



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

“Apropiación del concepto de función usando el software Geogebra”

José Nelson Martínez Gómez

**Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Matemáticas y Estadística
Manizales, Colombia**

2013

“Apropiación del concepto de función usando el software Geogebra”

José Nelson Martínez Gómez

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

Mgr. Leonel Libardo Palomá Parra

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Matemáticas y Estadística
Manizales, Colombia

2013

DEDICATORIA

A mis padres porque son los gestores de mi proyecto de vida y han logrado con sus enseñanzas que sea un ser laborioso y emprendedor.

A mi esposa quien con sus palabras y paciencia ha estado presente durante todo este tiempo apoyándome y dándome ánimo para no desfallecer.

A mis hijos Tatiana y Rony porque son la razón de mi existencia. Porque al mirarlos siento que todo esfuerzo y sacrificio vale la pena.

Agradecimientos

A Dios por su infinita misericordia ya que me ha dado la oportunidad de trabajar como docente; profesión en la que me siento realizado y feliz.

A la Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y en especial al Mgr. Jhon Jairo Salazar Buitrago por su gran compromiso con la maestría y sus estudiantes.

Al Mgr. Leonel Libardo Palomá Parra por su disponibilidad, constante apoyo, sus orientaciones en el manejo del software Geogebra y por ampliar mi visión respecto a la importancia de las TIC en la enseñanza de las matemáticas, comprendiendo con ello que como docentes tenemos un gran reto el cual es reducir la brecha digital.

Finalmente un agradecimiento muy especial a mi amiga y gran maestra la Magíster Mónica Cruz Sánchez por sus valiosos aportes en la realización de este trabajo.

Resumen

El trabajo presenta el diseño de una unidad didáctica que sirve de guía para la enseñanza y aprendizaje del concepto de función y de las características de funciones lineales y cuadráticas, que corresponden al currículo de grado noveno de Educación Básica. La unidad diseñada se convierte en una estrategia didáctica valiosa en el contexto local, regional y nacional que de forma interdisciplinaria e interactiva aborda la enseñanza de las temáticas mencionadas a través de tres módulos que siguen la secuencia didáctica de pedagogía conceptual con uso del software matemático de dominio público Geogebra.

Palabras clave: función, función lineal, función cuadrática, Geogebra, aplicaciones de funciones, applets, gráficas de funciones

Abstract

This work presents the design of a didactic unit uses as a guide for teaching and learning process about the concept of function and the characteristics of linear and quadratic functions, corresponding to the ninth grade syllabus in basic education. The designed unit turns into as a value didactic strategy in the local, regional and national context, that in an interdisciplinary and interactive way approach the teaching of the mention topics through three modules that follow the didactic sequence of the conceptual pedagogy with the use of a math software of a public domain “Geogebra”.

Keywords: function, linear function, quadratic function, Geogebra, function application, applets, drawing function.

Contenido

	Pág.
Resumen	IX
Lista de figuras.....	XII
Lista de tablas	XIII
Lista de Símbolos y abreviaturas.....	XIV
Introducción	1
1. Capítulo 1 Preliminares.....	3
1.1 Justificación	3
1.2 Planteamiento del problema	6
1.3 Objetivo General.....	9
1.4 Objetivos Específicos.....	9
2. Capítulo 2 Marco Conceptual	11
2.1 Referente Teórico.....	11
2.1.1 Evolución del concepto de función	11
2.1.2 Enseñanza asistida por computador	18
2.1.3 Informe de la UNESCO sobre el uso de las TIC.....	20
2.1.4 Brecha Digital.....	21
2.1.5 La próxima revolución	22
3. Capítulo 3 Metodología	25
4. Capítulo 4 Unidad Didáctica Diseñada	31
4.1 Módulo 1: El concepto de función	32
4.2 Módulo 2: Función lineal.....	39
4.3 Módulo 3: Función Cuadrática	47
5. Conclusiones y recomendaciones.....	54
5.1 Conclusiones	54
5.2 Recomendaciones	54
A. Anexo: Video tutorial básico uso de Geogebra	56
B. Anexo: Historia de Geogebra	57
C. Anexo: Aprendizaje significativo	58

Bibliografía	65
---------------------------	-----------

Lista de figuras

	Pág.
Ilustración 1: Imagen representativa software Geogebra	31
Ilustración 2: Concepto de función	34
Ilustración 3: Dominio y rango 1	34
Ilustración 4: Dominio y rango 2	34
Ilustración 5: Dominio y rango 3	37
Ilustración 6: Problema lineal	39
Ilustración 7: Producción arandelas	40
Ilustración 8: Pendiente de una recta	41
Ilustración 9: Invitación a un concierto	42
Ilustración 10: Venta de celulares	42
Ilustración 11: Ecuación de la recta	43
Ilustración 12: Ecuación de la recta 2	43
Ilustración 13: Pendiente e intercepto	43
Ilustración 14: Crecimiento de ratas	47
Ilustración 15: Amplitud y desplazamiento de la parábola	49
Ilustración 16: Crecimiento de conejos	49

Lista de tablas

	Pág.
Tabla 1 RÚBRICA PARA EVALUAR EL CONCEPTO DE FUNCIÓN	37
Tabla 2 EVALUACIÓN ACTITUDINAL FRENTE AL USO DE COMPUTADORES [1] ...	38
Tabla 3 RÚBRICA FUNCIÓN LINEAL	46
Tabla 4 RÚBRICA FUNCIÓN CUADRÁTICA	52
Tabla 5 RÚBRICA PARA EL DOCENTE	53

Lista de Símbolos y abreviaturas

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término
x	Variable independiente
y	Variable dependiente
$f(a)$	F en función de la variable a
\mathbb{R}	Conjunto de los números Reales
V_0	Velocidad inicial
ϵ	Pertenece
Dom	Dominio
Ran	Rango
Km	Kilómetros
t	Tiempo
V	Volumen
$N(t)$	N en función de t
m	Pendiente
b	Intercepto
$C(x)$	Costo de producción
P	Par ordenado
$h(t)$	Altura con respecto al tiempo
h_0	Posición inicial
$f(n)$	F en función de n

Introducción

Cuando los maestros de matemáticas en Educación media e incluso cursos básicos universitarios abordan temáticas en las cuales es necesario el concepto de función, se encuentran con múltiples obstáculos, en especial se dan cuenta que este relevante concepto matemático y las nociones previas no fueron interiorizadas, ni aprehendidas por sus estudiantes en grados anteriores, consecuentemente les corresponde hacer una retroalimentación que en ocasiones no es suficiente; por tal motivo, es necesario desde la educación Básica Secundaria evitar que dichos obstáculos cognitivos persistan, fortaleciendo un aprendizaje significativo.

Uno de esos obstáculos, por ejemplo, es el de asociar de manera coherente las parejas ordenadas representadas en el plano con su correspondiente representación algebraica; otra dificultad notoria es la dificultad en el cálculo del conjunto de valores que puede tomar la variable independiente y los que se obtienen en la variable dependiente a partir de una expresión algebraica dada, además, existen carencias en la comprensión de función como relación de variables, obstáculos que unidos a diferentes factores motivacionales y actitudinales de los estudiantes, hacen más difícil el aprendizaje y la transferencia de sus conocimientos en la solución de situaciones problema.

Con el ánimo de superar estas dificultades y alcanzar un verdadero aprendizaje significativo que promueva *la integración* de elementos fundamentales de funciones (conceptos, manejo algebraico, numérico, tabular y grafico), este trabajo se constituye como una propuesta didáctica y dinámica para la enseñanza del concepto de función, función lineal y cuadrática, mediante el cambio de escenarios tradicionales de enseñanza que utilizan solo el tablero a ambientes con herramientas interactivas, en este caso el uso del computador y el software matemático de uso libre "Geogebra".

Esta propuesta se materializa mediante el diseño de módulos didácticos que siguen la secuencia didáctica de pedagogía conceptual, con el uso de Geogebra, software matemático que reúne de forma dinámica geometría, álgebra y cálculo.

Los módulos son enriquecidos con diferentes aplicaciones o applets que se ejecutan en el entorno planteado y con instrumentos de evaluación, haciendo de esta propuesta una herramienta posibilitadora de aprendizajes significativos con el aprovechamiento de las nuevas tecnologías de la comunicación y la información imperantes en la educación actual. Adicionalmente, esta propuesta puede contribuir con su implementación a la disminución de la brecha digital respecto al acceso a contenidos digitales de calidad, el uso y la apropiación de las nuevas tecnologías, ya que apunta al cumplimiento del “desarrollo de contenidos de alta calidad para establecer y promover las TIC con base en los sistemas de enseñanza aprendizaje”, objetivo y directriz planteada para la Educación Básica por el Ministerio de Educación Nacional en el Programa Nacional de TIC en Educación [20].

1. Capítulo 1 Preliminares

1.1 Justificación

“Oigo y olvido, veo y aprendo, hago y entiendo” Confucio.

Docentes e investigadores han observado, que algunas veces, en el manejo del concepto de función, los estudiantes muestran deficiencias, lo que es un indicativo para plantear investigaciones en torno a la adquisición del concepto y buscar estrategias adecuadas de enseñanza [24].

