuencia de su formación inicial alrededor del concepto de función puesto que estas ideas y construcciones deben convertirse en el punto de partida para los maestros que quieran orientar el proceso de formalización de dicho concepto.

3) Se identificaron las nuevas ideas que favorecen la comprensión y los posibles obstáculos que el estudiante está construyendo a partir de la información suministrada en este primer curso universitario de matemáticas, con el fin de aprovechar al máximo el trabajo que se ha realizado durante estos años.

Para estudiar las ideas previas que tienen los estudiantes se analizaron algunos trabajos y pruebas que se han guardado durante dos años; y que conjugadas con experiencias personales, sirvieron para realizar una prueba de entrada en el curso de cálculo diferencial seguida por otra a la terminación del capítulo correspondiente al tema de funciones reales.

Una vez estudiados los obstáculos mencionados, se creó una unidad didáctica orientada a apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje que se espera que responda a las necesidades específicas de los estudiantes y que también tenga en cuenta las condiciones de tele-presencia, ya que ésta constituye para los estudiantes un obstáculo adicional y requiere una adaptación que para muchos es lenta y exige destrezas adicionales que se supone ya se han adquirió o formado por fuera de la formación matemática universitaria y previamente a su iniciación como: mayor concentración, mas habilidad de lectura comprensiva, mejor comunicación para expresar sus ideas y más autonomía; todas estas destrezas que los estudiantes se demoran en adquirir son causa para que los estudiantes culpen al sistema de su fracaso y no tengan en cuenta las competencias con que ingresan a realizar los estudios superiores. Por esto la unidad didáctica que se diseñó pretende mayor acompañamiento, brindar más herramientas que le permitan al estudiante interactuar con el profesor, con los compañeros y con sus propias ideas, así la tele-presencia dejará de ser vista como un obstáculo y se mirará como una excelente herramienta para descentralizar los programas de educación profesional a lo largo de todo el país, ofreciendo a los jóvenes de las regiones apartadas de las grandes ciudades cursos de excelente calidad, asequibles y que contemplan diferentes mecanismos de comunicación.

1. El concepto de función

En este capitulo se realizará una breve descripción del concepto de función con el fin de contextualizar el problema, dar cuenta de las dificultades epistemológicas que presenta y de los grandes cambios de pensamiento que ha requerido a lo largo de la historia, para finalizar con una descripción del concepto tal cual se define y maneja actualmente.

1.1 El concepto de función a lo largo de la historia

Para mostrar las dificultades posibles en el ejercicio matemático por falta de precisión en los conceptos, en particular en el concepto de función, en este capítulo se tratará sobre un hecho que tuvo lugar en el siglo XVIII cuando matemáticos reconocidos de la época como D'Alembert, Euler, D. Bernoulli y Fourier enfrentaron el problema de las cuerdas vibrantes (Luzin, 1998). Antes, sin embargo, se hará un breve recorrido histórico por las dificultades epistemológicas que pasado la comunidad matemática y científica hasta esclarecer el concepto de función.

Primer momento

A pesar de haberse encontrado registros de tablas de cálculo de los babilónicos y gran número de problemas de aplicación resueltos, no se tiene certeza de que desde esos primeros momentos se hayan concebido conceptos como los de variable o el de función (Sastre, 2008).

En la matemática griega se puede identificar un primer obstáculo para que esto ocurriese. Predominaba el estudio de las proporciones que solo tenían sentido entre magnitudes de la misma naturaleza (longitud con longitud, área con área) lo cual no permitía evidenciar las relaciones que existen entre magnitudes de diferente tipo (Azcárate, 1989). Como segunda medida, la diferenciación que se hace entre número y magnitud, no permitía que los hechos en donde está presente el cambio o el movimiento, fueran estudiados de forma cuantitativa, aspecto fundamental para establecer la definición del concepto de función.

Durante la edad media

Siglos más tarde, durante la edad media, la comunidad científica cambia su forma de estudiar el mundo que lo rodea, surge la ciencia experimental con la que inicia el estudio cuantitativo del movimiento y da lugar a la aparición del concepto de variable. Más adelante, Nicolás Oresme (1323-1382) propone representar todo lo que varía mediante un segmento de recta y crea la teoría de latitudes. Se inicia así el camino a la representación gráfica de las funciones (Azcárate, 1989), hecho fundamental para entender y con ello definir el concepto de función.

La etapa de desarrollo: la edad moderna

Las ideas de Oresme no pueden dar origen al concepto de función principalmente por dos aspectos: 1) falta de un lenguaje apropiado, el cual surge en Italia con Viète (1540-1603) y la creación del álgebra simbólica; 2) falta de justificación experimental; trabajando hábilmente Galileo se centró en el estudio del movimiento y creó formas de medición que le permitieron establecer leyes entre magnitudes, dando lugar a relaciones funcionales.

Más tarde con el trabajo de Descartes surge la geometría analítica. De este trabajo resaltan cuatro hechos indispensables para esclarecer el concepto de función y, sobre todo, para definir su representación gráfica: 1) que una expresión en términos de x y y represente una relación de dependencia entre variables (Azcárate, 1989). 2) representar curvas con expresiones algebraicas determinó el modo de trabajo por mucho tiempo, identificando el concepto de función con el de ecuación algebraica. 3) se realiza una clasificación de las curvas en “geométricas” y “mecánicas”. 4) Se crea lo que hoy se conoce como coordenadas rectangulares.

En un esfuerzo por describir el movimiento aparecen los trabajos de Newton y Leibnitz que reflejan gran cambio en la forma de pensamiento y contribuyen definitivamente al desarrollo del concepto de función mediante el estudio de las series infinitas y la creación del cálculo, imponiendo el estudio de las funciones al estudio de su representación en series de potencia.

Debate sobre el término función

El término función aparece por primera vez en un trabajo de Leibnitz, pero es Jean Bernoulli quien primero lo define: “una función de x es una cantidad formada de manera cualquiera a partir de x y de constantes" (citado en Azcárate, 1989); de esto y a consecuencia del asunto las cuerdas vibrantes surge un debate entre Euler y D'Alembert; cada uno da significado diferente al término función, alejando de la física la discusión del problema de las cuerdas vibrantes y convirtiéndola en un problema técnico de las matemáticas: se hace posible que el término función abarque expresiones analíticas definidas a trozos y a curvas que no tenían descripción algebraica. El problema se resuelve años después con los trabajos de Fourier, Cauchy y Dirichlet.

El concepto de función se consolida

El problema de las cuerdas vibrantes consistía en responder a las preguntas, ¿Cómo se puede determinar o describir el movimiento de una cuerda tensa? Conociendo la longitud de la cuerda, su peso y la fuerza que la tensiona, ¿cuál es el tiempo de vibración de dicha cuerda?

El primero en atacar el problema es Taylor en 1717: propone la ecuación diferencial $y''=-n^2$; sin embargo, no puede dar la solución, muy seguramente porque no se tenía el símbolo "sin" para la función seno, es decir, no contaba con el lenguaje necesario que le permitiría formularla. Además es el primero en cometer el famoso error de suponer que existe una solución única y que para condiciones iniciales arbitrarias, cualquier otro movimiento de una cuerda vibrante debe tender a ella (Luzin, 1998). Un segundo intento lo realiza Johann Bernoulli (1727); estudia las vibraciones fundamentales en las que todos los puntos del sistema pasan por su posición de equilibrio en el mismo instante de tiempo. En un experimento ubicaba *n* masas iguales e igualmente espaciadas sobre una cuerda delgada, templada y horizontal, como resultado de las fuerza actuando en una partícula se tiene que esta es siempre proporcional a la distancia entre la partícula y su posición de equilibrio.

Daniel Bernoulli y el matemático Euler también estudian el problema y hallan resultados más generales (Luzin, 1998). Con otros experimentos de vibraciones elementales pueden concluir: la fuerza depende solo de la posición de la partícula; las vibraciones fundamentales son armónicas, es decir, i) el desplazamiento de la k-ésima partícula está dado por yk=fk cos(at), donde fk depende de la partícula y ii) todas las partículas tienen el mismo período T=2pi/a. Ninguno de ellos pudo expresar el movimiento de una partícula arbitraria solo en términos de vibración fundamental. Adicionalmente D. Bernoulli y Euler realizan el paso al límite sin mucha precaución; creían obvio que dada una propiedad para cualquier valor finito de n, continuaba valiendo cuando n tendía a infinito. Esto fue uno de los aspectos que D'Alembert critica del trabajo de Bernoulli y de Euler.

En 1747 D'Alembert en un escrito, cuyo principal objetivo es mostrar que hay infinitas soluciones al problema de la forma de movimiento de una cuerda vibrante, deduce la siguiente ecuación para una función y(x,t) que describe el movimiento de una cuerda vibrante de longitud l.

$$d^2y(x,t)_{tt}=d^2y(x,t)_{xx}$$

y construye las soluciones y(x,t)=F(x+t)+G(x-t) que con las condiciones de frontera y(0,t)=y(l,t), y(x,t)=F(x+t)+F(x-t) donde F es una función periódica e impar (Luzin, 1998).

Como critica a este trabajo, Euler propone una solución que dice ser más general, él afirma que si la velocidad inicial de la cuerda es cero y que si la forma inicial de la cuerda es y=f(x), la solución general está dada por y(x,t)=1/2f(x+t)+1/2f(x-t).

Aunque las dos soluciones son aparentemente la misma, la diferencia es enorme; quien primero se refiere esto es D'Alembert: critica fuertemente la interpretación de Euler sobre el término función. Argumenta que la forma más general que se puede dar de una cantidad que depende de x y de t es la que contiene todas las formas de la cuerda en una misma ecuación (Luzin, 1998). Refutando esto, Euler advierte que su solución mediante construcciones geométricas es independiente de la forma inicial y que su método es válido para describir el movimiento.

D'Alembert insiste en que las curvas geométricas descritas por Euler no pueden ser tratadas con las técnicas del cálculo diferencial. Interviene D. Bernoulli intentando la conciliación entre las dos aseveraciones. Pero, por no justificarla matemáticamente, solo obtuvo las críticas de ambos.

Euler y D'Alembert están de acuerdo en que una ecuación es la igualdad de dos expresiones analíticas y en que si toman iguales valores en un intervalo son idénticas. Pero como el término función tiene diferente significado la discusión continúa y en 1759 Lagrange se alía a Euler. Para una de sus curvas mecánicas divide el eje de abscisas en pequeñas partes iguales, levanta perpendiculares sobre las divisiones, crea una secuencia de puntos sobre la curva y busca una interpolación que pase por esos puntos. Luego, para obtener la fórmula de Euler, pasa al límite y obtiene la serie de Fourier, lo que habría finiquitado la discusión. Sin embargo, no la identifica pues estaba convencido de que cualquier función continua era infinitamente diferenciable y se podía expandir como serie de Taylor, excepto tal vez en un número finito de puntos (Luzin, 1998).

D'lambert critica cómo Lagrange hace el paso al límite y cómo usa las series divergentes; tras mucha discusión Lagrange acepta su error y el problema continua por más de veinte años hasta que finalmente Fourier dio los coeficientes para la serie trigonométrica; este trabajo también recibió críticas, en especial por el carácter local de la serie ya que su valor en un entorno no contiene información sobre su valor en un entorno diferente. Sin embargo, ese trabajo resonó en otros matemáticos como Dirichlet quien en 1829 tratando con rigor las condiciones de convergencia de la serie de Fourier clarificó el concepto de función, puso fin a la discusión del problema de cuerdas vibrantes y dio inicio a lo que hoy se conoce como análisis matemático.

A modo de conclusión se puede decir que el concepto de función no surge naturalmente: debe enfrentar un gran debate. Puede identificarse con una ecuación analítica o una curva trazada con regla y compás. Como se mostró, esto puede crear controversia, dejar ocultas soluciones a problemas de matemática aplicada o pura o conducir a errores. En analogía con lo ocurrido en el siglo XVIII, un estudiante que solo ha conocido funciones algebraicas en su vida escolar, rechazará las funciones trascendentes y aunque acepte las funciones trascendentes como funciones puede rechazar funciones difíciles (o imposibles) de graficar como la función de Dirichlet.

Esto genera entre los profesores de matemáticas un reto: generar en clase y entre los estudiantes la necesidad de construir correctamente el concepto de función puesto que actualmente todo el conocimiento del análisis se basa en él y los estudiantes no cuentan con el tiempo, la curiosidad ni el ánimo de reproducir más de un siglo de historia que le tomó a los matemáticos esclarecerlo.

1.2 El concepto de función en el cálculo

En esta sección se define el concepto de función tal y como se define en los libros de cálculo usados actualmente en la bibliografía del curso de cálculo diferencial de la Universidad Nacional Sede Amazonia y se harán unos comentarios sobre dificultades que surgen de dicha definición.

Definición: una ***función*** *f* es una regla que asigna a cada elemento *x* de un conjunto A exactamente un elemento, llamado *f*(*x*), de un conjunto B (Stewart, 2008); el conjunto A se llama

dominio de *f* y el subconjunto de B formado por todos los posibles valores *f*(*x*) se denomina ***rango, imagen o recorrido*** de *f*.

Si los conjuntos A y B son subconjuntos de los números reales la función se llama ***función real***.

Una función depende de tres cosas: el conjunto A, la regla de asignación y el conjunto B; de esta manera, si f y g son dos funciones que tienen la misma regla de asignación pero para f el dominio son los reales positivos y para g el dominio es el intervalo [0,1], se tiene que f y g son funciones diferentes; esto suele pasar desapercibido para la mayoría de los estudiantes, lo cual puede ocurrir ya que, inmediatamente después de las definiciones anteriores el ejercicio propuesto en textos y talleres es encontrar el dominio de algunas funciones, sugiriendo que si se conoce la regla de asignación queda totalmente determinada dicha función, lo cual es un error

Por ejemplo, la función $f(x)=x^2$ representa al área de un cuadrado de longitud x y es diferente a la función $g(x)=x^2$ que representa la cantidad de soldados que se pueden ubicar en una formación con x número de filas y x número de columnas. La primera tiene dominio $[0,\infty]$, pues no tiene sentido un cuadrado de longitud negativa, mientras que la segunda tiene dominio igual a los enteros no negativos pues no tiene sentido un número no entero de filas o columnas de personas. Para evitar esto se sugiere utilizar en el curso la siguiente definición:

Definición: dada una regla de asignación f se define el **dominio natural** como el subconjunto de números reales más grande para el cual la asignación f tiene sentido, es decir:

$$\text{Dominio natural de } f = \{x \in R \mid f(x) \in R\}$$

La siguiente definición que se le presenta a los estudiantes es la siguiente:

Definición: Si *f* es una función con dominio A, entonces la ***gráfica de f*** es el conjunto de todas las parejas ordenadas $(x,f(x))$ tales que x pertenece a A, es decir,

$$\text{Gráfica de } f = \{(x,f(x)) \mid x \in A\}$$

Dada esta definición, los textos guía sugieren ejemplos y ejercicios que la refuerzan, pero en las videoconferencias y talleres no existen estos ejercicios; así, muchos de los estudiantes tienden a confundirla y le asignan al punto de la gráfica un valor real, es decir, identifican el punto (x,f(x)), con el valor real f(x); esto se traduce en dificultades para comprender las propiedades de las funciones que se estudian posteriormente, por ejemplo, la definición de función inyectiva.

Definición: Se dice que una función f es una **función uno a uno** si nunca toma el mismo valor dos veces; es decir, $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$.(Stewart, 2008)

Ésta definición no se comprende cuando el punto (x,f(x)) se identifica con el valor real f(x) ya que en la gráfica los valores de $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ se ubican en lugares distintos aunque $f(x_1)$ y $f(x_2)$ sean iguales para $x_1 \neq x_2$. Así, el estudiante debe esperar a la llamada **prueba de la recta horizontal** para entender lo que es una función inyectiva. Los estudiantes que presentan esta dificultad nunca van a relacionar la definición con la propiedad que ésta tiene gráficamente.

Para facilitar la introducción de las propiedades de las funciones que se estudian en este primer capítulo del curso de cálculo diferencial como funciones inyectiva, sobreyectiva, par e impar y para realizar el estudio de transformaciones de funciones al sumar y multiplicar constantes, se sugiere que primero se haga una presentación de las diferentes funciones que se presentarán en el curso, para posteriormente clasificarlas y manipularlas correctamente.

2. Estudiantes del PEAMA sede Amazonia

Los estudiantes del Programa Especial de Admisión y Movilidad Académica, PEAMA, de la Universidad Nacional sede Amazonia hacen parte de los 6.118 jóvenes que, según el Ministerio de Educación Nacional, se gradúan en promedio como bachilleres al año en la región amazónica (Caquetá, Putumayo, Guainía, Vaupés y Amazonas); para ellos solo hay cinco programas públicos de educación superior: Universidad de la Amazonia, Universidad Pedagógica Nacional en La Chorrera y Puerto Asís con el programa CERES, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia acompañando las Escuelas Normales Superiores y Universidad Nacional de Colombia Sede Amazonia en Leticia.

Para ingresar a la Universidad los estudiantes aprobaron un examen de admisión; de acuerdo al puntaje obtenido en el examen, ocupan un puesto mediante el cual se les asignan turnos para elegir la carrera que desean estudiar de una lista que contempla de dos a seis cupos por carrera en diferentes facultades y sedes de la Universidad en la zona Andina: Bogotá, Medellín o Palmira. En la Tabla 2-1 se puede observar el número de estudiantes admitidos en cada periodo académico, según su procedencia.

Tabla 2-1: Estudiantes admitidos al PEAMA según procedencia en la Sede Amazonia

Periodo	**Procedencia**						**Admitidos**
	Amazonas	Vichada	Putumayo	Caquetá	Guainía	Otro	
2008 – 02							50
2009 – 02	36	1	2	0	0	0	39
2010 – 01	35	0	11	0	3	1	50
2010 – 02	61	0	7	3	0	0	71
2011 – 01	58	0	17	4	0	1	80

Datos suministrados por la Secretaría de la Sede y la Coordinación del PEAMA.

Los datos mostrados en la tabla reflejan la importancia del programa para la región: cada vez es mayor el número de jóvenes que hace parte de él y cada vez accede al programa un número mayor de jóvenes procedentes de diferentes departamentos.

Por otro lado se tiene conocimiento de una deficiencia en el proceso: los admitidos con menores puntajes corren riesgo de inscribirse en una carrera diferente a la que realmente quieren estudiar. Parte del bajo rendimiento académico puede deberse a este hecho.

2.1 Descripción del programa PEAMA sede Amazonia

El Consejo Superior Universitario de la Universidad Nacional de Colombia establece el Programa Especial de Admisiones y Movilidad Académica, PEAMA, en las Sedes de Presencia Nacional: Orinoquía, Amazonia y Caribe (Acuerdo 025 de 2007). En la Sede Amazonia se consolida con la Resolución 125 de 2008 dirigido a jóvenes residentes en los departamentos de Caquetá, Putumayo, Guainía, Vaupés y Amazonas.

El programa contempla tres momentos: primero, los estudiantes cursan materias de un ciclo común, en Leticia hasta completar un mínimo de créditos según la carrera a la cual ingresaron; terminada esta etapa, viajan a alguna de las sedes de la zona andina: Bogotá, Medellín o Palmira, donde terminan sus estudios. Por último, deben regresar a la Sede Amazonia a realizar el trabajo de grado o realizar, desde el lugar en el que se encuentren, un trabajo de grado que de alguna manera involucre la región amazónica.

El programa aplica dos tipos de pedagogía: presencial, dirigida por un profesor presente en el salón de clases, y tele-presencial, desarrollada simultáneamente en las otras sedes de frontera y en Bogotá, dirigida por un docente desde Bogotá y trasmitida por tele-conferencia. Bajo esta modalidad se dictan matemática básica, cálculo integral, cálculo diferencial, cálculo en varias variables, álgebra lineal, principios de química teórica, principios de química orgánica, programación de computadores, probabilidad y estadística fundamental, fundamentos de mecánica y fundamentos de física teórica. Aunque tienen la misma estructura, cada docente ha desarrollado su propia metodología.

2.2 Descripción del curso de cálculo diferencial

Al curso de cálculo diferencial corresponde la modalidad tele-presencial. Estos cursos se ofrecen simultáneamente para San Andrés, Arauca, Leticia y Bogotá, donde se encuentra el profesor; en los salones hay micrófono, parlantes, pantalla para compartir, escritrorio remoto y pantalla para observar las diferentes sedes conectadas a la videoconferencia.

Éste curso se ofrece en la Sede Amazonia desde el primer semestre de 2009, cuando asistieron 28 estudiantes; para el 2010, el curso de cálculo diferencial contaba con 27 estudiantes en el primer período y pasó a tener 64 en el segundo; el incremento se debe a un cambio de políticas: los estudiantes que cursaban matemáticas básicas aprobaran o no el curso, podían continuar con las siguientes asignaturas del área de matemáticas.

Esto influyó en el número de estudiantes repitentes; por ejemplo, en el segundo periodo de 2010 asistieron 64 estudiantes, 5 de ellos por segunda o tercera vez; para el siguiente período, de los 59 inscritos, 29 repetían por segunda, tercera o cuarta vez. En la siguiente tabla se observa un promedio del porcentaje de pérdida en las diferentes asignaturas del PEAMA por tele-presencia con corte al último período de 2010.

