



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# Contraste de la Hipótesis de Martingala para Series de Tiempo Económicas

Duván Humberto Cataño Salazar

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Estadística  
Medellín, Colombia  
2012



# Contraste de la Hipótesis de Martingala para Series de Tiempo Económicas

**Duván Humberto Cataño Salazar**

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Ciencias Estadística**

Director:

Ph.D. Jaime Alberto Londoño Londoño

Codirector:

Ph.D. César Augusto Gómez Vélez

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Escuela de Estadística  
Medellín, Colombia  
2012



Para mi familia, el tesoro de mi vida . . . con una dedicatoria especial a mi abuelo Alberto Cataño.



## Agradecimientos

Quiero dar un agradecimiento muy especial al profesor César Augusto Gómez Vélez, quien tuvo la mejor disposición y los mejores aportes en la realización de este trabajo, y al profesor Ermilson Velásquez por su gran apoyo en todo el proceso de revisión.





## Resumen

Este trabajo considera el modelo económico propuesto por Londoño (2009) “State-Dependent Utility”, el cual examina el problema de consumo e inversión que maximiza las utilidades. En éste se propone un nuevo enfoque a las utilidades en mercados completos y se obtienen las soluciones completas del problema de consumo e inversión óptima en un contexto muy general que incluye varias formas funcionales para las utilidades y en el cual se considera las restricciones generales de la riqueza permitida. Bajo consideraciones de este modelo, se deriva el proceso exponencial  $Z(t, p)$ , el cual en teoría debe exhibir un comportamiento martingala. Para verificar la veracidad de esta afirmación, se calibra tal serie y se emplean pruebas estadísticas de la hipótesis de martingala, entre las cuales se encuentran las pruebas de Durlauf (1991) y Deo (2000) que usa el análisis espectral para construir estadísticos de prueba estudiando el espectro de la primera diferencia del proceso y la prueba de Park-Wang (2005) que construye estadísticos bajo el supuesto de procesos markovianos de primer orden en media. Estos trabajos, proporcionan estadísticos que son funcionales del movimiento browniano, por lo tanto sus distribuciones nulas son halladas vía simulación. Bajo el comportamiento de martingala de esta serie, se derivan resultados acerca de la estructura de la función de utilidad, la cual refleja el riesgo y la satisfacción en los diferentes niveles de consumo de los agentes del mercado. En esta aplicación se emplearán datos de la economía estadounidense durante el período 1950-2012.

**Palabras clave:** Función de utilidad; consumo; inversión; hipótesis de martingala.

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Resumen</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>3</b>
2.1. Martingala . . . . .	3
2.2. Densidad Espectral . . . . .	7
2.3. Función de Utilidad . . . . .	9
<b>3. El Modelo</b>	<b>12</b>
3.1. Caracterización del mercado . . . . .	12
3.2. Estructuras de riqueza, ingreso y portafolio . . . . .	14
3.3. Condición de no arbitraje . . . . .	15
3.4. Consumo e inversión óptima bajo utilidades dependientes de estado. . . . .	17
<b>4. Pruebas de Martingala</b>	<b>19</b>
4.1. Pruebas espectrales de Durlauf . . . . .	19
4.2. Pruebas espectrales de Deo . . . . .	22
4.3. Pruebas de martingala de Park y Whang . . . . .	25
<b>5. Calibración y Ajuste de los datos</b>	<b>28</b>
5.1. Datos . . . . .	30
5.2. Calibración . . . . .	31
<b>6. Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>35</b>
6.1. Conclusiones . . . . .	35
6.2. Recomendaciones . . . . .	36
<b>A. Enlaces de datos usados</b>	<b>37</b>
<b>B. Simulaciones de distribuciones</b>	<b>38</b>
<b>C. Códigos de prueba</b>	<b>40</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>47</b>

# 1. Introducción

En la literatura económica de los mercados financieros, existe una amplia gama de modelos que sugiere que si los individuos actúan de forma racional, su comportamiento debe llevar a situaciones de equilibrio, las cuales se deben reflejar en hechos particulares de las series económicas. La verificación empírica de estas afirmaciones ha sido materia de estudio durante las últimas décadas, y en general, se destacan dos tipos de metodologías que tratan de conciliar los resultados obtenidos a partir de un modelo teórico con la realidad. La primera de ellas realiza un análisis contrafactual, en el que se construye un escenario que muestra como debería ser el comportamiento de la economía bajo los supuestos planteados por el modelo teórico, el cual se compara con los datos observados en la realidad. Mehra y Prescott (1985) y Weil (1989), son algunos ejemplos de este tipo de trabajos. La segunda aproximación, a partir del modelo teórico, deriva algunas consideraciones que pueden contrastarse utilizando técnicas estadísticas sobre las series económicas. Un ejemplo de esta última metodología se encuentra en el análisis de la evolución en el tiempo de los precios de las acciones y el consumo agregado de la economía, que se sugiere deberían exhibir un comportamiento de martingala 2.1.

Si bien los desarrollos desde el punto de vista teórico han sido bastante relevantes, al contrastar estas hipótesis con datos observados, ninguna de las metodologías han rendido resultados consistentes con la realidad. Por un lado, las conclusiones derivadas de los trabajos de Mehra y Prescott (1985) y Weil (1989) para los Estados Unidos generaron una serie de interrogantes conocidos en la literatura como los “enigmas” (puzzles) de la prima de riesgo accionario y de la tasa libre de riesgo, respectivamente. Utilizando el modelo de valoración de activos planteado por Lucas (1978), Mehra y Prescott (1985) encontraron que para justificar las elevadas primas de riesgo accionario (es decir, las diferencias existentes entre el retorno de las acciones y el retorno de una tasa libre de riesgo) los inversionistas deberían ser mucho más aversos al riesgo de lo que sugieren los modelos económicos tradicionales. Por su parte, al intentar resolver el enigma planteado por Mehra y Prescott (1985), Weil (1989) encuentra que la tasa de interés libre de riesgo exhibe niveles extremadamente bajos con respecto a lo que predecirían los modelos económicos.

Al igual que estos trabajos, la literatura reciente ha mostrado que los resultados teóricos obtenidos no son consistentes con los datos observados en la realidad. De esta manera, es importante incorporar nuevas consideraciones en la modelación del comportamiento de los individuos que permitan ofrecer una mayor comprensión de la evolución de la economía y a partir de éstos, desarrollar nuevas y más eficientes formas de capturar la realidad.

En una reciente aplicación, Londoño (2009) presenta un modelo de negociación en tiempo continuo, en el cual las preferencias de los individuos dependen del estado de la economía y deriva las relaciones óptimas de consumo e inversión en condiciones de equilibrio (Londoño (2009), Teorema 2). Bajo consideraciones del consumo óptimo se deriva la serie de tiempo  $Z(t, p) = f(c_t, r_t, \lambda_t)$ , donde  $c_t$  es una serie de consumo,  $r_t$  serie de tasa de interés libre de riesgo y  $\lambda_t$  parámetro de preferencias. Esta serie es construida a partir de la solución explícita del consumo óptimo, de una función de utilidad homogénea y de datos reales de variables como el consumo y tasa de interés. Dicha serie, en teoría, exhibe un comportamiento martingala, por tanto, este trabajo busca, a partir de pruebas estadísticas, los valores de  $\lambda_t$  en la serie  $Z(t, p)$  que la describen como una martingala. Posteriormente se analizará e interpretará la estructura de la función de

utilidad correspondiente a los valores de este parámetro para estudiar el riesgo y la satisfacción en diferentes niveles de consumo en Estados Unidos en el período (1950-2012). De esta manera, se observará, si es posible establecer que la modelación del comportamiento de los individuos a partir de este tipo de estructura de preferencias se ajusta mejor a la realidad de los mercados financieros.

La hipótesis de martingala en series de tiempo financieras ha sido objeto de gran atención en la literatura sobre finanzas empíricas. Mientras que la caminata aleatoria 2.2, requiere que sus incrementos sean independiente e idénticamente distribuidos, la martingala permite incrementos no correlacionados con una forma general de heterocedasticidad. Por lo tanto, la martingala es una versión más débil que la caminata aleatoria, y es más adecuada para series de tiempo financieras que muestran un alto grado de heterocedasticidad condicional. Si la serie de tiempo de un precio de un activo sigue una comportamiento martingala, entonces su retorno es puramente no predecible, no determinístico y los inversionistas no pueden hacer rentabilidades anormales en el tiempo, es decir, no existe oportunidades de arbitraje.

Para alcanzar los objetivos planteados, este documento se divide en cinco secciones incluyendo esta introducción. En la segunda, se presentan algunos conceptos preliminares. La tercera sección, presenta el modelo de Londoño (2009) y sus implicaciones sobre el comportamiento estocástico de las series de precios de las acciones, mientras que la cuarta sección se concentra en presentar varias técnicas estadísticas para probar la hipótesis de que una serie de tiempo exhibe un comportamiento de martingala. Por su parte, la quinta sección presenta los resultados obtenidos de aplicar las pruebas estadísticas a las consideraciones derivadas del modelo teórico. La sexta sección da algunas conclusiones y recomendaciones.

## 2. Preliminares

El objetivo de este capítulo es llevar a cabo una breve introducción a los conceptos y resultados necesarios para el desarrollo del trabajo teórico, dedicado al modelo económico y las pruebas de la hipótesis de martingala. Se da una breve introducción a la teoría de ciertos procesos estocásticos importantes empleados en la modelación financiera. Se dedica una especial atención a las ideas, no a al desarrollo técnico, las cuales pueden ser consultadas en textos como Doob(1953), Karatzas y Shreve(1991), Oksendal(1998), Billingsley(1995) y Wei(2006).

### 2.1. Martingala

En el contexto de modelización financiera, una clase importante de procesos estocásticos son los denominados procesos martingala, pues son la herramienta usada para modelar el ruido en los sistemas dinámicos considerados para los precios de los activos, en la deducción de precios de opciones y en la construcción de estrategias de cobertura. Probar la hipótesis de martingala en series de tiempo financieras ha sido objeto de gran atención en la literatura sobre finanzas empíricas. Mientras que la caminata aleatoria 2.2, requiere que sus incrementos sean idéntica e independientemente distribuidos, la martingala permite incrementos no correlacionados con una forma general de heterocedasticidad.<sup>1</sup> Por lo tanto, la martingala es una versión relajada del paseo aleatorio, y es más adecuado para series de tiempo financieras que muestran un alto grado de heterocedasticidad condicional. Si la serie de tiempo de un precio de los activos sigue una martingala, entonces su retorno es puramente no predecible y los inversores no pueden hacer rentabilidades anormales en el tiempo, es decir, no existe arbitraje.

En un marco informal, una martingala se trata de un proceso el cual evoluciona en forma “equilibrada”, es decir sin tendencia. Dicho proceso será importante en el desarrollo teórico de este trabajo, pues en lo que sigue también se estudiará pruebas de hipótesis para contrastar cuando una serie de tiempo es una realización de dicho proceso. A partir de esta interpretación, se presenta la definición de martingala en un contexto unidimensional y discreto.

**Definición 2.1** Sea  $X_1, X_2, \dots$ , una sucesión de variables aleatorias sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , y sea  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ , una sucesión de  $\sigma$ -álgebras en  $\mathcal{F}$ . La sucesión  $\{(X_n, \mathcal{F}_n)\}$ , es una martingala si las siguientes condiciones se cumplen:

- a.  $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$
- b.  $X_n$  es  $\mathcal{F}_n$ -medible
- c.  $E(|X_n|) < \infty$

---

<sup>1</sup>Se dice que existe heterocedasticidad en una serie de tiempo, cuando la varianza de los errores estocásticos no es constante a través del tiempo, es decir,  $E[\epsilon_t^2] = \sigma_t^2$ , donde cada  $\sigma_t^2$  depende de  $t$ , para  $t = 1, \dots, n$  y  $n$  es el número de observaciones.

$$d. E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$$

La sucesión  $X_1, X_2, \dots$ , se dice que es una martingala con respecto a las  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ . La condición (a) se expresa diciendo que  $\mathcal{F}_n$  forma una filtración, mientras que la condición (b) se expresa diciendo que  $X_n$ , es adaptado a la filtración  $\mathcal{F}_n$ .

Una súpermartingala relativa a  $(\mathcal{F}_n, P)$ , es definida similarmente, excepto que (d) es reemplazada por

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n \quad (2-1)$$

y una submartingala es definida con (d) reemplazada por

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n. \quad (2-2)$$

La definición anterior implica que, con la información disponible hasta un momento dado, a parte del valor actual de las series, no existe ningún tipo de información adicional que pueda mejorar la habilidad de los agentes para anticipar su evolución futura. En economía, algunos de los trabajos más relevantes en esta área de pensamiento se remontan a la hipótesis de los mercados eficientes de Fama (1970), el cual en su trabajo concluyó que los movimientos en los precios de las acciones son impredecibles siguiendo así un camino aleatorio, los “espíritus animales” de Keynes (1936), en el cual describe la influencia en el comportamiento humano para medir la confianza de los consumidores, entre otros.

Es importante señalar que en las aplicaciones financieras, la filtración  $\mathcal{F}$  está básicamente generada por los precios de los activos observados. Por ello, un requisito natural es que la selección de una cartera de valores en el instante  $t$  dependa sólo de la información disponible hasta dicho momento. La formalización de esta idea es exigir que la cartera está adaptada a tal filtración.

Presentamos ahora quizás, uno de los elementos más importantes en la literatura económica y financiera, el concepto de caminata aleatoria, la cual se fundamenta en la hipótesis de los mercados eficientes. Este elemento en sus comienzos fue empleado para probar la hipótesis de martingala, el cual examina cuando una serie de tiempo sigue un proceso  $AR(1)$ , con el coeficiente de la variable rezagada tendiendo a uno. Este procedimiento es esencialmente explorar las propiedades de autocorrelación de las primeras diferencias de la serie. A continuación se discute dicho concepto.

**Definición 2.2** Sea  $X_1, X_2, \dots$  una sucesión de variables aleatorias independientes tal que  $E[|X_k|] < \infty$ ,  $\forall k$  y

$$E[X_k] = 0, \quad \forall k.$$

Definamos ( $S_0 := 0$ ) y

$$S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

Entonces para  $n \geq 1$ , tenemos que

$$E[S_n|\mathcal{F}_{n-1}] = S_{n-1} + E[X_n] = S_{n-1},$$

donde el resultado se sigue por la linealidad de la esperanza condicional, la  $\mathcal{F}_{n-1}$ -medibilidad de  $S_{n-1}$  y de la esperanza nula de  $X_n$ .  $(S_n, \mathcal{F}_n)$ , es conocida como **caminata aleatoria**.

Un concepto que a menudo es usado para probar la hipótesis de martingala es la noción de diferencia de martingala.

**Definición 2.3** Una diferencia de martingala es una sucesión de variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, \mathcal{F}_n$  — adaptadas, definidas sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , que satisfacen las siguientes propiedades:

$$E[|X_n|] < \infty,$$

$$E[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 0, \quad \forall n.$$

Evidentemente, si  $S_n$  es una martingala y  $X_n = S_n - S_{n-1}$ , entonces  $\{X_n\}$ , es una diferencia de martingala. Recíprocamente, podemos definir una martingala como una suma parcial de una sucesión de diferencia de martingala. Un resultado fundamental es que una diferencia de martingala es no correlacionada con cualquier función de sus valores pasados, como nos muestra el siguiente lema.

**Lema 2.1** Si  $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ , es una diferencia de martingala, entonces

$$\text{Cov}[X_n, \phi(X_{n-1}, X_{n-2}, \dots)] = 0, \tag{2-3}$$

donde  $\phi$ , es cualquier función Borel medible e integrable. Como consecuencia de este resultado decimos que  $E[X_n X_{n-k}] = 0, \forall n$  y  $\forall k \neq 0$ .