Cuando los profesores universitarios abordan el tema de función en los primeros semestres de algunas carreras, es usual que detecten vacíos cognitivos sobre su definición en los educandos, como ejemplo tenemos la investigación hecha por Miriam Trujillo, Juan de Jesús Guerrero y Nivia Marina Castro en donde se refieren a los obstáculos cognitivos en el concepto de función y cómo remediarlos utilizando la calculadora graficadora [34], este trabajo fue realizado con estudiantes de primer semestre de ingeniería de la universidad de la Salle en Bogotá; también en la tesis de Contreras L Jonnart sobre “INTEGRACION DE FUNCIONES REALES” [7] en la que se aborda el concepto de función, éste trabajó con estudiantes universitarios de primer semestre, detectando vacíos cognitivos del mismo; Orlando Planchart Márquez en su tesis doctoral sobre “La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función” [24] se propone, en primer lugar, identificar y analizar las dificultades que surgen durante el proceso que conduce al aprendizaje de las funciones, en sus conclusiones destaca especialmente las siguientes:

- * Los estudiantes muestran dificultades en el manejo de las distintas representaciones semióticas utilizadas en el concepto de función.
- * Dificultades con la notación simbólica de la función.
- * Dificultades en la conversión del sistema gráfico al sistema algebraico.

* Los estudiantes tienden a encasillarse en un término o una imagen visual-textual.

Mariela Sarmiento [31], en su trabajo, menciona algunas dificultades que maestros de matemáticas han detectado a través de su experiencia cuando orientan el concepto de función, algunas de ellas son:

- **Comprensión de Conceptos.** Al analizar datos hemos detectado que los estudiantes no distinguen las relaciones que son funciones, confunden los conceptos de función e inyectividad, dominio y rango.
- La totalidad de los docentes manifiestan usar la **ejemplificación** pero la mayoría sólo con la ayuda de la pizarra y el marcador y eso no basta para que los estudiantes desarrollen atención, memoria lógica, abstracción, capacidad de comparación y diferenciación, para lograr adquirir los conceptos.
- **Representación gráfica.** La dificultad para dibujar una gráfica comienza en la construcción de la tabla de datos. Si un estudiante no es capaz de reconocer las distintas representaciones gráficas de un objeto matemático (en nuestro caso, las funciones), pasar de una a otra y utilizarlas en las diversas situaciones problemáticas, desde el punto de vista pragmático, no lo ha comprendido.
- **Cálculo de Dominio y Rango.** Se aprecia dificultad en el cálculo analítico y geométrico de ambos conceptos.

Las razones antes expuestas son motivo importante para buscar una estrategia que permita la aprehensión del concepto de función.

Adicionalmente, para justificar el estudio del concepto de función y en particular el de función lineal y cuadrática, el cual es considerado como fundamental en la formación matemática básica del estudiante, al respecto Planchart menciona que el concepto de función, tema básico del curso de pre-cálculo, integra cuatro aspectos medulares:

proceso didáctico en la adquisición de las funciones, la visualización, los sistemas de representación, y la modelación desde el contexto físico y geométrico [24].

En este sentido el cómo enseñar el concepto de función se convierte en un problema práctico; muy posiblemente la solución será utilizar un software matemático para su enseñanza.

En el campo de la investigación didáctica se admite, desde hace varias décadas, la necesidad de utilizar los programas de computadora de todo tipo en la enseñanza de las ciencias, por las indudables ventajas pedagógicas que se han ido poniendo de manifiesto en múltiples trabajos de divulgación e investigación realizados en los países más avanzados (Hartley, J.R. 1988); citado por Pontes Pedrajas [25].

Entre la diversidad de software educativos para el área de matemáticas, llama particularmente la atención: “Geogebra”, por ser especialmente de uso libre, porque el tiempo que demora un usuario en descargarlo es aproximadamente 4 minutos y además es un programa multifuncional; útil para graficar todo tipo de funciones tanto en 2D como en 3D; también sirve para trabajar diferentes temas de geometría, estadística y para hacer guías interactivas o applets.

Previo a la realización de este trabajo usando el software “Geogebra”, se han hecho algunos ensayos en la sala de sistemas del colegio Leonardo Da Vinci de la ciudad de Manizales, llevando a los estudiantes de los grados 8° y 9° de la jornada de la tarde para orientar temas como el teorema de Pitágoras y clasificación de triángulos, el círculo y la circunferencia, áreas y perímetros de figuras geométricas planas. Se observó que el interés por parte de ellos para desarrollar la clase usando esta herramienta informática es mucho mayor que cuando se realiza la clase en el aula de forma tradicional.

Retomando la frase inicial de este capítulo, el hecho de hacer e interactuar con un tema en el área de matemáticas convierte la clase en un proceso dinámico y el estudiante la encuentra más interesante, por tanto su aprendizaje es mejor que cuando simplemente éste es un actor pasivo en el proceso cognitivo.

Se espera que esta propuesta sobre la utilidad del programa “Geogebra”, en la enseñanza del concepto de función, motive a los maestros que tengan la posibilidad de

contar con una sala de informática para sus prácticas docentes y que conozcan este trabajo lo utilicen ya que también es de fácil manejo y su uso se puede extender a la enseñanza de muchos otros temas.

1.2 Planteamiento del problema

El proceso de enseñanza-aprendizaje en todos sus niveles y en todas las áreas, en el siglo actual está matizado por el uso de las Tecnologías informáticas comúnmente llamadas TIC's, donde las computadoras con sus múltiples aplicaciones están desempeñando una función preponderante por las ventajas que representan, tanto para la explicación de los conceptos como para su apropiación. A medida que ha ido avanzando la tecnología, paralelamente se ha tratado de buscar métodos efectivos que faciliten de manera significativa el proceso enseñanza aprendizaje. Se puede afirmar que a cada paradigma de la informática ha estado asociada una versión didáctica que apoye a la docencia en los contenidos más diversos [3].

Quizás por ello es que en la actualidad se encuentran tantos software educativos cuya función primordial es contribuir al proceso de enseñanza aprendizaje en todo el mundo. Es decir que en estos momentos son muchos los expertos en el manejo de software que están procurando con sus ideas hacer aportes valiosos a la educación en todos los campos.

Las herramientas computacionales, proveen entornos de trabajo que conllevan a nuevas formas de tratar metodológicamente los contenidos de las diferentes asignaturas, en los distintos niveles académicos. El recurrir a medios didácticos de software se transformará en valor agregado al proceso de enseñanza y aprendizaje en función de las posibilidades del software y la capacidad del maestro para estructurar metodológicamente los medios [29].

Indudablemente se puede afirmar que el uso de las herramientas tecnológicas depende del maestro, así como de sus intenciones metodológicas y didácticas, y no al contrario, pues dicho de otra manera, la herramienta tecnológica por sí sola no contribuye al mejoramiento del proceso enseñanza aprendizaje.

El potencial pedagógico que ofrecen herramientas de software diseñadas con objetivos educativos, por ejemplo el software “GEOGEBRA”, sólo puede dilucidarse a partir de una rigurosa investigación, evaluación y disposición creativa de sus opciones y elementos, para así hacer una lectura efectiva de usos didácticos que puedan aportar a modelos y estrategias de intervención educativa efectiva. Por otro lado, el uso de estas herramientas requiere que el profesor tenga claridad respecto a: Las competencias que desea lograr en sus alumnos, a cómo entiende el proceso de enseñanza aprendizaje, qué metodología y recursos de software utilizará; para luego poner en práctica el diseño establecido y evaluar los resultados obtenidos [29].

Es por ello que el maestro de hoy se enfrenta a un gran reto, ¿cómo abordar los diferentes conceptos matemáticos con la ayuda de las TIC, para evitar la monotonía y por ende para estar al día con las exigencias tecnológicas del mundo?

En tiempos recientes, la comunidad de matemática educativa ha afrontado el reto de cómo mejorar la enseñanza y aprendizaje de la matemática en general, mostrando así su preocupación respecto a un complejo tema como lo es el de función [16].

Es por esto, que se han realizado numerosas investigaciones que se encuentran relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, en particular, en la literatura de hoy en día es posible encontrar investigaciones dedicadas al estudio del concepto de función, debido a la importancia de éste, ya que un estudiante que no aprenda y signifique de modo correcto dicho concepto, no solo estará incapacitado para modelar y resolver problemas de su entorno, sino que también se encontrará con grandes obstáculos para realizar entendimientos claros de conceptos matemáticos más avanzados, por ejemplo: conceptos tales como límite, derivada, integral, por mencionar algunos [16].

El concepto alrededor del cual se desarrolla la actividad didáctica a diseñar y estudiar es el de función, particularmente la lineal y la cuadrática. El interés por este concepto surge por ser uno de los temas de mayor importancia en la matemática a partir del nivel medio superior. Es considerado fundamental en el Cálculo y otras ramas de la matemática, con diferentes aplicaciones en distintas áreas de la ciencia.

Ruiz Higuera citado por Graciela Rey y Carolina Boubée, en Aportes didácticos para abordar el concepto de función expresa: “Nuestros alumnos de secundaria manifiestan en general una concepción de la noción de función como un procedimiento algorítmico de

cálculo...” [27]. En tanto que no se busque una estrategia didáctica para abordar el concepto de función, el estudiante tendrá dificultades en la aprehensión de éste y su relación con múltiples fenómenos de su entorno.

Abraham Cuesta Borges en su tesis doctoral [8] manifiesta que:

* El concepto de función en los niveles de enseñanza previos a la universidad se ha trabajado poco, o de manera no significativa.

*Muchas de las dificultades en el manejo del concepto de función, permanecen incluso después de haber cursado y aprobado los contenidos de cálculo I, particularmente en la carrera de economía.

*Algunos estudiantes explican la relación de dependencia entre dos variables, pero en muchos casos no se comprende la regla que domina dicha relación.