Tabla 2-2: Porcentaje de pérdida de asignaturas de tele-presencia en el área de matemáticas hasta el último período de 2010

ASIGNATURA	% pérdida
Matemáticas Básicas	81,3%
Cálculo Diferencial	74,1%
Cálculo Integral	63,0%
Algebra Lineal	44,4%

Los resultados indican que 81% de los estudiantes que pueden ver cálculo diferencial no están preparados académicamente para ello, pero deben inscribir la asignatura. A esto hay que sumar las dificultades pedagógicas que ha tenido el programa; la primera vez que se ofreció este curso, la Sede contaba con un auditorio que fue adaptado como aula TIC, ubicado junto a la cafetería; tiene grandes ventanales, está junto a un corredor de mucho tránsito; es un salón grande y las pantallas en que se proyecta el tablero remoto con las diapositivas son pequeñas; cuenta solo con dos parlantes y muchas veces lo que dice el profesor titular no es claro. Las clases se dictan a las 2:00 p. m. cuando en Leticia la temperatura es alta y no se cuenta con buen sistema de ventilación. En este salón se ofreció el curso hasta el segundo periodo de 2011, posteriormente la infraestructura de la Sede se amplió, incluyendo tres aulas TIC nuevas, mejor acondicionadas.

El material utilizado en el curso depende completamente del profesor; durante varios semestres el apoyo visual utilizado era un texto en pdf que se encuentra en el aula virtual de la Universidad, con contenidos muy bien explicados y muy completos pero, con letra muy pequeña y recargado de texto. Actualmente los profesores cuentan con diapositivas muy bien elaboradas, completas, claras, diseñadas para el curso por tele-presencia.

La metodología de las videoconferencias es magistral, sin interacción entre estudiantes y docentes titulares; mayormente éste se limita a preguntar si la comunicación está bien. Para contrarrestar esto, en cada aula fuera de Bogotá hay un tutor que ayuda a los estudiantes cuando algo no ha quedado claro y constituye un puente de comunicación entre los estudiantes y el docente titular; en la Sede Amazonia, los estudiantes tienen cuatro horas de trabajo con el tutor: dos en un aula de clase para resolver talleres y aclarar dudas que quedaron de la videoconferencia; y dos, a las que el estudiante es libre de acudir, para resolver dudas sobre los ejercicios pendientes; adicionalmente una vez al mes un docente de Bogotá viaja a la sede a trabajar con los estudiantes durante 8 horas en el fin de semana; es el encargado de las notas y de todo el proceso de evaluación.

La Evaluación se efectúa en varios momentos: primero son pequeñas pruebas realizadas durante las video conferencias; deben enviarse a Bogotá para revisión del profesor; algunos profesores prefieren una pronta retroalimentación y dejan esta responsabilidad a los tutores; un segundo momento son los parciales elaborados por el profesor de la video-conferencia y calificados por el docente que hace la visita; así estas pruebas también viajan a Bogotá y la retroalimentación es muy lenta; en ocasiones el semestre termina y los estudiantes no han visto ninguno de sus parciales; un tercer momento es cuando el docente de Bogotá viaja a la sede y realiza pruebas cortas y se resuelven talleres; para estas últimas suele demorarse un mes la retroalimentación.

Los estudiantes de cálculo diferencial tienen muchos momentos ante un docente, poco tiempo de estudio individual y retroalimentación muy lenta y por tanto insuficiente para ayudarles a mejorar su rendimiento académico; por ello se requiere crear mecanismos de comunicación entre los estudiantes y los docentes de Bogotá; pero sobre todo crear formas de apoyo al estudio individual que cada uno de los estudiantes debe hacer a fin de crear hábitos de estudio y obtener retroalimentación rápida y útil para cada uno.

3. Dificultades de conocimiento

En este capítulo se muestran las dificultades específicas del área de matemáticas que presentan los estudiantes del PEAMA de la Universidad Nacional de Colombia sede Amazonia. Para su estudio se recopilaron trabajos y pruebas cortas realizadas a los estudiantes del curso de cálculo diferencial ofrecido por la sede, desde el segundo semestre de 2009 al primer semestre de 2011; también se realizaron dos encuesta: una, en la primera semana del primer semestre de 2011 y otra, un mes después de iniciado el curso cuando ya había culminado el tema correspondiente a funciones.

3.1 Dificultades encontradas en el trabajo diario de los estudiantes

Este tipo de trabajos realizados por los estudiantes se refiere a ejercicios en clase, pruebas cortas de cinco minutos y tareas propuestos por el docente titular y el tutor.

Para la exposición se unen las dificultares en grupos: 1. Conocimiento del conjunto de los números reales y los diferentes sistemas numéricos. 2. Dificultades para entender la definición de función y de algunas de sus propiedades. 3. Dificultades con la notación.

1. Conocimiento de los números reales y los diferentes sistemas numéricos.

Una de las dificultades que se observa en los estudiantes referente al conocimiento del conjunto de los números reales se refiere a las propiedades de orden, donde no solo se ve gran vacío en el manejo de tales propiedades, sino que se refleja en gran dificultad para ordenar de menor a mayor una lista de números y ubicarlos en la recta numérica.

Por ejemplo, en un ejercicio de clase elaborado el segundo semestre de 2008 se pedía ordenar de mayor a menor una lista de números; solo 60% de los estudiantes lograron hacerlo correctamente; dentro del 40% restante fue evidente que entre las dificultades se encontraba la falta de argumentos para comparar un número racional finito con un número racional infinito o irracional ubicados entre los mismos enteros consecutivos; se generaba un nivel de dificultad mayor al comparar racionales escritos en forma decimal con cocientes de enteros, sin importar que estaban entre dos enteros consecutivos; y aun la dificultad era mayor frente a dos racionales escritos como cociente de enteros con denominadores diferentes. Estas dificultades pueden deberse a falta de comprensión del valor posicional de las cifras en la escritura de números decimales y a falta de significado en la escritura de un racional como cociente de enteros en diferentes contextos.

La propiedad de densidad de los reales es conocida por los estudiantes como una definición que se aprenden de memoria pero es evidente que la mayoría no comprende su significado puesto que en muchas oportunidades cuando van a referirse al conjunto de números reales mayores que un entero se refieren a los números reales mayores o iguales a a+1, y cuando se pide encontrar un número real comprendido entre otros dos, es evidente que no han creado ninguna estrategia que les permita hacerlo, pues durante las clases si se pide hacer este ejercicio solo uno o dos estudiantes lo logran; los demás no dan ningún tipo de respuesta. Nuevamente en este tipo de ejercicio se identifican diferentes niveles de dificultad. En forma ascendente pueden clasificarse así: 1. Si en el ejercicio se pide hacerlo con números racionales escritos en forma decimal, 2. Si se pide realizar el ejercicio con números irracionales escritos en forma decimal, y 3. Si se enuncia con números racionales escritos como cociente de enteros.

Otra de las propiedades de orden donde los estudiantes presentan dificultades es la completitud de los números reales, conocida por ellos como una “correspondencia” con la recta, pero es evidente que esta propiedad no les es clara; la correspondencia que elaboran entre los reales y la recta es entre los racionales y la recta: es evidente cuando muestran insatisfacción al llegar a una respuesta irracional como $\sqrt{2}$ y necesitan seguir operando o buscan con desespero la calculadora para obtener un número; se sienten mucho mejor al ver alguna aproximación racional en lugar de la respuesta correcta.

El tipo de dificultad hasta aquí no genera problema directo para comprender la definición de función, pero sí dificultará enormemente el trabajo buscado con las funciones reales.

Otras de las dificultades que se pueden mencionar en este grupo están en el manejo de las propiedades de las operaciones entre números reales; son evidentes cuando calculan el resultado de una expresión en la calculadora; o cuando omiten paréntesis o escriben más paréntesis de los necesarios y no pueden obtener el valor numérico de una expresión dada; cuando en clase la pregunta más frecuente es “¿esto se puede cancelar?”; y por supuesto son evidentes cuando trabajan con ecuaciones y desigualdades donde aparecen letras representando números reales (ver gráfica 3-8).

2. Dificultades para entender la definición de función y de algunas de sus propiedades.

La definición de función se muestra a los estudiantes desde el primer día de clase como la correspondencia entre un conjunto X y un conjunto Y para los cuales a cada *x* en X se le asigna uno y solo un elemento *f(x)* en Y; luego se les dice que en el curso los conjuntos X y Y son subconjuntos de los números reales. La primera dificultad para comprender esta definición se esconde detrás de la palabra “asigna” ya que para muchos esta palabra implica tener un número al cual hacer operaciones aritméticas para encontrar su imagen; algunos muestran también que la palabra “asigna” significa hacer operaciones con la calculadora; esto deja por fuera la posibilidad de estudiar y comprender muchas de las funciones consideradas a lo largo del curso. Otra dificultad está en las palabras “uno y solo uno” pues justificar que una función lo es requiere armar un argumento en el que se niega una implicación y esto es tremendamente difícil, incluso en su lenguaje diario.

Rápidamente se introduce la definición de gráfica de una función lo que ayuda mucho a los estudiantes para esclarecer el sentido de las palabras “uno y solo uno” presentes en la definición de función; los estudiantes captan fácilmente la prueba de la recta vertical; sin embargo, aparecen otras dificultades: muchos no hacen corresponder *f(x)* con un punto sobre la recta, es decir, con un número real, sino con un punto de la gráfica, es decir, con un punto en el plano de dos coordenadas. Entonces, las propiedades de las funciones que forman parte del curso (inyectividad, sobreyectividad, periodicidad, paridad, crecimiento, tendencia e incluso continuidad) se identifican solo gráficamente y si el estudiante no hace la gráfica de la función no podrá determinar sus propiedades. Esto lo coloca frente a un círculo vicioso: no puede estudiar las propiedades de una función si no conoce su gráfica y no puede graficarla porque no conoce sus propiedades.

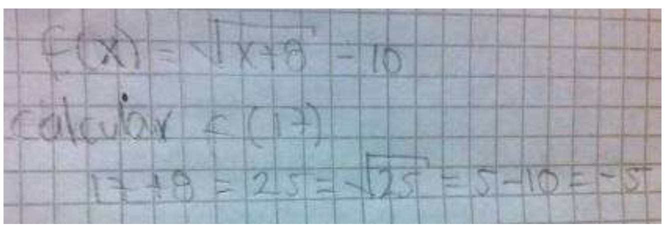
Entre las dificultades que tienen los estudiantes al graficar algunas funciones está la mala escogencia de la escala de trabajo; más del 90% de los estudiantes gradúa los dos ejes con la misma escala y muy rara vez la escala elegida es diferente a la unidad; como trabajan en cuaderno cuadriculado, la porción de gráfica disponible para estudiar es muy pequeña y en muchas ocasiones no permite observar las propiedades.

3. Dificultades con la notación.

La primera dificultad que se va a mencionar es tal que no solo dificulta la comprensión del concepto de función sino la comprensión de cualquier idea matemática porque se refiere al uso de uno de los símbolos más frecuente en definiciones, razonamientos y expresiones: el signo “=”. El uso de este signo en matemáticas está reservado para indicar que dos expresiones son equivalentes; sin embargo, los estudiantes fácilmente le otorgan diferentes atributos: como signo de puntuación, para indicar implicación y, en el caso específico de las funciones, también lo asocian con una acción u operación.

Por ejemplo, en la **Gráfica 3-1**. se ve el uso del signo “=” como signo de puntuación que separa las frases escritas, haciéndole perder por completo su verdadero significado

Gráfica 3-1: Uso del signo “=” como signo de puntuación

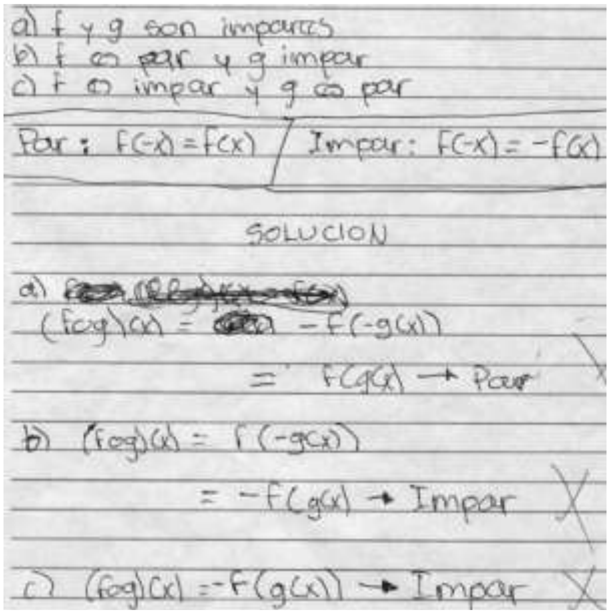


En la **Gráfica 3-2**. se puede observar cómo el estudiantes usa el signo “=” señalado en rojo para indicar una consecuencia o implicación

Gráfica 3-2: Uso del signo “=” como implicación

Y, por último, en la **Gráfica 3-3** se aprecia que el “=” se asocia a una acción; en este ejercicio se pedía decidir si la función *f* ° *g* era par, impar o ninguna de las dos dado que *f* y *g* eran funciones impares. Aquí no hay problema en recordar la definición de función impar, pero en $f(-x) = -f(x)$, el signo de igualdad permite escribir un signo menos junto al nombre de la función cambiándole el significado al signo de igualdad por completo.

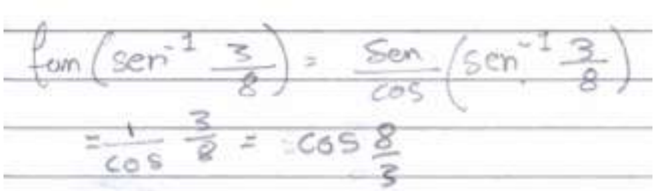
Grpafica 3-3: Uso del = asociado a una acción



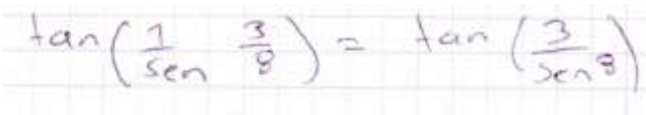
Otra dificultad de notación presente con gran frecuencia está asociada al signo "–"; se usa para indicar el opuesto de un número, es decir, -2 indica el número que sumado con 2 es 0, –x indica el número que sumado con x es 0. Para los estudiantes no tiene este significado; según el contexto este significado puede variar: para ellos, en una expresión algebraica representa una operación y por esto cometen errores en los cálculos al simplificar expresiones y en especial manejando ecuaciones; pero en definiciones como la de valor absoluto o la de función par, el signo – representa una cantidad negativa; así el significado de estas definiciones no tiene sentido para estos estudiantes.

Otra que se encuentra comúnmente entre los estudiantes está asociada con la notación *f(x)*: pareciera significar que *f* multiplica a *x*. Este problema se observa especialmente cuando se trabaja con funciones trigonométricas exponenciales y logarítmicas como se puede observar en las **Gráficas 3-4, 3-5, 3-6, 3-7 y 3-8.**

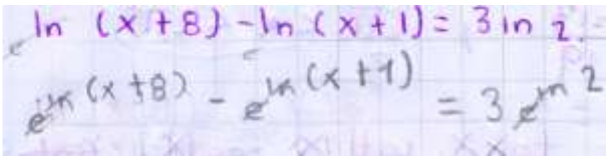
Gráfica 3-4: Dificultad con la notación f(x) en funciones trigonométricas



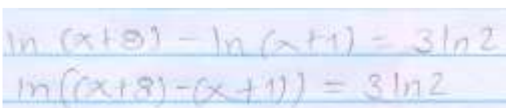
Gráfica 3-5: Dificultad con la notación f(x) en funciones trigonométricas



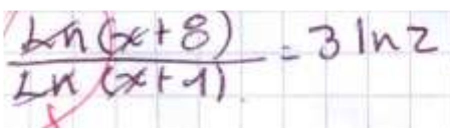
Gráfica 3-6: Dificultad con la notación f(x) en funciones exponenciales



Gráfica 3-7: Dificultad con la notación f(x) en funciones logarítmicas



Gráfica 3-8: Dificultad con la notación f(x) en funciones logarítmicas y en operaciones entre números



Un último tipo de dificultad que se identificó que tienen los estudiantes se refiere al uso de la notación; se da cuando tratan de usar la notación de conjuntos o de intervalos, especialmente en relación con el conjunto vacío; es común ver que escriben {ϕ} para referirse a él, {R} para referirse al conjunto de los números reales; debido a las dificultades para comprender el orden de los números reales usan mal la notación de intervalos.

3.2 La prueba de entrada

Teniendo en cuenta las dificultades mencionadas se planteó la prueba de entrada que se realizó después de la primera sesión de clase por video-conferencia en que se introdujo y trabajó el tema de funciones reales. Esta prueba se puede ver en el **Anexo C.** Analizando las respuestas obtenidas pregunta a pregunta se puede observar lo siguiente:

En la primera pregunta (ver Anexo C) se quería indagar sobre tres aspectos: 1) la habilidad para reconocer el dominio y el recorrido de una relación por observación de la gráfica. 2) la forma en que expresan sus ideas, usando el lenguaje natural y el lenguaje propio de las matemáticas y 3) la habilidad para reconocer la gráfica de una función a partir de su definición.

Cerca del 50% de los estudiantes encuestados reconocieron el dominio y el recorrido de una relación por observación de la gráfica, pero tuvieron muchos problemas para escribir correctamente sus respuestas; solo uno usó el lenguaje natural y lo hizo para expresar la definición de dominio y rango, pero no para describir el dominio y el recorrido de cada una de las relaciones dadas. Sus palabras fueron: "*El dominio es el conjunto de valores que puede llegar a tomar x. El recorrido, imagen o rango de una relación son los valores que puede llegar a tomar el eje y*". Los demás estudiantes usaron la notación de conjuntos y de intervalos; algunos las confundieron o utilizaron de forma errada, es decir, algunos escribían {0,3} para el intervalo (0,3) o el intervalo [0,3]; el error más común se encontró cuando querían referirse al conjunto de los números reales, que notaban como {R} o {x:R}, o para los reales no negativos {x: R [0,inf)}.

Alrededor del 50% reconoció la relación que era función por observación de la gráfica; los pocos que justificaron su respuesta aludían a la palabra función y algunos justificaron su respuesta refiriéndose a lo que puede ocurrir si se traza una recta paralela al eje vertical. Las repuestas equivocadas no tienen justificación o repiten el enunciado de la pregunta.

La segunda pregunta deseaba explorar sobre tres habilidades y destrezas: 1) para completar la tabla que registra las variables de una situación específica; 2) para identificar la gráfica que representa los datos y 3) para reconocer la expresión algebraica que puede representar la relación entre variables de una tabla de datos y una gráfica determinada.

Para elaborar la tabla hubo muchas dificultades; solo 18% de los encuestados la planteó correctamente, pero algunos tuvieron errores en las operaciones; 18% dejó la tabla en blanco y dentro del 64% restante, cerca de la mitad la completó multiplicando por 4 el resultado anterior, extrapolando la relación existente entre los dos datos provistos en la pregunta, ignorando la situación representada; otro grupo la hizo multiplicando 12 por los números pares, lo que indica que pueden estar confundiendo la operación de elevar al cuadrado con multiplicar por dos ya que cada vez duplicaba el resultado anterior; otro grupo completó la tabla usando formulas de recurrencias a_{n+1}=12x3+a_n o a_{n+1}=2xa_n, u otras fórmulas a_n=12x(n+2).o a_{n+1}=12xn!x2. Cada respuesta se encontró más de una vez, lo que indica que la búsqueda de valores para llenar la tabla no fue aleatoria y que existe gran dificultad para comprender enunciados cortos y, en especial, que no se manejan la noción básica de área.

Cuando se pidió elegir la gráfica que mejor representaba los datos el 65% eligió la opción correcta; pero debido a la gran dificultad para elaborar la tabla, en su gran mayoría eligieron la gráfica que representa la situación justificando un comportamiento de crecimiento rápido del área de la figura, al aumentar el tamaño del cuadro y descartaron las demás opciones. Entre los estudiantes que hicieron bien la tabla se encontró que justificaban su elección diciendo que punto a punto la gráfica coincidía con los datos.

En las justificaciones se aprecia mal manejo de algunos de los conceptos como los de constante, proporción y crecimiento exponencial

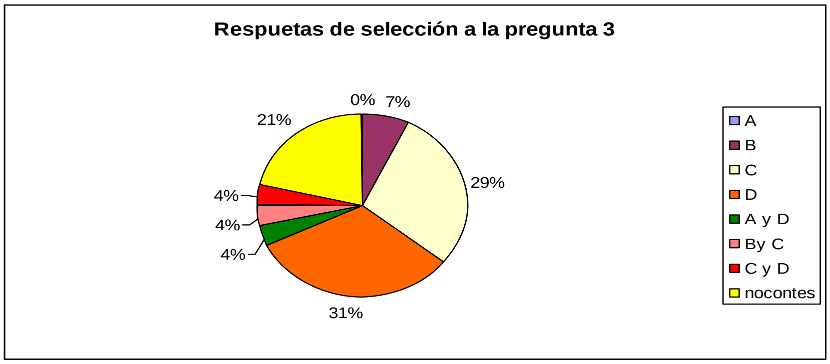
Cuando se pidió elegir la expresión algebraica que puede representar la situación planteada en la tabla o en la gráfica la mayoría (53%) no contestó; el 29% marcó la respuesta E, opción incorrecta ya que corresponde a la forma general de la función exponencial pero que es coherentes con el rápido crecimiento expresado por ellos en las respuestas y justificaciones de la pregunta anterior

La pregunta 3 se exploró: 1) la habilidad para reconocer el dominio y el rango de unas relaciones expresadas mediante fórmula y 2) la habilidad para reconocer una función a partir de la definición, si esta se expresa mediante una fórmula, junto con las estrategias usadas para llegar a la respuesta o tomar la decisión.

Se vieron grandes dificultades para encontrar el dominio y el rango; contrario a lo que se esperaba, ninguno de los estudiantes hizo la gráfica de las relaciones para responder la pregunta. Solo en la relación A ($x^2+y^2=1$), algunos mostraron un procedimiento intentando responder y todos acudieron al álgebra y en el razonamiento planteado se evidencian múltiples errores. La gran mayoría no dio respuesta alguna con respecto al rango.