Las martingalas representan situaciones donde hay aleatoriedad pero no tendencia o deriva. En un contexto económico, el concepto de eficiencia de los mercados implica que los valores futuros de algunas series deberían ser impredecibles dado el pasado. Esta es la famosa hipótesis de la diferencia de martingala y es una restricción más fuerte que la sola ausencia de correlación. Como consecuencia se tiene que no existe una función no trivial de los datos pasados, lineal o no lineal, la cual pueda ser usada para predecir los valores futuros. Probar esta hipótesis general es, sin embargo, prácticamente imposible, ya que abarca demasiadas posibilidades. Un enfoque más realista hacia la hipótesis de martingala ha sido a través de pruebas de la ausencia de correlación en virtud de diversos mecanismos de generación de datos y el análisis de autocorrelación mediante el análisis espectral, ver Deo(2000). Uno de los objetivos de este trabajo, es explorar pruebas de la hipótesis de martingala a partir de diferentes mecanismos estadísticos, tales como las pruebas de la caracterización de la densidad espectral bajo la hipótesis de diferencia de martingala Durlauf(1990) y Deo(2000) y de la construcción de estadísticos bajo el supuesto de procesos markovianos de primer orden en media <sup>2</sup> como los describe Park-Whang(2005). Posteriormente bajo un modelo económico teórico aplicarlos en datos reales y analizarlos en dicho contexto.

Se muestra la definición de Puente Browniano (Brownian Bridge), la cual emplearemos en los capítulos posteriores, donde se mostrará en los trabajos de Durlauf (1991) y Deo (2000), que las diferencias acumuladas de la densidad espectral teórica y el periodograma muestral de la serie bajo la hipótesis de la diferencia de martingala, converge a un Puente Browniano. Definimos primero el concepto de movimiento browniano y posteriormente la de puente browniano donde se discute algunas de sus propiedades.

<sup>2</sup>La serie de tiempo  $X_t$  se denomina proceso markoviano de primer orden en media si  $E[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] = E[X_t | X_{t-1}]$ , donde  $\mathcal{F}_t$  es el  $\sigma$ -campo generado por  $\{X_s\}$ , donde  $s \leq t$  y  $t > 1$ .

**Definición 2.4** *Un Movimiento Browniano (estándar, unidimensional), es un proceso estocástico adaptado continuo  $\{B_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq \infty\}$ , definido sobre algún espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , con las siguientes propiedades:*

- a.  $B_0 = 0$ , c.s
- b. El incremento  $(B_t - B_s)$  y  $\mathcal{F}_s$ , son independientes para  $0 \leq s < t$ .
- c.  $(B_t - B_s) \sim N(0, t - s)$ .

Si  $B_t$  es un movimiento Browniano y  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$ , entonces los incrementos  $\{B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\}_{j=1}^n$ , son independientes y la distribución de  $B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$  depende de  $t_j$  y  $t_{j-1}$  sólo a través de la diferencia  $t_j - t_{j-1}$ ; esto es, con distribución cero y varianza  $t_j - t_{j-1}$ . Decimos que el proceso  $B_t$  tiene incrementos estacionarios e independientes. Una de las propiedades interesantes es que  $B_t$  es una martingala cuadrado integrable y que la variación cuadrática es finita. Una interpretación intuitiva de la variable aleatoria  $B_t$  se puede pensar como el vector posición de una partícula respecto a un eje en cada instante  $t \geq 0$ .

**Proposición 2.1** *Las distribuciones conjuntas de un Movimiento Browniano son distribuciones normales multivariantes, cualesquiera que sean  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ :*

$$(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n}) \sim N(\mu, \Sigma) \quad (2-4)$$

### Observaciones

1. El Movimiento Browniano es un proceso gaussiano, donde la media y la autocovarianza vienen dadas por:
  - a.  $E[B_t] = 0$ .
  - b.  $Cov(B_s, B_t) = \min(s, t)$ , si  $s \leq t$ .
2. El Movimiento Browniano  $B_t$ , es proceso martingala, así como el proceso transformado  $\{B_t^2 - t\}$ .

Como una primera prueba de la utilidad del movimiento browniano, se tiene que algunos procesos gaussianos y no gaussianos de gran importancia práctica se deducen a partir de éste. Veamos algunos de ellos, partiendo de un movimiento browniano estándar unidimensional  $B_t$ .

**Definición 2.5** (Puente browniano). *Sea el proceso  $\{X_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq 1\}$ , definido por*

$$X_t = B_t - tB_1. \quad (2-5)$$

*Claramente*

$$X_0 = B_0 - 0 \cdot B_1 = 0 \quad y \quad X_1 = B_1 - 1 \cdot B_1 = 0.$$



Por esta razón (siempre empieza y termina en el origen) el proceso  $X_t$  se llama puente browniano. Se puede comprobar, que  $X_t$  es el proceso gaussiano caracterizado por las siguientes funciones de media y de covarianza:

$$E[X_t] = 0 \quad y \quad Cov[X_s, X_t] = \min\{s, t\} - st, \quad s, t \in [0, 1].$$

Como consecuencia, este proceso estocástico tiene incrementos estacionarios pero no independientes.

**Definición 2.6** (Movimiento browniano con deriva). *Sea el proceso estocástico  $\{X_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ , definido mediante:*

$$X_t = \mu t + \sigma B_t, \quad t \geq 0, \quad (2-6)$$

para  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma > 0$  constantes. Se sigue claramente que  $X_t$  es un proceso gaussiano con funciones de media y covarianza dadas por

$$E[X_t] = \mu t \quad y \quad Cov[X_s, X_t] = \sigma^2 \min\{s, t\}.$$

La función esperanza  $E[X_t] = \mu t$  es la denominada deriva determinística del proceso y esencialmente determina la tendencia de las caminos muestrales, mientras que  $\sigma$ , llamado coeficiente de volatilidad o de difusión, determina la mayor o menor variabilidad de las trayectorias.

## 2.2. Densidad Espectral

El análisis espectral es un método de estimación de la función de densidad espectral de una serie de tiempo dada. Esta técnica se refiere en esencia a buscar las periodicidades ocultas en los datos, mediante la estimación del espectro en toda la gama de frecuencias. Se estudiará en los capítulos posteriores, que a partir de la hipótesis de que una serie de tiempo es una diferencia de martingala, la construcción de estadísticos de prueba para contrastar pruebas de hipótesis y las características de la densidad espectral.

**Definición 2.7** *Sea  $X_1, X_2, \dots$  un proceso estacionario con valores reales, con sucesión de autocovarianzas  $\gamma_k$ , absolutamente convergente. Entonces, la transformada de Fourier de  $\gamma_k$  existe y está dada por la ecuación*

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\omega k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \cos \omega k, \quad (2-7)$$

$f(\omega)$  se denomina densidad espectral de  $X_t$ , donde  $i$  es la unidad imaginaria y  $-\pi \leq \omega \leq \pi$ .

La sucesión  $\gamma_k$  puede ser recuperada de  $f(\omega)$  a través de la transformada inversa de Fourier

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{i\omega k} d\omega. \quad (2-8)$$

La función  $f(\omega)$  tiene las siguientes importantes propiedades:

1.  $f(\omega) \geq 0$ .
2.  $f(\omega) = f(\omega + 2\pi)$ , es periódica con periodo  $2\pi$ .
3.  $f(\omega) = f(-\omega)$ , es decir que es una función par.
4.  $Var(X_t) = \gamma_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega$ .

Esta última propiedad, muestra que el espectro  $f(\omega)$ , puede ser interpretado como la descomposición de la varianza de un proceso. El término  $f(\omega)d\omega$  es la contribución a la varianza atribuible a la componente del proceso con frecuencias en el intervalo  $(\omega, \omega + d\omega)$ . Un pico en el espectro indica una importante contribución a la varianza de las componentes de frecuencias en el intervalo correspondiente.

Las ecuaciones 2-7 y 2-8 implican que el espectro  $f(\omega)$  y la sucesión de autocovarianzas  $\gamma_k$  constituyen un par de transformada de Fourier, con una siendo únicamente determinada de la otra. Por lo tanto, el enfoque del dominio del tiempo y el de dominio de frecuencia son teóricamente equivalentes. La razón para considerar ambas aproximaciones es que hay algunas ocasiones en la cual un enfoque es preferible al otro para presentación e interpretación, ver Wei(2006).

**Definición 2.8** *Un proceso estocástico  $a_1, a_2, \dots$ , es llamado ruido blanco, si es una sucesión de variables aleatorias no correlacionadas de una misma distribución con  $E(a_t) = \mu_a$  y  $Var(a_t) = \sigma_a^2$ .*

De la definición anterior, el proceso  $\{a_t\}$  es un proceso estacionario con función de autocovarianzas

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_a^2 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

El espectro teórico de esta sucesión de variables aleatorias según la ecuación 2-7, está dado por

$$f_a(\omega) = \sigma_a^2, \quad (2-9)$$

para  $-\pi \leq \omega \leq \pi$ , con la potencia resultante igual en todas las frecuencias. El nombre de ruido blanco proviene de la analogía de la luz blanca, la cual contiene todas las frecuencias de los colores en su espectro. Ahora tenemos los elementos para encadenar el periodograma, que es el concepto basado en el muestreo, con la densidad espectral, que es el concepto de base poblacional.

**Definición 2.9** *Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , una muestra. Definimos la transformada de Fourier discreta (DTF) como*

$$d(\omega_j) = n^{-1/2} \sum_{t=1}^n X_t e^{-2\pi i \omega_j t}, \quad (2-10)$$

para  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , donde las frecuencias  $\omega_{j/n}$  son llamadas frecuencias fundamentales.

Algunas veces es útil aprovechar la inversión de la DFT la cual muestra que la transformación lineal es uno a uno. Para la DTF tenemos que

$$X_t = n^{-1/2} \sum_{j=0}^{n-1} d(\omega_j) e^{2\pi i \omega_j t}, \quad (2-11)$$

para  $t = 1, 2, \dots, n$ .

Ahora definimos el periodograma como el cuadrado del módulo de la DFT.

**Definición 2.10** *Dados los datos  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , definimos el periodograma como*

$$I(\omega_j) = |d(\omega_j)|^2, \quad (2-12)$$

para  $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

A continuación se presenta la distribución asintótica del periodograma que será una pieza fundamental en los trabajos de Durlauf(1993) y Deo(2000).

**Teorema 2.1** *Si*

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \omega_{t-j}, \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty, \quad \sum_{h=-\infty}^{\infty} |h| |\gamma(h)| < \infty, \quad (2-13)$$

donde  $\omega_t \sim iid(0, \sigma_\omega^2)$ , entonces para cualquier colección de  $m$  frecuencias diferentes  $\omega_j$  con  $\omega_{j:n} \rightarrow \omega_j$

$$\frac{2I(\omega_{j:n})}{f(\omega_j)} \rightarrow^d \chi_2^2 \quad (2-14)$$

siempre que  $f(\omega_j) > 0$ , para  $j = 1, 2, \dots, m$ .

La distribución resultante en 2-14, puede ser usada para derivar intervalos de confianza para el espectro. Además el periodograma tendrá una gran importancia en este trabajo, pues a partir de él se obtendrán estadísticos de prueba tales como los del tipo Anderson - Darling, Crámer - von Mises, Kolmogorov - Smirnov, Kuiper, (Durlauf (1990), Corolario 2.1 y Deo (2000), Corolario 3.2) entre otros.

## 2.3. Función de Utilidad

En el modelo que se presentará en el siguiente capítulo, las funciones de utilidad serán muy representativas, debido a que éstas brindarán información acerca de la estructura de las preferencias de los individuos, la satisfacción al consumir y del riesgo que asumen durante algún período. En nuestro contexto los agentes también tienen utilidades del consumo cuando valoran los bienes y servicios de acuerdo a su contexto social y económico, en vez de sólo mirar los valores cuantitativos. A continuación se discute el concepto de utilidad empleado en este trabajo y se muestran algunas funciones de utilidad que se recurren en el modelo teórico.

**Definición 2.11** Sea  $U : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función la cual es continua, estrictamente creciente, estrictamente cóncava y continuamente diferenciable, tal que  $U'(0^+) := \lim_{x \downarrow 0} U'(x) = \infty$ . Tal función será llamada una función de utilidad.

Los ejemplos clásicos de funciones de utilidad son  $U_\alpha(x) = x^\alpha/\alpha$ , para algún  $\alpha \in (0, 1)$  y  $0 \leq x < \infty$ , y  $U(x) = \log(x)$ . Para toda función de utilidad  $U(\cdot)$ , se denotará por  $I(\cdot)$ , la inversa de la derivada de  $U'(\cdot)$ ; las funciones  $I(\cdot)$  y  $U'(\cdot)$  son estrictamente decrecientes y envía a  $(0, \infty)$  en si mismo con  $I(0^+) = U'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} U'(x) = \infty$ ,  $I(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} I(x) = U'(\infty) = 0$  y se extiende  $U$  por  $U(0) = U(0^+)$ .

**Definición 2.12** (Utilidades dependientes de estado). Sea  $U_1 : [0, T] \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , una función continua tal que  $U_1(t, \cdot)$  es una función de utilidad en el sentido de la definición 2.11 para todo  $t \in [0, T]$ . Si  $I_1(t, x) := (\delta U_1(t, x)/\delta x)^{-1}$ , la inversa de la derivada de  $U$ , es una función continua y si una función de utilidad  $U_2 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es dada, donde  $I_2(x) := (\delta U_2(x)/\delta x)^{-1}$  es una función continua, entonces se define

$$\chi(t, y) := I_2(y) + \int_t^T I_1(t', y) dt'. \quad (2-15)$$

Se dice que  $U_1$  y  $U_2$  definen una estructura de preferencias de estado.

Bajo las condiciones indicadas en la definición anterior, se puede observar que  $\chi : [0, T] \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ , es una función continua con la propiedad de que, para cada  $t$ ,  $\chi(t, \cdot)$  envía  $(0, \infty)$  sobre si mismo, es estrictamente decreciente con

$$\chi(t, 0^+) = \lim_{y \downarrow 0} \chi(t, y) = \infty \quad y \quad \chi(t, \infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} \chi(t, y) = 0. \quad (2-16)$$

**Definición 2.13** (Homogeneidad). Sean  $(U_1, U_2)$  una estructura de preferencias de estado como las definidas anteriormente. Si para todo  $s, t \in [0, T]$ , existen constantes  $\alpha_{s,t}$  y  $\alpha_s^I$  tal que  $\alpha(s, t)(x) = \alpha_{s,t}x$  y  $\alpha(s, s)(x) = \alpha_s^I x$ , donde  $\alpha(s, t) = \chi(s, \chi^{-1}(t, \cdot))$  y  $\alpha^I(s, t) = I_1 \chi(s, \chi^{-1}(t, \cdot))$ , para  $s \leq t$ . En este caso decimos que  $(U_1, U_2)$  es una estructura de preferencias de estado homogénea.

Una forma de ver esta propiedad, es diciendo que la estructura para las preferencias de utilidad permanece invariante a través del tiempo. A continuación se describen algunos ejemplos importantes que se ajustan a las condiciones anteriores.

**Proposición 2.2** Considere una función continua positiva  $h : [0, T] \rightarrow (0, \infty)$ , y asuma que  $U_1(t, x) = x^\alpha h(t)$  y  $U_2(x) = cx^\alpha$  con  $\alpha \in (0, 1)$  y  $c \geq 0$ . Esta es una estructura de preferencia que satisface la condición de homogeneidad, en el cual

$$\alpha_{s,t} = \frac{c^{1/(1-\alpha)} + \int_s^T h^{1/(1-\alpha)}(t') dt'}{c^{1/(1-\alpha)} + \int_t^T h^{1/(1-\alpha)}(t') dt'}, \quad \alpha_t^I = \frac{h^{1/(1-\alpha)}(t)}{c^{1/(1-\alpha)} + \int_t^T h^{1/(1-\alpha)}(t') dt'}. \quad (2-17)$$

**Proposición 2.3** *Considere una función continua positiva  $h$  como la anterior, y suponga que  $U_1(t, x) = h(t) \log(x)$  y  $U_2(x) = c \log(x)$  con  $c \geq 0$ . Se sigue que ésta es una estructura de preferencia que satisface la condición de homogeneidad, donde*

$$\alpha_{s,t} = \frac{c + \int_s^T h(t') dt'}{c + \int_t^T h(t') dt'}, \quad \alpha_t^I = \frac{h(t)}{c + \int_t^T h(t') dt'} \quad (2-18)$$

**Proposición 2.4** *Sean  $U_1(t, x) = h(t)u(x/h(t))$  y  $U_2(x) = cu(x/c)$ , donde  $u(\cdot)$  es una función de utilidad,  $h(\cdot)$  es una función continua positiva y  $c \geq 0$ . Entonces  $(U_1, U_2)$  es una estructura de preferencia que satisface la condición de homogeneidad. Para este caso tenemos que*

$$\alpha_{s,t} = \frac{c + \int_s^T h(t') dt'}{c + \int_t^T h(t') dt'}, \quad \alpha_t^I = \frac{h(t)}{c + \int_t^T h(t') dt'}. \quad (2-19)$$

*En particular, para algún  $c > 0$ ,  $U_1(t, x) = u(x)$  y  $U_2(x) = cu(c^{-1}x)$ , definen una estructura de preferencia que satisface la condición de homogeneidad.*

Señalamos que los coeficientes  $\alpha_{s,t}$  y  $\alpha_t^I$ , para todo  $s$  y  $t$  en la proposición 2.4, son independientes de la función  $u$ , y son idénticos a los coeficientes obtenidos para los coeficientes similares en la proposición 2.3. En el siguiente capítulo, en el modelo que se considerará en este trabajo, se muestra que para un agente que consume e invierte de manera óptima como se explica en la teoría, los valores de estas variables dependen de las funciones de utilidad sólo a través de los coeficientes  $\alpha_{s,t}$  y  $\alpha_t$ .