Es oportuno después de las anteriores anotaciones, y de varios diálogos con docentes que orientan matemáticas en los grados superiores (9°, 10°, 11°) manifestar algunas posibles causas por las cuales el concepto de función, su clasificación, sus características y su dominio-rango no quedan en la mente del educando como aprendizaje significativo; estas son entre otras las siguientes:

- Enseñanza tradicional de las matemáticas, en donde el docente se ciñe a transmitir los conceptos de manera teórica y estos generalmente quedan en el papel.
- Falta mejor organización programática de los contenidos.
- Lo engorroso que resulta para un estudiante graficar una función en su cuaderno, luego otra y después más; lo que termina en un desinterés por comprender cómo varía una función al hacer algunos cambios y tener que volver a graficar.
- Falta conexión entre la tabulación de la función con su respectiva representación gráfica.
- La descontextualización de las situaciones problema usadas para que los estudiantes aprehendan el concepto de función.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores quizás la más importante y por la cual el concepto de función no queda lo suficientemente claro en la mente de los estudiantes de los grados 10° y 11°, es por el poco tiempo que se le dedica en el grado 9° a este tema crucial. Y es razonable ya que hasta graficar una función en el tablero para el docente, demanda mucho tiempo de la clase, entonces para el estudiante quien apenas está iniciándose en el tema, mucho más.

Abraham Cuesta Borges, sugiere que se debe cambiar el escenario a través del cual se ha orientado el concepto de función [8], por tanto en este trabajo se plantea la pregunta: ¿Cómo orientar el concepto de función utilizando el software “Geogebra”, para que quede inmerso en la mente de los estudiantes convirtiéndose así en un aprendizaje significativo?

1.3 Objetivo General

Diseñar módulos didácticos e interactivos incorporando el software GEOGEBRA¹ para mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje y la apropiación del concepto de función, función lineal y cuadrática, así como su aplicación en la solución de situaciones problema de la vida real.

1.4 Objetivos Específicos

1. Elaborar un video tutorial básico centrado en la familiarización del software GEOGEBRA.

¹El programa Geogebra es un recurso tecnológico que debería formar parte de la clase de matemática así como lo hace la calculadora. APARICIO L.Francisco
[Jhttp://recursostic.educacion.es/eda/web/geogebra/conclusiones](http://recursostic.educacion.es/eda/web/geogebra/conclusiones)

2. Diseñar un módulo didáctico aplicando el concepto de función en el análisis, interpretación y solución de situaciones y fenómenos de la cotidianidad usando el software GEOGEBRA.
3. Diseñar un módulo didáctico en el entorno GEOGEBRA que permita tabular, graficar, analizar y manipular algebraicamente funciones lineales como insumo para la solución de situaciones problema con estudiantes de grado noveno de básica secundaria.
4. Identificar los elementos y las características de las funciones cuadráticas a través del diseño de un módulo didáctico usando el software "GEOGEBRA".
5. Diseñar un instrumento de evaluación que permita valorar el proceso de enseñanza aprendizaje con la estrategia didáctica interactiva planteada.

2. Capítulo 2 Marco Conceptual

2.1 Referente Teórico

2.1.1 Evolución del concepto de función

Haciendo un breve recorrido en el tiempo, veremos cómo el hombre a lo largo de la historia ha tratado de encontrar relaciones, vínculos, asociaciones, enlaces, acoplamientos o correspondencias entre elementos de conjuntos numéricos; observemos algunas culturas de la antigüedad comenzando por:

A. LOS BABILONIOS:

Disponían de tablas de cuadrados, raíces cuadradas, cubos y raíces cúbicas. Las raíces aparecen por ejemplo cuando calculaban la diagonal (d) de un rectángulo de altura (h) y base (w) [18]. Entonces se puede notar que para este momento de la historia de las matemáticas, ya se estaba gestando una correspondencia entre objetos, es decir que de forma sencilla para la modernidad pero compleja para ese momento era un avance o logro para las matemáticas.

En las tablillas encontradas, también se observan notas de medición de ángulos y las relaciones trigonométricas [28].

Aquí nos preguntamos entonces; por el significado de estas relaciones las cuales según el texto, corresponden a la asociación entre un conjunto de partida y un conjunto de llegada, que si bien no se trata de una función definida, sí puede decirse que ya los matemáticos de esta cultura, estaban hallando relaciones entre cantidades numéricas.

B. EGIPTO ANTIGUO:

Egipto, como decía el historiador griego Heródoto, es un regalo del Nilo. Una vez al año, este río, que acopia sus aguas en el lejano sur del África central y de Abisinia, inunda casi todo el territorio que se extiende a lo largo de sus riberas y deja fértiles depósitos de limo al retirarse. La mayor parte de la población vivía de cultivar estas tierras, y aún hoy lo sigue haciendo [18].

Posiblemente este hecho creó en la mente de sus pobladores la necesidad de hacer conjeturas matemáticas que les permitiera aprovechar la fertilidad de sus tierras cada año y de hacer las reparticiones correspondientes a las mismas.

Los egipcios utilizaron la matemática en la administración de los estados y de los templos, en el cálculo de los salarios pagados a los trabajadores, en el cálculo de volúmenes de graneros y áreas de campos, en el cobro de impuestos estimados según el área de la tierra [18].

En el papiro moscovita se recogen 25 problemas. La mayoría de ellos son del mismo tipo que en el papiro de Rhind². En uno de los problemas (Nº 10) está contenido el primer ejemplo de la matemática de determinación del área de una superficie curva: Se calcula la superficie lateral de un cesto, esto es, un semicilindro de altura igual al diámetro de la base...[28].

En los párrafos anteriores hay indicios de que los antiguos matemáticos egipcios ya tenían la noción de dependencia en este caso que el área de un terreno rectangular dependía de la medida de la base y de la altura (una idea intuitiva de función), también en el salario a pagar a sus trabajadores y el número de ellos, el impuesto que debía pagar una persona según el área de tierra que tuviese, etc...

²http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm

C. LOS GRIEGOS:

El reconocimiento de que la matemática trabaja con abstracciones puede atribuirse con seguridad a los pitagóricos [18].

Los pitagóricos comprobaron que las sumas de: 1, 1+2, 1+2+3, y así sucesivamente, daban lugar a los números triangulares, en nuestra notación moderna sería: $\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + \dots + n$.

Los números 1, 4, 9, 16,... recibieron el nombre de números cuadrados debido a que sus puntos pueden distribuirse formando cuadrados...[18].

Esto nos lleva a pensar que la idea de relación entre elementos de un conjunto con los elementos de otro, tienen una connotación primitiva de función en la cultura griega. Aunque primitiva no deja de ser sorprendente el avance de los griegos con respecto a la búsqueda de correspondencias y conjeturas entre cantidades.

D. LOS HINDÚES:

La geometría Hindú tiene todos los rasgos de una ciencia aplicada. Cierta interés tienen las tablas trigonométricas en las cuales las cuerdas se sustituyen por semicuerdas. Al mismo tiempo se consideran en esencia las funciones trigonométricas: seno, coseno y seno inverso...[28]. De modo que haciendo una mirada panorámica moderna a la matemática en la India, se podría decir que también los matemáticos allí tenían un concepto arcaico de función, muy seguramente sin saberlo.

LAS MATEMÁTICAS EN EL SIGLO XVII:

A finales del siglo XVI, el álgebra, la geometría, la trigonometría y además los métodos de cálculo acumularon suficiente cantidad de hechos y alcanzaron un estado tal que se convirtieron en parte esencial del progreso técnico y científico general [28]. Para este momento coyuntural, la matemática empieza a despertar en la mente de matemáticos curiosos; después de un prolongado letargo en el cual no hubo avances significativos.

En los años 1632 y 1638 Galileo Galilei dio la expresión matemática de las leyes de la caída de los cuerpos, algo antes Kepler (1609-1619) descubrió y formuló matemáticamente sus famosas leyes del movimiento de los planetas. Hacia el año 1686 Isaac Newton pudo formular y demostrar convincentemente la ley de la gravitación universal [28]. Los hombres de ciencia encuentran que con la ayuda de la matemática se pueden describir las relaciones de los fenómenos y su variación en la naturaleza, esto se convierte en una tarea y todo un reto para estas mentes brillantes.

El estudio de los números, las magnitudes constantes, las figuras, se complementa con el estudio de los movimientos y transformaciones, **las dependencias funcionales**; esto cambia el contenido interno de las matemáticas, el cual adquiere cada vez más el aspecto de **matemáticas de las variables**...[28]. Al respecto se podría decir que se empieza a ver la aplicación de la matemática en todas las ciencias y que el estudio de los fenómenos adquiere un aspecto relevante en el pensamiento de los científicos de este siglo y qué mejor que mencionar la palabra **función**, a partir de este momento ya que muchos fenómenos para poderlos describir y analizar, requieren del establecimiento de relaciones de correspondencia.

En los fundamentos de toda la “Geometría” que aparece en la pequeña obra “El Cálculo del señor Descartes”, se sitúan dos ideas: la introducción de la magnitud variable y la utilización de las coordenadas rectangulares (cartesianas). De acuerdo a su tendencia unificadora, la magnitud variable se introduce en forma dual: en forma de la coordenada variable de un punto, que se mueve a lo largo de una curva...[28].

Este invaluable aporte a la matemática genera nuevas expectativas y llena de posibilidades a los matemáticos que ya describían los fenómenos que estaban observando en la naturaleza.

Las ideas de la geometría analítica, esto es, la introducción de coordenadas rectangulares y la aplicación a la geometría de los métodos algebraicos, se concentran en una pequeña obra de Fermat “Introducción a la teoría de los lugares planos y

espaciales”. La tarea de Fermat era mostrar que las ecuaciones de primer grado corresponden a rectas. A continuación Fermat deduce la ecuación de la recta...[28].