Los resultados en el ítem selección de la pregunta tres, se observan en la **Gráfica 3-9.**

Gráfica 3-9: Respuestas de selección múltiple a la tercera pregunta



Nuevamente, un alto porcentaje no responde (21%); el 29% contesta correctamente: muchos justifican su respuesta expresando que escogieron por descarte pero sin revelar el motivo por el cual las otras opciones no pueden ser correctas; dos dicen escoger esta opción por su gráfica pero no hacen la gráfica de la función; la mayoría elige la respuesta D y entre las justificaciones está nuevamente descarte sin explicación; en algunos casos la presencia de las barras de valor absoluto es suficiente motivo para llamarla función valor absoluto y por esto la eligieron como respuesta correcta. Llama la atención el mal manejo algebraico de las potencias y su confusión con la función exponencial.

Tabla 3-3: Respuestas de los estudiantes a la cuarta pregunta de la prueba de entrada

Situación	Número de estudiantes que identifica el error correctamente	Número de estudiantes que dice que el procedimiento es correcto	Número de estudiantes que encuentra error en donde no lo hay
I	3	8	5
II	1	8	1
III	1	8	5
IV	1	8	1

Con la cuarta pregunta se quería explorar la habilidad para identificar los errores más comunes en la manipulación de funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas y el conocimiento sobre sus propiedades básicas. Las preguntas se plantearon teniendo en cuenta los errores más comunes que suelen cometer los estudiantes, así que era de esperarse que no muchos identificaran el error; sin embargo, sorprende que algunos encontraron errores donde no los había. Más adelante se tratará sobre cada uno de ellos.

Muy pocos identificaron correctamente el error en cada una de las situaciones, como se ve en las **Tablas 3-3, 3-4a, 3-4b, 3-4c, 3-5, 3-6a, 3-6b**; cerca de la mitad no contestó la pregunta y de los que lo hicieron, la gran mayoría dijo que el procedimiento era correcto

En la **Tabla 3-4a** se puede ver que los estudiantes reconocen que de alguna manera la función logaritmo relaciona diferencia con cociente, pero no tiene clara la relación.

Tabla 3-4a: Primer error mencionado por los estudiantes a la cuarta pregunta de la prueba de entrada. Situación I

Pregunta	Respuestas de los estudiantes
$\ln(3x)-\ln(2x)=1$ $\ln(3x-2x)=1$ $\ln(x)=1$ $e^{\ln x}=e^{1}$ $x=e^{1}$	-En el segundo reglón debería decir $\ln(3x)-\ln(2x)=1$ $\frac{\ln(3x)}{\ln(2x)}=1$ - La resta de logaritmos es igual a la división de logaritmos

Tabla 3-4b: Segundo error mencionado por los estudiantes a la cuarta pregunta de la prueba de entrada. Situación I

Pregunta	Respuestas de dos estudiantes
$\ln(3x)-\ln(2x)=1$ $\ln(3x-2x)=1$ $\ln(x)=1$ $e^{\ln x}=e^{1}$ $x=e^{1}$	- Hasta antes de la línea cuatro la ecuación se estaba llevando bien - Euler no aplica para logaritmo natural

Los estudiantes que señalan el error que se puede ver en la **Tabla 3-4b**, al igual que los que señalan que el procedimiento es correcto, entiende la notación de logaritmo como una especie de “producto” entre ln y su argumento; pero adicionalmente, este estudiante no entiende la relación entre la función logarítmicas y la función exponencial.

Con respuestas como la de la **Tabla 3-4c**, se puede pensar que el estudiante quiere hallar un valor para ln entendido como una variable con ese nombre y no como el nombre de la función logaritmo, olvidando que el objetivo es hallar el valor que puede tomar x.

Tabla 3-4c: Tercer error mencionado por los estudiantes a la cuarta pregunta de la prueba de entrada. Situación I

Pregunta	Respuesta del estudiante
$\ln(3x)-\ln(2x)=1$ $\ln(3x-2x)=1$ $\ln(x)=1$ $e^{\ln x}=e^1$ $x=e^1$	Falta despejar y solucionar el ln

En la **Tabla 3-5** es evidente que los estudiantes no han creado ninguna estrategia para resolver ecuaciones y que confunden la notación; entienden ln como una variable que se puede cancelar como si fuera un factor y no como el nombre de la función logaritmo.

Tabla 3-5: Error mencionado por el estudiante a la cuarta pregunta de la prueba de entrada. Situación II

Pregunta	Respuestas de lo dos estudiantes
$\ln(6x^2)=\ln(3x)$ $\frac{\ln(6x^2)}{\ln(3x)}=1$ $\frac{6x^2}{3x}=1$ $2x=1$ $x=\frac{1}{2}$	No se puede establecer la igualdad $\frac{\ln(6x^2)}{\ln(3x)}\neq 1$

En la situación III es sorprendente que ningún estudiante resaltó que en el procedimiento expuesto no se encontrara el valor de x que hace verdadera la primera afirmación; ello indica que para los estudiantes el objetivo de este tipo de ejercicios no es claro.

Tabla 3-6a: Primer error mencionado por los estudiantes a la cuarta pregunta de la prueba de entrada. Situación III

Pregunta	Respuestas de lo dos estudiantes
$\sin(\pi x) = \cos(x)$ $\frac{\sin(\pi x)}{\cos(x)} = 1$ $\tan(\frac{\pi x}{x}) = 1$ $\tan\pi = 0$	- Porque viene siendo igual a 1 termina siendo igual a 0 - Cambia el valor después del igual - $\tan\pi = 1$

El razonamiento que se refleja en la **Tabla 3-6a** deja ver el poco conocimiento que tienen sobre las funciones trigonométricas puesto que, como ocurrió con la función logarítmica, los nombres de las funciones son para ellos una especie de “variable” que se puede factorizar y remplazar sin tener en cuenta el argumento de cada una. Además no reconocen el valor que toman al evaluarlas en ángulos típicos.

La respuesta que se observa en la **Tabla 3-6b** refleja insuficiente conocimiento de las propiedades de los números reales: no señala la posible dificultad de dividir por cero sino la presencia de un factor, el 1, que como no está escrito en el reglón anterior no existe.

Tabla 3-6b: Segundo error mencionado por los estudiantes a la cuarta pregunta de la prueba de entrada. Situación III

Pregunta	Respuestas de lo dos estudiantes
$\sin(\pi x) = \cos(x)$ $\frac{\sin(\pi x)}{\cos(x)} = 1$ $\tan(\frac{\pi x}{x}) = 1$ $\tan\pi = 0$	- Porque no se puede pasar a dividir y que la igualdad sea 1 - $\frac{\sin(\pi x)}{\cos(x)} \neq 1$

Nuevamente en la **Tabla 3-7** se ve como los estudiantes entienden la notación de función como un producto entre el factor sec, nombre de la función y x, su argumento.

Tabla 3-7: Error mencionado por los estudiantes a la cuarta pregunta de la prueba de entrada. Situación IV

<table>
<tr><td>Pregunta</td><td>Respuestas de los estudiantes</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\sec(x) - \sec(5x^2) = 0$
$\sec(x) = \sec(5x^2)$
$\frac{\sec(x)}{\sec(5x^2)} = 1$
$\frac{x}{5x^2} = 1$
$1 = 5x$
$x = \frac{1}{5}$</td><td>- No se puede eliminar el secx ya que ahí esta presente otro factor</td></tr>
<tr><td>- $\frac{\sec(x)}{\sec(5x^2)} \neq 1$</td></tr>
</table>

3.3 Segunda prueba

La primera pregunta indaga sobre tres aspectos: 1) la habilidad para reconocer el dominio y el recorrido de una relación por observación de la gráfica. 2) la forma en que expresan sus ideas, usando el lenguaje natural y el lenguaje propio de las matemáticas y 3) la habilidad para reconocer la gráfica de una función a partir de su definición. Adicionalmente a los aspectos tratados en el análisis de la prueba de entrada, en la segunda se quiere identificar la noción de función creciente y decreciente que tienen los estudiantes, porque en la primera usaron este término para justificar sus ideas.

Nuevamente, cerca del 50% de los estudiantes reconocieron el dominio y el rango de las relaciones, pero con menos problemas en el manejo del lenguaje para expresarse; el error más común se presentó al escribir intervalos; por ejemplo (1,0) en vez de (0,1).

El número de estudiantes que reconoce gráficamente las funciones aumentó de 57% a 80% y, aunque muchos justifican correctamente, también muchos confunden la definición de función con la de función inyectiva o sobreyectiva; esto se refleja en las siguientes frases con las que justifican por qué algunas relaciones no son funciones:

- “Porque existen X que tienen el mismo f(x)”
- “No es 1-1 y si trazamos una línea horizontal hay puntos donde no la tocaría”

Sobre la noción de crecimiento de una función se concluye que no la tienen clara; cerca del 50% no contestó las preguntas sobre este aspecto y solo 15% lo hizo correctamente; además, establecen intervalos de crecimiento donde la función no esta definida.

En la segunda pregunta se exploró sobre tres habilidades y destrezas: 1) para completar la tabla que registran las variables de una situación específica; 2) para identificar la gráfica que representa los datos y 3) para reconocer la expresión algebraica que puede representar la relación entre variables de una tabla de datos y una gráfica determinada.

Como antes, al elaborar la tabla hubo muchas dificultades; solo 3 lo hizo correctamente dentro del 62% que realizó algún procedimiento. Como en la primera encuesta, los resultados presentados no son coherentes con lo planteado. Es evidente la dificultad para hallar el área de un rectángulo: usaban la fórmula del área de un triángulo. También tuvieron mucha dificultad para comprender el sentido de la fracción en ese contexto.

En la pregunta que pedía elegir la gráfica que representa la relación, solo uno de los que hicieron bien la tabla eligió un modelo lineal y lo justificó correctamente porque ninguna de las opciones era adecuada; otro dijo que ninguna opción era adecuada, pero no justificó su respuesta; el tercero escogió un modelo diferente y, aunque dijo que los valores no coincidían con los mostrados en la gráfica cuadrática, ésta sería su forma.

Entre quienes no llenaron la tabla o la llenaron de forma incorrecta se puede ver que, otra vez, la elección del modelo se hacía por descarte: cerca del 35% escogió como modelo el que mostrara mayor crecimiento e incluyera el tiempo como variable independiente; los pocos (26%) que eligieron un modelo lineal muestran mal manejo del término constante.

Los que no eligieron ninguna expresión para representar la gráfica disminuyeron un poco: pasaron de 53% a 39%. Un buen porcentaje, 42%, eligió el modelo lineal. Sin embargo, presentan dificultades al expresar las ideas: manifestaron que la variable x representaba la pendiente de la recta, queriendo decir que el coeficiente de x representa la pendiente

La pregunta 3 quería explorar: 1) la habilidad para reconocer el dominio y el rango de unas relaciones expresadas mediante fórmula y 2) la habilidad para reconocer una función a partir de la definición, si esta se expresa mediante una fórmula, junto con las estrategias usadas para llegar a la respuesta o tomar la decisión.

Las respuestas de los estudiantes a esta pregunta se observan en la **Tabla 3-8**

Al igual que en la primera prueba, el porcentaje que no contesta las preguntas es alto, en especial para las relaciones I y II en donde se esperaba alto nivel de respuesta, dado su bajo nivel de dificultad. A medida que aumenta un poco el nivel de dificultad, los argumentos son cada vez más superficiales y, nuevamente, únicamente con la presencia de un símbolo que se asocia a una función (como las barras de valor absoluto o el logaritmo) son suficientes para justificar que la relación planteada es una función.

Tabla 3-8: Respuestas a la tercera pregunta de la segunda prueba

Expresión	$x+y=4$		$x^2-y=1$		$\|x+y\|=1$		$y=\sqrt{(-x)}$	
	Correcto	No contesto	Correcto	No contesto	Correcto	No contesto	Correcto	No contesto
Dominio	15	9	14	9	12	10	7	7
Rango	11	12	2	9	4	11	5	9
Es función (s/n)	15	7	15	9	4	10	12	8

Expresión	$\sqrt{(x^2+y^2)}$		$y \ln x=e^4$	
	Correcto	No contesto	Correcto	No contesto
Dominio	7	7	0	15
Rango	5	10	2	15
Es función (s/n)	5	7	13	11

En la pregunta 4, como en la prueba de entrada, se explora la habilidad para Identificar los errores más comunes en el manejo de funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas y el conocimiento de sus propiedades básicas

Las respuestas a esta pregunta (**Tabla 3-9**) no son muy diferentes de las encontradas en la prueba de entrada,, aunque se puede observar un pequeño incremento en el número de quienes contestan la pregunta y de quienes la contestan correctamente y un leve decrecimiento en el número de quienes dicen que no se encuentra error; siguen siendo muy pocos los estudiantes que pueden resolver esta pregunta satisfactoriamente

Con base en estos resultados puede decirse que las dificultades de los estudiantes para comprender el concepto de función y afrontar con éxito un curso de cálculo diferencial son tan grandes, que es necesario mucho más tiempo del estipulado en el programa y mucho más estudio individual por parte de los estudiantes; que las actividades planteadas y la manera de presentar los contenidos no están siendo eficientes para apoyar a los estudiantes en su proceso de aprendizaje. También es claro que para la mayoría de los estudiantes la forma en que se abordan los temas y los ejercicios planteados para este capítulo no inducen cambios significativos de pensamiento y por lo tanto se hace indispensable la elaboración de material didáctico completo, de fácil acceso y rápida retroalimentación.

Tabla 3-9: Respuestas a la cuarta pregunta de la segunda prueba

Situación	Número de estudiantes que identifica el error correctamente	Número de estudiantes que dice que el procedimiento es correcto	Número de estudiantes que señala el error pero no lo identifica correctamente	Número de estudiantes que encuentra error en donde no lo hay
I	3	7	5	3
II	4	3	5	3
III	4	2	6	4
IV	1	4	10	0

4. La unidad didáctica

4.1 Planteamiento general

El objetivo de la unidad es ayudar al estudiante a entender, construir y utilizar el concepto de función partiendo de su representación gráfica, pues como se mostró atrás, desde ella los estudiantes identifican más fácilmente cada una de sus características.

Esta unidad didáctica no pretende remplazar las cuatro horas semanales de clase por videoconferencia, sino apoyar y guiar al estudiante en las ocho horas semanales de estudio independiente que debe dedicar a su aprendizaje.

De acuerdo a lo expuesto, esta serie de ejercicios se divide en cuatro partes fundamentales: 1. Conocimientos preliminares 2. Tablas, gráficas y construcción de modelos. 3. Funciones y modelos. 4. Propiedades de las funciones.

Los conocimientos preliminares comprenden: propiedades de orden y densidad de los números reales y su graficación; plano real y lectura y análisis de graficas; distancia entre puntos de la recta (valor absoluto) y su graficación; propiedades algebraicas de los números reales, desigualdades y representación gráfica del conjunto solución.

Como fue evidente en el estudio histórico del concepto de función, uno de los motivos de porqué en la edad media no se pudo establecer el concepto de función fue la falta de lenguaje apropiado; algo similar ocurre con los estudiantes que suelen tener muchas dificultades con el lenguaje y, sobre todo, con la notación f(x) a la cual muchas veces le atribuyen propiedades lineales “heredadas” del trabajo hecho en álgebra de polinomios.

Por esto antes de abocar el concepto de función, conviene tener claras las propiedades algebraicas de los números reales. De acuerdo al estudio realizado por Socas, Camacho, Palarea y Hernández en su libro “*Iniciación al Álgebra*” una de las principales causas de las dificultades que los alumnos presentan en álgebra, es la manipulación algebraica de los números reales, lo cual se debe a que estas propiedades no han adquirido significado para los estudiantes y la mayoría, aunque las puede enumerar, no las reconoce y, mucho menos, puede valerse de ellas para armar argumentos u obtener conclusiones en casos particulares. Otra dificultad presentada en este estudio y es evidente, es la incapacidad que tienen los estudiantes en el uso correcto del lenguaje algebraico para describir situaciones de relación entre números, variables o cantidades. Uno de los principales síntomas que se menciona aquí es la notable tendencia de los estudiantes a buscar una fórmula que resuelva el problema que enfrentan, síntoma que se refleja también en la falta de herramientas conceptuales que puedan utilizar para aplicar el conocimiento adquirido y que les permitan interpretar situaciones, traducirlas a lenguaje matemático y armar estrategias que les permitan solucionar problemas de forma eficiente y creativa.

Las dificultades de los estudiantes al ingresar al curso de cálculo diferencial, son de dos tipos: aritméticas y de lenguaje, lo cual coincide con lo descrito en el estudio mencionado.

Así pues, para el desarrollo de la presente unidad didáctica, se seguirán las sugerencias que exponen Soca, Camacho, Palarea y Hernández (1989)

“*Al ser el álgebra un lenguaje de comunicación de ideas abstractas, plantear su enseñanza-aprendizaje en términos de traducción de lenguajes: el* «*habitual*»*, el de los* «*modelos*» *y el* «*algebraico*»*, estimula y favorece el desarrollo de su conocimiento*” (Socas, Camacho, Palarea y Hernández, 1989).

Se abocará este tema de manera que las principales propiedades de los números reales tengan significado, introduciendo las letras como números generalizados y entendiendo el álgebra como un lenguaje para que, posteriormente y de acuerdo a la dificultad creciente del tipo de ejercicios, estas propiedades se puedan ir generalizando hasta el nivel adecuado para enfrentar el curso de cálculo diferencial.

La segunda parte se inspira en las dificultades evidenciadas en las pruebas hechas a los estudiantes. Se trata de i) enfrentar las dificultades sentidas y vividas por los estudiantes que, según lo expuesto en el primer capítulo, son fundamentales para llegar al concepto de función y ii) desarrollar las habilidades que necesitan como profesionales que aplican la matemática y que actualmente no se tienen en cuenta en el desarrollo del curso.

En la tercera parte, se presentan las funciones introducidas como modelos en diferentes situaciones. En esta sección se presentarán las funciones que generalmente se trabajan en el curso de cálculo diferencial: polinómicas, racionales, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y definidas a trozos. Solo en este momento se debe dar a los estudiantes la definición de función, dominio, rango, se deben definir sus propiedades y realizar correctamente el álgebra de funciones como se hace tradicionalmente en el curso de cálculo diferencial.

En la última sección se hace el estudio del álgebra de funciones, y se generalizan las propiedades encontradas en la sección anterior; para esto, el estudiante debe generalizar las ideas construidas hasta este momento

Las actividades planteadas se propondrán al estudiante progresivamente de manera que cada vez se requiera un grado mayor de abstracción de las ideas matemáticas. Por eso es importante que la primera actividad de cada sección tenga significado ya sea como algo práctico o dentro de la matemática, pero de acuerdo a su contexto vital.

4.2 Descripción del tipo de actividades:

Las actividades que se encontrarán en esta unidad son de diferente tipo así:

- Actividades en contexto **no** programables: son actividades que permiten al estudiante aplicar sus conocimientos en un contexto real y encontrar la utilidad y necesidad de los conocimientos ya adquiridos o de los conocimientos que aún no se tienen. Para este tipo de actividades no existe un programa que pueda generar el mismo tipo de actividades aleatoriamente ni verificar que la respuesta del estudiante es correcta; así pues, la retroalimentación a dichos ejercicios dependerá del docente que maneje el curso, aunque para algunas de ellas el estudiante podrá comparar sus respuestas con las respuestas que se proponen en este trabajo. Este tipo de actividades se marcarán con CN.

-Actividades en contexto programables: El objetivo de este tipo de actividades es el mismo que el de las actividades CN; sin embargo, este tipo de actividades pueden programarse de manera que la retroalimentación sea inmediata y se puedan generar actividades similares a la anterior para que el estudiante pueda intentar resolverlas las veces que necesite. Este tipo de actividades se marcarán con CP.

- Actividades programables: son actividades para las que existe un programa fácil de elaborar y que permiten generar aleatoriamente ejercicios similares con el fin de que el estudiante practique el mismo tipo de ejercicios hasta que se sienta seguro al responder.

La diferencia entre este tipo de actividades y las actividades CP, es que no están enmarcadas dentro de ningún contexto particular y su principal objetivo es verificar o afianzar la comprensión de algún concepto específico. Este tipo de actividades se marcarán con una P

- Actividades no programables: son actividades que no están dentro de ningún contexto particular ni buscan la comprensión de conceptos específicos; no son programables, pero buscan desarrollar una habilidad particular en los estudiantes. Este tipo de actividades se marcará con NP

5. Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

Mejorar el rendimiento académico de los estudiantes de la sede en el área de matemáticas y hacer que ellos se sientan satisfechos y seguros de sus conocimientos es indispensable no solo para que disminuya el número de estudiantes que abandonan los estudios sino para permitirles optimizar el aprovechamiento de sus procesos de estudio, lo cual en el futuro repercute en el bienestar tanto de los estudiantes de la Sede como en el de toda la región amazónica que está ávida de profesionales competentes dispuestos a trabajar y vivir en esta zona del país.

En particular, se puede concluir que el bajo rendimiento de los estudiantes en el área de matemáticas y, en particular, en cuanto a asimilar y comprender el concepto de función se debe a diferentes factores, algunos de los cuales no dependen del trabajo que se realiza a nivel universitario pero que, dadas las circunstancias, la Universidad puede y, quizás, debe plantear alternativas que mejoren esta situación. Entre los factores más representativos están: 1) Dificultades académicas en aspectos y temas que debieron ser trabajados en la secundaria. 2) Dificultades didácticas en la presentación del concepto de función. 3) Dificultades en la metodología utilizada en las cátedras de tele-presencia. 4) Dificultades administrativas que repercuten directamente en el bienestar de los estudiantes durante las clases de videoconferencia.

Con respecto a las dificultades académicas con las que ingresan los estudiantes a iniciar sus estudios universitarios en la sede, se puede concluir que el manejo del conjunto de los números reales que realizaron los estudiantes en la secundaria es deficiente, que los estudiantes no le dan significado a las propiedades de las operaciones y les cuesta mucho trabajo matematizar situaciones sencillas que pueden resolverse usando las operaciones básicas de los números reales.