## 3. El Modelo

### 3.1. Caracterización del mercado

En este modelo, se presenta un mercado financiero, denotado por  $\mathcal{M}$ , en el cual se negocian continuamente  $n$  activos riesgosos (acciones) y un activo libre de riesgo (el bono). Junto con las  $n$  acciones, este modelo incluye un “activo sombra”, con el cual se descuentan los flujos de dinero sobre todos los estados futuros tal como en Londoño (2003). Los precios de las  $n$  acciones más la acción sombra conforman un proceso de Itô  $n + 1$ -dimensional con parámetro  $t$ ,  $P(t, p) = (P_0(t, p), P_1(t, p), \dots, P_n(t, p))'$ , el cual satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dP_i(t, p) = P_i(t, p) \left[ b_i(t, p)dt + \sum_{1 \leq j \leq d} \sigma_{ij}(t, p)dW_j(t) \right] \quad (3-1)$$

$$dP_0(t, p) = P_0(t, p) \left[ -r(t, p)dt - \sum_{1 \leq j \leq d} \theta_j(t, p)dW_j(t) \right] \quad (3-2)$$

con  $P_i(0, p) = p_i$ , donde  $P_i(t, p) = \pi_i \circ P(t, p)$  representa el proceso de precios de la  $i$ -ésima acción y  $\pi_i$  es la proyección sobre el  $i$ -ésimo componente del vector  $P$  para  $i = 0, \dots, n$ . En las ecuaciones anteriores,  $W_j(t)$  es el  $j$ -ésimo elemento de un movimiento browniano  $d$ -dimensional  $\{W_t, \mathfrak{F}_t; 0 \leq t \leq T\}$  definido sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ , donde  $\{\mathfrak{F}_t; 0 \leq t \leq T\}$ , es la filtración aumentada por los conjuntos nulos de la filtración generada por  $W_t$ ,  $\mathfrak{F}_t^W = \sigma(W_s, s \leq t)$ . Por su parte,  $b_i$ ,  $\sigma_{ij}$  y  $r$  representan los procesos de rendimientos, de coeficientes de volatilidad y de tasa de interés respectivamente, mientras que  $\theta_j$  representa el precio de mercado del riesgo. Además,  $b_i$ ,  $\theta_j$ ,  $\sigma_{ij}$  y  $r$  se suponen  $\mathbf{P}$ -consistentes, progresivamente medibles y definidos en el espacio de funciones  $C^{0, \delta}(\mathbb{R}_+^{n+1} : \mathbb{R})$ ,<sup>1</sup> para cualquier  $0 < \delta < \epsilon$ . La definición de consistencia se encuentra en Londoño (2007a).

De manera similar a la evolución de los precios de las acciones, se supone que el precio del bono sigue una ecuación diferencial de la forma

$$dB(t, p) = B(t, p)r(t, p)dt, \quad B(0, p) = 1 \quad 0 \leq t \leq T \quad (3-3)$$

<sup>1</sup>Denota el espacio de Fréchet de funciones continuas  $m$ -veces diferenciables, cuyas derivadas de orden  $m$  son  $\delta$ -Hölder continuas con seminormas  $\|f\|_{m, \delta; K}$  (Kunita, 1990) donde  $K \subset D$  es un conjunto compacto y  $0 \leq \delta \leq 1$  (Londoño, 2007a).

cuya solución está dada por

$$B(t, p) = \exp \left[ \int_0^t r(s, p) ds \right] \quad (3-4)$$

De acuerdo con las ecuaciones anteriores, los retornos de las acciones dependerán, por un lado, de los cambios en el precio y de otro lado, de los dividendos que paguen las compañías. Así, el proceso de retornos de las acciones estará definido por

$$dY_i(t, p) = dP_i(t, p) + P_i(t, p)\delta_i(t, p)dt \quad (3-5)$$

con  $Y_i(0, p) = 0$ , para  $p \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ ,  $0 \leq t \leq T$ , donde  $\{\delta_i(t, p)\}$ , es un proceso progresivamente medible y  $P$ -consistente del tipo  $C^{0, \epsilon'}$ , para algún  $\epsilon' > 0$ .  $\delta_i$  es conocido como el proceso de dividendos de la  $i$ -ésima acción.

Teniendo en cuenta los elementos anteriores, se introduce un mercado financiero,  $\mathcal{M}$ , definido como sigue

**Definición 3.1** (Mercado Financiero). *Un mercado financiero con tiempo inicial cero y tiempo final  $T$ , es una estructura  $\mathcal{M}$  compuesta por:*

- a. *Un vector de procesos de retornos  $b = (b_1, \dots, b_n)'$ .*
- b. *Una matriz de procesos de coeficientes de volatilidad  $\sigma = [\sigma_{ij}]$ , donde  $i = 1, \dots, n$  y  $j = 1, \dots, d$ .*
- c. *Un proceso de dividendos  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)'$ .*
- d. *Un proceso de tasa de interés  $r$ .*
- e. *El proceso de precios de mercado del riesgo  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)'$ .*
- f. *Unas condiciones iniciales de precios  $p = (p_1, \dots, p_n)'$ .*

Con el objetivo de completar la caracterización de este mercado, se define la densidad de estado de precios (state price density) como

$$H(t, p) = \frac{Z(t, p)}{B(t, p)}, \quad (3-6)$$

donde

$$Z(t, p) = \exp \left\{ - \int_0^t \theta'(u, p) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta(u, p)\|^2 du \right\} \quad (3-7)$$

A partir de las definiciones 3-2, 3-6 y 3-7 se tiene que los procesos  $H(t, p)$  y  $P_0(t, p)$  están relacionados por Londoño (2007a)

$$P_0(t, p) = p_0 H(t, p), \quad p \in \mathbb{R}_+^{n+1}; \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3-8)$$

### 3.2. Estructuras de riqueza, ingreso y portafolio

En el mercado  $\mathcal{M}$  existe un agente representativo, conocido como el inversionista. A partir de una riqueza inicial,  $x_0$ , el agente invierte su riqueza en las  $n$  acciones, por lo que recibirá los rendimientos de sus inversiones, derivados de los cambios de precios y de los pagos de dividendos. Además, el inversionista puede consumir parte de su riqueza en cualquier período de tiempo. De esta manera, el inversionista debe seleccionar planes de portafolio  $(\pi_0, \pi)$  y consumo, de los que dependerá la evolución de su riqueza en el tiempo. Presentamos a continuación, estos importantes conceptos.

**Definición 3.2** (Estructura de Riqueza). *Suponga que  $\tau = \{\tau_s(x, p); 0 \leq s \leq T, x \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}_+^{n+1}\}$ , es una familia medible de tiempos de parada. Una estructura riqueza es la tripleta  $(X, \tau, x_0)$ , donde  $x_0 \in \mathbb{R}$  y*

$$X = \{X(t, x, p); x \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}_+^{n+1}, s \leq t \leq \tau_s(x, p)\} \quad (3-9)$$

*es una familia de semimartingalas continuas, es decir, la suma de un proceso de variación finita y una martingala local. Interpretamos  $X$  como la riqueza acumulada por un inversionista en el intervalo  $[s, \tau_s(x, p)]$ .*

En este contexto,  $x_0$  representa el valor inicial de la riqueza del inversionista, mientras que  $(X, \tau)$  será una estructura de evolución de la riqueza (Londoño (2007a)), la cual puede capturar el consumo del inversionista mediante su decrecimiento.

**Definición 3.3** (Estructura de Ingreso). *Sea  $(X, \tau)$  una estructura de riqueza. Además, sea el proceso  $\Gamma$  una semimartingala continua con tiempo de parada  $\tau$  y corrimientos y difusiones del tipo  $C^{0,\epsilon}$  (donde  $\epsilon$  dependerá de  $\Gamma$ ), tal que  $\Gamma(0, x, p) = 0$  y*

$$\Gamma(t', x, p) + \Gamma[t, X(t', x, p), P(t', p)] = \Gamma(t, x, p) \quad (3-10)$$

*para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ . El proceso anterior es una estructura de evolución de ingreso para  $(X, \tau)$ , mientras que la tripleta  $(X, \Gamma, \tau)$ , es una estructura de evolución de riqueza e ingreso. Si  $\Gamma(t', x, p) \leq 0$ , para todo  $x, p$  y  $t \leq \tau(x, p)$  se dice que  $\Gamma$  es una estructura de consumo para la estructura de riqueza  $(X, \tau)$  (Londoño (2007a)).*



**Definición 3.4** (Estructura de Portafolio). Sea  $(\pi_0, \pi) = \{(\pi_0(t, x, p), \pi(t, x, p)); x \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}_+^{n+1}, 0 \leq t \leq \tau(x, p)\}$ , un proceso  $(X, P)$ -consistente, progresivamente medible del tipo  $C^{0, \epsilon}$ , para algún  $\epsilon > 0$ , con tiempo de parada  $\tau$ , tal que  $\pi_0 + \pi' \mathbf{1} = X$ , y que satisface

$$\begin{aligned} B^{-1}(t, p)X(t, x, p) &= x + \int_0^t B^{-1}(u, p)d\Gamma(u, x, p) + \\ &\int_0^t B^{-1}(u, p)\pi'(u, x, p)\sigma(u, p)dW_u + \\ &\int_0^t B^{-1}(u, p)\pi'(u, x, p)(b(u, p) + \delta(u, p) - r(u, p)\mathbf{1}_n)du, \end{aligned} \quad (3-11)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq \tau(x, p), p \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ , donde  $\mathbf{1}_n = (1, \dots, 1)' \in \mathbb{R}^n$ . Entonces  $((\pi_0, \pi), \Gamma, \tau)$ , es una estructura de evolución de portafolio con tiempo de parada  $\tau$ , financiado por el ingreso  $\Gamma$ . Si  $x_0 \in \mathbb{R}, ((\pi_0, \pi), \Gamma, \tau, x_0)$ , es una estructura de portafolio con tiempo de parada  $\tau$ , financiado por el ingreso  $\Gamma$  y riqueza inicial  $x_0$ . Además, se dice que una estructura de evolución de riqueza  $(X, \tau)$  es financiado por la estructura de ingreso  $\Gamma$ , si existe una estructura de evolución de portafolio  $((\pi_0, \pi), \Gamma, \tau)$ , con tiempo de parada  $\tau$  tal que  $\pi_0 + \pi' \mathbf{1} = X$ . En este caso,  $(X, \Gamma, \tau)$ , es una estructura cubierta de riqueza e ingreso. Finalmente, cuando  $(X, \Gamma, \tau)$ , una estructura cubierta de riqueza e ingreso, tal que  $\Gamma \equiv 0$ , entonces la estructura de riqueza e ingreso  $(X, \tau)$ , s una estructura de evolución de riqueza autofinanciada (Londoño (2007a)).

Algunos ejemplos de todas las estructuras mencionadas anteriormente y aplicaciones en la valoración de activos contingentes se presentan en Londoño (2007a).

### 3.3. Condición de no arbitraje

Un factor importante en la caracterización del mercado  $\mathcal{M}$  es la definición de las condiciones bajo las cuales no se presentan oportunidades de arbitraje al interior del mercado. La definición de estas condiciones se describen a continuación.

**Definición 3.5** (Estructura de portafolio “state tame”). Sea  $((\pi_0, \pi), \Gamma, \tau)$  una estructura de portafolio con tiempo de parada  $\tau$ , financiado por el ingreso  $\Gamma$ . Se dice que  $((\pi_0, \pi), \Gamma, \tau)$  es “state tame” si el proceso  $H(\cdot, x, p)G(\cdot, x, p)$ , es inferior y uniformemente acotado para todo  $x \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ , (la cota puede depender de los valores de  $x$  y  $p$ ), donde el proceso  $G$  está definido por

$$\begin{aligned} G(t, x, p) &= B(t, p) \int_0^t B^{-1}(u, p)\pi'(u, x, p)\sigma(u, p)dW(u) + \\ &B(t, p) \int_0^t B^{-1}(u, p)\pi'(u, x, p)(b(u, p) + \delta(u, p) - r(u, p)\mathbf{1}_n)du, \end{aligned} \quad (3-12)$$

combinando las ecuaciones 3-11 y 3-12 obtenemos

$$G(t, x, p) = X(t, x, p) - xB(t, p) - B(t, p) \int_0^t B^{-1}(u, p)d\Gamma(u, x, p), \quad (3-13)$$

lo que implica que  $G(t, x, p)$  es la diferencia de las ganancias percibidas por el inversionista en el período  $t$  usando el portafolio  $(\pi_0, \pi)$ , después de pagar intereses a la tasa  $r$  para el capital inicial  $x$  y de descontar la cantidad de dinero que un banco hubiera pagado si el flujo de ingreso se hubiera ahorrado en una cuenta bancaria, por esta razón,  $G(t, x, p)$ , se denomina el proceso de exceso de ganancias (Londoño (2007a)).

**Definición 3.6** (Oportunidades de arbitraje). Sea  $((\pi_0, \pi), \tau)$ , una estructura de portafolio "state tame" autofinanciada con tiempo de parada  $\tau$ . Se dice que existen oportunidades de arbitraje para la riqueza inicial  $x$  y la condición inicial de precios  $p \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ , si se satisfacen las dos siguientes condiciones

$$P[H(t, p)G(t, x, p) \geq 0] = 1 \quad y \quad P[H(t, p)G(t, x, p) > 0] > 0 \quad (3-14)$$

Puesto en otras palabras, el mercado  $\mathcal{M}$  exhibe oportunidades de arbitraje si es posible que con un capital inicial en  $t = 0$  y siguiendo una estrategia de portafolio  $(\pi_0, \pi)$  particular, sea posible obtener en el momento  $T$  ganancias positivas (Karatzas (1997)). A partir del siguiente teorema, Londoño (2003) establece las condiciones necesarias para que no exista este tipo de oportunidades.

**Teorema 3.1** (Londoño, 2007a.) Un mercado  $\mathcal{M}$  está libre de oportunidades de arbitraje si y sólo si existe una familia  $P$ -consistente de procesos  $\theta$  que satisfagan para todo  $p \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ ,

$$b(t, p) + \delta(t, p) - r(t, p)\mathbf{1}_n = \sigma(t, p)\theta(t, p), \quad c.s \quad (3-15)$$

**Observación 3.1** (Londoño (2007a)) Nótese que, de acuerdo con el teorema anterior, si el mercado  $\mathcal{M}$  se encuentra libre de oportunidades de arbitraje, entonces para cualquier combinación de condiciones iniciales  $x, p$  y estructura de evolución de riqueza e ingreso  $(X, \Gamma, \tau)$ , entonces

$$\begin{aligned} \psi(t, x, p) &= H(t, p)X(t, x, p) - \int_0^t H(u, p)d\Gamma(u, x, p) \\ &= x + \int_0^t H(u, p)[\sigma'(u, p)\pi(u, x, p) - X(u, x, p)\theta(u, p)]'dW(u), \end{aligned} \quad (3-16)$$

Además, una estructura de portafolio  $((\pi_0, \pi), \Gamma, \tau)$ , es "state tame" si y sólo si el proceso  $\psi(t, x, p)$  es inferior y uniformemente acotado. De aquí, si  $\psi(t, x, p)$  es inferior y uniformemente acotado, entonces es una supermartingala para todo  $x$  y  $p$ . Uno interpretaría el proceso  $\psi(t, x, p)$  como la diferencia entre la riqueza descontada y los ingresos descontados hasta el período  $t$ . Notemos que si  $\psi(t, x, p) = 0$  entonces se explica que el proceso de ingresos hasta el periodo  $t$  igualó el proceso de riqueza que se tiene en el momento  $t$ .