Por tanto para este momento ya la noción de función aunque aún le falta madurar hasta convertirse en un concepto relevante para el estudio de diversos fenómenos, empieza a evolucionar anidándose en los propósitos de los matemáticos que la utilizaban con regularidad en sus trabajos y descripción de nuevas leyes.

Los científicos del siglo XVII se enfrentaron al problema de explicar los movimientos terrestres. Bajo la teoría Heliocéntrica, la tierra giraba sobre sí misma y efectuaba un movimiento de revolución en torno al sol. ¿Por qué entonces deberían los objetos permanecer en ella? ¿Por qué los objetos que se tiran deberían caer hacia la tierra, si ésta no es el centro del universo?, además todos los movimientos como el de los proyectiles, parecían producirse como si la tierra estuviera en reposo...[18].

Para esta etapa se observa con claridad la evolución del concepto de función, pues los hombres de ciencia están asociando enlaces de concordancia en todo aquello que varía con respecto a fenómenos que hay a su alrededor.

Del estudio del movimiento obtuvieron las matemáticas un concepto fundamental, que fue central en prácticamente todo el trabajo en los siguientes doscientos años; **el concepto de función o relación entre variables** [18]. En la mayoría de trabajos sobre nuevas leyes los científicos describían sus aportes a la ciencia en términos funcionales para mostrar la variación de los objetos y los fenómenos.

Galileo expresó sus relaciones en términos funcionales en palabras y en el lenguaje de las proporciones. En su trabajo sobre el movimiento, establece que “los espacios descritos por un cuerpo que cae desde el reposo con un movimiento uniformemente acelerado están, unos con respecto a otros, en la relación de los cuadrados de los intervalos de tiempo empleados en atravesar esas distancias”. “Los tiempos de descenso

a lo largo de planos inclinados de la misma altura, pero de diferentes pendientes, están uno con respecto a los otros en la relación de las longitudes de esos planos” [18].

Como se puede detallar al leer el texto, nos damos cuenta que Galileo merodea por el concepto de función que entendemos en nuestra época, ya que habla por ejemplo de la relación de una distancia con respecto al tiempo.

Con Roberval, Barrow y Newton, el concepto de curva como la trayectoria de un punto móvil alcanza reconocimiento explícito y aceptación. Dice Newton en su **Quadrature of curves** escrito en 1676: “Considero las cantidades matemáticas en este punto no como continuas por muy pequeñas partes, sino como descritas por un movimiento continuado” [18].

Es comprensible entonces que el simbolismo para cada caso en particular de funciones fue incorporado paulatinamente por los matemáticos de acuerdo a las necesidades que iban encontrando.

La definición más explícita en el siglo XVII sobre el concepto de función fue dada por James Gregory en su *Vera circuli et Hyperbola e Quadratura* (1667). **Definió una función como una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante cualquier otra operación imaginable** [18]. No obstante y aunque muy buena tesis, habría que hacerle algunas acotaciones a ésta ya que no se parece mucho a la definición moderna.

Desde el mismo comienzo de su trabajo sobre el cálculo (1665 en adelante), Newton utilizó el término “fluent” (fluyente) para representar cualquier relación entre variables. En un manuscrito de 1673, Leibniz utilizó la palabra “función” para significar cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva [18]. Por tanto se le atribuye a Leibniz ser el primero en utilizar esta palabra para indicar situaciones cambiantes.

Tratando con funciones, Jean Bernoulli hablaba, ya desde 1697 de una cantidad formada, de cualquier manera posible, de variables y constantes. Adoptó la frase de Leibniz “función de x ” en 1698. En 1714, Leibniz utilizó la palabra “función” para significar cantidades que dependen de una variable [18]. Para este momento histórico de las matemáticas y su evolución, en el cual hay fluidez de nuevas ideas, nos damos cuenta que el concepto de función empieza a ser trascendente para los matemáticos y que todos ellos lo utilizan si bien no como hoy, sí de acuerdo a sus propias necesidades para explicar y describir fenómenos.

La notación que se utiliza en la actualidad fue introducida por el célebre matemático suizo Leonard Euler en el año de 1734: " $f(x)$ "[18]. A partir de este momento y debido a la autoridad que le era reconocida a este extraordinario matemático en Europa, el concepto se convirtió en esencial para todo tipo de trabajos en matemáticas y en especial para la nueva rama que empezaba a florecer: el cálculo.

En adelante se sistematizó el estudio de las funciones, empezando con las funciones algebraicas, las trascendentes, hasta llegar a funciones más complicadas que las funciones elementales.

Como consecuencia de del avance general, de el cálculo infinitesimal, van surgiendo una gran variedad de funciones: por ejemplo la función logarítmica, la exponencial, las trigonométricas, las hiperbólicas. La principal diferencia entre las funciones escribe Euler, consiste en la combinación de variables y constantes que la componen [22].

El concepto y su utilización siguieron evolucionando hasta nuestros días, aplicado a múltiples situaciones de la realidad en diferentes ciencias.

El concepto moderno de función es el siguiente:

“Definición de función real de una variable real: Sean A y B dos conjuntos de números reales. Una función real f de una variable real x de A en B es una correspondencia que asigna a cada número x de A exactamente un número y de B ”. [15]. En la actualidad el concepto de función es uno de los pilares básicos de la matemática, el cual se trabaja a lo largo del bachillerato en algunos grados solo como situaciones de correspondencia pero ya en los grados superiores se orienta el concepto más completo, mostrando su aplicación y utilidad en diferentes situaciones de la cotidianidad.

2.1.2 Enseñanza asistida por computador

Las escuelas están perdiendo su monopolio sobre el aprendizaje. Ya muchos jóvenes tienen un computador en su hogar. Para la juventud actual, la geografía del aprendizaje se extiende mucho más allá del espacio físico de la escuela [13]. Las nuevas tecnologías posibilitan a muchos alumnos establecer contacto con otros estudiantes, otros docentes y otras culturas; navegar por internet y circular por la superautopista de la información sin la supervisión, la ayuda ni la orientación del docente. El aprendizaje a menudo puede producirse con igual facilidad tanto en la escuela como en el hogar. Hoy la escolaridad está disponible en el ciberespacio. De hecho la popularidad de la escolaridad doméstica experimenta un espectacular incremento. Las nuevas tecnologías y en especial el uso de los computadores en el proceso de enseñanza son herramientas que indudablemente generan mayores expectativas en los estudiantes y por ende la motivación intrínseca es gradualmente mejor.

Los chicos pueden saber más sobre tecnología que sus docentes y tener un acceso más fácil al aprendizaje a través de ella. A menos que los docentes se acostumbren a la velocidad en el uso de la tecnología en sus aulas, perderán su influencia sobre sus alumnos [13]. Es necesario recalcar según el texto anterior que hoy y visionando el futuro en el campo de la educación, llegó el momento de preocuparnos y pensar cómo estamos utilizando las TIC en la enseñanza, ya sea en el aula o fuera de ella, si no lo hacemos otros lo harán por nosotros y en un mundo globalizado, la realidad es que los jóvenes

tienen una increíble facilidad para manejar la tecnología, así que no nos podemos quedar atrás³.

“La era de la computadora está agrietando las paredes de la escuela y la autonomía y autoridad de los docentes dentro de ellas” [13]. Con este trabajo se pretende animar e incentivar al profesorado para repensar su labor dentro del aula y extenderla en lo posible fuera de ella utilizando diferentes programas o las TIC, aportando así al desarrollo de la era del conocimiento que incuestionablemente está regida por la utilización de estas herramientas.

Los modelos educativos se ajustan con dificultad a los procesos de aprendizaje que se desarrollan mediante la comunicación mediada por ordenador. Hasta ahora, el enfoque tradicional ha consistido en acumular la mayor cantidad de conocimientos posible, pero en un mundo rápidamente cambiante esto no es eficiente, al no saber si lo que se está aprendiendo será relevante [30]. Es por ello que el señor Ken Robinson⁴ en sus conferencias y charlas sobre la enseñanza, afirma que la educación que están recibiendo los jóvenes de hoy está atrasada 50 años, por tal motivo el estudiante moderno recibe del sistema educativo una instrucción tradicional. Por tanto, nuestro deber como docentes es renovar las estrategias de enseñanza utilizando por ejemplo los computadores y diferentes software que se encuentran disponibles para hacer de las prácticas de enseñanza-aprendizaje acciones llamativas e interesantes para los jóvenes modernos.

La interacción específica y peculiar con la computadora personal como medio de enseñanza le imprime un nuevo matiz y una dinámica novedosa al proceso de enseñanza-aprendizaje [2]. Toda vez que como docentes de bachillerato utilicemos los computadores para la orientación de cualquier temática, estamos fortaleciendo las

³<http://portal.educ.ar/debates/educacionytic/tecnofobia/docentes-computadoras-y-alumnos.php>

⁴<http://www.youtube.com/watch?v=8z9YxMdXLVE>

habilidades tecnológicas e informáticas que los estudiantes requieren iniciar en el colegio.

Salomon, G. Perkins, D. y Globerson, T. En su informe de investigación, afirman que las nuevas tecnologías informáticas aplicadas a la educación son denominadas inteligentes por que se ha demostrado que la implicación atenta y voluntaria en una tarea obliga a los estudiantes a agilizar su inteligencia, generar mayor número de deducciones originales y memorizar más y mejor el material de aprendizaje [23]. En este informe manifiestan los autores que siendo los computadores invenciones inteligentes de los humanos, es posible que a su vez haga más inteligentes a las personas y pronostican un camino tortuoso pero que a su vez dará resultados sorprendentes con relación a la capacidad de aprendizaje.