Entre las dificultades más representativas de este tipo se encuentran, el desconocimiento de las propiedades de orden, la falta de significado de las propiedades algebraicas y por consiguiente un deficiente manejo algebraico de las expresiones; también se encontró un deficiente manejo del signo de igualdad y una dificultad muy grande en comprender y justificar enunciados y definiciones que involucren una implicación. Dentro de este tipo de dificultades también se encontró que los estudiantes no disponen de un repertorio básico de funciones elementales (adquirido o creado por ellos mismos) y les cuesta mucho trabajo comprender la notación funcional f(x), sobre todo en funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas en donde aplican falsas propiedades de la notación multiplicativa usada en la manipulación de expresiones algebraicas; por último, se pudo observar que poseen un mal manejo de la notación de conjunto y esto no les permite comunicar las respuestas ni entender los resultados en situaciones concretas.

Buscando una mayor generalización en relación con estos hallazgos, puede afirmarse que corresponden a deficiencias de conocimiento y a deficiencias de capacitación, siendo ésta la más radical: los estudiantes no están capacitados para realizar procesos de abstracción de manera que los contenidos conceptuales tengan de alguna manera una dimensión vital y no sean únicamente piezas u objetos totalmente separados de ellos mismos. En la medida en que esta separación sea mayor, su presencia es más volátil. Conceptos meramente almacenados en la memoria, sin que cumplan alguna función, fácilmente se evaporan. El conocimiento inútil desaparece.

Con respecto al desarrollo del curso de cálculo diferencial como se está haciendo actualmente, se puede concluir que no representa un cambio significativo en la forma de pensar de los estudiantes y no los está acompañando de forma satisfactoria en el proceso de aprendizaje.

Con respecto a la metodología utilizada en las videoconferencias se encontró que las clases de cálculo por tele-presencia no salen del esquema de la clase magistral, que no se aprovechan todas las herramientas con las que se cuenta y que no existen medios de comunicación entre los estudiantes de la Sede y el docente que dicta la videoconferencia; esto hace que muchos de los estudiantes no se sientan parte de la clase y que los docentes no tengan en cuenta lo que ocurre al otro lado de la cámara para planear y desarrollar su clase, diferente a los posibles aspectos técnicos que se puedan presentar a lo largo de la video-conferencia.

Dentro de los aspectos administrativos se encontró que el horario de la clase y el salón en el que se imparten las videoconferencias influye en la concentración, disposición y atención de los estudiantes

5.2 Recomendaciones

Para mejorar estos aspectos, teniendo en cuenta las dificultades epistemológicas e históricas que ha tenido el concepto de función, se encontró que éste concepto debe introducirse cuando se genere la necesidad de comunicar las ideas a través del estudio de la relación entre variables involucradas en una situación particular. Siguiendo las recomendaciones de Azcárate y Socas, se debe realizar un trabajo de familiarización con las diferentes funciones que se trabajarán en el curso antes de definir y formalizar todas las propiedades que se presentan en este primer capítulo de la cátedra de cálculo diferencial.

Otra forma de decir lo mismo es que, para lograr una buena transmisión de los conocimientos es necesario que los estudiantes se involucren de alguna manera en procesos iguales o análogos a aquellos que han generado el conocimiento por transmitir. Para vitalizar ideas o conceptos abstractos es necesario haber realizado abstracciones.

Como fruto de la presente investigación se propone un proceso y una herramienta que buscan solucionar el problema actual para los estudiantes que ingresan a la Universidad Nacional de Colombia sede Amazonia y deben tomar las clases de cálculo diferencial. Conviene, sin embargo, que se investigue sobre lo que sucede en otras áreas y circunstancias, y se profundice más en ésta, a fin de ir fortaleciendo y optimizando los procesos educativos.

Para finalizar, se recomienda que para el desarrollo del curso se hagan grupos pequeños en donde la intercomunicación dinamice los procesos de aprendizaje; que el docente que realiza la video-conferencia establezca estrategias de comunicación a través de micrófonos con los estudiantes de las sedes de frontera; que la hora de la clase sea fuera del rango en donde la temperatura sube todos los días.

A. Anexo: Unidad didáctica

SECCIÓN 1: PRELIMINARES

Ubicación en la recta real

ACTIVIDAD I: Los números reales y la recta real

Es muy común representar el conjunto de los números reales con una recta, llamada la recta real, ya que existe una correspondencia perfecta entre cada número real y cada punto de la recta, es decir, por cada punto de la recta existe un único real y por cada real existe un único punto en la recta.

Para construir la recta real se hace lo siguiente:

1. Se dibuja una recta.

2. Se marca un punto sobre la recta, con el número cero.

3. Se marca otro punto de la recta, a la derecha del cero, con el número 1.

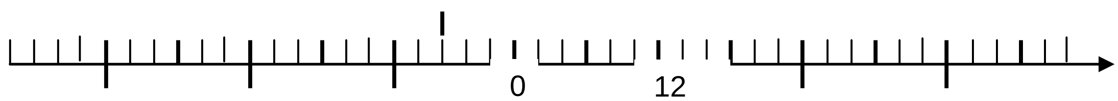
4. Se ubica el resto de los números enteros en los cuales estemos interesados teniendo en cuenta que el espacio entre el cero y el uno se llama unidad y debe ser igual para cualquier par de enteros consecutivos.

5. Los demás números reales se ubican teniendo en cuenta el orden entre ellos.

EJERCICIOS:

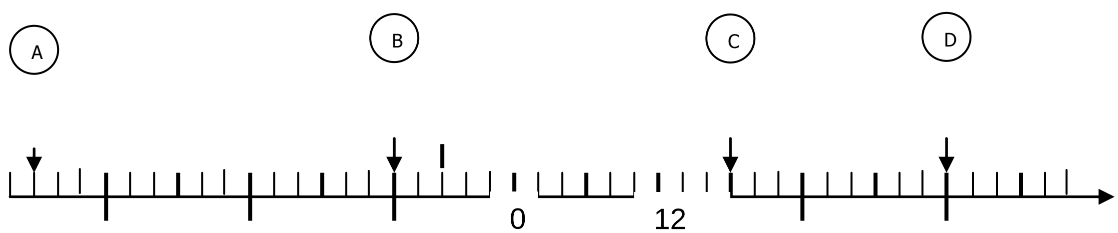
1. (CN) En la página http://horarios.ciberzonia.net/ encontrarás la temperatura en grados centígrados que se reporta hoy en algunos de los países del mundo. Anota en la tabla la **más baja** que encuentres reportada hoy en cada uno de los siguientes países y ubica cada una de estas temperaturas en la siguiente recta numérica

País	Colombia	Groenlandia	Canadá	Brasil	Noruega	Japón
Temperatura						



0 12

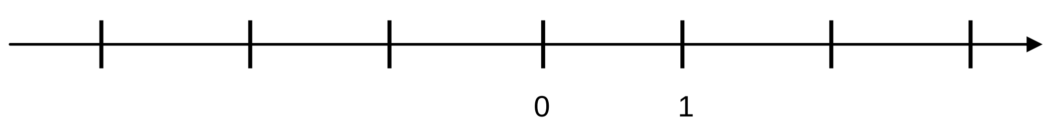
Busca un país para el cual la temperatura **más alta** sea la indicada con las letras A, B, C, D



2. (P)

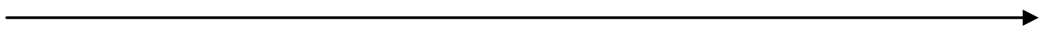
a) Ubica sobre la recta los puntos que corresponden a los siguientes valores

¼ 3/2 -2/5 1.75 2.36 -1.05 -1.50



b) Gradúa la recta de tal manera que puedas ubicar en ella los siguientes números reales

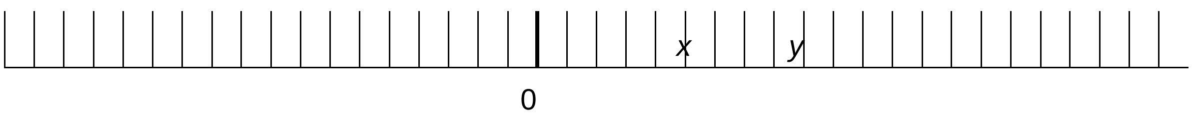
-4□ -□/3 -□ -5□/6 -2□ □ □/3 2□/6



3. (P)

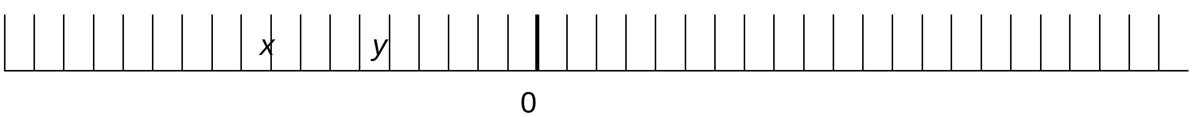
a) Sean *x* y *y*, dos números reales que representan los puntos que se ven en la siguiente recta. Ubica cada uno de los puntos que representan los siguientes números

2x, x/2, -y, x+y, 2x+y, x-y, y-x, (x+y)/2



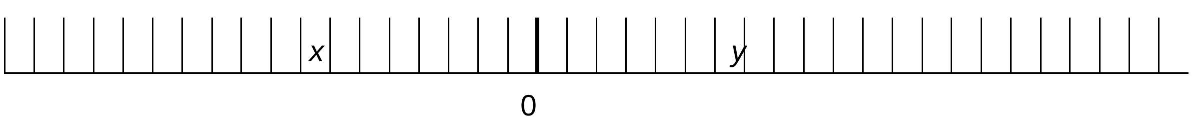
b) Sean *x* y *y*, dos números reales que representan los puntos que se ven en la siguiente recta. Ubica cada uno de los puntos que representan los siguientes números

2x, x/2, -y, x+y, 2x+y, x-y, y-x, (x+y)/2



c) Sean *x* y *y*, dos números reales que representan los puntos que se ven en la siguiente recta. Ubica cada uno de los puntos que representan los siguientes números

2x, x/2, -y, x+y, 2x+y, x-y, y-x, (x+y)/2



4. Intervalos

¿Haz notado que si dos números reales son diferentes, entre ellos siempre hay otro número real diferente?, en otras palabras, dados dos números reales *a* y *b*, $a \neq b$, existe *c*, tal que $a < c < b$.

Observa la siguiente animación Densidad

4.1. (NP) Encuentra un número que esté entre -3 y -4 y llámalo x_1. Encuentra un número que esté entre -4 y x_1 y llámalo x_2. Encuentra un número que esté entre -4 y x_2 y llámalo x_3. Encuentra un número que esté entre -4 y x_3 y llámalo x_4.

Como habrás notado, este proceso puede continuar indefinidamente…

a) (P) Encuentra seis números reales diferentes entre -2 y -2,0001

4.2 Observa los siguientes videos

http://www.youtube.com/watch?v=nYM8ub2fvL0

http://www.youtube.com/watch?v=XfN8T7vIJUY&NR=1

http://www.youtube.com/watch?v=pZWzefxSZNY&feature=relmfu

(NP) De acuerdo a lo que viste en el video realiza los siguientes ejercicios.

Expresa usando la notación de intervalos cada uno de los siguientes conjuntos

a) A={Los posibles valores en metros que puede tomar la altura de una palma de Asaí durante su vida}

- **b)** S={los posibles valores que puede tomar la temperatura del cuerpo humano en grados centígrados de una persona sana}
- **c)** E={los posibles valores que puede tomar la temperatura del cuerpo humano en grados centígrados de una persona enferma}
- **d)** U={ los posibles valores que puede tomar la temperatura del cuerpo humano en grados centígrados de una persona sana o enferma}
- **e)** P={Los posibles valores reales que puede tomar x para que $-3< 2x-3$}
- **f)** M={Los posibles valores reales que puede tomar x para que $2x-3<0$}
- **g)** I={Los posibles valores que puede tomar x para que $-3< 2x-3$ y $2x-3<0$}
- **h)** W={ Los posibles valores que puede tomar x para que $-3< 2x-3$ o $2x-3<0$}
- **i)** F={Los números reales que no son pares}
- **j)** D={los números reales que están a una distancia del 0 menor que 3 unidades}

5. Plano cartesiano

El cálculo nace con el interés de estudiar el movimiento; hoy en día su uso se extiende mucho más, se utiliza para estudiar el cambio entre variables relacionadas y sirve para predecir, diseñar y solucionar situaciones problemáticas de las ciencias naturales, económicas y sociales. La terminología que usamos actualmente y las múltiples maneras que tenemos de estudiar esta relación entre las variables tuvo un desarrollo largo en el cual intervinieron las ideas de muchas personas. En esta sesión vamos a introducir unas de las ideas que cambiaron la forma de pensar de los científicos y matemáticos del siglo XVII, las ideas que permitieron la creación de lo que hoy recibe el nombre de **geometría analítica**, las novedosas ideas introducidas por los grandes matemáticos: Rene Descartes (1596-1650) y Pirre de Fermat (1601- 1665).

Si quieres saber más de estos dos matemáticos sigue los siguientes enlaces

Descartes Video	Descartes Biografía	Fermat Video	Fermat Biografía

Video Descartes: http://www.youtube.com/watch?v=YiyIQRCYock&feature=related

Biografía Descartes: http://www.webdianoia.com/moderna/descartes/desc_bio.htm

Video Fermat:

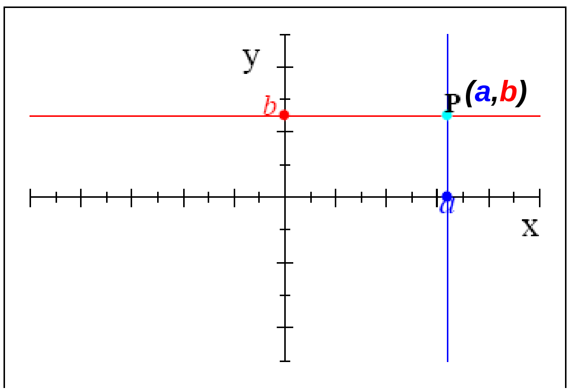
Biografía Fermat:

http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/mateospetsuak/Fermat2.asp

Las ideas de estos dos matemáticos permitieron la creación de lo que hoy se llama el Plano Cartesiano. Éste, permite resolver problemas geométricos haciendo uso del álgebra y visualizar las ideas algebraicas en forma geométrica. El Plano Cartesiano está conformado por dos rectas reales, como las que estudiamos en la sección anterior, que se cruzan perpendicularmente en el origen. La mayoría de las veces, una de estas rectas se ubica horizontalmente con dirección positiva hacia la derecha y se denomina ***eje x*** y la otra se ubicará verticalmente, con dirección positiva hacia arriba y se denomina ***eje y***; de esta manera cualquier punto en el plano puede identificarse con una pareja ordenada de números reales y cualquier pareja ordenada de números reales se refiere a un punto del plano.

Notación:

Al punto P del plano se le asigna la pareja ***(a,b)*** si al trazar una recta perpendicular al eje x que pase por P, ésta corta el eje x en el punto ***a,*** y si al trazar una recta perpendicular al eje y que pase por P, ésta corta el eje y en el punto ***b***. Este punto se designa por el símbolo P(*a,b*)



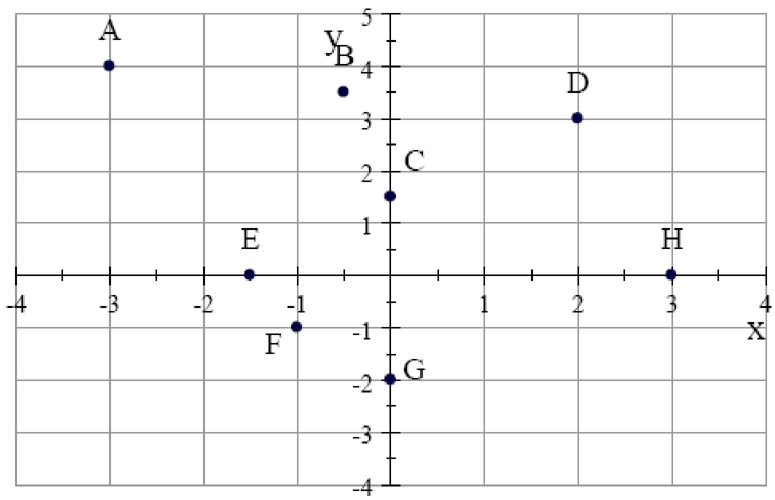
¡Ten mucho cuidado con la notación, dependiendo del contexto el símbolo (x,y) puede referirse a un intervalo (recuerda la recta de los números reales) o a un punto del plano (como se ha mostrado aquí)!

Los puntos a y b se llaman coordenadas del punto P en el Plano Cartesiano.

5.1. (NP) Descubre el animal que se forma uniendo en orden y con una línea recta todos los puntos del plano cartesiano que se listan a continuación.

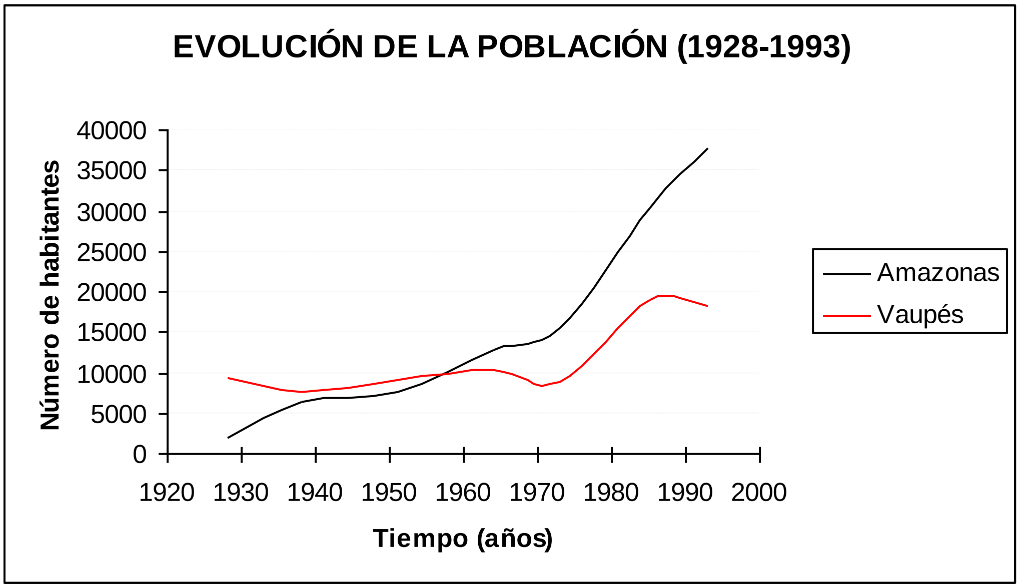
1.(4,4)	**2.**(3,2)	**3.** (3,-1)	**4**. (2,-2)	**5**. (2,-1)	**6**. (1,0)
7. (0,-1)	**8**. (-1,-2)	**9.** (0,-2)	**10**. (0,-3)	**11**. (1,-3)	**12**. (4,4)
13. (3,3)	**14.** (1,3)	**15.** (0,1)	**16**. (-1,0)	**17**. (-2,-2)	**18**. (-3,-3)
19. (-4,-3)	**20.** (-5,-1)	**21**. (-5,-3)	**22**. (-4,-4)	**23**. (-5,-5)	**24.** (-3,-4)
25. (-2,-4)	**26.**(0,-3)	**27**. (-2,-3)	**28**. (-1,0)	**29**. (-2,1)	**30**. (0,1)

5.2. (P) Escribe las coordenadas de cada uno de los puntos que se indican a continuación

	A(____,____)
	B(____,____)
	C(____,____)
	D(____,____)
	E(____,____)
	F(____,____)
	G(____,____)
	H(____,____)

Ahora que se conoce la notación para poder usar el Plano Cartesiano, se va a usar para representar la relación que existe entre variables, el estudio que podemos hacer hasta el momento se limita a situaciones en las que intervienen dos variables. Siempre que se represente una de dichas situaciones en el plano cartesiano, la variable independiente se va a representar en el eje x y la variable dependiente en el eje y; de esta manera los puntos que representan la relación entre dos variables en el plano cartesiano esta bien determinada.

5.3. (CN) De acuerdo a la información del “Atlas Cultural de la Amazonia Colombiana” publicado en 1998, la evolución de la población en los departamentos de Amazonas y de Vaupés de 1928 a 1993 se puede observar en la siguiente gráfica.

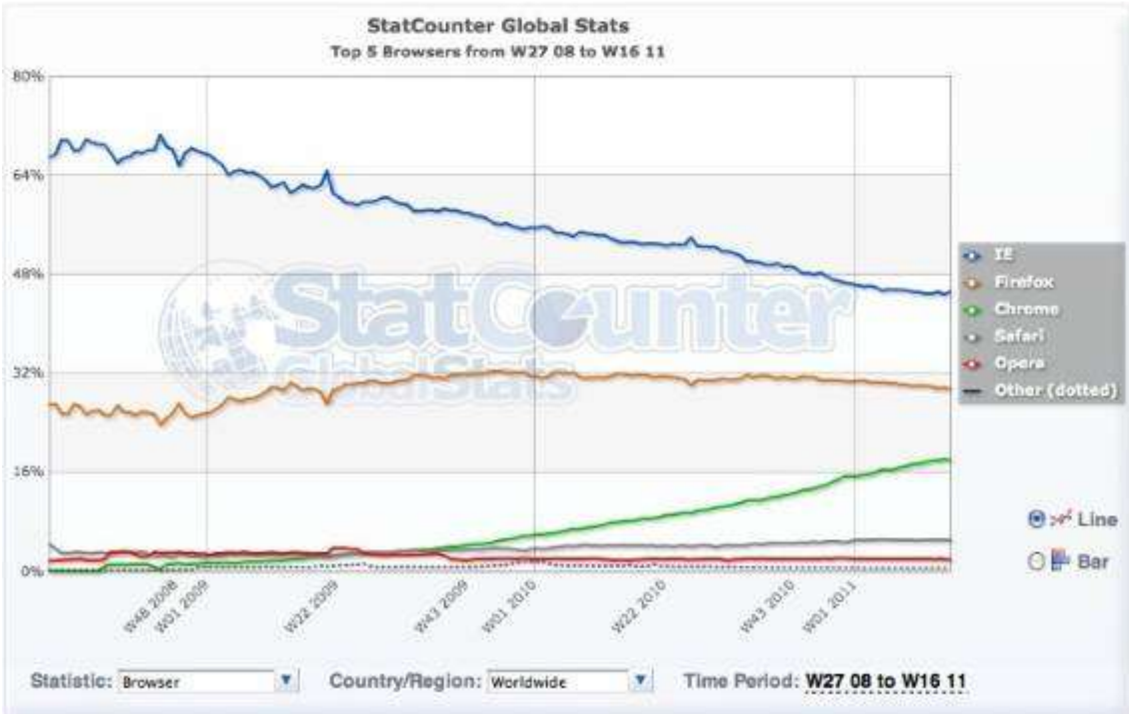


En este caso la variable independiente es el tiempo en años y la variable dependiente es el número de habitantes. Ten cuidado con esta gráfica puesto que en el mismo plano cartesiano se están representando dos situaciones: I. relación entre el tiempo y el número de habitantes en el departamento del amazonas (puntos negros), y II relación entre el tiempo y el número de habitantes en el departamento del Vaupés (puntos rojos).