**Observación 3.2** *Tal como lo señala Karatzas (1997), si el proceso  $\theta$  satisface el Teorema 3.1 y las condiciones*

$$\int_0^T \|\theta(t, p)\|^2 dt < \infty, \quad c.s \quad (3-17)$$

$$E \left[ \exp \left\{ - \int_0^t \theta'(u, p) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta(u, p)\|^2 du \right\} \right] = 1, \quad (3-18)$$

el proceso exponencial  $Z(t, p)$  definido en la ecuación 3-7, es una martingala.

### 3.4. Consumo e inversión óptima bajo utilidades dependientes de estado.

En esta sección retomaremos los conceptos presentados en los preliminares referentes a las funciones de utilidad. Como lo señala Londoño (2007b), la función  $U_1(t, x)$  describe el nivel de felicidad del inversionista de consumir  $x$  unidades de riqueza valoradas en el momento cero, período en el cual toma sus decisiones de consumo, mientras que  $U_2(x)$  representa el nivel de satisfacción que obtiene el inversionista de mantener una riqueza final (en el período  $T$ ) de  $x$  unidades valoradas en el momento cero. Esta aproximación se encuentra en línea con la literatura de utilidades dependientes de estado.

Para cada  $t$ , se define  $\chi^{-1}(t, \cdot)$ , como la inversa de  $\mathcal{X}(t, \cdot)$ , la cual comparte las mismas propiedades que  $\mathcal{X}(t, \cdot)$ , presentadas en la Definición 2.12. A partir de  $\mathcal{X}(t, \cdot)$ , se definen las funciones  $\alpha_t = \mathcal{X}(t, \mathcal{X}^{-1}(t, \cdot))$  y  $\alpha_t^I = I_1(0, \mathcal{X}^{-1}(t, \cdot))$ . Cuando  $\alpha_t$  y  $\alpha_t^I$  satisfacen la condición de homogeneidad vistas en la Definición 2.13, es decir, que para todo  $t$  existen constantes  $\alpha$  y  $\alpha_0$  tales que  $\alpha_t(x) = \alpha x$  y  $\alpha_t^I(x) = \alpha_0 x$ , se dice que  $(U_1, U_2)$  conforman una estructura de preferencias de estado homogéneas (Londoño (2009)).

Por último, a partir de las definiciones presentadas a lo largo de esta sección, se tiene el siguiente teorema, que caracteriza el comportamiento óptimo de los agentes bajo una estructura de preferencias homogéneas.

**Teorema 3.2** (Londoño (2009)) *Suponga que  $(U_1, U_2)$  es una estructura de preferencias homogéneas para el inversionista. Además, defina  $\xi$  como*

$$\xi_{x,p} = \begin{cases} \Pi(t, P(t, p)) + \alpha_t H^{-1}(t, p)(x - \Pi(0, p)) & \text{si } x > \Pi(0, p) \\ \Pi(t, P(t, p)) + H^{-1}(t, p)(x - \Pi(0, p)) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3-19)$$

donde  $\Pi(t, p)$  está definido como

$$\Pi(t, p) = -E \left[ \int_t^T H_t(u, p) Q_t(u, p) du \right] \quad (3-20)$$

en la cual  $H_s(t, p)$  y  $Q_s(t, p)$ , representan la densidad de precios de estado y el proceso de dotaciones recibidos por el agente por pagos a su trabajo respectivamente, evaluados a partir del momento  $0 < s < t$ . Además, si se define el proceso  $c_t$  como

$$c_t(x, p) = \begin{cases} \frac{\alpha_t^I}{\alpha_t} H^{-1}(t, p)(x - \Pi(0, p)) & \text{si } x > \Pi(0, p) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3-21)$$

Entonces  $(\xi, c, Q)$  es una estructura cubierta acumulativa de consumo y dotaciones con un proceso de portafolio  $(\pi, c)$  tal que es óptimo para el problema de consumo e inversión, en el sentido que

$$E \left[ \int_0^T U_1(t, H(t, p)c_t(x, p))dt + U_2(H(T, p)\xi_t(x, p)) \right] \geq \\ E \left[ \int_0^T U_1(t, H(t, p)\tilde{c}_t(x, p))dt + U_2(H(T, p)\tilde{\xi}_t(x, p)) \right]$$

para todo  $p$  y  $x > \Pi(0, p)$ , donde  $(\tilde{\xi}, \tilde{c}, Q)$ , es cualquier otra estructura cubierta acumulativa de consumo con  $(\tilde{\pi}, \tilde{c})$  y

$$E \left[ \int_0^T U_1^-(t, H(t, p)\tilde{c}_t(x, p))dt + U_2^-(H(T, p)\tilde{\xi}_t(x, p)) \right] < \infty,$$

donde  $U_1^-(t, x) = -(U_1^-(t, x) \wedge 0)$  y  $U_2^-(x) = -(U_2^-(x) \wedge 0)$ .

El teorema anterior ofrece una solución explícita para el comportamiento óptimo del consumo de los agentes en el mercado, utilizando formas funcionales específicas para  $U_1$  y  $U_2$ . Como se describe más adelante, a partir de este resultado es posible establecer un procedimiento para contrastar si el modelo presentado en esta sección describe de manera apropiada los comportamientos de los individuos en la realidad.

En el resultado 3-21, dichas conclusiones pueden interpretarse de la siguiente manera. Si un agente tiene una estructura de preferencia de estado homogénea, y el agente actúa como si maximizara su utilidad esperada de consumo descontada y la riqueza terminal descontada, él crea dos cuentas. En la primera (que llamamos la cuenta reguladora) él cubre el riesgo de mantener la riqueza total por encima del mínimo requerido por la sociedad. Él coloca todo el dinero derivado de su sueldo en ésta. En la otra cuenta (la cuenta de consumo) él invierte de manera que su valor actual (en el futuro) es un porcentaje del valor inicial. Él también consume durante un período de tiempo una parte de la riqueza de su cuenta de consumo, y este factor (de proporción) es  $\frac{\alpha_t^I}{\alpha_t}$ .

## 4. Pruebas de Martingala

Entre los trabajos más representativos en el desarrollo de estadísticos para contrastar la hipótesis de martingala, se encuentran las pruebas espectrales propuestas por Durlauf (1991), cuyos resultados fueron extendidos en Deo (2000). Recientemente Park y Whang (2005) proponen estadísticos adicionales para contrastar la hipótesis de martingala bajo supuestos diferentes. En líneas generales, todos estos trabajos establecen criterios para identificar si la evolución de la diferencia de las series de interés exhibe algún tipo de dependencia condicional (en la mayoría de los casos lineal), lo que contradice la hipótesis de martingala. A continuación, se describen las principales hipótesis y estadísticos derivados en estos tres trabajos. Los códigos preparados para implementar en la práctica estas aplicaciones se realizaron en el programa **R** y se presentan en el Anexo C.

### 4.1. Pruebas espectrales de Durlauf

La estructura de la prueba desarrollada por Durlauf (1991), analiza las propiedades de forma de la función de distribución espectral estimada de la serie de tiempo. Todas las implicaciones comprobables pueden ser resumidas en afirmar que, bajo la hipótesis nula, la función de distribución espectral tiene la forma de una línea recta. Se desarrolla una teoría asintótica para medir las desviaciones de la diferencia entre la distribución espectral muestral estimada y la de su forma teórica.

Durlauf establece una serie de condiciones básicas que se requieren con el fin de implementar estadísticos que permitan identificar si una serie es una martingala. La hipótesis de Durlauf se define a continuación.

• **Hipótesis nula  $H_0$ :** Sea  $x_t = m_t - m_{t-1}$ , donde  $m_t$  es una martingala. Las siguientes propiedades se mantienen para  $x_t$ :

- a.  $E[x_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \mu$ , donde  $\mathcal{F}_k$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por  $x_j$  para  $j \leq k$ .
- b.  $E[x_t^2] = \sigma^2$ .
- c.  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E[x_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = \sigma^2$ , casi seguramente.
- d. Existe una variable aleatoria  $w$  con  $E[w^4] < \infty$ , tal que  $P(|x_j| > u) \leq cP(|w| > u)$ , para alguna constante  $0 < c < \infty$ ,  $\forall j, \forall u \geq 0$ .
- e.  $E[x_j^2 x_{j-r} x_{j-s}] = \kappa(r, s)$  es finita y uniformemente acotada  $\forall j, r \geq 1, s \geq 1$ .
- f.  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1+\min(r,s)}^N x_{j-r} x_{j-s} E[x_j^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = \kappa(r, s)$ , casi seguramente.
- g.  $E[x_j^8]$  es uniformemente acotado  $\forall j$ .

• **Hipótesis alternativa  $H_1$ :** La serie  $x_t$  no es una martingala en diferencias.

De la hipótesis nula, se comentan algunos aspectos. En primer lugar, la condición (a) establece la hipótesis de interés, no obstante, se permite que el valor esperado de la primera diferencia de la serie de interés sea diferente de cero, de esta manera la serie  $m_t$  puede expresarse de la forma

$$m_{t+1} = \mu + m_t + \epsilon_{t+1} \quad (4-1)$$

donde  $\epsilon_{t+1} \equiv m_{t+1} - E(m_{t+1}|\mathcal{F}_t)$ , es un proceso de “innovaciones”, el cual satisface  $E(\epsilon_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$ , en la literatura  $\epsilon_t$  se conoce como una secuencia de diferencia de martingala. Como lo señalan Hannan y Heyde (1972), la teoría clásica de inferencia requiere que el proceso  $\epsilon_t$  sea independiente e idénticamente distribuido. Sin embargo, es posible relajar este supuesto imponiendo algunas condiciones adicionales, establecidas en la hipótesis nula. El proceso definido en 4-1 es conocido como caminata aleatoria y en general, permite extender el análisis de la hipótesis de martingala a procesos que exhiban un crecimiento inercial en el tiempo (Campbell et al. (1997)).

En segundo lugar, como lo señala Durlauf, las condiciones (b) hasta (f) se establecen para restringir el grado de heterogeneidad del proceso  $x_t$ . Finalmente, la condición (g) es incluida con el fin de caracterizar de manera apropiada el periodograma de  $x_t$  (Durlauf, 1991, pág. 358).

Teniendo las condiciones anteriores, es posible caracterizar a la serie  $x_t$  a partir de estadísticas que describan el comportamiento parcial de las series (e.g. autocorrelaciones) o que describan todo el proceso  $x_t$ . Bajo la hipótesis nula  $H_0$ , Hannan y Heyde (1972) establecen las siguientes propiedades con respecto a las autocorrelaciones muestrales de la serie.

**Teorema 4.1** (*Propiedades de los coeficientes de correlación muestral I*). Sea

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T x_i \quad (4-2)$$

$$\hat{\rho}_i = \frac{\frac{1}{T} \sum_{j=1}^{T-i} (x_j - \bar{x})(x_{j+i} - \bar{x})}{\frac{1}{T} \sum_{k=1}^T (x_k - \bar{x})^2} \quad (4-3)$$

para todo  $i \geq 1$ . Bajo la hipótesis nula,  $\hat{\rho}_i$  satisface las siguientes condiciones:

- $\hat{\rho}_i \xrightarrow{p} 0$ .
- $T^{1/2} \hat{\rho} \xrightarrow{p} N(0, I)$ , cuando  $T \rightarrow \infty$ ,  $I$  es la matriz identidad de orden  $k$  y  $\hat{\rho}$  es cualquier vector de longitud  $k$  de autocorrelaciones. (“ $\xrightarrow{p}$ ” denota convergencia en probabilidad.)

En el dominio de la frecuencia, todas las implicaciones a partir de la hipótesis de martingala, se pueden resumir por los requisitos impuestos a la forma de la densidad espectral. Se observa que bajo la hipótesis nula, a partir de 2-7 se obtiene que

$$f_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_x(j) e^{-ij\omega} = \frac{\gamma_x(0)}{2\pi}. \quad (4-4)$$

Bajo la hipótesis nula, la densidad espectral es un rectángulo. Equivalentemente la función de distribución espectral tiene forma de línea recta, esto es

$$F_x(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f_x(\omega) d\omega = \frac{\gamma_x(0)}{2\pi}(\lambda + \pi). \quad (4-5)$$

En la práctica, para una muestra de  $n$  observaciones, un estimador consistente de 4-4 (normalizado por un estimador de la varianza de  $x_t$ ,  $\hat{\gamma}_0$ ) está dado por (Fong y Ouliaris (1995)):

$$\frac{I_k(\lambda)}{\hat{\gamma}_0} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-(k-1)}^{k-1} w_k(j) \hat{\rho}_j \cos(\lambda j) \quad (4-6)$$

donde  $I_k$  es el estimador de la densidad espectral truncada en  $k \leq n$  y  $w_k(j)$  es una secuencia de ponderaciones tal que  $w_k(0) = 1$ . A partir de este estimador, Durlauf (1991) propuso una serie de estadísticos basados en las desviaciones acumuladas de 4-6 con respecto a la hipótesis nula normalizada

$$U_T(t) = \int_0^{\pi t} \left[ \frac{I_T(\omega)}{\hat{\gamma}_0} - \frac{1}{2\pi} \right] d\omega, \quad t \in (0, 1). \quad (4-7)$$

De esta forma, si  $x_t$  es la primera diferencia de una martingala que satisfaga las condiciones establecidas en la Definición 28, entonces  $U_n$  debería converger a cero. Multiplicando la ecuación anterior por  $\sqrt{2T}$  se obtiene

$$U_T(t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{j=1}^{T-1} T^{1/2} w_n(j) \hat{\rho}_j \frac{\sin j\pi t}{j} \quad (4-8)$$

la cual converge en distribución a un puente browniano  $U(t)$  sobre  $t \in [0, 1]$  (Durlauf 1991). De este resultado, aplicando el teorema del mapeo continuo se define los siguientes estadísticos espectrales:

a. Estadístico de Anderson - Darling (AD):

$$AD_T = \int_0^1 \frac{U^2(t)}{t(1-t)} dt \quad (4-9)$$

b. Estadístico de Cramer - von Mises (CVM):

$$CVM_T = \int_0^1 U(t)^2 dt \quad (4-10)$$

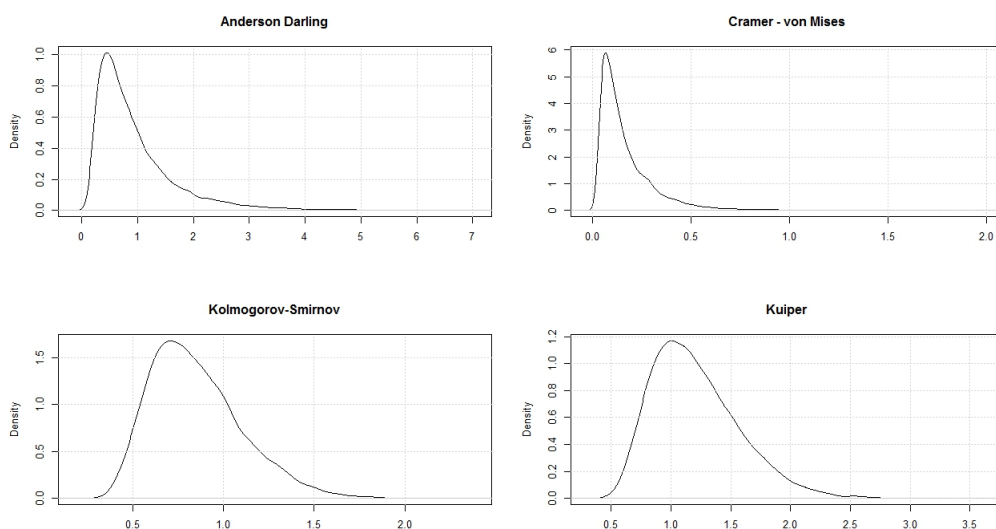
c. Estadístico de Kolmogorov - Smirnov (KS):

$$KS_T = \sup_{t \in [0,1]} |U(t)| \quad (4-11)$$

d. Estadístico de Kuiper (K):

$$K_T = \sup_{(0 \leq s, t \leq 1)} |U(t) - U(s)| \quad (4-12)$$

Ya que  $U_T(t)$  converge en distribución a un puente browniano, las distribuciones límite de estos cuatro estadísticos dependerán de su contraparte asintótica (Billingsley, 1995, Teorema 25.7, corolario 1). En la Figura 4-1 se presentan las densidades obtenidas para estos estadísticos a partir de simulaciones de secuencias de variables puentes brownianos en el intervalo  $(0, 1)$ .