El impacto de los ordenadores en la educación ha provocado la aparición de nuevas zonas de desarrollo próximo que aumentan las posibilidades para las interacciones educativas, pero de manera personalizada y no de manera homogénea, pues no todos irán en la misma dirección ni llegarán tan lejos [2]. Con la utilización del computador como herramienta para la enseñanza, se debe evitar que algunos se conviertan en receptores pasivos de la información especialmente de acuerdo a la propuesta con este trabajo del concepto de función ya que el docente debe estar muy atento para que los alumnos desarrollen las actividades que se proponen no solo en sus ordenadores sino también en sus cuadernos, potencializando así sus capacidades y habilidades en el manejo de estas herramientas tecnológicas que les permiten interactuar constantemente con el concepto y la manipulación del mismo.

2.1.3 Informe de la UNESCO sobre el uso de las TIC

En todo el mundo, se cuenta con programas de política orientados a estimular el uso de las TIC en educación. Si bien las economías más desarrolladas han empleado las TIC en

educación por más de 20 años, a pesar de esta larga experiencia los formuladores de políticas aún no perciben claramente el impacto que estas tecnologías hayan podido tener en la educación. En consecuencia, no es de sorprender que, considerando la dificultad de medir y demostrar sus beneficios en forma inequívoca, en muchos países el avance de la integración de las TIC haya sido lento.

Pese a que no existen beneficios claramente mensurables, muchos países continúan sus esfuerzos por incorporar las TIC a sus sistemas nacionales de educación basándose en la premisa que **los futuros ciudadanos deberían ser capaces de funcionar adecuadamente en una Sociedad de la Información que evoluciona a pasos agigantados**. Entre tanto, propendamos esperar informes y resultados concretos sobre la efectividad del uso de las TIC en la educación, estaremos atrasando nuestra labor y perdiendo protagonismo, convirtiéndonos así en docentes paquidérmicos [35].

Escuchamos los términos TECNOLOGÍA DE PUNTA frecuente en el discurso de empresarios con el fin de mostrar que se está a la vanguardia con las exigencias del presente y el futuro más cercano; en educación rara vez se habla de estos términos; insistentemente con esta propuesta se pretende mostrarle a los estudiantes que una manera de acercarnos al conocimiento es utilizando las TIC en su cotidianidad (en este caso matemática asistida por computador usando el software Geogebra), para que asuman que si las incorporan con regularidad tanto, en la escuela como en sus casas, será una manera eficiente de estar a la vanguardia de la modernidad y que el aprendizaje puede ser mucho más interesante. De igual manera, como maestros tenemos la misión de modernizar nuestras clases y para ello tenemos a nuestro alcance gran cantidad de software de uso gratuito creados especialmente para ser utilizados en el campo de la educación.

2.1.4 Brecha Digital

En las páginas finales del libro de Jacques Barzun sobre los últimos 500 años de la vida cultural de Occidente [4], se presenta la siguiente visión del año 2300: la población se dividía en dos grupos. El primero, menos numeroso, estaba conformado por los hombres y mujeres que tenían la capacidad prácticamente innata de manejar los productos de la técnica y dominar los métodos de las ciencias físicas, especialmente las matemáticas.

Esta capacidad representaba para ellos lo que el latín había sido para los clérigos medievales. Esta élite moderna tenía la mente geométrica propicia para una vida dedicada a la investigación y la ingeniería. De esta clase provenían los gobernantes y los directores de instituciones. El paralelo con la Edad Media es claro: clérigos en un caso, “cibernistas” en el otro. Estos últimos se enorgullecían de la similitud de esta palabra con *cybernetes*, que en griego clásico significa timonel, gobernante. Ello daba mayor legitimidad a su posición como gobernantes de las masas, que por ese entonces no sabían leer ni contar. Aunque estos ciudadanos menos capaces no eran de ninguna manera bárbaros, no se perdía tiempo dándoles ningún tipo de educación; eso ya se había intentado a fines del siglo XX [4].

Este autor con su visión nos lleva a imaginar un mundo dividido entre los que saben de tecnología y los que no. Sin duda alguna las herramientas tecnológicas y su manejo están generando lo que hoy llamamos BRECHA⁵ DIGITAL.

La Brecha Digital se entiende como un distanciamiento entre quienes tienen acceso y capacidades para utilizar las tecnologías de la información por motivos políticos, sociales o económicos, y aquellas personas que no tienen esas oportunidades⁶. El problema de esta brecha es estar dentro de ella, así que el reto que tenemos como docentes es estar por fuera y solo nos queda un camino el cual es incorporar en nuestras prácticas la enseñanza asistida por computador y el uso de otras herramientas tecnológicas; así estaremos ayudando a que nuestros jóvenes también estén por fuera de la brecha digital, dejando en ellos una huella tecnológica que quizás les servirá por el resto de sus vidas.

2.1.5 La próxima revolución

La mayor promesa de la revolución informática es la *revolución de creatividad* en todo el mundo. En un trabajo reciente sobre la política cultural de Estados Unidos (Venturelli,

⁵ Brecha: rotura o abertura irregular. Según la Real Academia de la Lengua Española.
<http://buscon.rae.es>

⁶<http://www.revistagobierno.com/portal/index.php/cultura/ciencia-y-tecnologia/6541-brecha-digital-retos-y-oportunidades-en-colombia>

2001) se advierte que una cultura perdura solo en la medida en que inventa, crea y evoluciona dinámicamente de tal manera que promueva la producción de ideas en todas las clases y todos los grupos sociales [4]. Con la utilización de Geogebra en este trabajo, siendo un software interactivo le brindará la posibilidad al estudiante de innovar, de hacer cambios en el planteamiento inicial de situaciones problema que lo llevarán a hacer observaciones y conjeturas de su trabajo, expresando así creatividad e innovación en su quehacer dentro del aula.

3. Capítulo 3 Metodología

Tal como lo enuncia el objetivo general de este trabajo, para mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje y la apropiación del concepto de función, función lineal y cuadrática, así como su aplicación en la solución de situaciones problema de la vida real, se han diseñado módulos didácticos e interactivos incorporando el software GEOGEBRA. La propuesta, que traspasa el problema de qué enseñar, se centra en el cómo enseñar los conceptos mencionados, como lo expresa Díaz (2010):

En materia de enseñanza existe una preocupación por tratar de atender de la mejor manera posible el problema de qué enseñar, es decir plantear con claridad las competencias y/o contenidos curriculares que son valiosos para que, por medio de estos, los alumnos alcancen las metas educativas que la sociedad exige. Sin duda el valor de lo anterior es incuestionable y por ello constituye una justa preocupación; pero también debemos interrogarnos y enfrentar de lleno el problema de cómo enseñar. Esto es, debemos preguntarnos y buscar respuestas válidas sobre cómo lograr, a través de determinadas estrategias didácticas o de enseñanza, que las metas anteriores se conviertan en una realidad palpable o que el aprendizaje sea significativo [9].

En consecuencia y resaltando la importancia que a través de la historia y de la matemática moderna han tenido diferentes conceptos, cabe preguntarse respecto a las temáticas centrales de trabajo: ¿qué estrategias se deben utilizar para la enseñanza del concepto de función? Enseñanzas que deben propender por los aprendizajes significativos y constructivos de los estudiantes.

En concordancia, teniendo en cuenta los lineamientos curriculares, los estándares y competencias básicas en el área de matemáticas según lo establecido por el Ministerio de Educación Nacional [10], y, con el fin de facilitar la apropiación del concepto de función, función lineal y cuadrática en los estudiantes de noveno grado de Educación Básica, esta propuesta se cristaliza mediante el diseño de módulos didácticos

interactivos con software matemático especializado, que permiten integrar de forma más ágil elementos fundamentales de funciones tales como conceptos, manejo algebraico, numérico, tabular y gráfico, haciendo posible la profundización en la transferencia de estos elementos en el análisis y solución de situaciones problema.

Los módulos didácticos contienen applets construidos en GEOGEBRA y convertidos a formato html o formato web, de uso libre. En consecuencia, para la utilización y desarrollo de los módulos es necesario tener instalado dicho software en el PC; su descarga gratuita puede realizarse desde el siguiente link:

<http://geogebra.org.cms>

La propuesta abordada desde la teoría del aprendizaje significativo del doctor David Paul Ausubel⁷, es enriquecida en el diseño y programación de los módulos con la secuencia didáctica de Pedagogía Conceptual referenciada por Miguel de Zubiría [21]. A continuación se explica esta secuencia didáctica que estructura cada uno de los módulos diseñados⁸.

INICIO: Esta etapa tiene dos fases

- Motivación: que el estudiante entienda qué va a aprender y la importancia de aprenderlo.
- Encuadre: ¿cuáles son las reglas que debo cumplir y los compromisos que debo asumir? Que el estudiante esté dispuesto para la clase y sepa cómo va a funcionar el desarrollo de la misma.

ETAPA DE COMPRENSIÓN: Sus fases son

- Enunciación: que el estudiante comprenda los términos y procedimientos básicos del tema, de modo que pueda ejemplificarlos y explicarlos.
- Modelación: que el estudiante sepa utilizar el procedimiento paso a paso para resolver un ejercicio observando al profesor.

ETAPA DE DESARROLLO: Sus fases son

⁷ Ver anexo C, sobre Aprendizaje significativo.