Teniendo en cuenta la información que brinda la gráfica anterior responde las siguientes preguntas

- **a)** Aproximadamente, ¿cuál era la población en el departamento del Amazonas en 1974? ¿y en 1990?
- **b)** Aproximadamente, ¿cuál era la población en el departamento del Vaupés en 1920? ¿y en 1980?
- **c)** Aproximadamente, ¿En que años la población del Amazonas fue de 12500 habitantes?
- **d)** Aproximadamente, ¿En que años la población del Vaupés fue de 10000 habitantes?
- **e)** Aproximadamente, ¿Durante que período de tiempo la población del Vaupés fue
- **f)** menor a 10000 habitantes?
- **g)** Aproximadamente, ¿durante que años el número de habitantes del Vaupés fue mayor el número de habitantes del Amazonas? ¿cuándo fue igual?
- **h)** Aproximadamente, ¿durante que períodos de tiempo la población en el Amazonas aumentó?
- **i)** Aproximadamente, ¿durante que períodos de tiempo la población en el Vaupés aumentó? ¿y en el Amazonas?

5.4. (CN) En la siguiente gráfica se muestra el porcentaje de usuarios en cada uno de los cinco navegadores mas usados desde la semana 27 de 2008 hasta la semana 16 de 2011



Tomado de: http://www.enter.co/internet/firefox-4-logra-100-millones-de-descargas-%c2%bfahora-que/

De acuerdo a esta información responde cada una de las siguientes preguntas

a) ¿Que porcentaje de usuarios usaban cada uno de los navegadores en la primera semana de 2011?

Navegador	**Porcentaje de usuarios**
Internet Explorer	
Firefox	
Chrome	
Safari	
Opera	
Other	

b) ¿Que porcentaje de usuarios usaban cada uno de los navegadores al finalizar el 2009?

Navegador	Porcentaje de usuarios
Internet Explorer	
Firefox	
Chrome	
Safari	
Opera	
Other	

c) ¿Cuál fue el mayor porcentaje de usuarios reportado para Internet Explorer y en que semana se reportó? ¿y para Firefox?, ¿para Chrome?

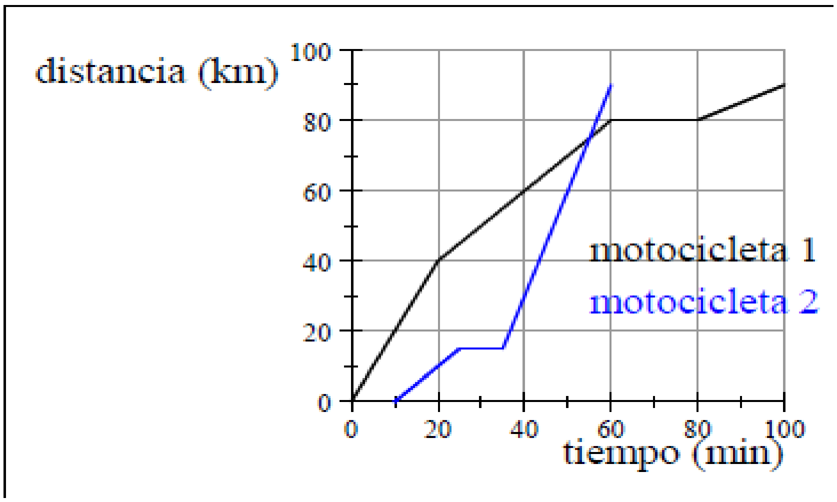
d) ¿Cuál fue el menor porcentaje de usuarios reportado para Internet Explorer y en que semana se reportó? ¿y para Firefox?, ¿para Chrome?

e) ¿Cuál de los navegadores crees que ha tenido un mejor rendimiento durante este período de tiempo? Explica

f) ¿Cuál de los navegadores crees que ha tenido el peor rendimiento durante este período de tiempo? Explica

g) ¿Cual crees que será el navegador más usado al finalizar el 2011?

5.5. (CN) La siguiente gráfica muestra la distancia recorrida por dos motocicletas diferentes al realizar el mismo recorrido.



De acuerdo a esta información responde las siguientes preguntas

- **a)** Después de 40 minutos ¿qué distancia había recorrido cada motocicleta?
- **b)** ¿En qué momento salió cada motocicleta?
- **c)** ¿Qué motocicleta tardó menos en hacer el recorrido?
- **d)** ¿Qué motocicleta llego primero al final del recorrido?
- **e)** ¿Durante cuánto tiempo permanecieron detenidas cada una de las motocicletas y en qué kilómetros se detuvieron?
- **f)** ¿En algún momento las motocicletas se encontraron? Si fue así, ¿en qué momento? Y ¿a qué distancia del punto de partida se encontraban?
- **g)** ¿En qué momentos la velocidad de la motocicleta 1 es mayor a la de la motocicleta 2?

6. Distancia:

La noción de distancia es una idea que has venido trabajando de forma intuitiva durante mucho tiempo; en esta sección vamos a introducir una notación que nos permite hablar de esta idea y que ha servido a los matemáticos para definir conceptos muy importantes como los de límite y continuidad que estudiarás con precisión más adelante.

6.1 (CN) Si se sabe que Tarapacá está a 175 km de Leticia y el final de la vía pavimentada se encuentra a 20 km de Leticia. ¿Cuántos kilómetros debe caminar una persona para ir de Leticia a Tarapacá por tierra? Y ¿para ir por tierra de Tarapacá a Leticia?

Como habrás notado, la distancia que hay entre el final de la vía y Tarapacá es única y no depende del sentido en que el caminante la recorra.

6.2 (CN) Si la comunidad Ticuna San José se encuentra seis kilómetros al norte de Leticia y el aeropuerto de Tabatinga se encuentra tres kilómetros y medio al sur de Leticia, ¿cuántos kilómetros mínimo debe recorrer un taxista para ir de la comunidad de San José al aeropuerto de Tabatinga? Y ¿Para ir del Aeropuerto a la comunidad?

¡Lo ves? Aquí tampoco importó el sentido en el cual se hizo el recorrido, si el taxista anda en línea recta gasta la misma cantidad de gasolina en ir del aeropuerto a San José que en ir de San José al aeropuerto. ¡La distancia es la misma!

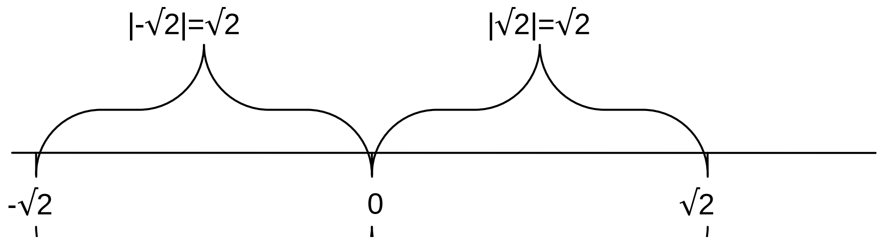
Para generalizar esta idea en la recta numérica, se introduce el signo de **Valor absoluto. A**sí pues, para un número real x, la distancia de x a 0 se denota como $|x|$; de esta manera se tiene, por ejemplo, que

|2| es la distancia del 0 al 2 que equivale a 2, es decir, |2|=2

|-5| es la distancia del 0 al -5 que equivale a 5, es decir, |-5|=5

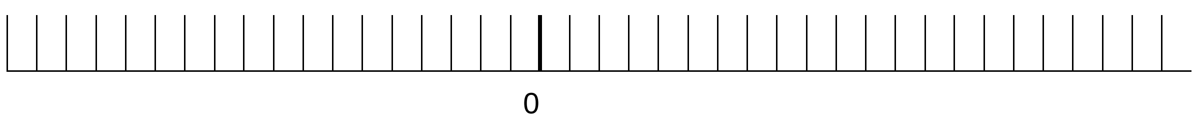
|π| es la distancia del 0 a π que equivale a π, es decir, | π|= π

Los números que se encuentran a una distancia del 0 equivalente a √2 son -√2 y √2, es decir, |√2|=|-√2|=√2

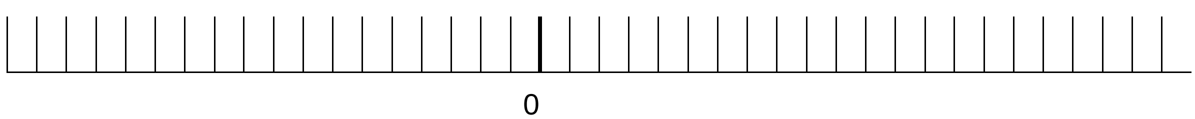


6.3 (P)

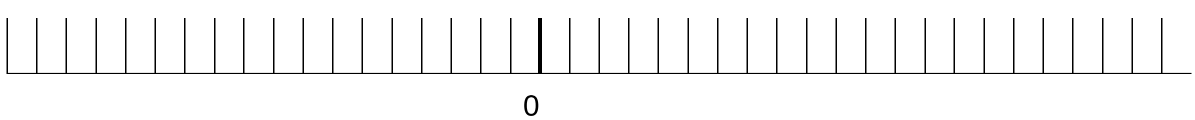
a) Dibuja sobre la recta los puntos que se encuentran a una distancia del cero igual a 3



b) Dibuja sobre la recta los puntos que se encuentran a una distancia del cero menor a 3



c) Dibuja sobre la recta los puntos que se encuentran a una distancia del cero mayor a 3

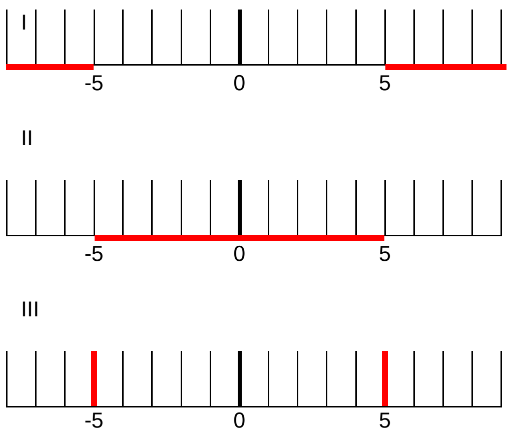


6.4 (P) Elige la expresión que traduce al lenguaje matemático la oración correctamente

Los números que están a una distancia del 0 menor o igual a 4 unidades

A. |x| < 4 B. |x| ≥ 4 C. |x| > 4 D. |x| ≤ 4 E. |x| = 4

6.5 (P) Relaciona cada gráfica con el enunciado que representa los valores reales que puede tomar x para hacer verdaderas las afirmaciones de la derecha.



A. |x| < 5

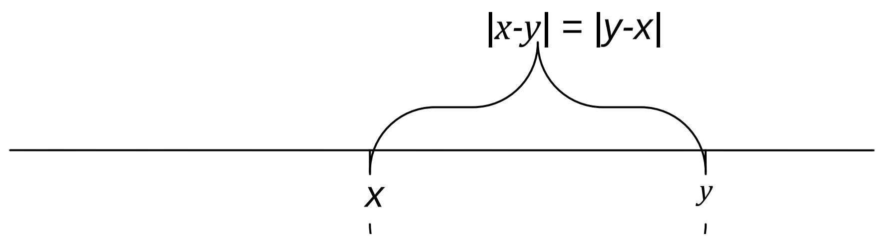
B. |x| = 5

C. |x| > 5

6.6 (P) Relaciona cada intervalo con el enunciado que representa los valores reales que puede tomar x para hacer verdaderas las afirmaciones de la derecha.

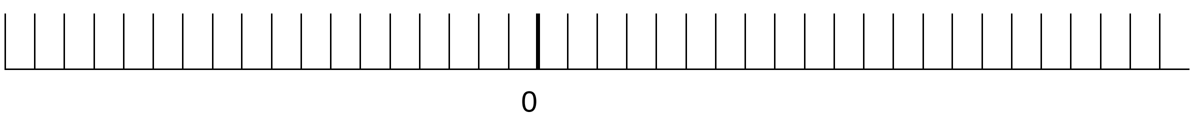
I (-3,3)		**A. |x| > 3**
II (-∞,-3] ∪ [3,∞)		**B. |x| ≤ 3**
III (-∞,-3) ∪ (3,∞)		**C. |x| ≥ 3**
IV [-3,3]		**D. |x| < 3**

Como podrás imaginar, no solo se puede hablar de la distancia que hay entre cualquier punto de la recta y 0, sino que se puede hablar de la distancia que hay entre dos puntos cualquiera, esto es, si *x* y *y* representan dos números reales, la distancia que hay entre ellos está dada por |x-y| = |y-x|

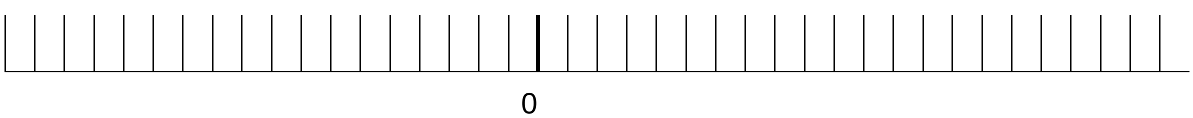


6.7 (P)

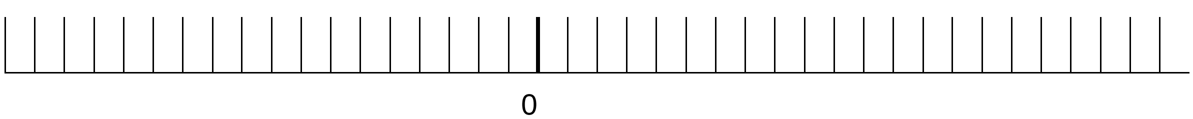
a) Dibuja sobre la recta los puntos que se encuentran a una distancia del 2 igual a 3



b) Dibuja sobre la recta los puntos que se encuentran a una distancia del 2 menor a 3



c) Dibuja sobre la recta los puntos que se encuentran a una distancia del 2 mayor a 3

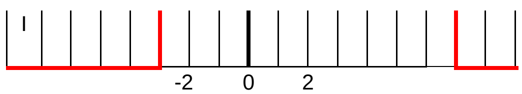


6.8 (P) Elige la expresión que traduce al lenguaje matemático la oración correctamente

Los números que están a una distancia del 5 menor o igual a 3 unidades

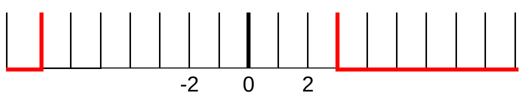
A. $|x-3| \leq 5$ B. $|x-5| \geq 3$ C. $|x-3| > 5$ D. $|x-5| \leq 3$ E. $|x-5| = 3$

6.9 (P) Relaciona cada gráfica con el enunciado que representa los valores reales que puede tomar x para hacer verdaderas las afirmaciones de la derecha.



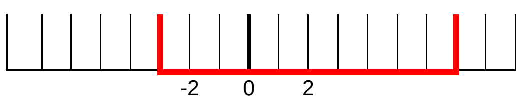
A. $|x+2| \leq 5$

II

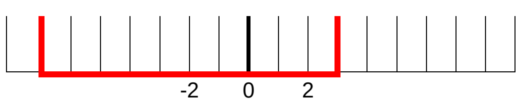


B. $|x-2| \leq 5$

III



C. $|x-2| \geq 5$



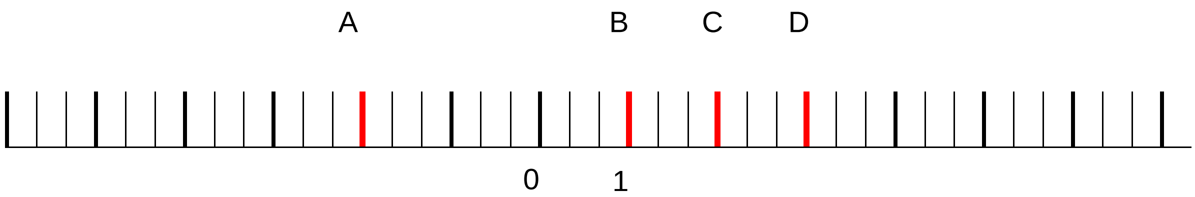
D. $|x+2| \geq 5$

6.10 (P) Relaciona cada intervalo con el enunciado que representa los valores reales que puede tomar x para hacer verdaderas las afirmaciones de la derecha.

I (-2,4)		**A. $|x-1| > 3$**
II (-∞,-2] ∪ [4,∞)		**B. $|x-1| \leq 3$**
III (-∞,-2) ∪ (4,∞)		**C. $|x-1| \geq 3$**
IV [-2,4]		**D. $|x-1| < 3$**

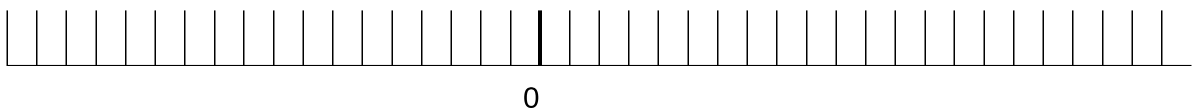
6.11 (P) Relaciona las igualdades con los puntos sobre la recta que la cumplen

I. |x-3| = |x+1| II. |4-x| = |x-2| III.|x+3| = |x+1| IV. |x| = |x-4|



6.12 (P) Dibuja sobre la recta el conjunto de valores que puede tomar x para cumplir la siguiente desigualdad

|x-2| < |x+3|



Álgebra de los números reales.

1. El significado de las propiedades de la suma y la multiplicación de números reales.

Las operaciones entre números reales pueden describirse de varias maneras, una es repitiendo los algoritmos que nos han enseñado en la escuela y otra es conociendo y manejando apropiadamente sus propiedades. Empezaremos describiendo las propiedades más importantes que cumplen las operaciones de números reales y posteriormente se plantearan unos ejercicios en los cuales se deban utilizar dichas propiedades

Propiedades de la multiplicación

Asociativa de la multiplicación

Conmutativa de la multiplicación

Observa la siguiente animación:

El producto distribuye con respecto a al suma

ACTIVIDADES

1.1. (P) Representa usando rectángulos la siguiente expresión y escribe una expresión equivalente a ella

2x(5+b)

La respuesta a este ejercicio es: 2x5 + 2b pero se puede plantear también de tal manera que la expresión inicial sea ésta y se puede programar para cambiar los números y la letra de forma aleatoria. En los siguientes dos ejercicios ocurre algo análogo

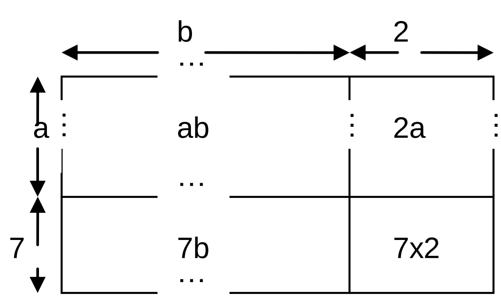
1.2. (P) Representa usando rectángulos la siguiente expresión

a x (8+b)

1.3. (P) Representa usando rectángulos la siguiente expresión

3 x (b+c)   2a x (b+c)

1.4. (P) Observa el siguiente cuadro y escribe dos expresiones equivalentes que representen el área del rectángulo



1.5. (P) Utilizando las propiedades vistan anteriormente calcula cada una de las siguientes expresiones

a) (P) Utilizando las propiedades vistas anteriormente relaciona las expresiones de la columna de la derecha con una expresión equivalente de la columna de la izquierda

(7 – 2 + 4) - (2 – 5)	**$2^2 + 4^2$**
$(2 + 4)^2$	**(7 – 2 + 4) – 2 – 5**
(7 – 2 +4) – 7	**(7 – 2 + 4) – 2 + 5)**
2 x 2 + 4 x 4	**6 x 6**

1.6. (P) En el cálculo de las siguientes expresiones se ha cometido un error, selecciona el renglón en donde esto ocurre

a)

$$\frac{2+(7-3)}{4} = \frac{2+(4)}{4}$$

$$= \frac{2+(4)}{4}$$

$$= 2$$

b)

$$2 + (4 - 3) + 15 - 3 = 2 + (4 - 3) + 12$$

$$= 8 - 6 + 12$$

$$= 14$$

c)

$$-5+3-(10-6) = -2-4$$
$$= -2-(10-6)$$
$$= -2-4$$
$$= 6$$

d)

$$\left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{4}{6}\right)(2-5)\left(\tfrac{3}{2}\right) = \left(\tfrac{6}{9}\right)(2-5)\left(\tfrac{3}{2}\right)$$
$$= \left(\tfrac{2}{3}\right)(2-5)\left(\tfrac{3}{2}\right)$$
$$= \left(\tfrac{2}{3}\right)(-3)\left(\tfrac{3}{2}\right)$$
$$= \left(\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{3}{2}\right)(-3)$$
$$= -3$$

2. Ecuaciones

Cómo lo abras visto en la sección anterior, las letras pueden ser utilizadas para representar una cantidad o un número

a) (CP) La expresión matemática representa el siguiente enunciado, debes escribir que cantidad se representa con cada una de las letras que aquí aparecen:

Comadre, la cuarta parte de la cosecha de asaí se perdió debido al número tan grande de racimos que se recolectaron verdes, por cada cinco racimos buenos que se recogieron dos estaban verdes, menos mal se recogieron 87 racimos, de lo contrario no hubiéramos alcanzado a hacer el asaí que nos pidieron.