**Figura 4-1.:** Las densidades de los estadísticos  $AD$ ,  $CVM$ ,  $KS$  y  $K$  se obtuvieron a partir de la simulación de 10000 secuencias de 1000 puentes brownianos en  $(0, 1)$ .

Los estadísticos propuestos por Durlauf son estadísticos comúnmente utilizados, ya que al analizar la densidad espectral de la serie, éstos evalúan todo el rango de frecuencias, lo que brinda mayor información sobre el comportamiento estocástico de la serie y lo hace más adecuado para identificar procesos que no satisfagan la hipótesis nula. Adicionalmente, Lupi (1996) comprueba la significancia, potencia y robustez de los estadísticos  $KS$  y  $CVM$  y encuentra que el segundo muestra un desempeño superior incluso en muestras pequeñas. Estos estadísticos espectrales han sido aplicados a diferentes series en economía, por ejemplo, la producción de Estados Unidos (Durlauf (1993)) y tasas de cambio (Fong y Ouliaris (1995)), entre otras.

## 4.2. Pruebas espectrales de Deo

A partir del trabajo de Durlauf, Deo (2000) analiza el caso en el que la varianza condicional de una serie no es constante. Si bien en su aproximación Durlauf afirma que sus resultados son robustos en procesos cuya



varianza condicional no es constante, Deo afirma que existe un problema en la interpretación del documento de Hannan y Heyde (1972), acerca de las propiedades del coeficiente de correlación presentado en el Teorema 4.1. En palabras del autor:

*“Durlauf establece en su Teorema 2,1, citando el Teorema 2 de Hannan y Heyde (1972), que las autocorrelaciones muestrales de  $X_t$  son asintóticamente independientes e idénticamente distribuidas con varianza asintótica igual a uno para cualquier rezago. Esta aplicación de Hannan y Heyde (1972) es incorrecta.” (Deo, 2000, pág. 296)<sup>1</sup>.*

Como se discute a continuación, en caso que la varianza condicional de la serie de interés no es constante (situación común en series de tiempo financieras), los coeficientes de autocorrelación muestral no tienen varianza igual a uno. En consecuencia, Deo propone la siguiente modificación de la hipótesis nula planteada en Durlauf (1991).

• **Hipótesis nula  $H_0$ :** Sea  $x_t = \mu + x_{t-1} + \epsilon_t$  una serie de tiempo donde  $\epsilon_t$  es una secuencia de diferencia de martingala. Las siguientes propiedades de mantienen para  $\epsilon_t$  :

- a.  $E[\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$ , donde  $\mathcal{F}_k$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por  $x_j$  para  $j \leq k$ .
- b.  $E[\epsilon_t^2] < \infty$ .
- c.  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[\epsilon_i^2 | \mathcal{F}_{i-1}] = \sigma^2$ , casi seguramente.
- d. Existe una variable aleatoria  $w$  con  $E[w^4] < \infty$ , tal que  $P(|\epsilon_i| > u) \leq cP(|w| > u)$ , para alguna constante  $0 < c < \infty$ ,  $\forall i, \forall u \geq 0$ .
- e.  $E[\epsilon_i^2 \epsilon_{i-r} \epsilon_{i-s}] = \tau(r, s)$  es finita y uniformemente acotada  $\forall j, r \geq 1, s \geq 1$ .
- f.  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1+\min(r,s)}^N \epsilon_{j-r} \epsilon_{j-s} E[\epsilon_j^2 | \mathcal{F}_{j-1}] = \tau(r, s)$ , casi seguramente.
- g. Para cualquier entero  $q, 2 \leq q \leq 8$  y para  $q$  enteros no negativos  $s_j$ ,

$$E \left[ \prod_{j=1}^q \epsilon_{t_j}^{s_j} \right] = 0$$

- h.  $E[\epsilon_j^8]$  es uniformemente acotado  $\forall j$ .

• **Hipótesis alternativa  $H_1$ :** La serie  $\epsilon_t$  no es una martingala en diferencias.

La hipótesis nula presentada en Deo (2000) es similar a la hipótesis propuesta en Durlauf (1991), excepto porque en este caso se incluye un supuesto adicional (el supuesto (g)) el cual se suma al supuesto (h) para obtener la convergencia asintótica de la función espectral muestral hacia un espacio de variables aleatorias (Deo, (2000)), además en el supuesto (b) sólo se requiere que el segundo momento sea finito. Bajo la hipótesis nula  $H_0$  de Deo, las propiedades de la función de autocorrelación muestral se derivan del siguiente teorema.

---

<sup>1</sup>Traducción libre del autor.

**Teorema 4.2** (*Propiedades de los coeficientes de correlación muestral II*). Suponga que los supuestos (a) a (g) de la definición anterior son ciertos. Asimismo, sea  $\hat{\rho}_k$ , para  $k = 1, 2, \dots$ , el coeficiente de correlación muestral de la serie  $\epsilon_t$ , definido como en la ecuación 4-3. Entonces, para cualquier entero positivo  $k$  obtenemos que

$$N^{1/2}\hat{\rho} \rightarrow^d N(0, W),$$

donde  $\hat{\rho} = (\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_k)'$  y  $W = [w_{ij}]$  es una matriz diagonal  $k \times k$  tal que  $w_{ii} = \tau_{ii}$  y  $w_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ .

Una de las grandes diferencias con el trabajo propuesto por Durlauf (1991), aunque los coeficientes de autocorrelación muestral continúan siendo independientes, su varianza ya no es la unidad, incluso ésta puede llegar a ser arbitrariamente grande. Así, los resultados obtenidos en Durlauf (1991) son un caso particular de los resultados de Deo (2000), cuando los  $\tau_{ii} = 1$ .

De la hipótesis nula y el Teorema 4.2, Deo propone la siguiente modificación del estadístico planteado por Durlauf:

$$U_{N,w,C}(t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{j=1}^{N-1} N^{1/2} w_N(j) \hat{a}_j \frac{\sin j\pi t}{j} \quad (4-13)$$

donde

$$\hat{a}_j = \hat{\sigma}^2 \hat{\rho}_j \left[ \frac{1}{N-j} \sum_{t=1}^{t-j} (\epsilon_t - \bar{\epsilon})^2 (\epsilon_{t+j} - \bar{\epsilon})^2 \right]^{1/2}$$

en el cual, para  $j$  fijo, la suma  $\hat{\sigma}^2 \left[ \frac{1}{N-j} \sum_{t=1}^{t-j} (\epsilon_t - \bar{\epsilon})^2 (\epsilon_{t+j} - \bar{\epsilon})^2 \right]^{1/2}$  es un estimador consistente de  $\tau_{jj}^{-1/2}$ . Por tanto, para  $k$  fijo, la distribución de los estimadores  $(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k)'$  converge asintóticamente a la distribución de un vector aleatorio normal con media cero y matriz de varianzas y covarianzas igual a la matriz identidad (Deo (2000)). A partir de los resultados anteriores, al igual que Durlauf, Deo propone una serie de estadísticos espectrales

a. Estadístico de Anderson - Darling (AD):

$$AD_N = \int_0^1 \frac{U_{N,w,C}^2(t)}{t(1-t)} dt \quad (4-14)$$

b. Estadístico de Cramer - von Mises (CVM):

$$CVM_N = \int_0^1 U_{N,w,C}^2(t) dt \quad (4-15)$$

c. Estadístico de Kolmogorov - Smirnov (KS):

$$KS_N = \sup_{t \in [0,1]} |U_{N,w,C}(t)| \quad (4-16)$$

d. Estadístico de Kuiper (K):

$$K_N = \sup_{(0 \leq s, t \leq 1)} |U_{N,w,C}(t) - U_{N,w,C}(s)| \quad (4-17)$$

donde las distribuciones límite serán las mismas que las obtenidas en Durlauf (1991), pues, al tener en cuenta las relaciones existentes en la varianza condicional de las series a través del factor  $\tau_{ii}$ , las distribuciones límite dependerán de la suma de variables aleatorias normales estándar.

### 4.3. Pruebas de martingala de Park y Whang

Recientemente, Park y Whang (2005) plantean el uso de dos estadísticos del tipo de Kolmogorov-Smirnov y Cramer-von Mises para contrastar si una serie es una martingala. En este caso, la hipótesis nula viene dada por:

• **Hipótesis nula  $H_0$ :** Sea  $u_n = X_n - X_{n-1}$  es una sucesión de diferencia de martingala. Las siguientes propiedades se mantienen para  $u_n$ :

- a.  $E[u_t | \mathcal{F}_{t-1}] = E[u_t | X_{n-1}] = 0$
- b.  $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N E[u_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] \rightarrow^2 \sigma^2 > 0$
- c.  $\sup_{t \geq 1} E[u_t^4 | \mathcal{F}_{t-1}] < C$ , casi siempre para alguna constante  $C < \infty$

• **Hipótesis alternativa  $H_1$ :** La serie  $u_n$  no es una martingala en diferencias.

Notemos que en este caso la media de la secuencia de las primeras diferencias es cero, así en este caso no se permite un crecimiento inercial en el tiempo o una tendencia. Por otra parte, la condición (b) permite que la serie de martingala en diferencias presente diferentes grados de heterocedasticidad condicional. Finalmente, el numeral (c) garantiza que el cuarto momento de las serie en estudio, sea acotado, con el fin de garantizar la condición de Lindeberg, necesaria para el estudio de convergencia de los estadísticos que definiremos posteriormente (Park y Whang, 2005).

En este trabajo, se considera el caso en el cual

$$E[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] = E[X_t | X_{t-1}] \quad (4-18)$$

para todo  $t \geq 1$ . Nótese que 4-18 implica que  $(X_t)$  es markoviano de primer orden, a partir de esta definición, (Billingsley (1995), teorema 16.10) se tiene que

$$E[u_t | X_{t-1}] = 0 \text{ a.s. } \text{ sii } E[u_t 1_{\{X_{t-1} \leq x\}}] = 0 \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R} \quad (4-19)$$

La ecuación 4-19 motiva a considerar la siguiente función como la base de los estadísticos de prueba para la hipótesis de martingala:

$$Q_N(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N u_t 1_{\{X_{t-1} \leq x\}} \quad (4-20)$$

donde  $1_{\{\cdot\}}$  es la función característica o indicadora. Bajo la hipótesis nula  $H_0$ , el término anterior debería ser igual a cero. De la ecuación 4-20, Park y Whang formulan los siguiente estadísticos de prueba:

a. Estadístico de Kolmogorov - Smirnov ( $KS^*$ ):

$$KS_N^* = \sup_{x \in \mathbb{R}} |Q_N(x)| \quad (4-21)$$

b. Estadístico de Cramer - von Mises ( $CVM^*$ ):

$$CVM^* = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Q_N(X_{t-1})^2 \quad (4-22)$$

El resultado final que obtienen los autores, es que bajo  $H_0$ , cuando  $N \rightarrow \infty$

$$M_N(x) \equiv Q_N(x\sqrt{N}) \rightarrow^d \int_0^1 1_{\{W_r \leq x\}} dW_r \quad (4-23)$$

en el cual  $W_t$  es un movimiento browniano definido en el espacio de funciones aleatorias continuas por derecha con límite por izquierda en el intervalo  $[0, 1]$  y  $\rightarrow^d$  simboliza convergencia en distribución. Por tanto, las distribuciones de los estadísticos 4-21 y 4-22 dependerán del proceso  $W_t$ . Las distribuciones de estos dos estadísticos se obtienen a partir de simulaciones de Monte Carlo y sus densidades se presentan en la figura 4-2.

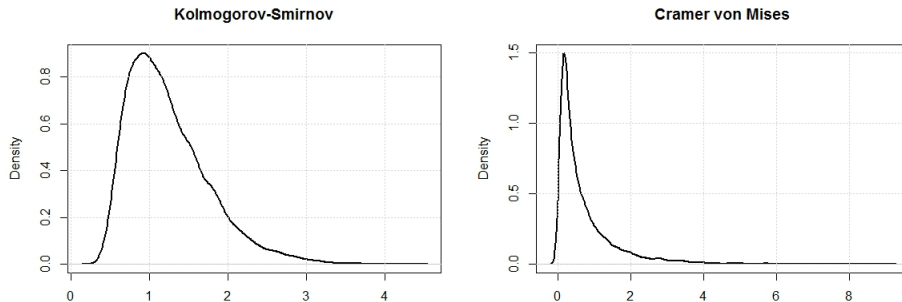


Figura 4-2.: Densidades de probabilidad de los estadísticos  $KS_N^*$  y  $CVM_N^*$

**Regla de Decisión.** Presentamos a continuación la regla de decisión de la hipótesis nula en cada uno de los trabajos presentados por Durlauf (1991), Deo (2000) y Park-Wang (2005).

Se acepta la hipótesis nula  $H_0$  a un nivel de significancia de  $\gamma\%$  si

$$C_0 < C_\gamma, \tag{4-24}$$

donde  $C_0$  es el valor calculado a partir de los estadísticos propuestos en los trabajos anteriores, los cuales son hallados haciendo uso de los algoritmos adjuntos en el Anexo C y  $C_\gamma$  es el valor crítico obtenido de las distribuciones asintóticas simuladas a un nivel de significancia  $\gamma\%$ , los códigos de estas simulaciones están adjuntas en el Anexo B. En nuestra aplicación tomaremos los valores de significancia a niveles de  $\gamma = 5\%$  y  $\gamma = 1\%$ . Los valores críticos se pueden encontrar en las últimas dos columnas de la tabla **5-2** para cada uno de los estadísticos de prueba.

## 5. Calibración y Ajuste de los datos

En esta sección, se utiliza algunos de los resultados derivados del modelo teórico, a partir de la aplicación de pruebas estadísticas sobre los datos observados en la realidad. En este documento, emplearemos pruebas estadísticas para verificar si el modelo planteado en Londoño (2009), describe de manera apropiada el comportamiento de los agentes, referente al consumo óptimo que maximiza las utilidades de una economía en particular, para esto, se utiliza información de algunas variables económicas del mercado estadounidense. Presentaremos, los principales aspectos metodológicos los cuales son tomados de [4] y los principales resultados de esta aplicación.

Es importante resaltar que las relaciones obtenidas del modelo Londoño (2009) en función de series observadas se obtienen de [4], las cuales describimos a continuación.

Anteriormente se mostró que, bajo el modelo teórico, con los supuestos planteados en el modelo propuesto por Londoño (2009), el proceso

$$Z(t, p) = \exp \left\{ - \int_0^t \theta'(u, p) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta(u, p)\|^2 du \right\}, \quad (5-1)$$

es una martingala. No obstante, esta serie no es observable directamente en la realidad, por tanto, para poder contrastar esta suposición, será necesario crear una serie de tiempo a partir de los datos existentes, en particular se usará datos del mercado estadounidense. Dicha serie, según el modelo propuesto por Londoño (2009), es una función  $Z(t, p) = f(c_t, r_t, \lambda_t)$ , donde  $c_t$  es la solución explícita del consumo óptimo,  $r_t$  serie de tasa de interés libre de riesgo y  $\lambda_t$  parámetro de preferencias que se obtiene a partir de una función de utilidad homogénea. Esta serie denominada “Martingala exponencial”, la señalamos como la hipótesis central de este trabajo. Con el fin de obtener los resultados que Londoño (2009) prueba en su trabajo, desarrollaremos la siguiente metodología.

- a. De la ecuación 3-21 del teorema 3.2, se despeja  $H(t, p)$ , para obtener la siguiente expresión

$$H(t, p) = \frac{\alpha_t^I}{\alpha_t} c_t^{-1} \kappa, \quad (5-2)$$

donde  $c_t$  es una serie de consumo personal,  $\kappa \equiv x - \Pi(0, p) \in \mathbb{R}^+$ , supondremos que es constante y las funciones  $\alpha_t^I$  y  $\alpha_t$  son derivadas de la función de utilidad que satisfacen las condiciones de homogeneidad (Londoño (2009)). En nuestro caso, haremos la suposición acerca de períodos indeterminados del inversionista, es decir, que  $T = \infty$ , lo cual significa que se está suponiendo que a la hora de tomar sus decisiones de consumo e inversión, tienen en cuenta la utilidad que esperan tener en el futuro. El hecho de que el horizonte sea infinito es equivalente a suponer que se preocupan por las generaciones futuras. Bajo tal supuesto se puede mostrar, ver [20], que la función de utilidad  $U_2(x)$ , vista en el capítulo 3

se anula, así que para caracterizar las preferencias del consumidor, sólo necesitaremos caracterizar la función de utilidad  $U_1(t, x)$ .