⁸ RETO 2012 “LA PEDAGOGÍA CONCEPTUAL DE TODOS Y PARA TODOS”. Colegio Leonardo Da Vinci. Expositores: Nidia Reyes y Luis Fernando Henao

- Simulación: que el estudiante de manera conjunta y con la guía del docente resuelva un ejercicio siguiendo paso a paso el procedimiento.
- Ejercitación: que el estudiante pueda resolver ejercicios usando el procedimiento de forma individual.

CIERRE: Sus fases son

- Demostración: que el estudiante esté en capacidad de mostrar lo que ha aprendido resolviendo la prueba de desempeño o ejercicios.
- Síntesis y conclusión: que el estudiante pueda verbalizar qué aprendió y que tiene claro al final de la sesión.

Como es sabido, la organización y la secuencia son requisito para la comprensión previa de un tema. La planeación que precede al diseño efectivo para el aprendizaje, es asunto de especificar con cierto cuidado lo que puede llamarse estructura del aprendizaje. A fin de determinar lo que va antes, el tema debe analizarse en función del aprendiz que interviene en él. La importancia de plantear la secuencia de aprendizaje radica principalmente que hace posible evitar los errores que surgen al “saltarse” pasos esenciales en la adquisición del conocimiento [5]. Los módulos diseñados son abordados en nivel de complejidad creciente, con el fin de garantizar el desarrollo de las competencias del grado noveno de básica secundaria en correlación con los procesos de desarrollo biológico y psicológico de los estudiantes en este nivel educativo. Es así como además de abordar las temáticas de función, función lineal y función cuadrática de forma secuencial, se incluyen el producto cartesiano, el recorrido histórico del concepto de función, el criterio de la recta vertical, la gráfica de funciones, el dominio y rango de funciones, los elementos de la función lineal y cuadrática, la traslación de gráficas y aplicaciones en otras ciencias, así como un anexo tutorial básico de familiarización con el software Geogebra.

Es valioso tener en cuenta que al usar la velocidad en el cálculo numérico del computador y software manejado se pueden abordar más funciones, ejercicios o situaciones problema optimizando el tiempo que tomaría hacer dichos cálculos en forma tradicional, aunque es necesario aclarar que los módulos diseñados no excluyen el acercamiento teórico en el aula de clase, es decir de forma tradicional y expositiva, al contrario son complemento al trabajo interactivo propuesto.

Si bien la propuesta está centrada en la apropiación del concepto de función, de las funciones lineales y cuadráticas, estos conceptos y características serían subutilizados sin el trabajo en el aula y la inclusión en los módulos diseñados de situaciones problema, ya que éstas permiten desarrollar de manera integrada los diferentes pensamientos matemáticos e interrelacionarlos con otras áreas del conocimiento como biología, física, química, administración, economía, entre otras. Por tal motivo, los módulos didácticos diseñados incluyen situaciones problema, algunas creadas y otras tomadas de textos y páginas web referenciadas respectivamente en la bibliografía.

Tal como se expresa en los estándares Básicos de Competencias matemáticas: “las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y por ende, sean más significativas para los alumnos, Estos problemas pueden surgir del mundo cotidiano cercano o lejano, pero también de otras ciencias y de las mismas matemáticas, convirtiéndose en ricas redes de interconexión e interdisciplinariedad”⁹.

Hay un aspecto de relevancia a tener en cuenta para lograr un aprendizaje significativo en el desarrollo de los módulos y es la MOTIVACIÓN EN EL AULA DE CLASE; Ausubel y Novak [5], al respecto manifiestan que:

- a) La motivación es tanto un efecto como una causa del aprendizaje
- b) Elévese al máximo el impulso cognoscitivo despertando curiosidad intelectual, empleando materiales que atraigan la atención

Debe quedar claro que la motivación es un elemento fundamental en el aprendizaje y se propone utilizar el programa “Geogebra”, como herramienta motivadora, como lo menciona Lorenzo Sevilla Ortiz¹⁰ quien lleva 4 años usando este programa en sus clases, que la estrategia didáctica que se ha empleado en sus cursos experimentales:

- Ha provocado bastante motivación entre los alumnos.

⁹Ministerio de Educación Nacional. Estándares Básicos de competencias en lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. 1ª Ed. 2006. p. 52

¹⁰<http://www.reypastor.org/departamentos/dmat/loseor/archivos/experienciaaula.pdf>

- Los alumnos se encontraban bastante entretenidos en clase, las clases resultaban divertidas y nada aburridas y además se les pasaban rápidamente
- A la mayoría de los alumnos les gustaría seguir trabajando con GEOGEBRA en los cursos que siguen como estrategia para mantener la motivación ya que es una herramienta interactiva porque mantiene la dinámica constante en el grupo

Finalmente, es importante mencionar que cada módulo diseñado concluye con un instrumento de evaluación que unido a las acciones propuestas permiten verificar el aprendizaje alcanzado por los estudiantes.

4. Capítulo 4 Unidad Didáctica Diseñada

“GeoGebra es un software hecho en lenguaje Java, y por tanto, necesitamos *el software de Java instalado previamente en nuestro ordenador*. En la página <http://www.java.com> verificar si lo tienes instalado, bajarlo si no lo tienes o actualizarlo si es preciso¹¹.

El siguiente es el link necesario para descargar “Geogebra”:
<http://www.geogebra.org/cms/>¹²

NOTA: Para permitir que los applets se ejecuten siempre, accede a `chrome://plugins`, busca el complemento y selecciona la casilla **Permitir siempre**. Después se podrán ver los applets hechos con “Geogebra” sin contratiempo alguno.

Cuando vea la siguiente imagen, debe tener presente que es un applet y para abrirlo se da **control+clic**.



Ilustración 1: Imagen representativa software Geogebra

Las situaciones problema que se presentan en las unidades didácticas han sido tomadas de diferentes páginas de la web, las que se referencian en la bibliografía.

Teniendo en cuenta la metodología propuesta en la cual se hace referencia al aprendizaje significativo de Ausubel y al trabajo de guías didácticas desarrolladas por

¹¹<http://centros.educacion.navarra.es/iespedroursua/blogs/mate/geogebra/descarga-geogebra/>

¹² Página principal para descargar Geogebra o tutoriales para el manejo de éste software

fases según el modelo de pedagogía conceptual de Miguel De Subiría, el estudio del concepto de función se desarrolla así:

4.1 Módulo 1: El concepto de función

PROPÓSITO: Aplicar el concepto de función en el análisis, interpretación y solución de situaciones y fenómenos de la cotidianidad usando el software “Geogebra”.

ETAPA DE INICIO:

- A. **MOTIVACIÓN:** Se inicia haciendo una presentación del recorrido histórico del concepto de función. (El que se hizo en el marco teórico de este trabajo)
- B. **ENCUADRE:** En esta etapa se dan a conocer las normas para el desarrollo de la clase en la sala de sistemas así:
- A la sala de sistemas llevar solo los elementos requeridos por el docente
 - Únicamente vamos a trabajar con el software “Geogebra”, así que ninguno debe estar navegando por internet ni utilizando otros programas
 - Desarrollar las guías o applets propuestos para cada actividad tal y como se indica en los mismos.
 - Hacer las comprobaciones de cada ejercicio o problema propuesto tanto en el cuaderno como con el programa “Geogebra”
 - Evitar recurrir en la inmediatez (facilismo), hacer las actividades completas para entenderlas mejor
 - Prohibido el consumo de alimentos en la sala
 - Finalizada la clase en la sala de sistemas, dejar los equipos apagados y las sillas organizadas
 - Estudiar para cada clase el tema que estamos trabajando

ETAPA DE COMPRENSIÓN:

- C. **ENUNCIACIÓN:** Se aborda el tema con el significado de función así:

PRODUCTO CARTESIANO

El producto cartesiano de los conjuntos **A** y **B** es el conjunto de las parejas ordenadas (a, b) , tales que la **primera componente** pertenece a **A** y la **segunda componente** pertenece a **B**. El producto cartesiano de **A** con **B** se nota por $A \times B$ y está definido así:

$$A \times B = \{(a, b): a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplo #1:

Sean los conjuntos: $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{3,4,5\}$ entonces:

$$A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5)\}$$

$$B \times A = \{(3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3)\}$$

En general $A \times B \neq B \times A$, es decir, el producto cartesiano **no es conmutativo**.

FUNCIÓN:

Sean A y B conjuntos. Una función de A en B es un conjunto f de pares ordenados en $A \times B$ tal que para cada $a \in A$ existe una $b \in B$ única con $(a, b) \in f$.

Imagen:

Si $(a, b) \in f$, se acostumbra escribir $b = f(a)$, lo que se lee: ***b es la imagen de a mediante f***. Es decir, si $(x, y) \in f \Leftrightarrow y = f(x)$. (O también la imagen de un elemento del conjunto de partida, es el elemento con el cual está relacionado en el conjunto de llegada).

En la expresión $y = f(x)$, y depende siempre de x , por esta razón la variable x se denomina **variable independiente** y la variable y se denomina **variable dependiente**.

Al conjunto A de los elementos que aparecen como primer componente de los elementos de f se le llama **dominio de f** y se denota por $Dom(f)$. Al conjunto de todos los elementos de B que pueden figurar como segunda componente de los elementos de f se le llama **codominio de f** . Al conjunto de los elementos de B que son imágenes de algún elemento de A lo denominamos **rango** o **recorrido** de la función, se denota por $Ran(f)$.

La notación: $f: A \rightarrow B$ se lee, f es una función de A en B .

NOTA: Una función es una regla que asocia a cada elemento de un conjunto uno y solo un elemento de otro.

Es de vital importancia, cuando se hable de funciones, nombrar los conjuntos en los que está definida la función.