Expresión: 87 = 2/5x +x

x representa la cantidad de:

A. racimos verdes **B.** racimo recolectados **C.** racimos buenos **D.** cosecha perdida

Siempre que se plantee una igualdad entre dos expresiones se habla de una ecuación. Debes ser muy creativo al momento de plantear ecuaciones que ayuden a resolver los problemas que se presentan pero además de eso se debe tener mucha práctica al momento de resolverlas. Para eso debes usar las siguientes propiedades de los números reales

Para a y b cualquier par de números reales

- Si a = b , entonces a+c = b+c para otro número real c
- Si a = b , entonces ac = bc para otro número real c
- Si a = b , entonces a/c = b/c para otro número real c no nulo
- Si a = b , entonces $a^2 = b^2$
- Si a = b , entonces $a^n = b^n$

b) (P) En la siguiente ecuación al realizar a ambos miembros de la igualdad la operación indicada se obtiene

Ecuación	**Operación**
$\frac{x+5}{2} = 3$	Sumar – 5

A. x/2 = – 2 **B.** x/2 = 8 **C.** (x-5)/2 = – 2 **D.** (x-5)/2 = 8

c) (P) En la siguiente ecuación al realizar a ambos miembros de la igualdad la operación indicada se obtiene

Ecuación	**Operación**
$\frac{2x+4}{3} = 2$	Multiplicar por 1/2

A. (x+4)/3 = 1 **B.** (x+2)/3 = 1 **C.** (x+4)/6 = 1 **D.** (x+2)/6 = 1

d) (P) En la siguiente ecuación al realizar a ambos miembros de la igualdad la operación indicada se obtiene

Ecuación	Operación
$\frac{x+5}{2} = 3$	Multiplicar por 2

A. x+5= 6 **B.** 2x+10 = 6 **C.** (2x+5)/2 = 6 **D.** 2x-5 = 6

e) (P) En la siguiente ecuación al realizar a ambos miembros de la igualdad la operación indicada se obtiene

Ecuación	Operación
$\frac{2x+4}{3} = 2$	Multiplicar por 3

A. (6x+4)/3 = 3 **B.** x+4 = 6 **C.** (x+4)/9 = 6 **D.** (6x+4)/3 = 6

f) (P) Si se realizan las siguientes operaciones a ambos miembros de la ecuación , se puede resolver la ecuación planteada, ordénalas correctamente para encontrar el valor que representa x en la ecuación

Ecuación: $\frac{2x+4}{3} = 2$

Sumar – 4	Multiplicar por 3	Multiplicar por ½

Como ya has practicado la manera de plantear ecuaciones para resolver algunas situaciones problema y has practicado como se resuelven puedes realizar los siguientes ejercicios

g) (CP) Si Luis gasta las tres cuartas partes de su dinero en el sostenimiento de la casa y del resto del dinero, la mitad la usa para invertir en un nuevo negocio de pescado y le quedan $ 200.000. ¿Cuánto dinero tenía Luis?

¿Qué ocurre si la ecuación que describe una situación contiene varios factores? No hay de qué preocuparse; en este tipo de situaciones se puede utilizar la siguiente propiedad de los números reales:

Si a y b son números reales tales que ab=0, entonces a=0 o b=0

h) (P) De acuerdo a la propiedad anterior los valores que puede tomar x para que la igualdad (2x-3)(4x+5)(3-x) son ___ ___ ___

Desigualdades

Un tratamiento similar al que se realizó con ecuaciones se puede realizar con desigualdades pero para ilustrar como resolver desigualdades que no sean lineales propongo mostrar la siguiente animación

Desigualdades con varios factores

2. Tablas, gráficas y construcción de modelos

Para comprender mejor el mundo que nos rodea, el ser humano ha creado diferentes estrategias, lenguajes y herramientas que le permiten predecir y explicar algunos acontecimientos o situaciones; una de ellas es el uso de las matemáticas y aunque no siempre la situación puede describirse exactamente, si se construye un buen modelo de la situación es posible predecir, tomar decisiones y analizar el mundo que nos rodea.

En esta sección explorarás diferentes maneras de aproximarse al mundo mientras se estudia la relación que existe entre variables.

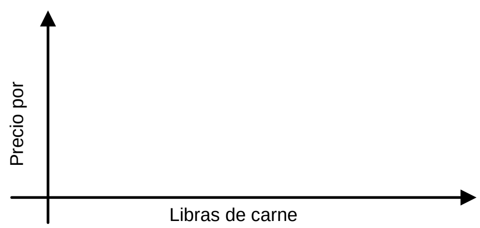
Una forma de observar el comportamiento de una variable que depende de otra es por medio de tablas; también se puede hacer por medio de gráficas en el plano o por medio de ecuaciones; ahora vamos a estudiar algunos ejemplos en donde la relación entre las variables que la describen nos permite usar los tres tipos de representaciones: la gráfica, la tabla y la expresión algebraica.

a) (CN) En una carnicería se vende la libra de lomo fino a $7.467, de acuerdo a esta información completa la siguiente tabla

Libras	1	2	2,5	3	4	8	
Precio							60000

En esta situación el precio depende de las libas de carne que se quieran comprar, de modo pues, que la variable precio (p) se representará en el eje vertical y la variable libras (l) se representará en el eje horizontal.

b) (CN) Ubica en el plano los puntos (l,p) que se encontraron en la tabla anterior



c) (CN) De las ecuaciones que se muestran a continuación ¿cuál representa mejor esta situación?

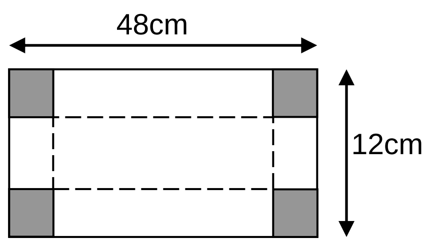
A. p = l+7467 **B.** p = 7467x l **C.** l = p+7467 **D.** l = 7467xp

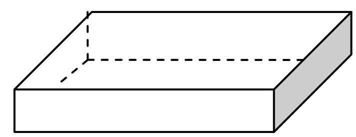
Ésta situación es un ejemplo de un grupo de situaciones que se pueden representar mediante lo que se conoce como **modelo lineal.** Para ampliar la información sobre la ecuación de una recta visita el siguiente vínculo

Ecuación de la recta

Ecuación de la recta: http://www.youtube.com/watch?v=NlpO4voUsxk

d) (CN) Un fabricante de empaques necesita saber la cantidad de material que se gasta al elaborar una caja partiendo de un cartón rectangular de 12 cm por 48 cm al que se le recortan cuadrados en las esquinas y, posteriormente, se doblan los lados como ilustra la siguiente gráfica:





De acuerdo a esta información completa la siguiente tabla:

Longitud del cuadrado que se recorta (cm)	1	2	4	5	7	10	12
Área superficial de la caja (cm2)							

Área superficial de la caja (a), o cantidad de material que se requiere, depende de la longitud del cuadrado (l) que se recorta, de modo pues, que la variable área se representará en el eje vertical y la variable longitud se representará en el eje horizontal.

e) (CN) Ubica en el plano los puntos (l,a) que se encontraron en la tabla anterior

f) (CN) De las ecuaciones que se muestran a continuación ¿cuál representa mejor esta situación?

A. a = 120-l **B.** $a = 567 - l^2$ **C.** a = 120 – 4l **D.** $a = 576 - 4l^2$

Ésta situación es un ejemplo de un grupo de situaciones que se pueden representar mediante lo que se conoce como relación polinómica, para ampliar la información sobre la definición de polinomio puedes visitar la siguiente página

Definición de polinomio

Definición de polinomio: http://www.vitutor.net/1/0_14.html

Como lo has visto existen unos polinomios que tienen un solo término, para estudiar su gráfica puedes hacer clic en los siguientes interactivos

Potencias pares x^n

Potencias impares x^n

La descripción de interactivo se puede observar en el **Anexo B**

g) (CN) Un terreno de 20 hectáreas de selva virgen situada en el Amazonas cuesta 230 millones de pesos, un grupo de personas se está organizando para poderla comprar, convertirla en reserva y de esta manera proteger el terreno. Las personas que participen del negocio deberán aportar con la misma cantidad de dinero

De acuerdo a esta información completa la siguiente tabla

Número de personas	1	2	10	15	20	30	
Aporte de cada uno							4.600.000

La cantidad de dinero que debe aportar cada persona (y) depende de la cantidad de personas que participen del negocio (x), de modo pues, que la variable aporte se representará en el eje vertical y la variable número de personas se representará en el eje horizontal.

h) (CN) Ubica en el plano los puntos (l,a) que se encontraron en la tabla anterior

i) (CN) De las ecuaciones mostradas a continuación ¿cual representa mejor la situación?

A. y = 230x **B.** y = 230(20/x) **C.** y = x/230 **D.** y = 230/x

j) (CN) Para promocionar y vender un producto de belleza nuevo tres mujeres organizan una reunión, cada una de ellas debe invitar a tres mujeres. Éstas a su vez deben organizar una segunda reunión y cada una de ellas debe invitar a tres mujeres más, ellas deben organizar una tercera reunión y cada una de ellas debe invitar tres mujeres nuevas. La idea es que el negocio siga creciendo de esta manera.
De acuerdo a esta información completa la siguiente tabla

Número de reunión	1	2	3	4	5
Cantidad de mujeres nuevas en el negocio					

La cantidad de mujeres que asisten por primera vez a la reunión (y), depende de la versión de la reunión (x); entonces la variable cantidad de mujeres representará en el eje vertical y la variable versión de la reunión se representará en el eje horizontal.

k) (CN) Ubica en el plano los puntos (x,y) que se encontraron en la tabla anterior

l) (CN) Escribe una expresión que relacione las variables x y y.

3. Funciones y modelos

En las situaciones anteriores se pudo observar cómo a cada valor de la variable x se le podía asignar un único valor de la variable y, este tipo de relación entre las variables x y y reciben un nombre especial

Definición: Una ***función*** *f* es una regla que asigna a cada elemento *x* de un conjunto A exactamente un elemento, llamado *f*(*x*), de un conjunto B (Stewart), el conjunto A se llama ***dominio*** de *f* y el subconjunto de B formado por todos los posibles valores *f*(*x*) se denomina ***rango, imagen o recorrido*** de *f*.

Cuando los conjuntos A y B son subconjuntos de los números reales la función se denomina ***función real***.

Como se puede observar una función depende de tres cosas: el conjunto A, la regla de asignación y el conjunto B, de esta manera, si f y g son dos funciones que tienen la misma regla de asignación pero para f el dominio son los reales positivos y para g el dominio es el intervalo [0,1], se tiene que f y g son funciones diferentes.

Definición: dada una regla de asignación f se define el **dominio natural** como el subconjunto de números reales más grande para el cual la asignación f tiene sentido, es decir:

$$\text{Dominio natural de } f = \{x \in R \mid f(x) \in R\}$$

Definición: Si *f* es una función con dominio A, entonces la ***gráfica de f*** es el conjunto de todas las parejas ordenadas (*x*,*f*(*x*)) tales que *x* pertenece a A, es decir,

$$\text{Gráfica de } f = \{(x,f(x)) \mid x \in A\}$$

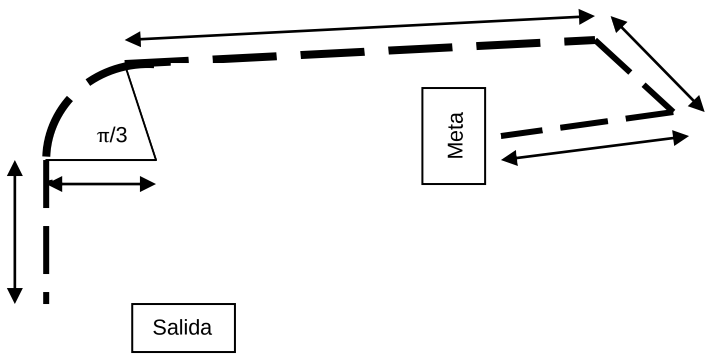
Hasta ahora en todas las funciones que se han visto, la regla de asignación está dada por una expresión algebraica; sin embargo esto no tiene porqué ser así. Estudiemos un poco unas funciones para las cuales la regla de asignación está dada mediante una construcción geométrica, **las funciones trigonométricas**; para ello es necesario aclarar qué es un radian. Así pues veamos el siguiente video:

Definición de radian

Definición de radian: http://www.youtube.com/watch?v=Q34T3VzKlbY

a) (CP) Una pista de carreras de motocicleta tiene la siguiente forma:

(Se puede programar para que las distancias que se marquen con una flecha cambien cada vez que el ejercicio se intente y el ángulo puede cambiar de amplitud



De acuerdo a la definición de función dada anteriormente, para definir las funciones seno y coseno es necesario determinar tres elementos, conjunto A, conjunto B y la regla de asignación:

Función seno

- El conjunto A será el conjunto de todos los números reales
- El conjunto B también será el conjunto de los números reales
- La regla de asignación es la siguiente: a cada número real x se le asigna la **segunda componente** del punto de intersección entre la circunferencia de radio 1 y **el ángulo de amplitud x** radianes cuyo vértice esta en el origen y el lado inicial es el eje horizontal
- Notación: senx representa un número real que depende de x

Para aclarar la regla de asignación observa la siguiente animación:

Función seno

La descripción de la animación se puede observar en el **Anexo B**

Función coseno

- El conjunto A será el conjunto de todos los números reales
- El conjunto B también será el conjunto de los números reales
- La regla de asignación es la siguiente: a cada número real x se le asigna la **primera componente** del punto de intersección entre la circunferencia de radio 1 y **el ángulo de amplitud x** radianes cuyo vértice esta en el origen y el lado inicial es el eje horizontal

Para aclarar la regla de asignación observa la siguiente animación:

Función coseno

La descripción de la animación se puede observar en el **Anexo B**

b) (NP) Usando la definición dada de las funciones seno y coseno realiza las graficas de estas dos funciones y contesta

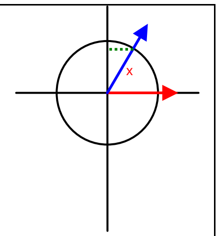
- ¿Cuál es el mayor valor que pueden tomar estas funciones?
- ¿Cuánto es lo mínimo que se puede trasladar horizontalmente esta función para que su gráfica sea la misma?
- ¿Cuánto se debe trasladar la gráfica de la función seno para que su gráfica coincida con la de coseno?
- ¿Cuánto se debe trasladar la gráfica de la función coseno para que su gráfica coincida con la de seno?
- ¿Qué ocurre cuando se refleja la gráfica de la función coseno con respecto al eje vertical?

- ¿Qué ocurre cuando se refleja la gráfica de la función coseno con respecto al eje vertical?
- Describe todos los ejes de simetría verticales que tienen cada una de estas dos funciones

c) (CN) Un arquitecto quiere realizar una construcción de forma rectangular de tres pisos y a dos aguas, sabe que la altura de la construcción depende de la inclinación del techo. Si las paredes de la construcción deben ser de 1,8m, encuentra una función que exprese la altura de la construcción en términos del ángulo de inclinación del techo.

Conjunto A ___ Regla de asignación ____ Conjunto B _____

d) (P) En la siguiente tabla se muestran los valores de las funciones seno y coseno en algunos ángulos especiales.

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	
senx	0	1/2	√2/2	√3/2	1	0	
cosx	1	√3/2	√2/2	1/2	0	-1	

Usando esta información y la definición dada anteriormente encuentre el valor de sen□=____ y cos□=____ (en los recuadros puede aparecer cualquier múltiplo de π, $\pi/2$, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$)

e) Otras funciones trigonométricas

Conociendo estas dos funciones trigonométricas se pueden definir las siguientes funciones

cscx=1/senx secx=1/cosx tanx=sex/cosx

Encuentre el dominio natural de cada una de las funciones definidas anteriormente y realice su gráfica

f) (P) Identidades trigonométricas

Notación: Escribir sen^{2}x quiere decir (senx)^2 que es diferente a sen(x^2)

Realiza las operaciones indicada ambos miembros de la igualdad dada y relaciona la operación con las identidades I y II que ella genera

Igualdad	**Operación A**	**Operación B**
$sen^2x+cos^2x=1$	Dividir por cos^2x	Dividir por sen^2x
Identidad	I. $1+cot^2x= csc^2x$	II. $tan^2x+1 =sec^2x$

Para estudiar más sobre identidades trigonométricas puedes seguir el siguiente enlace

Identidades trigonométricas

Identidades trigonométricas: http://www.vitutor.com/al/trigo/trigo_1.html

En muchas oportunidades para poder describir una situación se requiere de más de una expresión por ejemplo:

g) En un almacén se realizan descuentos de acuerdo a la cantidad de artículos que se quieran adquirir, por ejemplo: el precio por cuaderno cuadriculado de 100 hojas grande y cosido es de $1.850; si se quieren comprar de 12 a 30 cuadernos se hace un descuento del 1% del valor original, si se quieren comprar de 31 a 60 cuadernos, se hace un descuento del 5% del valor original y si se van a adquirir 61 o más cuadernos se realiza un descuento del 10% del valor original.

- Elabora la gráfica el precio de los cuadernos si no se hace descuento
- Encuentra una función que indique el precio de los cuadernos con respecto al número de cuadernos adquiridos si se hace un descuento del 1%
- Encuentra una función que indique el precio de los cuadernos con respecto al número de cuadernos adquiridos si se hace un descuento del 5%
- Encuentra una función que indique el precio de los cuadernos con respecto al número de cuadernos adquiridos si se hace un descuento del 10%

- Ubica las expresiones que encontraste junto a la condición que debe cumplir la cantidad de cuadernos adquiridos para realizar el descuento correspondiente

	Menos de de 12 cuadernos
	De 12 3 30 cuadernos
	De 31 a 60 cuadernos
	Más de 60 cuadernos

h)(P) Realiza la gráfica de la siguiente función y encuentra su dominio natural

$$f(x)=\begin{cases} 3x+5 & \text{si} \quad x\leq -3 \\ 1/x & \text{si} \quad -3<x\leq 4 \\ X^2-16 & \text{si} \quad 4<x \end{cases}$$

B. Anexo: Descripción de las animaciones

Densidad:

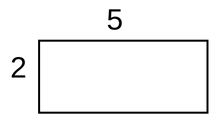
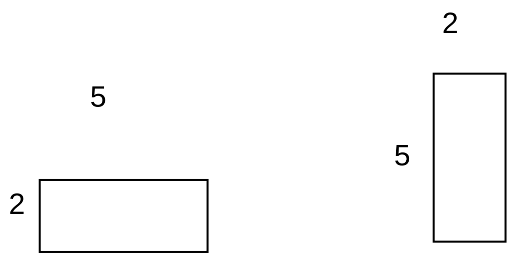
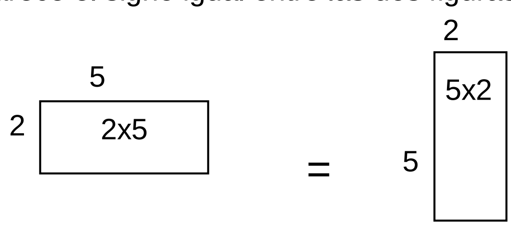
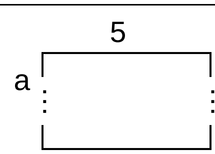
Objetivo: Mostrar de forma visual la densidad de los números reales

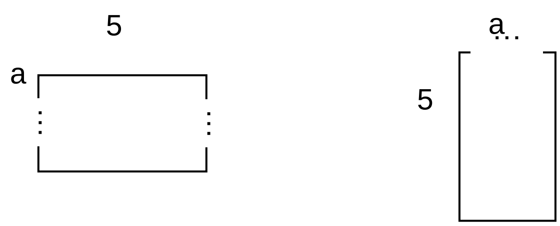
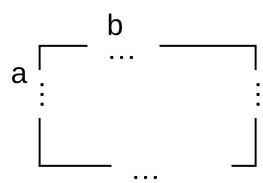
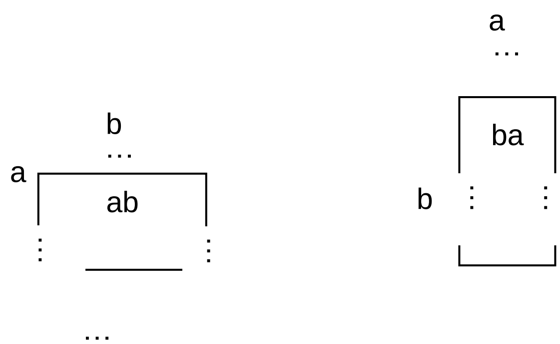
Descripción:

Escena	**Lo que se ve**
1	Se muestra la recta real con los puntos 1 y 0
2	Aparece ½ y se hace un acercamiento dejando fijo el cero y hasta que el número ½ tome la posición inicial del 1
3	Aparece ¼ y se hace un acercamiento dejando fijo el cero y hasta que el número ¼ toma la posición inicial del ½ en el final de la escena anterior
4	Aparece 1/8 y se hace un acercamiento dejando fijo el cero y hasta que el número 1/8 toma la posición inicial del ¼ en el final de la escena anterior
5…	Siguen apareciendo números sobre la recta, hasta que el acercamiento es tal que la pantalla se ve toda del color de la recta.