En la ecuación 5-2, definido como el “state price density”, es importante señalar que se trata de un proceso estocástico, que se utiliza para valorar instrumentos financieros con pagos inciertos al futuro cuando el mercado es completo. Por ejemplo en el caso de un bono que promete pagar  $\$d$  en  $n$  días, entonces el valor de dicho bono en el día de hoy sería  $E[H(0, n) \cdot d]$ , asumiendo que la escala de tiempo es días.

En nuestra aplicación consideraremos la siguiente función de utilidad

$$U(t, c_t) = e^{-\lambda t} \ln(c_t), \quad \lambda_t \in [0, \infty) \quad (5-3)$$

la cual tiene las siguientes propiedades; es estrictamente creciente, estrictamente cóncava y continuamente diferenciable en la segunda variable. Notemos que relacionando la ecuación 2-15 de la definición 2.12 y la función de utilidad anterior obtenemos que

$$\chi(t, x) = \int_t^\infty \frac{e^{-\lambda_s s}}{x} ds. \quad (5-4)$$

Se puede obtener (ver detalles en [20]), que la función de utilidad 5-3 cumple las condiciones de homogeneidad, además a partir de ésta, las funciones alfa de 3-21 toman la forma de

$$\alpha(t) = e^{\lambda t}, \quad \alpha^I(t) = \lambda. \quad (5-5)$$

Si se reemplaza las ecuaciones 5-5 en 5-2, se tiene que el state price density está dado por

$$H(t, p) = \frac{e^{-\lambda t}}{c_t} \kappa_1, \quad (5-6)$$

donde la cantidad  $\kappa_1 = \lambda \kappa$  se asume constante, pues no afecta la estructura temporal de la serie.

- b. Seguidamente, teniendo el proceso  $H(t, p)$ , hacemos uso de 3-6, para obtener el proceso de descuento  $Z(t, p)$ , definido como

$$Z(t, p) = H(t, p)B(t, p) = \frac{e^{-\lambda t}}{c_t} e^{\int_0^t r_s ds} \kappa_1, \quad (5-7)$$

en la cual  $r_t$  es una serie de tasa de interés libre de riesgo. Así, acorde con la observación 3.2, el proceso  $Z(t, p)$  debe ser una martingala, la cual examinaremos usando los pruebas implementadas en el Anexo C.

- c. Finalmente contrastamos la hipótesis de martingala para la serie  $Z(t, p)$ , con las pruebas presentadas en el capítulo 4.

## 5.1. Datos

Para verificar si existe evidencia que sugiera que la serie  $Z(t, p)$  es martingala, extraeremos información de diferentes variables observadas en la realidad, por ejemplo, el consumo privado y la tasa de interés libre de riesgo. En particular, se utilizó la información histórica de la economía estadounidense durante el período 1950 - 2012, en frecuencia mensual. El proceso de consumo  $c_t$ , corresponde a los gastos de consumo personal en bienes no durables y servicios provenientes del sistema de cuentas nacionales de ingreso y producto (NIPA por sus siglas en inglés) <sup>1</sup>; por su parte, la serie de tasa libre de riesgo  $r_t$ , corresponde a la tasa del mercado secundario de los títulos del tesoro estadounidense con vencimiento a tres meses (*T - Bills*), información tomada de la Reserva Federal. El proceso de riqueza se aproximó mediante un portafolio invertido en el índice *S&P500*, que corresponde al índice bursátil que se compone de las 500 empresas más grandes de Estados Unidos y se pondera de acuerdo a la capitalización del mercado de cada una de las empresas. Este índice expresa mejor la situación real del mercado accionario y de bonos por lo que es más sensible que el Dow Jones Industrial Average y el Nasdaq 100. <sup>2</sup> Las series usadas las presentamos en la figura 5-1 y sus valores se pueden encontrar en los enlaces del Anexo A.

Con las series mencionadas anteriormente, se derivaron las series  $H(t, p)$  y  $Z(t, p)$ , para la economía estadounidense. Posteriormente al relacionar las ecuaciones 3-4 y 5-6 con 5-2 y 5-7 obtenemos

$$H(t, p) = \frac{\kappa_1}{c_t} e^{-\lambda_t t} \quad (5-8)$$

$$Z(t, p) = \frac{\kappa_1}{c_t} e^{-\lambda_t t + \int_0^t r_s ds}, \quad (5-9)$$

donde  $Z(0, p) = 1$  y la integral  $\int_0^t r_s ds$ , es aproximada a partir de una suma acumulada de la tasa de los títulos del tesoro estadounidense mencionados anteriormente.

Cabe destacar que en las ecuaciones anteriores, el parámetro  $\lambda_t$  desempeña un papel fundamental en la definición de estas series. Típicamente, este parámetro describe las preferencias del individuo hacia futuro, por lo que puede ser considerado como una ponderación o descuento que hace el individuo del consumo inicial con respecto a los consumos futuros. De esta manera, lo más usual es proponer valores de  $\lambda_t$  cercanos a cero, lo que implicaría que si bien para el consumidor su prioridad será consumir hoy, a éste también le importará el consumo futuro. Por su parte, el parámetro  $\kappa_1$  es una constante que no afecta la evolución temporal del proceso  $Z(t, p)$ , por lo que puede ser fijado de manera arbitraria.

Un factor adicional que es importante señalar en la selección del parámetro de preferencias  $\lambda_t$ , es que éste frecuentemente se supone constante a través del tiempo. Por ejemplo, si  $\lambda_t = 0$ , el valor de la utilidad hoy es igual al valor de la utilidad en períodos posteriores y entre más grande sea este valor más se valora el presente respecto al futuro. Sin embargo, es posible que, dado que se evalúa un período que cubre varias generaciones de estadounidenses, este parámetro cambie en el tiempo, lo que puede llevar a un rechazo de la hipótesis de martingala, no porque este comportamiento no se presente, sino porque no se está teniendo en cuenta la variabilidad de este parámetro. En consecuencia, en nuestra aplicación se propone una alternativa

<sup>1</sup><http://www.bea.gov/national/>

<sup>2</sup><http://research.stlouisfed.org/fred2/series/SP500>



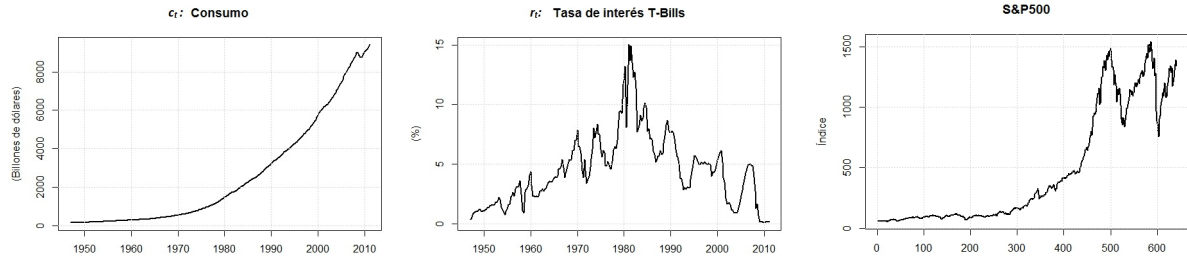


Figura 5-1.: Series Observadas

para hallar valores de  $\lambda_t$  y no sólo proponerlo con valor constante.

A continuación se plantea el método para hallar los valores que puede llegar a tomar este parámetro a través del tiempo, tal que hagan el proceso  $Z(t, p)$ , un proceso martingala bajo las consideraciones planteadas en Londoño (2009) y finalmente se analiza el tipo de función de utilidad que se obtiene a partir de los valores de  $\lambda_t$  encontrados.

## 5.2. Calibración

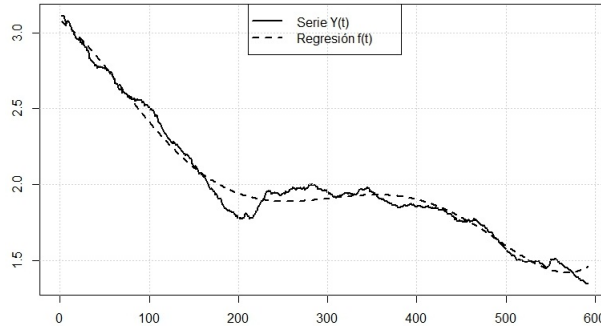
Bajo las consideraciones anteriores (que el parámetro  $\lambda_t$  debe encontrarse cerca de cero y que además puede cambiar en el tiempo), el valor de  $\lambda_t$  fue obtenido a partir de la siguiente observación. Si una serie de tiempo es una martingala, el valor esperado de su primera diferencia debe ser cero, el parámetro  $\lambda_t$ , fue obtenido de tal manera que durante los períodos de tiempo evaluados, la evolución de la serie de tiempo  $Z(t, p)$ , no exhibiera ningún tipo de tendencia temporal. Puesto en otros términos, el parámetro  $\lambda_t$  fue estimado de tal manera que minimizara el cuadrado del coeficiente de correlación entre la serie  $Z(t, p)$  y una tendencia temporal  $t$ . En general, los valores estimados se encontraron alrededor de cero, como se verá a continuación.

Con el fin de remover la tendencia temporal de la serie  $Z(p, t)$ , a través de los valores compensadores de la exponencial de  $\lambda_t$ , procedemos de la siguiente manera. En efecto, sea

$$Z(t, p) = \frac{\kappa_1}{c_t} e^{-\lambda_t t + \int_0^t r_s ds} = e^{-\lambda_t t} \cdot Y(t) \quad (5-10)$$

donde  $Y(t) = \frac{\kappa_1}{c_t} e^{\int_0^t r_s ds}$ .

Como se puede observar en la figura 5-2, la línea continua representa el proceso  $Y(t)$  y se ve que ésta tiene una tendencia decreciente; se ajustó un modelo a esta serie, denotado por  $f(t)$  con la línea punteada, seleccionado después de compararlo con modelos (cuadrático, cúbico, exponencial y logarítmico), de acuerdo a los criterios de información *AIC* y *BIC*, mostrados en la tabla 5-1.



**Figura 5-2.:** Regresión polinomial de grado cinco a la serie  $Y(t)$

	Poly(2)	Poly(3)	Poly(5)	Exp	Log
AIC	-555.17	-1305.54	-1689.65	-460.93	-1359.57
BIC	-537.64	-1283.62	-1658.97	-447.78	-1346.42

**Tabla 5-1.:** Criterios de información

Dado que se pretende que  $Z(t, p)$ , no tenga ningún tipo de tendencia temporal, se consideró la exponencial de  $-\lambda_t t$  (factor de descuento), como el recíproco de la función de regresión, esto es con el fin de estabilizar la serie, removiéndole la tendencia decreciente. En efecto

$$e^{-\lambda_t \cdot t} = \frac{1}{f(t)}.$$

Así al despejar  $\lambda_t$  se tiene que

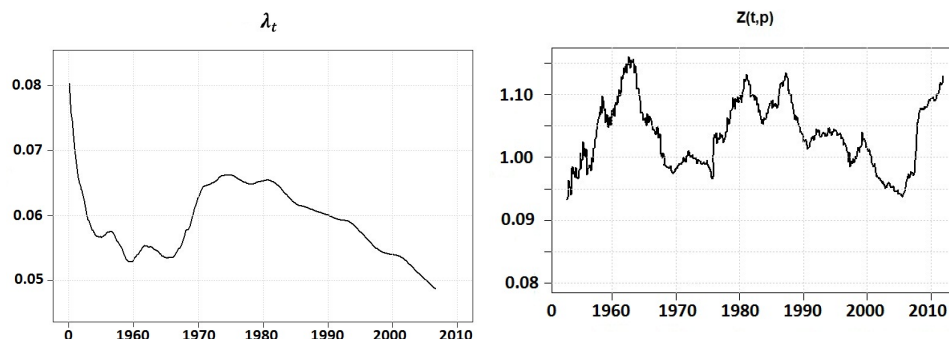
$$\lambda_t = \frac{\ln(f(t))}{t} \quad (5-11)$$

En la gráfica **5-3** (a), se muestra la gráfica de  $\lambda_t$  contra el tiempo.

Como se puede observar, los valores de  $\lambda_t$  son muy cercanos a cero tal y como se toma con frecuencia, además tienen dos fases. En el primer período tiene una concavidad hacia arriba y otro período en el cual su concavidad es hacia abajo, lo cual representa que las preferencias del individuo hacia futuro no son estables en tiempo, en un tiempo son crecientes y en otros decrecientes, pero finalmente tiene una tendencia a cero, lo cual se verá reflejado en la función de utilidad como un alza en la satisfacción al realizar el consumo en diferentes niveles de ellos.

En la figura **5-3**, se exponen las gráficas de la serie del parámetro de preferencias  $\lambda_t$  en (a) y la serie  $Z(t, p)$  en (b), teniendo presente los datos propuestos de la economía estadounidense anteriormente definidos.

Posterior a la calibración de la serie  $Z(t, p)$ , se procedió a contrastar la hipótesis de martingala con las diferentes pruebas implementadas en el Anexo C, esto es con el fin de comprobar que las series obtenidas



**Figura 5-3.:** Gráficos de Lambda y  $Z(t,p)$

Estadístico	$C_0$	$C_{5\%}$	$C_{1\%}$
$AD$ (Durlauf)	1.408626	2.414	3.780
$CvM$ (Durlauf)	0.288933	0.461	0.771
$KS$ (Durlauf)	0.760161	1.342	1.605
$K$ (Durlauf)	0.750796	1.891	2.311
$AD$ (Deo)	1.372855	2.414	3.780
$CvM$ (Deo)	0.149440	0.461	0.771
$KS$ (Deo)	0.546689	1.342	1.605
$K$ (Deo)	0.539954	1.861	2.311
$KS$ (Park y Whang)	0.781265	2.388	2.911
$CvM$ (Park y Whang)	0.162036	2.165	3.328

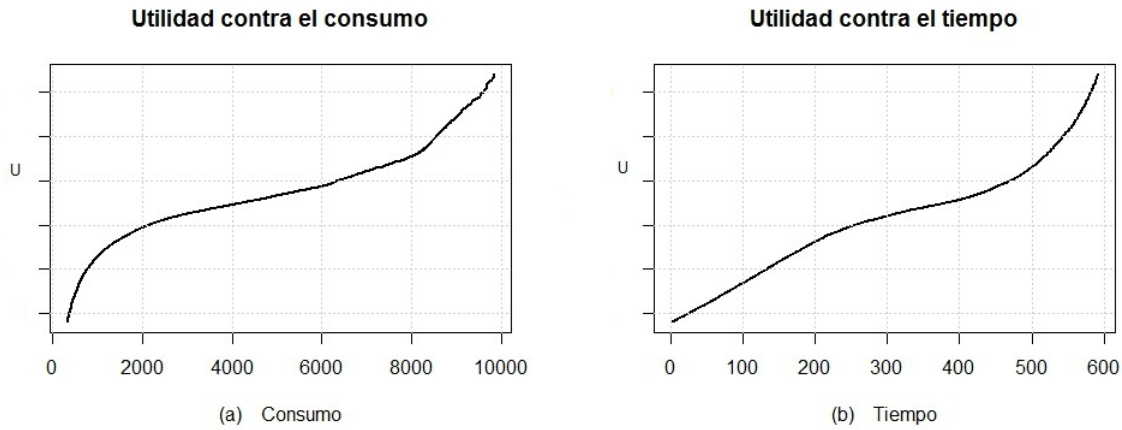
**Tabla 5-2.:** Estadísticos de prueba calculados

Fuente: Cálculos del autor

respaldan estas observaciones. Los resultados de las pruebas se muestran en la tabla **5-2**, en la cual se acepta o rechaza la hipótesis nula según la regla de decisión vista en 4-24.