***CRITERIO DE LA RECTA VERTICAL:** Cuando nos dan una gráfica y queremos identificar si representa o no una función, trazamos una **recta vertical al eje x** , si corta en más de un punto a la gráfica, entonces la relación no es función.

Ver los siguientes applets para una mejor comprensión del concepto de función:

Applet N° 1 Concepto de función, dominio y rango:



Ilustración 2: Concepto de función



Ilustración 3: Dominio y rango 1



Ilustración 4: Dominio y rango 2

D. MODELACIÓN: En esta fase a los estudiantes se les enseña a construir con el software “Geogebra” las siguientes relaciones:

- 1) Hacer el gráfico cartesiano de: $x^2 + y^2 = 9$ Decir si es función o relación, además hallar el dominio y el rango.
- 2) De las siguientes relaciones, las cuales debe representar en el plano cartesiano, decir cuáles son funciones. Justificar su respuesta usando el criterio de la recta vertical.
 - a. $\{(1,0), (3,3), (2,4), (0,1), (0,3)\}$
 - b. $\{(2,1), (3,2), (4,2), (1,0), (0,5)\}$

3) Graficar:

a. $x^2 + y^2 = 16$, determinar si es o no función, además su dominio y rango (usar el criterio de la recta vertical).

b. $y = -3x + 6$, determinar si es o no función, además su dominio y rango (usar el criterio de la recta vertical).

c. $x^2 + y = 16$ determinar si es o no función, además su dominio y rango (usar el criterio de la recta vertical).

d. $x + y^2 = 16$, determinar si es o no función, además su dominio y rango (usar el criterio de la recta vertical).

e. $-x + y^2 = 16$, determinar si es o no función, además su dominio y rango (usar el criterio de la recta vertical).

ETAPA DE DESARROLLO:

E. SIMULACIÓN: Usando el programa “**Geogebra**”, así como en el cuaderno (Con la orientación del docente) construir las funciones que se originan de las siguientes situaciones de la cotidianidad, además hallar el dominio, el rango y explicar por qué son funciones:

I. COSAS DE TAXIS¹³: Los vehículos que cuenten con taxímetros con boleto deben señalarlo mediante un letrero. Si su valor es variable, la tarifa para cada tramo debe indicarse al interior del vehículo. En este tipo de servicio no existen tarifas mínimas, salvo la señalada en el parabrisas como "caída de bandera".

Un taxi A tiene una caída de bandera de 1500 Pesos y 70 por cada 200 metros. Un taxi B tiene una caída de 200 pesos y 60 por cada 200 metros. ¿Cuál de los taxis conviene abordar para una carretera de 2 km?, ¿Cuál para una de 7 km? En general, en qué caso y a partir de qué distancia, ¿un taxi es más conveniente que el otro?

* Como primer paso, confeccionar una tabla de valores que nos muestre el tarifado en cada empresa de taxis.

Podemos modelar la solución algebraica para el tarifado (y) en función de la distancia recorrida (x) así:

¹³http://html.rincondelvago.com/funciones_3.html

Taxi A: $y = 70x + 150$

Taxi B: $y = 60x + 200$

x : cantidad de veces que se recorren 200 m.

y : tarifa a cancelar.

II. CIENCIA¹⁴: Una bacteria se cuadruplica cada hora en un organismo animal. Si en el momento que se inició la observación, el organismo tenía 20 bacterias. ¿Cuántas tendrá después de transcurridas 1, 4, 10 y 12 horas?. La función $N(t) = 20 * (2)^t$, modela la situación dada, en donde N representa el número de bacterias y t el tiempo en horas.

III. GEOMETRÍA: Se requiere hacer una caja de forma cúbica para empacar 2000 cm³ de un producto. Representar gráficamente la función $V(l) = l^3$ que representa el volumen de la caja, y observar cómo aumenta el volumen en la medida que aumentamos la longitud del lado. ¿Según la gráfica de la función qué medida debe tener el lado de la caja para poder empacar dicho producto?

IV. En física: Un cañón lanza un proyectil con una velocidad inicial de 100 m/s. La ecuación que relaciona la altura(h), con la distancia (x)(horizontal) recorrida es $h(x) = -\frac{1}{1000}x^2 + x$. Halla:

- Máxima altura alcanzada y distancia recorrida.
- Si emplazamos el cañón en una torre de 25 m de alto, ¿qué altura alcanzará cuando sea lanzado?, ¿Cuál será la distancia recorrida?. ¿Cuál será la nueva ecuación que relaciona h con x ? [19].

F. EJERCITACIÓN: Desarrollar el siguiente applet, contestando las preguntas en el cuaderno:

¹⁴ <http://www.buenastareas.com/ensayos/Crecimiento-Exponencial/4023078.html>



Ilustración 5: Dominio y rango 3

ETAPA DE CIERRE:

G. DEMOSTRACIÓN: Se evalúa todo el proceso realizado y la manera como se desarrolló con el software “Geogebra”. Se da una nota apreciativa por el trabajo de los estudiantes.

También usando el software “Geogebra”, se da el siguiente listado de relaciones, las cuales deben graficar al igual que hacer el bosquejo de la misma en su cuaderno y explicar cuáles son funciones y cuáles no usando el criterio de la recta vertical, para ello deben crear un deslizador. Las relaciones son las siguientes:

- a) $y^2 = x^2 + 4$
- b) $y = -x^2 + 10$
- c) $y = -3x + 5$
- d) $x^2 + y^2 = 25$
- e) $x = y^2$

Luego los estudiantes llenan la siguiente tabla:

Tabla 1RÚBRICA PARA EVALUAR EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

CARACTERÍSTICAS DEL TEMA A EVALUAR:	INSUFICIENTE	BASICO	ALTO	EXCELENTE
Concepto de función	1-3	4-6	6-8	9-10
Comprendo que una función es una regla de correspondencia entre un conjunto de salida y uno de llegada				
Utilizo el criterio de la recta vertical para determinar si una gráfica corresponde a una función				
Comprendo el significado del término dominio de una función				
Determino correctamente el dominio de una función				
Comprendo el significado del término rango de una función				
Determino correctamente el rango de una función				

H. CONCLUSIONES: Con el fin de que el docente conozca qué tanto sirve utilizar el software para la enseñanza del tema de función, se le pide a los estudiantes llenar la siguiente encuesta.

Tabla 2EVALUACIÓN ACTITUDINAL FRENTE AL USO DE COMPUTADORES [1]

ACTITUDES DE LOS ESTUDIANTES DE 9° HACIA LOS COMPUTADORES	NO	POCO	INDECISO	SI	MUCHO
1. ¿Tengo habilidad para aprender matemáticas usando un computador?					
2. ¿Me gusta aprender matemáticas usando el computador?					
3. ¿Me siento a gusto con la clase en la sala de sistemas?					
4. ¿Aprendería más matemáticas usando un computador?					
5. ¿Aprender a manejar un software para el desarrollo de un tema en matemáticas me podría ayudar para el futuro?					
6. ¿Me siento seguro cuando en clase de matemáticas uso un computador para aprender algún tema?					
7. ¿La utilización de las computadoras para el aprendizaje, mejoran la educación?					
8. ¿Pienso que trabajar con computadoras es divertido y estimulante?					
9. ¿Pienso que las computadoras son importantes en la educación?					
10. ¿El usar un computador aumenta mi nivel cognitivo?					
11. ¿Creo que es importante aprender a manejar más programas que me sirvan para el aprendizaje de las matemáticas?					
12. ¿El uso del computador en clase de matemáticas, hace de esta asignatura algo más interesante?					
13. ¿Al usar la computadora en clase aumenta mi motivación para aprender el tema?					
14. ¿Utilizar la computadora para aprender matemáticas es una pérdida de tiempo?					
15. ¿Trabajar con la computadora me pone nervioso?					
16. ¿Me gusta la idea de trabajar matemáticas utilizando un computador?					
17. ¿Aprender matemáticas utilizando un computador me hace sentir tenso e incómodo?					
18. ¿Los docentes deberían incluir el uso de las computadoras en sus clases?					
19. ¿Las computadoras están cambiando la forma de enseñar y aprender?					
20. ¿Cuándo uso una computadora siento que puedo ser más creativo y aprender con mayor facilidad?					
21. ¿Me gusta saber cómo se usan los diferentes programas de computación?					

4.2 Módulo 2: Función lineal

PROPÓSITO: Aplicar el concepto de función lineal en el análisis, interpretación y solución de situaciones y fenómenos de la cotidianidad usando el software “Geogebra”.

ETAPA DE INICIO:

- A. **MOTIVACIÓN:** Se hará con la siguiente situación la cual ha sido modelada mediante un applet:



Ilustración 6: Problema lineal

- B. **ENCUADRE:** En esta etapa se dan a conocer las normas para el desarrollo de la clase en la sala de sistemas así:
- Únicamente vamos a trabajar con el software “Geogebra”, así que ninguno debe estar navegando por internet ni utilizando otros programas.
 - Desarrollar las guías o applets propuestos para cada actividad tal y como se indica en los mismos.
 - Hacer las comprobaciones de cada ejercicio o problema propuesto tanto en el cuaderno como con el programa “Geogebra”.
 - Procurar hacer muy buenas observaciones de la gráfica de cada función con el fin de conjeturar sobre las particularidades de las mismas.
 - Evitar recurrir en la inmediatez (facilismo), hacer las actividades completas para entenderlas mejor.
 - Estudiar para cada clase el tema que estamos trabajando.