Propiedades del producto: conmutativa

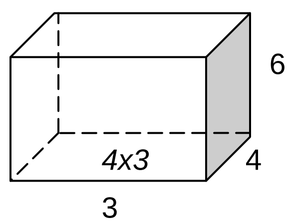
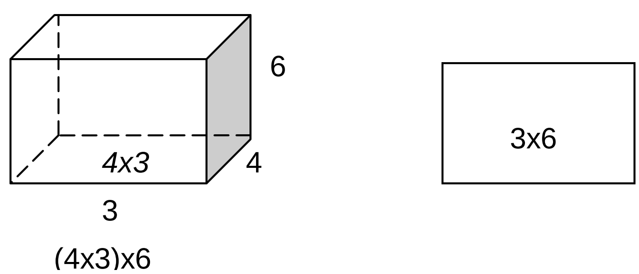
Escena	**Lo que se ve**
1	Sale un letrero que dice: propiedad conmutativa

2	
3	La figura que se ve inicialmente se duplica y la copia gira en sentido de las manecillas del reloj hasta que aparece esta imagen  Dentro del primer cuadro aparece el letrero 2x5 y dentro del segundo el letrero 5x2
4	Aparece el signo igual entre las dos figuras 
5	
6	La figura que se ve en la escena anterior se duplica y la copia gira en sentido de las manecillas del reloj hasta que aparece esta imagen

	 Aparece el signo de igualdad entre las dos figuras
7	
8	La figura que se ve en la escena anterior se duplica y la copia gira en sentido de las manecillas del reloj hasta que aparece esta imagen  Aparece el signo de igualdad entre las dos figuras
9	Aparece el letrero: para todo par de números reales a y b se tiene que ab=ba

Propiedades del producto: asociativa

Escena	Lo que se ve
1	Sale un letrero que dice: propiedad asociativa
2	Aparece este figura y dentro de ella sale el letrero 4x3 y se colorea el

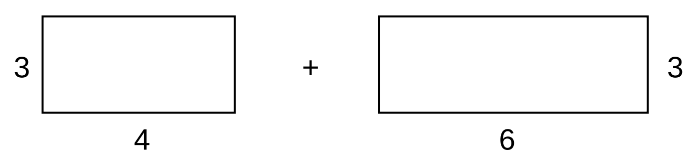
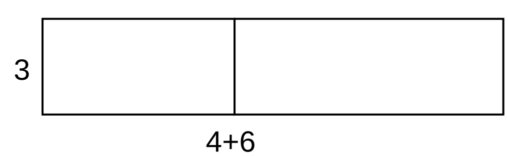
<table>
<tr><td></td><td>interior de la figura
</td></tr>
<tr><td>3</td><td>La figura se acuesta para formar la base de un paralelepípedo y se trasforma en

Aparece el letrero (4x3)x6</td></tr>
<tr><td>4</td><td>La cara frontal del paralelepípedo se duplica y se traslada al lado derecho, aparece dentro de esta cara el letrero 3x6

Aparece el signo de igualdad entre las dos expresiones</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Se le da profundidad al rectángulo de la derecha para formar un paralelepípedo idéntico al anterior y aparece bajo él un letrero que dice
4x(3x6)</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Se repite el mismo esquema pero con rectángulos de otro tamaño y en vez de números se indica la medida de los lados con letras</td></tr>
</table>

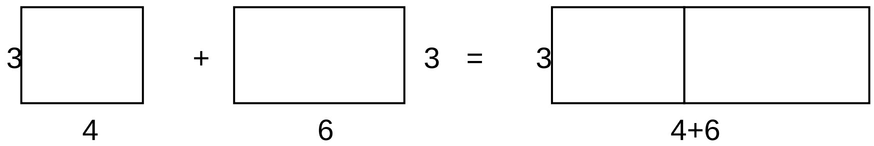
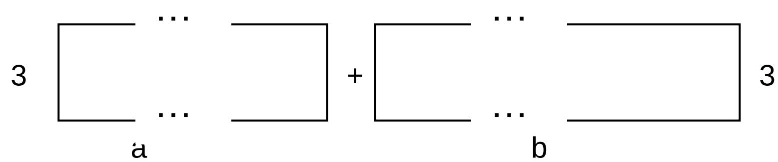
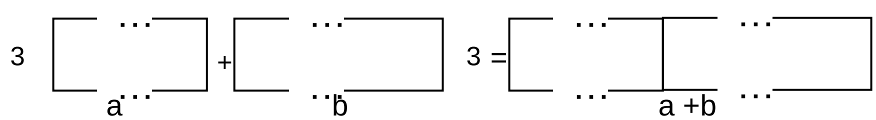
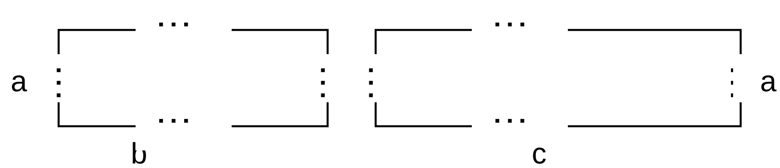
	(ab)c=a(bc)
7	Aparece el letrero: Esta propiedad nos permite escribir esta expresión sin necesidad de usar paréntesis

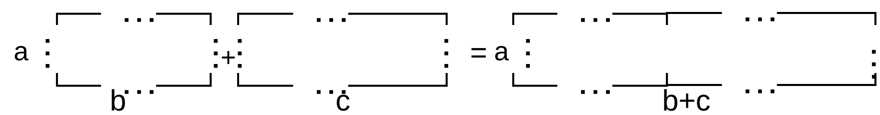
El producto distribuye respecto de la suma:

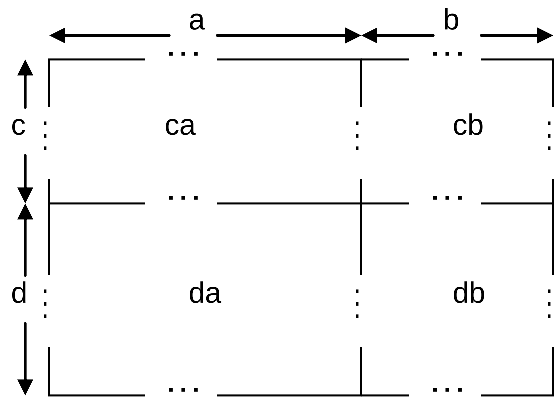
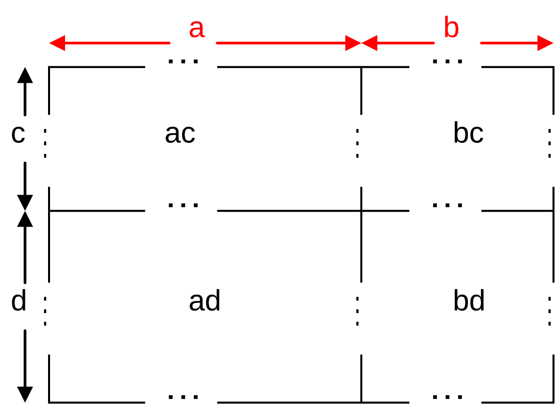
Objetivo: Dar un significado inicial a las propiedades de la suma y el producto de números reales

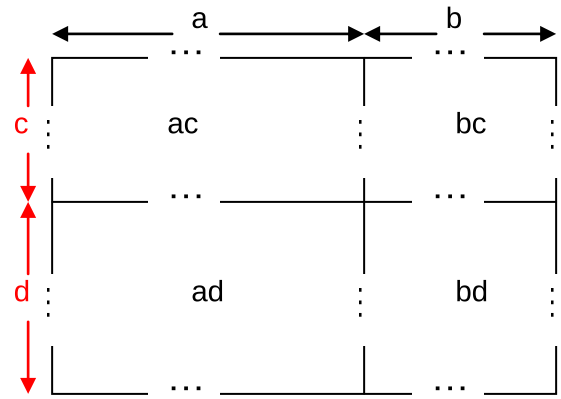
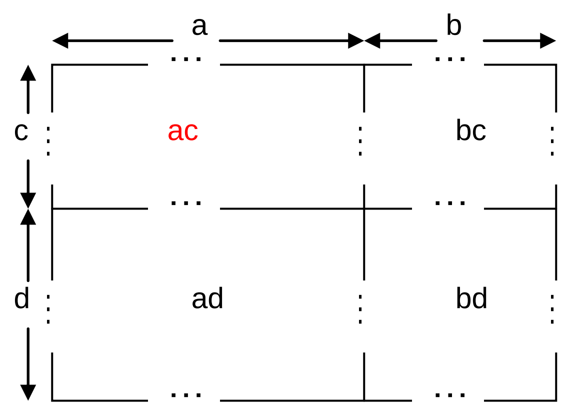
Descripción:

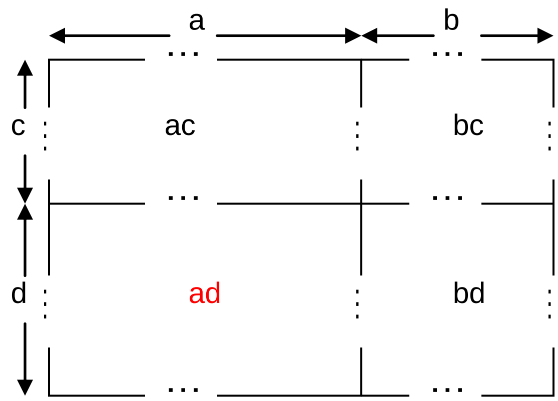
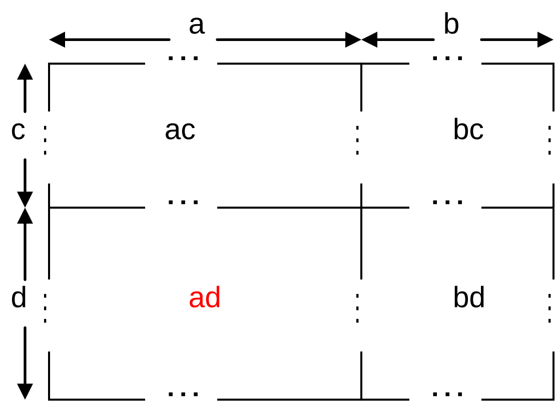
Escena	**Lo que se ve**
1	Sale un letrero que dice: distribución del producto con respecto a la suma
2	Aparece un rectángulo de tamaño 3x4 y otro de tamaño 3x6 
3	Dentro del primer rectángulo aparece el letrero 3x4, dentro del segundo aparece el letrero 3x6 y entre ellos, el signo +
4	Los dos rectángulos se unen
5	En la parte inferior aparece el letrero 4+6 
6	Se muestra la siguiente imagen en dónde el letrero en rojo se resalta

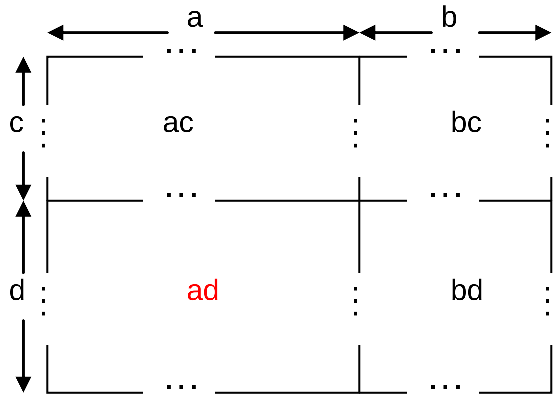
	 $3x4+3x6 = 3(4+6)$
7	Aparecen nuevamente dos rectángulos pero ahora de tamaño 3a y 3b 
8	Dentro del primer rectángulo aparece el letrero 3a, dentro del segundo aparece el letrero 3b y entre ellos, el signo +
9	Los dos rectángulos se unen
10	En la parte inferior aparece el letrero a+b
11	Se muestra la siguiente imagen en dónde el letrero en rojo se resalta  $3a + 3b =3 (a+b)$
12	Aparecen nuevamente dos rectángulos de tamaño ab y ac 
13	Dentro del primer rectángulo aparece el letrero ab, dentro del segundo aparece el letrero ac y entre ellos, el signo +

14	Los dos rectángulos se unen
15	En la parte inferior aparece el letrero b+c
16	Se muestra la siguiente imagen en dónde el letrero en rojo se resalta  ab + ac = a (b+c)
17	Sale el letrero: ¡RESUMIENDO!
18	Aparece: ab+ac=
19	Desparece el letrero anterior y aparece ab+ac= a(b+c)
20	Aparece: a (b+c)=
	Desaparece el letrero anterior y aparece a (b+c) = ab+
21	Desaparece el letrero anterior y aparece a (b+c)= ab+ac
22	Sale el letrero: ¡Esto se cumple cuando a,b y c son cualquier número real!
23	Sale el letrero: Intenta escribir una igualdad que represente el siguiente diagrama

	 Este letrero debe durar unos 10 segundos
24	Lo que está resaltado en rojo “salta” a la parte inferior y se transforma en (a+b)  (a+b)
25	Lo que está resaltado en rojo “salta” a la parte inferior y se transforma en (c+d)=

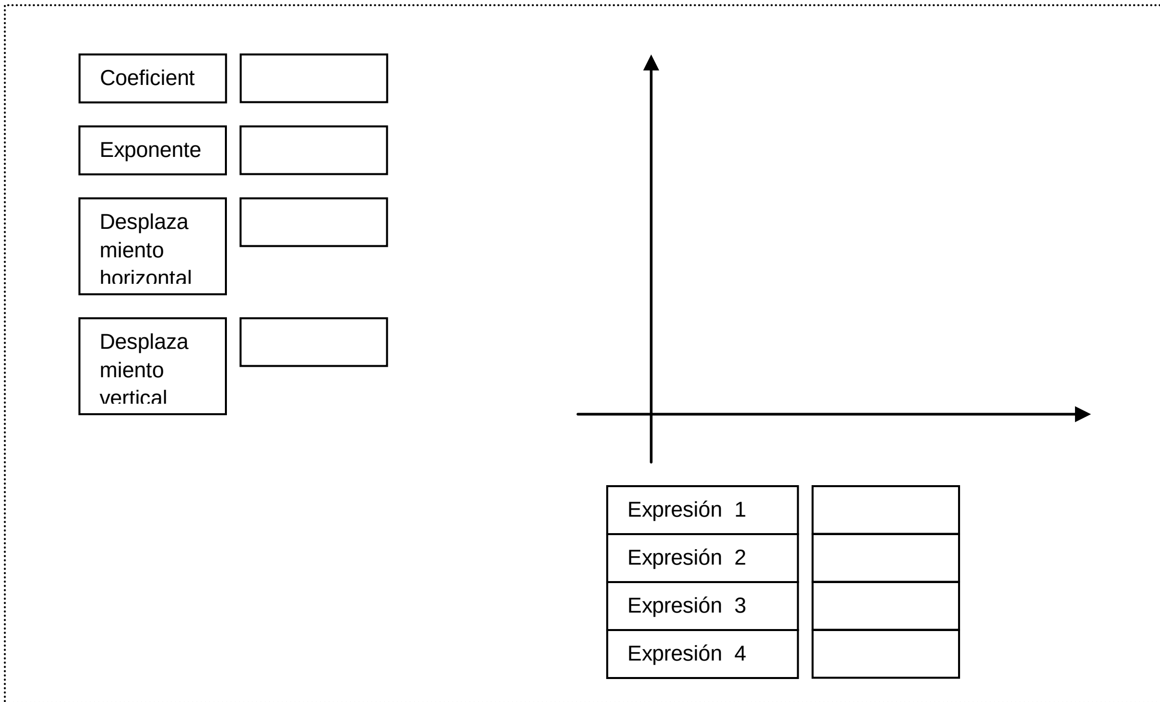
	 (a+b)(c+d)=
26	Lo que esta resaltado en rojo “salta” a la parte inferior y se transforma en ac +  (a+b)(c+d)= ac +
27	Lo que esta resaltado en rojo “salta” a la parte inferior y se transforma en ad +

	 $(a+b)(c+d)= ac + ad +$
28	Lo que esta resaltado en rojo “salta” a la parte inferior y se transforma en bc +  $(a+b)(c+d)= ac + ad + bc+$
29	Lo que esta resaltado en rojo “salta” a la parte inferior y se transforma en bd

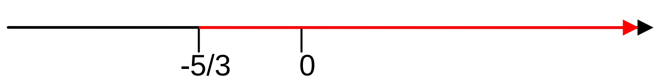
	 $(a+b)(c+d)= ac + ad + bc+ bd$

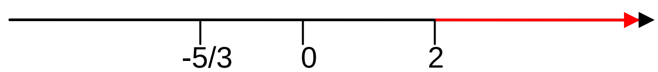
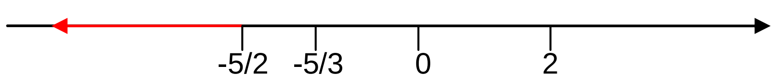
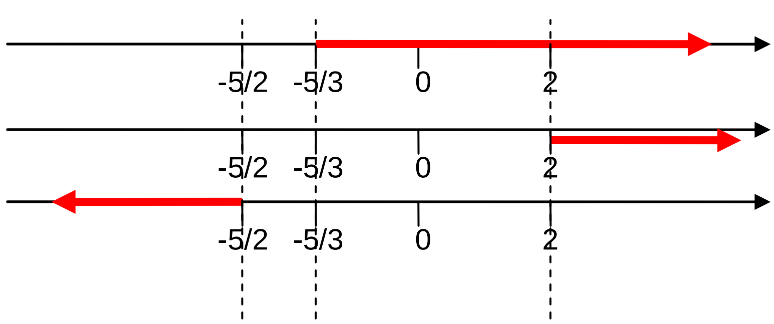
Potencias x^n

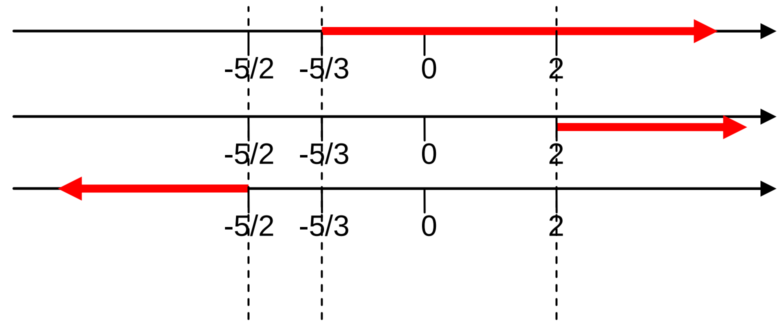
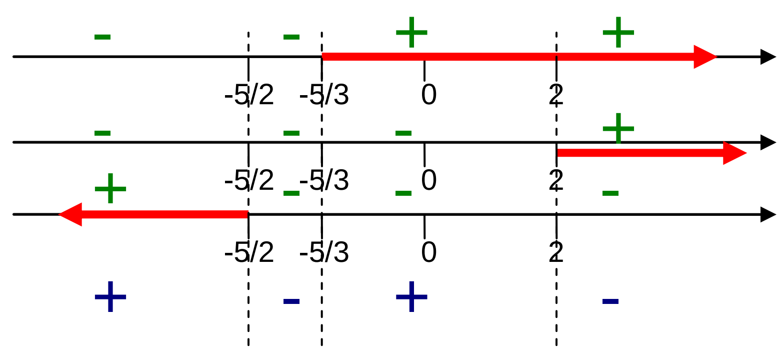
La idea es realizar un interactivo en donde los estudiantes puedan graficar hasta 4 funciones potencia en un solo plano, cambiando el exponente por cualquier entero positivo par (o impar), el coeficiente de la potencia, realizar una traslación horizontal o vertical



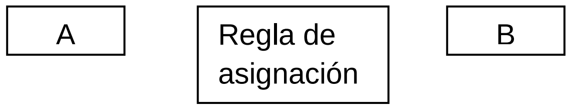
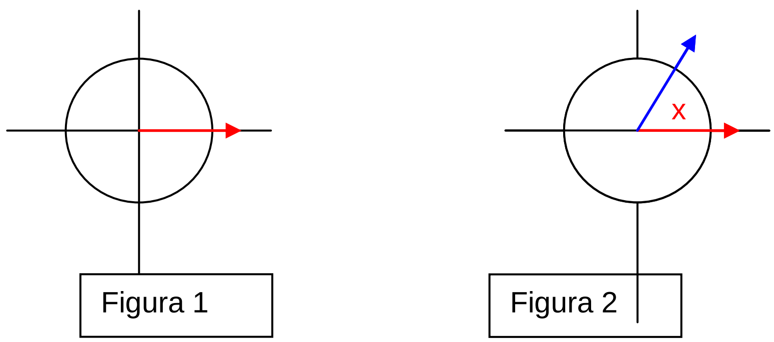
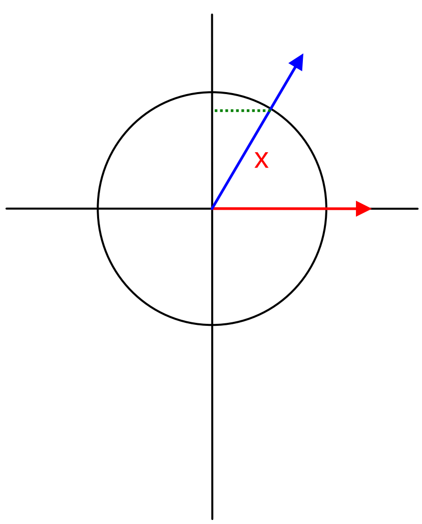
Desigualdades con varios factores

Escena	**Lo que se ve**
1	Aparece la expresión (3x+5)(2x-4)(5-2x)>0
2	Se resalta el primer factor (3x+5)(2x-4)(5-2x)>0 Y se muestra la siguiente serie de desigualdades: 3x+5>0 3x>-5 x>-5/3
3	Aparece el letrero: 3x+5>0 cuando x ∈ (-5/3,∞)
4	Junto al letrero anterior aparece el dibujo 