En el tabla **5-2**, en la segunda columna, se presentan los estadísticos calculados para la serie  $Z(t,p)$  de acuerdo con cada una de las pruebas presentadas en el capítulo 4 e implementadas en el Anexo C. Los valores críticos con los cuales se comparan estos estadísticos obtenidos dependen de cada una de las pruebas y se presentan en la misma tabla, en las dos últimas columnas ( $C_{5\%}$  y  $C_{1\%}$ ), a diferentes niveles de significancia 5% y 1%. Para los estadísticos de Durlauf (1991) y Deo (2000), los valores críticos son tomados de los cuantiles de las distribuciones asintóticas simuladas, cuyos códigos están implementados en el Anexo B. Por su parte Park y Whang (2005) reportan los valores críticos de la distribución en su documento.

Al realizar las pruebas para la serie  $Z(t,p)$ , éstas indican que no se encuentra evidencia para rechazar la hipótesis de martingala con los valores de  $\lambda_t$  propuestos en cada uno de los niveles de significancia, pues como se puede observar en la tabla **5-2**, todos los valores calculados con los programas en el Anexo C, para



**Figura 5-4.:** Gráfica de utilidad contra el consumo y tiempo

la diferencia de  $Z(t, p)$ , son menores que los valores críticos simulados que se muestran en la misma tabla, esto nos sugiere que según los trabajos de Dulauf (1990) y Deo(2000), las desviaciones de la densidad espectral muestral con respecto a la teórica de la primera diferencia de  $Z(t, p)$ , no es significativa, por lo cual es posible concluir que la hipótesis nula  $H_0$  se acepta en cada uno de estos trabajos. Por otra parte, según los resultados encontrados con el trabajo de Park-Wang tampoco hay evidencia para rechazar la hipótesis nula, pues al igual que los resultados anteriores los valores encontrados en los estadísticos de prueba son menores que los valores críticos simulados. Con este marco, después de observar los resultados, es posible decir que los valores hallados para el parámetro  $\lambda_t$ , con el método propuesto, si es consistente con el modelo teórico. La figura 5-4, nos muestra las estructuras de las gráficas de la función de utilidad 5-3 contra el consumo y el tiempo.

## 6. Conclusiones y recomendaciones

### 6.1. Conclusiones

En general, el modelo propuesto en el trabajo de Londoño (2009) “State-Dependent Utility”, es versátil para extraer las características de la función de utilidad y en consecuencia las preferencias de consumo de los agentes, dado que éste proporciona formas funcionales simples para calcular dichas variables mediante series observadas en la realidad, en particular, se hizo uso de variables de la economía estadounidense, la cual fue posible describir usando técnicas estadísticas, empleando metodologías para probar la hipótesis de martingala.

Dado que la función de utilidad hallada tiene características particulares, se hacen las siguientes notaciones. En primer lugar, al sustituir los valores obtenidos del parámetro de preferencias  $\lambda_t$  en la función de utilidad 5-3, ésta se grafica contra el consumo (bienes no durables y servicios), como se observa en la figura 5-4(a), la cual muestra los niveles de utilidad (satisfacción) frente a cada uno de los niveles de consumo. De acuerdo con la teoría del consumidor para funciones de utilidad, al examinar la forma que adquiere esta función particular, se pueden tener las siguientes consideraciones. En un primer periodo hay un momento en el cual la utilidad llega a un nivel de saturación, esto es, que independiente del consumo, la utilidad no da muestras de crecimiento. En una segunda etapa, los niveles de utilidad (satisfacción) en los distintos niveles de consumo más altos, no muestran saturación, por el contrario la utilidad crece con el consumo. Una manera de explicar esto último, es la demanda de una gran variedad de bienes y servicios con un alto atractivo por la rápida innovación tecnológica y asequibilidad, en consecuencia hay un alza en los niveles de utilidad. Estos sucesos se explican por el crecimiento del consumo en las últimas décadas en los Estados Unidos, tal y como lo reportan los estudios de “Federal Reserve Economic Data”<sup>1</sup>, los cuales se muestran en la serie de consumo 5-1. Allí se observa un alza significativo del consumo en las últimas décadas.

Con este marco, dichas pruebas sugieren que en el período de tiempo estudiado, el comportamiento de los agentes de dicha economía se puede describir según la función de utilidad obtenida. Se halló que la función de utilidad que caracteriza los niveles de utilidad en los diferentes niveles de consumo de los estadounidenses, tiene características no habituales. Tradicionalmente se consideran las funciones de utilidad con la propiedad de convexidad o concavidad. En este trabajo se encontró que bajo los supuestos planteados en Londoño (2009), la estructura de la función que caracteriza las preferencias de los agentes de la economía estadounidense tienen un cambio estructural de cóncava a convexa, lo cual puede ser interpretado que los agentes del mercado no están actuando de manera homogénea, hay momentos en el mercado en el cual los individuos cambian de preferencia según el estado de la economía. Es importante señalar que estos cambios en la función de utilidad obedecen además a que los individuos no están asumiendo un riesgo constante y que las innovaciones en los bienes y servicios tienen rápidos cambios y en consecuencia surgen cambios en las

---

<sup>1</sup><http://research.stlouisfed.org/fred2/>

preferencias lo cual se ve reflejado en tal función. La clase de funciones de utilidad con este tipo de estructura son las de clase SAHARA (*Symmetric Asymptotic Hyperbolic Absolute Risk Aversion*), ver [1].

## 6.2. Recomendaciones

Es importante señalar que estos resultados más que una conclusión definitiva, establece un comienzo para el desarrollo de estudios posteriores. En primer lugar, este documento establece una amplia revisión de la literatura sobre pruebas estadísticas que permiten contrastar la hipótesis de martingala en una serie de tiempo univariada, lo que la hace una buena referencia para desarrollar trabajos posteriores, por ejemplo, el desempeño de estas pruebas ante diferentes especificaciones de los datos o violaciones a las hipótesis de interés, desarrollo e implementación de pruebas más generales que consideren series multivariadas y prueba de la hipótesis en un marco más general vía simulaciones de las series consideradas en el documento. Además, de la verificación de las hipótesis de Londoño (2009) sobre otras economías y sus implicaciones en la valoración de activos, entre otros.

En un marco más general, con estas estructuras teóricas es viable estudiar la tendencia de riesgo que asumen los agentes del mercado acerca del consumo e inversión óptimo para alcanzar los niveles de máxima utilidad. Por ejemplo, a través del trabajo de Londoño (2008, 2009), se estudia además la inversión óptima y se obtiene asimismo soluciones explícitas en formas funcionales para portafolios óptimos. Por otra parte, las pruebas para la sensibilidad de estos resultados con la realidad es materia de estudio en economía, con particular enfoque a la teoría del consumidor en microeconomía lo que la hace otra buena opción en trabajos futuros.

El trabajo de Londoño (2009), además de proporcionar en forma funcional el consumo óptimo que maximiza la utilidad, también presenta la inversión óptima que maximiza la utilidad como una función. A diferencia de la calibración que se hace en este documento para que  $Z(t, p)$  sea una martingala, la inversión óptima genera una serie que debería exhibir un comportamiento de súpermartingala 2-1, tal motivación es importante para la investigación de nuevas metodologías que permitan detectar este comportamiento en series temporales en general.

En un contexto de series de tiempo, es importante analizar los resultados de las pruebas usadas en diferentes series particulares, tales como series con raíces unitarias (caminatas aleatorias), series estacionarias y no estacionarias, series heterocedásticas, entre otras, para observar la potencia de las diferentes pruebas; y en un marco económico, es recomendable explorar estos resultados con una perspectiva más dirigida a la microeconomía, pues podría llevar a conclusiones más prácticas y reales, llevando a cabo un análisis de la sensibilidad de los resultados de la función de utilidad resultante con los datos reales, con el fin de hacer una buena discriminación del modelo considerado.

Finalmente realizar una investigación más exhaustiva acerca de la sensibilidad de los resultados de la hipótesis de martingala, en el sentido de estudiar la robustez de los diferentes estadísticos de prueba empleados, usando metodologías vía simulación, con los cuales pueda sugerir que los resultados obtenidos si son robustos a diferentes especificaciones y así analizar el comportamiento de la serie  $Z(t, p)$  en diferentes períodos de tiempo, tales como trimestrales o anuales.

## **A. Enlaces de datos usados**

En este anexo, se muestran los enlaces en los cuales se pueden adquirir cada una de la series empleadas para la aplicación del modelo planteado por Londoño (2008), que corresponden a la economía norteamericana.

<http://www.bea.gov/national/>

<http://www.federalreserve.gov/releases/z1/Current/data.htm>

<http://research.stlouisfed.org/fred2/series/SP500>

## B. Simulaciones de distribuciones

Se presenta a continuación el paquete empleado y las simulaciones de los estadísticos propuestos por Durlauf (1991), Deo (2001) y Park y Whang (2005).

Simulación del proceso de Wiener (rwiener) y del Puente Bowniano (rbridge) , requiere la librería {e1071}

```
#Simulación de los estadísticos propuestos por Durlauf (1991) y Deo (2000)#
#####

#Estadístico de Anderson Darling#
dt<-rep(0.001,1000)
t<-seq(0.01,0.99,length.out=1000)
sum(((Ut^2)/(t*(1-t)))*dt)
plot(density(replicate(10000,sum(((rbridge(end = 1, frequency = 1000))^2)/(t*(1-t))*dt))),
main="Anderson Darling", xlab=" ");grid()
quantile(replicate(10000,sum(((rbridge(end = 1, frequency = 1000))^2)/(t*(1-t))*dt))),
probs = seq(0, 1, 0.01))

#####

#Estadístico de Cramer - von Mises
t<-seq(0,1,length.out=1001)
dt<-diff(t)
plot(density(replicate(10000,sum(((rbridge(end = 1, frequency = 1000))^2)*dt))),
main="Cramer - von Mises", xlab=" ");grid()
quantile((replicate(10000,sum(((rbridge(end = 1, frequency = 1000))^2)*dt))),
probs = seq(0, 1, 0.01))

#####

#Estadístico de Kolmogorov-Smirnov
plot(density(replicate(10000,max(abs(rbridge(end = 1, frequency = 1000))))),
main="Kolmogorov-Smirnov" , xlab=" ");grid()
quantile((replicate(10000,max(abs(rbridge(end = 1, frequency = 1000))))),
probs = seq(0, 1, 0.01))

#####

#Estadístico de Kuiper
plot(density(replicate(10000,max(abs(rbridge(end = 1, frequency = 1000)-
rbridge(end = 1, frequency = 1000))))), main="Kuiper", xlab=" ");grid()
quantile((replicate(10000,max(abs(rbridge(end = 1, frequency = 1000)-
rbridge(end = 1, frequency = 1000))))), probs = seq(0, 1, 0.01))

#####
#####

#Simulación de los estadísticos propuestos por Park y Whang (2005)#
#####

#Estadístico  $KS_{\{N\}}^{\{*\}}$ #
```



---

```
plot(density(replicate(10000, max(abs( cumsum(diff(rwiener(end = 1,
frequency = 1000)) )) ) ), main="Kolmogorov-Smirnov", xlab=" " );grid()

#####

#Estadístico Estadístico CVM_{N}^{*}#
plot(density(replicate(1000, (1/1000)*sum((rwiener(end = 1.2, frequency
= 1000))^2) ) ), main="Cramer von Mises", xlab=" " );grid()

#####
```

## C. Códigos de prueba

Se presenta en este anexo los códigos utilizados para el calcular de los estadísticos de prueba  $C_0$ , para verificar la hipótesis de martingala utilizados en las secciones 4 y 5. Estos códigos fueron implementados en R y tomados de [4]. Los valores se encuentran en la tabla 5-2.

```
# ===== #
# ----- PRIMERA PARTE: PRUEBAS ESPECTRALES ----- #
# ----- #
# Funciones implementadas para calcular los estadísticos #
# espectrales de Durlauf (1991) y Deo (2000)----- #
# ===== #
# Funciones necesarias para implementar
# los estadísticos de AD, CVM, KS y K
# de Durlauf (1991) a partir de los códigos
# de gauss implementados por Fong y Oularis (1995)
# ----- #
# --- Funcion calc.rho (F-0; calcrho) ----- #
# --- Funcion que calcula la secuencia de los ----- #
# --- coeficientes de correlacion para cada t ----- #
# --- Argumentos ----- #
# --- xt: Serie de tiempo que se supone ----- #
# --- martingala en diferencias ----- #
# ----- #
calc.rho <- function(xt,k){
cors <- acf(xt,lag.max=k,plot=F)
rho <- cors$acf[2:(k + 1)]
return(rho)
}

# ----- #
# --- Funcion kern.w ----- #
# --- Funcion que calcula las ponderaciones w de ----- #
# --- acuerdo a cada kernel ----- #
# --- Argumentos ----- #
# --- n: Numero de observaciones de la serie ----- #
# --- bw: ancho de banda ----- #
# --- kern.function: tipo de kernel ----- #
# ----- #
kern.w <- function(n,bw,kern.function=c("none","Bartlett",
"Parzen","Q-S","T-H")){
type <- match.arg(kern.function)
w <- c()
# None
if (type=="none")
w <- matrix(1,nrow=bw)
# Bartlett (Triangular)
if (type=="Bartlett"){
for (l in 1:bw)
w[l] <- 1 - abs(l)/(bw+1)
}
# Parzen (Cúbica suave)
if (type=="Parzen"){
```

```

for (i in 1:bw){
if (i <= bw/2)
w[i] <- 1.0 - 6*((i/(bw+1))^2) + 6*((abs(i)/(bw+1))^3)
else
w[i] <- 2*(1 - (abs(i)/(bw+1)))^3
}
}
# Quadratic-spectral (Senoidal con colas)
if (type=="Q-S"){
jb <- seq(1,n-1,1)/(bw+1)
jband <- jb*1.2*pi
w <- ((sin(jband)/jband - cos(jband))/(jband^2))*3;
}
# Tukey-Hanning (Senoidal)
if (type=="T-H"){
aa <- 0.23
for (l in 1:bw)
w[l] <- 1.0 - (2*aa) + 2*aa*cos((pi*l)/(bw+1));
}
return(w)
} #Fin de la función kern.w

# ----- #
# --- Funcion ut (F-0; ut) ----- #
# --- Funcion que calcula el valor de la funcion ----- #
# --- ut para un ancho de banda y un t especifico ----- #
# --- teniendo en cuenta el kernel que se desee ----- #
# --- Argumentos ----- #
# --- rho: serie de coeficientes de correlacion ----- #
# --- estimados ----- #
# --- bw: ancho de banda ----- #
# --- n: Longitud de la serie ----- #
# --- t: valor que se desea evaluar ----- #
# --- kern.function: tipo de kernel ----- #
# ----- #
ut <- function(rho,bw,n,t,kern.function=c("none","Bartlett",
"Parzen","Q-S","T-H")){
type <- match.arg(kern.function)
j <- 1:n;
xx <- sin(j*pi*t)/j;
ww <- kern.w(n,bw,kern.function=type)
temp <- xx[1:bw]*rho[1:bw]*ww[1:bw];
return(sum(temp)*(sqrt(2*(n+1))/pi))
}

# ----- #
# --- Funcion optim.bw (F-0; opt) ----- #
# --- Funcion que calcula el ancho de banda ----- #
# --- optimo para la serie xt dependiendo del tipo----- #
# --- de kernel que se desee ajustar ----- #
# --- Argumentos ----- #
# --- xt: Serie de tiempo que se supone ----- #
# --- martingala en diferencias ----- #
# --- bw: ancho de banda ----- #
# --- aband: (logico) se debe hacer el ajuste de ----- #
# --- ancho de banda ----- #
# --- kern.function: tipo de kernel ----- #
# ----- #
optim.bw <- function(xt,bw,aband=F,kern.function=c("none",
"Bartlett","Parzen","Q-S","T-H")){
if (aband){
type <- match.arg(kern.function)