5	Se resalta el segundo factor (3x+5)(2x-4)(5-2x)>0 Y se muestra la siguiente serie de desigualdades: $2x-4>0$ $2x>4$ $x>2$
6	Aparece el letrero: 2x-4>0 cuando x $\in (2,\infty)$
7	Junto al letrero anterior aparece el dibujo 
8	Se resalta el tercer factor (3x+5)(2x-4)(5-2x)>0 Y se muestra la siguiente serie de desigualdades: $5-2x>0$ $-2x>-5$ $X<5/2$
9	Aparece el letrero: 5-2x>0 cuando x $\in (-\infty,5/2)$
10	Junto al letrero anterior aparece el dibujo 
11	Aparece el dibujo 

12	En cada uno de los intervalos de la primera recta aparece el letrero 3x+5>0 que se transforma en un signo – si esta negra y en un signo + si esta roja 
13	Ocurre lo mismo que en la escena anterior pero con la expresión 2x-4>0 y la segunda recta
14	Ocurre lo mismo que en la escena anterior pero con la expresión 5-2x>0 y la tercera recta
15	Aparece el letrero: si multiplicamos van apareciendo los signos azules uno por uno 
16	Los signos + azules se transforman por la siguiente expresión: (3x+5)(2x-4)(5-2x)>0
17	Aparece el letrero: Por lo tanto la solución es: (3x+5)(2x-4)(5-2x)>0 cuando x ∈ (-∞,5/2) U(-5/3,2)

Función seno (coseno)

Escena	Lo que se ve
1	Aparece el siguiente gráfico grande y cambia de tamaño para permanecer en la parte superior durante toda la animación 
2	La letra A cambia por R y de esa caja sale un número x
3	Se resalta la caja de Regla de asignación y aparece la circunferencia de radio 1 dibujada sobre el plano cartesiano
4	Sobre la circunferencia se retiñe poco a poco un arco de amplitud x, es decir la figura 1 se transforma en la figura 2 
5	Se resalta el punto de intersección entre la circunferencia y la recta azul
6	Se dibuja de derecha a izquierda la línea punteada 

	(para la función coseno la línea punteada es vertical)
7	Se resalta el punto donde llega la línea punteada y se marca con el letrero senx (cosx)
8	La tercera caja se resalta, la letra B cambia por una R y el letrero sen x entra a esta caja

C. Anexo: Prueba de entrada

PRUEBA DE ENTRADA CURSO DE CÁLCULO DIFERENCIÁL

Fecha: _______________

Nombre: ____________________________ Sexo: F__ M___ Edad: ____

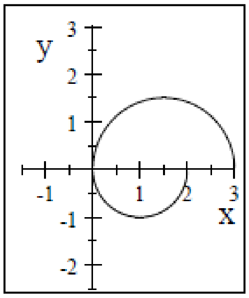
Carrera:_____________________________ Fecha de ingreso a la UN: ______________

¿Asistió al curso de matemáticas básica?:	Si ___	Aprobó: Si___ No___
	No___	
¿Está viendo este curso por primera vez?	Si ___	
	No ___	la he visto ____ veces

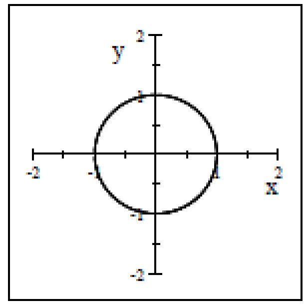
CUESTIONARIO

LAS SIGUIENTES SON GRÁFICAS DE RELACIONES DEFINIDAS EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES, ESTO ES: DECIMOS QUE ***"x, un número real, está relacionado con otro número real y, si y solo si la pareja ordenada de números reales (X,Y), es punto de la gráfica"***

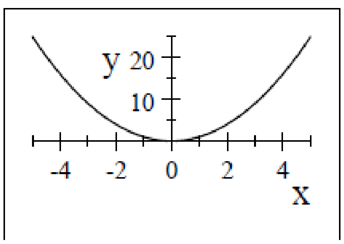
A)



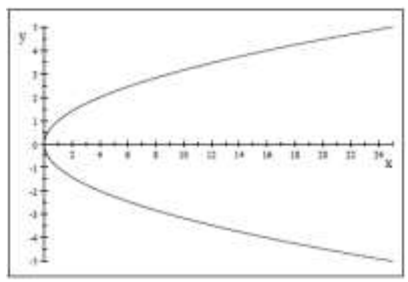
B)



C)



D)



1.

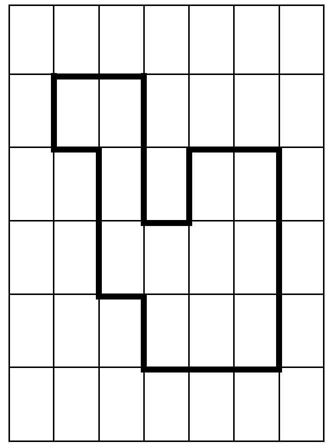
a) Determinar en cada una de las gráficas el dominio y recorrido de la relación.

b) Describir con sus propias palabras o en forma de conjunto el dominio y recorrido de cada relación

c) En cuáles relación se hace verdadera la siguiente afirmación : ***A cada elemento del dominio le corresponde uno y solo uno del recorrido.***

A	B	C	D
En este espacio explique brevemente por qué ha escogido esta respuesta			

2. En la figura se tiene una cuadrícula donde se ha dibujado una región limitada por una línea poligonal



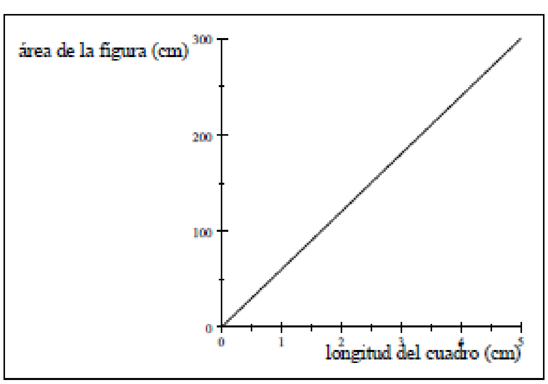
La siguiente tabla relaciona la longitud del lado de cada cuadrado de la cuadrícula, con el área de la región descrita por la línea poligonal.

Longitud del lado del cuadrado de la cuadrícula dada en centímetros	1	2	3	4	5	6
Área de la región dada en centímetros cuadrados	12	48				

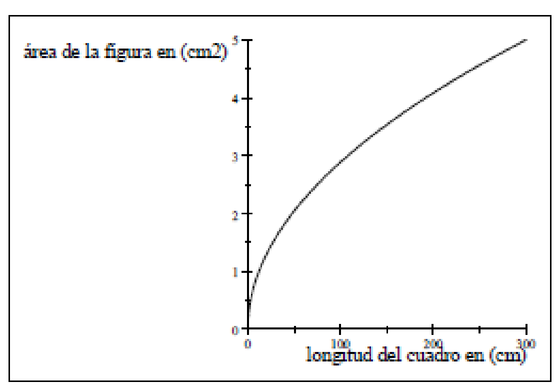
a) complete la tabla

b) De las gráficas dadas a continuación ¿cuál cree que es la que mejor se ajusta para representar gráficamente los datos de la tabla?

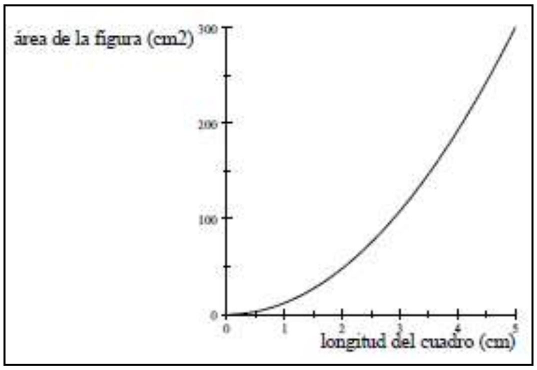
A



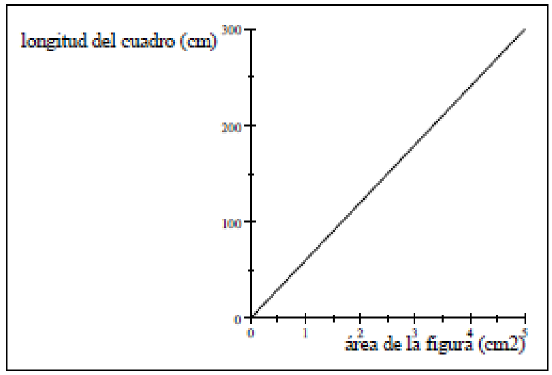
B



C



D



A	B	C	D
En este espacio explique brevemente por qué ha escogido esta respuesta			

c) De las ecuaciones dadas a continuación cual cree que es la que mejor sirve para reproducir tanto la gráfica como la tabla de datos

A $\psi = \mu\xi + \beta$ donde ψ es la longitud del lado de la cuadrícula, ξ el área de la figura y μ y β son números reales	B $\psi = \mu\xi + \beta$ donde ξ es la longitud del lado de la cuadrícula, ψ el área de la figura y μ y β son números reales
C $y = ax^2 + bx + c$ donde ψ es la longitud del lado de la cuadrícula, ξ el área de la figura y α; β y χ son números reales	D $y = ax^2 + bx + c$ donde ξ es la longitud del lado de la cuadrícula, ψ el área de la figura y α; β y χ son números reales

E	F
$y = ke^{ax} + b$ donde x es la longitud del lado de la cuadrícula y el área de la figura y k, a y b son números reales	$y = ke^{ax} + b$ donde y es la longitud del lado de la cuadrícula x el área de la figura y k, a y b son números reales

A	B	C	D	E	F
En este espacio explique brevemente por qué ha escogido esta respuesta					

3. LAS SIGUIENTES ECUACIONES SE USAN PARA DEFINIR RELACIONES EN LOS NÚMEROS REALES DE LA SIGUIENTE MANERA: Se dice que ***" x, número real, está relacionado con el número real y si y solo si hacen válida la ecuación"***

a) Describa el dominio de cada una de las relaciones

b) ¿En cuáles relaciones se hace válida la afirmación **a cada elemento del dominio le corresponde una y sola una imagen**?

A	B
$x^2 + y^2 = 1$	$y^2 = 10x$
C	D
$y = \begin{cases} x & x \leq -2 \\ 3x+4 & -2 < x < 2 \\ x^4 - 1 & 2 \leq x \end{cases}$	$x = \lvert y \rvert$

A	B	C	D
En este espacio explique brevemente por qué ha escogido esta respuesta			

4. En cada uno de los siguientes ejercicios se realiza un razonamiento para encontrar el valor de x que hace la primera afirmación verdadera, algunos de ellos son erróneos. Si tienen algún error, señala el renglón en el cual se comete y escribe cual fue el error cometido

<table>
<tr><td>I

Afirmación: $\ln(3x) - \ln 2x = 1$</td><td rowspan="2">Explicación:</td></tr>
<tr><td>Razonamiento:
$\ln(3x) - \ln 2x = 1$
$\ln(3x - 2x) = 1$
$\ln(x) = 1$
$e^{\ln x} = e^1$
$x = e^1$</td></tr>
<tr><td>II

Afirmación: $\ln(6x^2) = \ln(3x)$</td><td rowspan="2">Explicación:</td></tr>
<tr><td>Razonamiento:</td></tr>
</table>

$\ln(6x^2) = \ln(3x)$ $\frac{\ln(6x^2)}{\ln(3x)} = 1$ $\frac{6x^2}{3x} = 1$ $2x = 1$ $x = \frac{1}{2}$	
III Afirmación: $\sin(\pi x) = \cos(x)$	Explicación:
Razonamiento: $\sin(\pi x) = \cos(x)$ $\frac{\sin(\pi x)}{\cos(x)} = 1$ $\tan(\frac{\pi x}{x}) = 1$ $\tan \pi = 0$	
IV Afirmación: $\sec(x) - \sec(5x^2) = 0$	Explicación:
Razonamiento: $\sec(x) - \sec(5x^2) = 0$ $\sec(x) = \sec(5x^2)$ $\frac{\sec(x)}{\sec(5x^2)} = 1$ $\frac{x}{5x^2} = 1$ $\frac{1}{5x} = 1$ $1 = 5x$ $x = \frac{1}{5}$	

D. Anexo: Segunda prueba

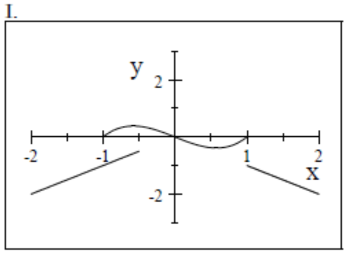
SEGUNDA PRUEBA CURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Fecha:________________
Nombre: ______________________ Sexso: F___ M___ Edad:___
Carrera: _________________ Semestre de ingresó a la UN: (_____)(_____)
Año semestre

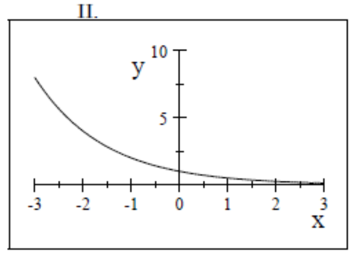
CUESTIONARIO

1. Las siguientes son gráficas de relaciones definidas en el conjunto de los números reales, esto es: "x un número real, está relacionado con otro número real y, si y solo si la pareja ordenada de números reales (x, y) es un punto de la gráfica"

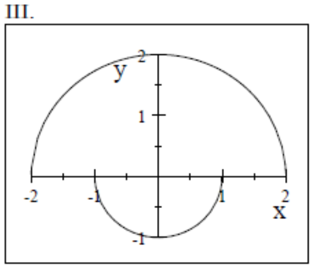
I.



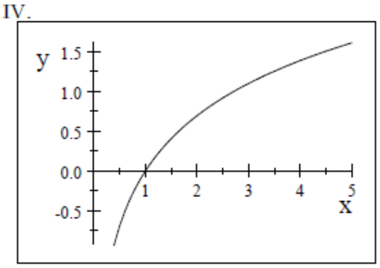
II.



III.



IV.



Para cada una de las gráficas anteriores complete la siguiente información

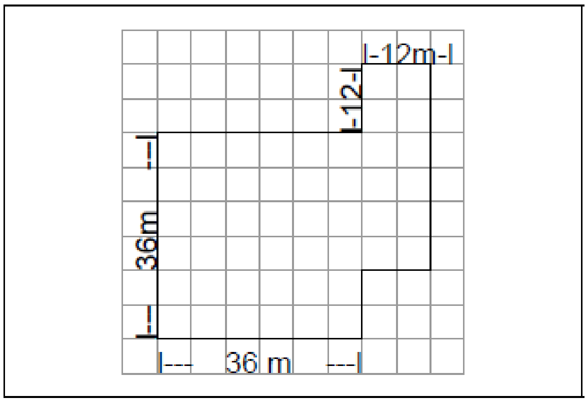
I. Dominio: Rangο:
¿Es función? Si ___ No___ porque:
Si es función identifique los intevalos donde es cresciente si los hay:

II. Dominio: Rango:
¿Es función? Si ___ No___ porque:
Si es función identifique los intevalos donde es cresciente si los hay:

III. Dominio: Rango:
¿Es función? Si ___ No___ porque:
Si es función identifique los intevalos donde es cresciente si los ha

IV. Dominio: Rango:
¿Es función? Si ___ No___ porque:
Si es función identifique los intevalos donde es cresciente si los ha

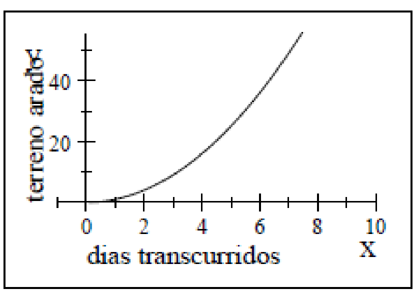
2. Un agricultor esta preparando un terreno para la nueva siembra, el terreno tiene la forma que se muestra en la siguiente figura



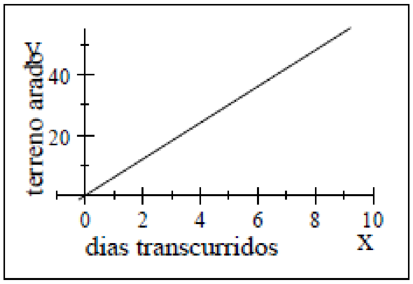
Si cada día puede arar un sesenta y cuatroavo de la totalidad del terreno, realiza una tabla en donde se muestre la relación entre el tiempo transcurrido en días y la cantidad de terreno arado en metros cuadrados.

tiempo transcurrido (días)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
terreno arado (m^2)									

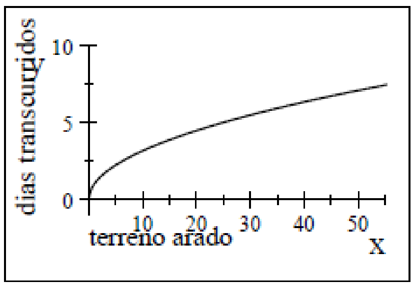
De las siguientes gráficas diga si cada una de ellas representa la situación descrita anteriormente y por que



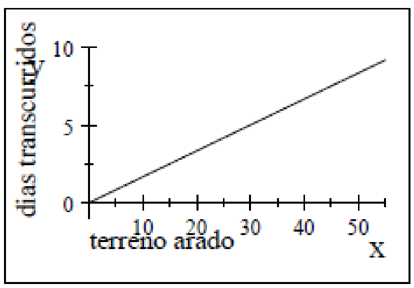
describe la situación: Si___ No___
Porque:___________________________



describe la situación: Si___ No___
Porque:________________________________



describe la situación: Si___ No___
Porque:________________________________



describe la situación: Si___ No___
Porque:________________________________

Esta situación se puede describir mediante una expresión de tipo

Lineal donde x representa:___________ porque:______________________
$y = ax + b$ donde y representa:___________ ______________________

Cuadràtica donde x representa:___________ porque:__________________
$y = ax^2 + bx + c$ donde y representa:___________ ______________________

Polinomial de grado mayor a 2 donde x representa:___________ porque:_____
$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ donde y representa:___________ _________

Exponencial donde x representa:___________ porque:______________________
$y = a^{mx} + b$ donde y representa:___________ ______________________

Logarítmica donde x representa:___________ porque:____________________
$y = \log_a mx + b$ donde y representa:___________ ______________________

3. Las siguientes son relaciones definidas en el conjunto de los números reales, esto es: "x un número real, está relacionado con otro número real y, si y solo si la pareja ordenada de números reales (x, y) hace verdadera la igualdad"

I. $x + y = 4$ II. $x^2 - y = 1$ III. $|x + y| = 1$
IV. $y = \sqrt{-x}$ V. $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ VI. $y \ln x = e^4$

Para cada una de las relaciones anteriores complete la siguiente información

I. Dominio: Rango:
¿Es función? Si ___ No___ porque:

II. Dominio: Rango:
¿Es función? Si ___ No___ porque:

III. Dominio: Rango:
¿Es función? Si ___ No___ porque:

IV. Dominio: Rango:
¿Es función? Si ___ No___ porque:

V. Dominio: Rango:
¿Es función? Si ___ No___ porque:

VI. Dominio: Rango:
¿Es función? Si ___ No___ porque:

4. En cada uno de los siguientes ejercios se muestra un procedimiento **para encontrar una expresión para x en términos de y** . Algunos de ellos son erroneos. Si tiene algún error, encierra el renglón en donde se comete e indica cual es.

I. $y = e^{4x} + e^{-x}$	explicación
$y = e^{4x} + e^{-x}$ $\ln y = \ln e^{4x} + \ln e^{-x}$ $\ln y = 4x - x$ $\ln y = 3x$ $\frac{\ln y}{3} = x$	
II. $y = 2\cos x \tan 2x$	explicación
$y = 2\cos x \tan 2x$ $y = 2\cos x \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$ $y = \frac{2\cos x \sin 2x}{\cos 2x}$ $y = \frac{\cos x \sin 2x}{\cos x}$ $y = \sin 2x$ $\sin^{-1} y = 2x$ $\frac{\sin^{-1} y}{2} = x$	
III. $\frac{\sin(3\pi x^2)}{\cos(4\pi x)} = y$	explicación
$\frac{\sin(3\pi x^2)}{\cos(4\pi x)} = y$ $\frac{\sin(3x)}{\cos(4)} = y$ $\tan(\frac{3x}{4}) = y$ $\frac{3x}{4} = \tan^{-1}(y)$ $x = \frac{4}{3}\tan^{-1}(y)$	
IV. $y = \ln(5x^2) - \ln(15x)$	explicación
$y = \ln(5x^2) - \ln(15x)$ $y = \frac{\ln(5x^2)}{\ln(15x)}$ $y = \frac{5x^2}{15x}$ $y = \frac{x}{3}$ $3y = x$	

Bibliografía

- N. Luzin, Function I. En: American Mathematical Montly.105(1)(1998), 59-67
- N. Luzin, Function II. En: American Mathematical Montly.105(1)(1998), 263-270
- Sastre Vázquez, P.; Rey, G. and Boubée, C., El concepto de función a través de la historia. En: Revista Iberoamericana de educación matemática, 16 (2008) 141-155
- Azcárate G. Carmen y Camacho M. Matías, Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático. En: Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10 (2) (1989), 135- 149
- Azcárate G. Carmen y Deulofeu P. Jordin, Funciones y sus gráficas, Editorial Síntesis, 1989
- Soca R. Maertín, Camacho M. Matias, Palarea M. María Mercedes y Hernández D. Josefa; Iniciación al álgebra, Editorial Síntesis, 1989
- Stewart James, Cálculo de una variable: trascendentes tempranas, cuarta edición, Thomson learning editores, 2001