```

```

n <- length(xt)
eb <- xt[-n]
ef <- xt[-1]
ae <- sum(eb*ef)/sum(eb^2)
ee <- ef - eb*ae
se <- mean(ee^2)
ad <- sum((se/((1-ae)^2))^2)
a1 <- 4*sum((ae*se/(((1-ae)^3)*(1+ae)))^2)/ad;
a2 <- 4*sum((ae*se/((1-ae)^4))^2)/ad;
if (type=="Q-S")
bw <- 1.3221*(a2*n)^0.2-1;
if (type=="Parzen")
bw <- 2.6614*(a2*n)^0.2-1;
if (type=="Bartlett")
bw <- 1.1447*(a1*n)^0.333-1;
if (type=="T-H")
bw <- 1.7462*(a2*n)^0.2-1;
}
if (bw < 1)
bw <- 0
return(bw);
} #Fin de la función optim.bw

# ----- #
# --- Funcion ut.seq (F-0; sequt) ----- #
# --- Funcion que calcula la secuencia de la ----- #
# --- variable ut a partir de la serie y un ----- #
# --- ancho de banda especifico ----- #
# --- Argumentos ----- #
# --- xt: Serie de tiempo que se supone ----- #
# --- martingala en diferencias ----- #
# --- bw: ancho de banda ----- #
# --- aband: (logico) se debe hacer el ajuste de ----- #
# --- ancho de banda ----- #
# --- kern.function: tipo de kernel ----- #
# ----- #
ut.seq <- function(xt,bw,aband=F,kern.function=c("none",
"Bartlett","Parzen","Q-S","T-H")){
type <- match.arg(kern.function)
n <- length(xt)-1
uts <- c()
bw <- optim.bw(xt,bw,aband=aband,kern.function=type)
k <- bw + 1
rho <- calc.rho(xt,k)
for (j in 1:n)
uts[j] <- ut(rho,bw,n,j/n,kern.function=type)
return(uts)
}

# ----- #
# --- Funcion spectral.test (F-0; ad) ----- #
# --- Funcion que calcula los cuatro estadisticos ----- #
# --- mencionados anteriormente ----- #
# --- Argumentos ----- #
# --- xt: Serie de tiempo que se supone martingala ----- #
# --- en diferencias ----- #
# --- bw: ancho de banda ----- #
# --- a: frecuencia superior sobre la que se ----- #
# --- evaluar 0 < a <= 1 ----- #
# --- aband: (logico) se debe hacer el ajuste de ----- #
# --- ancho de banda ----- #
# --- kern.function: tipo de kernel ----- #

```

```

# ----- #
spectral.test <- function(xt,bw,a=1,aband=F,kern.function
=c("none","Bartlett","Parzen","Q-S","T-H"),print=T){
if (bw >= length(xt))
bw = length(xt) - 1
if (aband)
bw <- optim.bw(xt,bw,aband=T,kern.function=type)
type <- match.arg(kern.function)
# Calculo de la secuencia de ut
zz <- ut.seq(xt,bw,aband=aband,kern.function=type)
ad <- 0
cvm <- 0
n <- length(zz)
n1 <- length(zz)/a
j <- 1
while (j < n1){ # Calculo de los estadisticos AD y CVM
t <- j/n
ad <- ad + (zz[j]^2)/(t*(1-t))
cvm <- cvm + (zz[j]^2)
j <- j+1
}
zz <- zz[-n]
if (a == 1)
n1 <- length(zz)
# Calculo de estadisticos finales
ad <- ad/n
cvm <- cvm/n
ks <- max(abs(zz[1:n1]))
kt <- abs(max(zz[1:n1])-min(zz[1:n1]))
if (print){
cat('\nDurlauf test for the martingale hypothesis\n')
cat('(Ho: series', deparse(substitute(xt)), 'is a sequence of martingale in differences) \n')
cat('kernel used: ',type,'(bandwidth=',bw,')\n')
cat('-----\n')
cat(' Test stat --- Asym Crit Values ---\n')
cat('----- 10% 5% 1% \n')
cat(sprintf('A-D: %3.10f %1.3f %1.3f %1.3f \n',ad, 1.9336, 2.4933, 3.8800))
cat(sprintf('CVM: %3.10f %1.3f %1.3f %1.3f \n',cvm,0.3473, 0.4614, 0.7435))
cat(sprintf('K-S: %3.10f %1.3f %1.3f %1.3f \n',ks, 1.2279, 1.3614, 1.6298))
cat(sprintf('K : %3.10f %1.3f %1.3f %1.3f \n',kt, 1.6200, 1.7470, 2.0100))
cat('-----\n\n')
}
return(list(ad=ad,cvm=cvm,ks=ks,kt=kt))
} #Fin de la función spectral.test

```

```

# Funciones necesarias para implementar-----#
# los estadisticos de AD, CVM, KS y K-----#
# de Deo (2001) a partir de los codigos-----#
# de gauss implementados por Fong y Oularis (1995)-----#
# ----- #
# --- Funcion calc.at ----- #
# --- Funcion que calcula la secuencia de la ----- #
# --- coeficientes de correlacion (modificados) ----- #
# --- para cada t ----- #
# --- Argumentos ----- #
# --- xt: Serie de tiempo que se supone ----- #
# --- martingala en diferencias ----- #
# ----- #
calc.at <- function(xt,k){
n <- length(xt)
xbar <- mean(xt)
varx <- sum((xt-xbar)^2)
xt <- xt - xbar
rho <- c()

```

```

at <- c()
for (i in 1:k){
x1 <- xt[-c(1:i)]
x2 <- xt[-c((n-i+1):n)]
rho[i] <- (x1%*%x2/varx)
at[i] <- (varx/n)*rho[i]*(sum((x1^2)*(x2^2))/(n-i))^(0.5)
}
return(at)
}

# ----- #
# --- Funcion utc ----- #
# --- Funcion que calcula el valor de la funcion ----- #
# --- ut para un ancho de banda y un t especifico ----- #
# --- teniendo en cuenta el kernel que se desee ----- #
# --- de acuerdo con Deo (2001) ----- #
# --- Argumentos ----- #
# --- rho: serie de coeficientes de correlacion ----- #
# --- estimados ----- #
# --- bw: ancho de banda ----- #
# --- n: Longitud de la serie ----- #
# --- t: valor que se desea evaluar ----- #
# --- kern.function: tipo de kernel ----- #
# ----- #
utc <- function(at,bw,n,t,kern.function=c("none","Bartlett",
"Parzen","Q-S","T-H")){
type <- match.arg(kern.function)
j <- 1:n;
xx <- sin(j*pi*t)/j;
ww <- kern.w(n,bw,kern.function=type)
temp <- xx[1:bw]*at[1:bw]*ww[1:bw];
return(sum(temp)*(sqrt(2*(n+1))/pi))
}

# ----- #
# --- Funcion ut.seq2 ----- #
# --- Funcion que calcula la secuencia de la ----- #
# --- variable ut a partir de la serie y un ----- #
# --- ancho de banda especifico ----- #
# --- Argumentos ----- #
# --- xt: Serie de tiempo que se supone ----- #
# --- martingala en diferencias ----- #
# --- bw: ancho de banda ----- #
# --- aband: (logico) se debe hacer el ajuste de ----- #
# --- ancho de banda ----- #
# --- kern.function: tipo de kernel ----- #
# ----- #
ut.seq2 <- function(xt,bw,aband=F,kern.function=c("none",
"Bartlett","Parzen","Q-S","T-H")){
type <- match.arg(kern.function)
n <- length(xt)-1
uts <- c()
bw <- optim.bw(xt,bw,aband=aband,kern.function=type)
k <- bw + 1
at <- calc.at(xt,k)
for (j in 1:n)
uts[j] <- utc(at,bw,n,j/n,kern.function=type)
return(uts)
}

```

```

# ----- #
# --- Funcion spectral.test2 ----- #
# --- Funcion que calcula los cuatro estadisticos ---- #
# --- mencionados anteriormente ----- #
# --- Argumentos ----- #
# --- xt: Serie de tiempo que se supone martingala ---- #
# --- en diferencias ----- #
# --- bw: ancho de banda ----- #
# --- a: frecuencia superior sobre la que se ----- #
# --- evaluar  $0 < a \leq 1$  ----- #
# --- aband: (logico) se debe hacer el ajuste de ---- #
# --- ancho de banda ----- #
# --- kern.function: tipo de kernel ----- #
# ----- #
spectral.test2 <- function(xt,bw,a=1,aband=F,kern.function=
c("none","Bartlett","Parzen","Q-S","T-H"),print=T){
if (bw >= length(xt))
bw = length(xt) - 1
if (aband)
bw <- optim.bw(xt,bw,aband=T,kern.function=type)
type <- match.arg(kern.function)
# Calculo de la secuencia de ut
zz <- ut.seq2(xt,bw,aband=aband,kern.function=type)
ad <- 0
cvm <- 0
n <- length(zz)
n1 <- length(zz)/a
j <- 1
while (j < n1){ # Calculo de los estadisticos AD y CVM
t <- j/n
ad <- ad + (zz[j]^2)/(t*(1-t))
cvm <- cvm + (zz[j]^2)
j <- j+1
}
zz <- zz[-n]
if (a == 1)
n1 <- length(zz)
# Calculo de estadisticos finales
ad <- ad/n
cvm <- cvm/n
ks <- max(abs(zz[1:n1]))
kt <- abs(max(zz[1:n1])-min(zz[1:n1]))
if (print){
cat('\nDeo test for the martingale hypothesis\n')
cat('(Ho: series', deparse(substitute(xt)), 'is a sequence of martingale in differences) \n')
cat('kernel used: ',type,'(bandwidth=',bw,')\n')
cat('-----\n')
cat(' Test stat --- Asym Crit Values ---\n')
cat('----- 10% 5% 1% \n')
cat(sprintf('A-D: %3.10f %1.3f %1.3f %1.3f \n',ad, 1.9336, 2.4933, 3.8800))
cat(sprintf('CVM: %3.10f %1.3f %1.3f %1.3f \n',cvm,0.3473, 0.4614, 0.7435))
cat(sprintf('K-S: %3.10f %1.3f %1.3f %1.3f \n',ks, 1.2279, 1.3614, 1.6298))
cat(sprintf('K : %3.10f %1.3f %1.3f %1.3f \n',kt, 1.6200, 1.7470, 2.0100))
cat('-----\n\n')
}
return(list(ad=ad,cvm=cvm,ks=ks,kt=kt))
} #Final de la función spectral.test2

# ----- #
# --- Funcion blk ----- #
# --- Funcion que calcula el estadistico Q de ----- #
# --- Lung-Box-Pierce (modificados) ----- #
# --- Argumentos ----- #
# --- xt: Serie de tiempo que se supone ----- #

```

```

# --- martingala en diferencias ----- #
# --- k: Numero de rezagos ----- #
# ----- #
blk <- function(xt,k){
n <- length(xt)
at <- calc.at(xt,k)
bl.stat <- n*sum(at^2)
pval <- pchisq(bl.stat,k,lower.tail=FALSE)
return(list(bl.stat=bl.stat,p.value=pval))
}

# ----- #
# --- Funcion blk2 ----- #
# --- Funcion que calcula el estadistico Q de ----- #
# --- Lung-Box-Pierce (no corregido) ----- #
# --- Argumentos ----- #
# --- xt: Serie de tiempo que se supone ----- #
# --- martingala en diferencias ----- #
# --- k: Numero de rezagos ----- #
# ----- #
blk2 <- function(xt,k){
n <- length(xt)
rho <- calc.rho(xt,k)
bl.stat <- n*sum(rho^2)
pval <- pchisq(bl.stat,k,lower.tail=FALSE)
return(list(bl.stat=bl.stat,p.value=pval))
}

# ===== #
# ----- SEGUNDA PARTE: PRUEBAS DE PARK Y WANG ----- #
# ===== #
# Funciones implementadas para calcular los estadisticos #
# espectrales de Park y Wang(2005)----- #
# En este caso se evalua la serie en niveles----- #
# ----- #
martingale.stats <- function(yt,print=TRUE){
n <- length(yt)
ut <- (yt[-1] - yt[-n])/sd(yt[-1] - yt[-n])
Qn <- (1/sqrt(n))*cumsum(ut[order(yt[-n])])
Sn <- max(abs(Qn))
Tn <- (1/n)*sum(Qn^2)
if (print){
cat('\nPark and Wang test of the martingale hypothesis\n')
cat('(Ho: series', deparse(substitute(yt)), 'is a martingale) \n')
cat('-----\n')
cat(' Test stat --- Asym Crit Values ---\n')
cat('----- 10% 5% 1% \n')
cat(sprintf('Sn: %3.10f %1.3f %1.3f %1.3f \n',Sn,2.119,2.388,2.911))
cat(sprintf('Tn: %3.10f %1.3f %1.3f %1.3f \n',Tn,1.650,2.165,3.328))
cat('-----\n\n')
}
list(Sn=Sn,Tn=Tn)
}

```



# Bibliografía

- [1] An Chen, Antoon Pelsser, Michel Vellekoop (2011): “Modeling non-monotone risk aversion using SA-HARA utility functions”, *Journal of Economic Theory* 146 (2011) 2075-2092.
- [2] Anderson, T. W y L. You (1996): Adequacy of Asymptotic Theory for Goodness-of-Fit Criteria for Spectral Distributions, *Journal of Time Series Analysis*, 17, 533 - 552.
- [3] Barro, R. J. (1981): On the Predictability of Tax-Rate Changes, NBER Working Papers 0636, *National Bureau of Economic Research*, Inc.
- [4] Becerra, Óscar. R. (2008): Tesis de Maestría en Matemáticas Aplicadas, *Contraste de la Hipótesis de Martingala en Modelos Intertemporales con Utilidades Dependientes de Estado*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
- [5] Billingsley, P. (1995): *Probability and measure*, Wiley series in probability and mathematical statistics. Wiley, New York, 3 ed.
- [6] Clarida, R. H. (1991): Aggregate stochastic implications of the life cycle hypothesis, *The Quarterly Journal of Economics*, 106(3), 851-867.
- [7] Cochrane, J. H. (2001): *Asset Pricing*. Princeton University Press.
- [8] Deo, R. S. (2000): Spectral tests of the martingale hypothesis under conditional heteroscedasticity, *Journal of Econometrics*, 99(2), 291-315.
- [9] Durlauf, S. N. (1991): Spectral based testing of the martingale hypothesis, *Journal of econometrics*, 50, 355-376, North-Holland.
- [10] Fama, E. (1970): Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work, *The Journal of Finance*, 25(2), 383-417, Papers and Proceedings of the Twenty-Eighth Annual Meeting of the American Finance Association New York, N.Y. December, 28-30, 1969.
- [11] Hall, R. (1978): Stochastic implications of the life cycle - permanent income hypothesis: theory and evidence, *Journal of political economy*, 86, 6.
- [12] Hannan, E. J., y C. C. Heyde (1972): On limit theorems for quadratic functions of discrete time series, *The annals of mathematical statistics*, 43(6), 2058-2066.
- [13] Karatzas y Shreve (1998): *Methods of Mathematical Finance*. Springer, Columbia University, New York, 1 ed.
- [14] Keynes, J. M. (1936): *The General Theory of Employment, Interest, and Money*.

- 
- [15] Kunita, H. (1990): *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*, vol. 24 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge
- [16] Lo, A., y A. C. MacKinlay (1988): Stock market prices do not follow random walks: evidence from a simple specification test, *The review of financial studies*, 1(1), 41-66.
- [17] Londoño, J. A. (2003): State Tameness: A New Approach for Credit Constrains, Finance 0305001, EconWPA.
- [18] Londoño, J. A. (2007a): A more general valuation and arbitrage theory for Ito processes. Discussion paper, Universidad Nacional de Colombia, Forthcoming in *Stochastic Analysis and Applications*.
- [19] Londoño, J. A. (2009): "State Dependent Utility". *J. Appl. Prob.* 46, 55-70 (2009). Printed in England.
- [20] Londoño, J. A. (2008): Inter-temporal equilibrium with state dependent utilities, mimeo.
- [21] Lucas, R. E. J. (1978): Asset Prices in an Exchange Economy, *Econometrica*, 46(6), 1426-1445.
- [22] Lupi, C. (1996): A monte carlo analysis of two spectral tests of the martingale hypothesis, *Journal of the Italian Statistical Society*, (3), 335-360.
- [23] Mehra, R., y E. C. Prescott (1985): The Equity Premium: A Puzzle, *Journal of Monetary Economics*, (15), 145-161.
- [24] Park, J., y Y.J. Whang (2005): A Test of the Martingale Hypothesis, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 9(2), 1163-1163.
- [25] Samuelson, P. (1965): Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly, *Industrial management review*, 2, 41-49.
- [26] Weil, P. (1989): The Equity Premium Puzzle and the Riskfree Rate Puzzle, Nber working papers, *National Bureau of Economic Research*, Inc.
- [27] Wei, W. (2006): *Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods*. Pearson, Temple University, 2 ed.