ETAPA DE COMPRESIÓN:

- C. **ENUNCIACIÓN:** Se aborda el tema de función lineal así:

FUNCIÓN LINEAL:

Una función lineal es aquella cuyo mayor grado de la variable independiente x es 1 y su representación gráfica siempre dará una línea recta. Toda función lineal es de la forma: $f(x) = mx + b$.

El conjunto solución de una función lineal es la colección de pares ordenados de números reales, que la satisfacen. Sabiendo que el primer elemento del par ordenado es un valor dado a " x ", y el segundo elemento es $f(x) = y$.

Por lo tanto se puede establecer que una ecuación general de una recta con las variables x, y ; genera una función lineal cuando es despejada la variable y .

Veamos dos ejemplos:

1. ECUACIÓN GENERAL DE UNA RECTA: $2x + y = 8$, despejando y tenemos $Y = -2x + 8$; que corresponde a la función lineal $f(x) = -2x + 8$.
2. ECUACIÓN GENERAL DE UNA RECTA: $-3x + 4y = 12$, despejando y tenemos $y = \frac{3}{4}x + 4$; que corresponde a la función lineal $f(x) = \frac{3}{4}x + 4$.

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN LINEAL:

Para graficar en el plano cartesiano una función lineal, elaboramos primero una tabla, dándole valores a x , y los reemplazamos en la ecuación en forma de función para así hallar los valores de " y " formando los pares ordenados, luego ubicamos cada par ordenado en el plano y los puntos los unimos por medio de una línea recta (es suficiente con dos pares ordenados, ya que por dos puntos pasa una y solo una recta).

Para una buena comprensión del concepto de función lineal, ver el siguiente applet:

Applet función lineal:



Ilustración 7: Producción arandelas

PENDIENTE Y ECUACIÓN DE LA RECTA:

Pendiente:

La pendiente cuyo símbolo es (m) , es la inclinación de la recta con respecto al eje x . También me indica una variación de y con respecto a x , o una razón de cambio entre dos variables. Veamos la ilustración gráfica

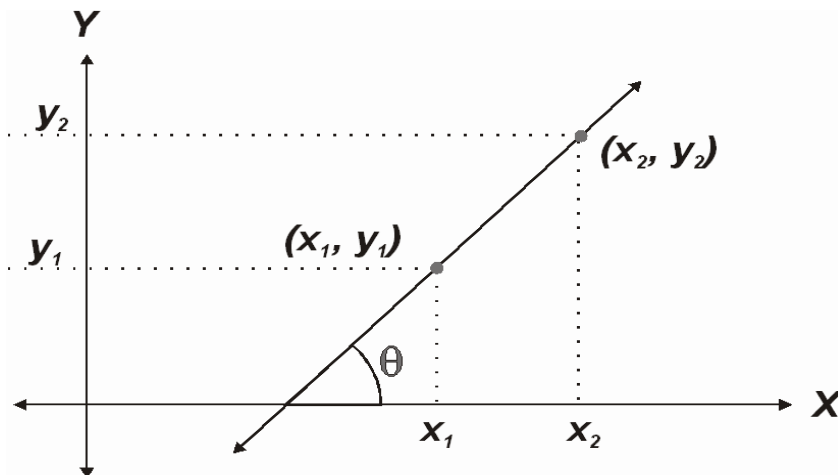


Ilustración 8: Pendiente de una recta¹⁵

Para hallar la pendiente de la recta, según la gráfica, teniendo dos puntos en el plano, usamos la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En donde el numerador indica un cambio vertical (elevación) y el

denominador un cambio horizontal (desplazamiento).

Esta fórmula se utiliza cuando conocemos dos pares ordenados en un ejercicio o en una situación problema.

*Si $m > 0$, la recta se inclina hacia la derecha en el plano (función creciente).

*Si $m < 0$, la recta se inclina hacia la izquierda en el plano (función decreciente).

*Si $m = 0$, la recta es paralela al eje x , en este caso se dice que no hay inclinación.

¹⁵ www.monografías.com/trabajos26/principios-geometría.shtml

ECUACIÓN DE LA RECTA:

Cuando conocemos dos puntos de coordenadas, o la pendiente y un punto, podemos utilizar estos datos para hallar la ecuación de la recta, ya que por dos puntos pasa una y solo una recta. Para ello hacemos lo siguiente:

I. Si tengo dos puntos, hallo primero la pendiente.

II. Con la pendiente y uno de los puntos, usando la fórmula de la pendiente: $m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$ hago el siguiente despeje: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

III. En la última fórmula, usando el valor de la pendiente obtenida y uno de los puntos, reemplazo a m , a x_1 , así como también a y_1 .

IV. Luego hago las operaciones correspondientes hasta obtener una ecuación de la forma: $y = mx + b$.

V. Con la ecuación, puedo hacer un análisis más detallado como por ejemplo: según la pendiente, conozco la manera como varía la función, y hacia dónde será la inclinación de la recta en el plano; el valor de b , será el intercepto con el eje (Y), del cual también podemos deducir información.



Ilustración 9: Invitación a un concierto



Ilustración 10: Venta de celulares

D. MODELACIÓN: Con el software “Geogebra” el docente construye las siguientes funciones; mientras que explica los procesos, los estudiantes deben tomar nota en sus cuadernos:

$$a) f(x) = 2x - 6$$

* Primero tabula en la hoja de cálculo de “Geogebra”, luego genera las parejas ordenadas y al dar enter el programa grafica cada par ordenado, los estudiantes hacen sus propias conjeturas acerca del por qué los puntos quedan alineados.

* En la barra de entrada se digita la función corroborando que los puntos quedan sobre una misma recta.

* El docente va cambiando datos en la tabulación, como el valor del término independiente o la pendiente, dando enter cada vez para que sus estudiantes empiecen a conjeturar sobre los cambios que se van presentando tanto en su gráfica como en el dominio y rango.

.

$$b) f(x) = -3x + 4$$

Se repite el proceso anterior. Se espera que esta experiencia haga del aprendizaje de la función lineal un tema interesante y a su vez significativo por cuanto el estudiante no está viendo los cambios en el tablero en donde los procedimientos se demoran mucho sino que los ve interactivamente con el software el cual es dinámico.

c) Los estudiantes desarrollan los siguientes applets:



Ilustración 11: Ecuación de la recta



Ilustración 12: Ecuación de la recta 2



Ilustración 13: Pendiente e intercepto

ETAPA DE DESARROLLO:

E. SIMULACIÓN: Usando el programa “**Geogebra**”, así como en el cuaderno (Con la orientación del docente) construir las funciones que se originan de las siguientes situaciones de la cotidianidad; además hallar el dominio, el rango y explicar por qué son funciones lineales:

1. ANÁLISIS DE EQUILIBRIO¹⁶: Sunset, fabricante peruano de tablas de surf, tiene gastos fijos mensuales de 20.000 Soles y un costo unitario de producción de 400 Soles. Las tablas se venden a 700 Soles cada una.

Podemos modelar la solución algebraica para el costo de producción (C) en función de las tablas fabricadas (x) así: $C(x) = 400x + 20000$; también la solución algebraica para los ingresos (V) en función de las tablas vendidas (x) así: $V(x) = 700x$.

- a) Traza la gráfica de la función de costos y la función de ingresos y determina gráficamente el punto de equilibrio; para ello ubicar un punto A en la gráfica de costos y un punto B en la gráfica de ingresos, deslizándolos sobre las rectas hasta que se junten
- b) El gerente de la empresa estima que si se hace un gasto de 5000 Soles en publicidad la venta de tablas aumentaría considerablemente. ¿Cuál sería la nueva función de ingresos?

Graficar las tres funciones en un mismo plano y determinar el punto de equilibrio que más le convenga a la fábrica (explicarlo).

2. AGUA DE MAR¹⁷: En 50 litros de agua de mar hay 1.300 gramos de sal. ¿Cuántos litros de agua de mar contendrán 5.200 gramos de sal?. ¿En general cuántos gramos de sal hay en x litros de agua de mar?

Hacer una tabla de valores en la cual la columna A varíe de 10 en 10 y la columna B se debe multiplicar por la pendiente. Graficar la función $f(x) = 4x$.

¹⁶<http://es.scribd.com/doc/26969465/PROBLEMAS-FUNCION-LINEAL>

¹⁷<http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Proporcionalidad.htm>

F. EJERCITACIÓN

Desarrollar las siguientes actividades utilizando el software “Geogebra”:

- I. Graficar con el programa los puntos $A(-2, 3)$ y $B(-4, 5)$.

En el cuaderno hacer el proceso algebraico para hallar la pendiente y la ecuación de la recta.

Luego ingresar la ecuación obtenida en la barra de entrada y verificar al dar enter que dicha recta pasa por los puntos A y B.

- II. Hacer el proceso anterior con las parejas ordenadas que surgen de la siguiente situación: Las equivalencias entre los grados Celsius y Fahrenheit del punto de congelamiento del agua y el punto de ebullición (hierve) son respectivamente: $P(0, 32)$ y $P(100, 212)$.

- III. Repetir el proceso con las parejas ordenadas que surgen de la siguiente situación: Las equivalencias entre los grados Celsius y Kelvin del punto de congelamiento del agua y el punto de ebullición son respectivamente: $P(0, 273)$ y $P(100, 373)$.

ETAPA DE CIERRE:

- G. DEMOSTRACIÓN: Desde el inicio del tema el docente debe estar muy atento sobre el proceso realizado y la manera como se desarrolló con el software “Geogebra”; para dar una nota apreciativa por el trabajo de los estudiantes.

LUEGO LOS ESTUDIANTES LLENAN LA SIGUIENTE RÚBRICA:

Tabla 3 RÚBRICA FUNCIÓN LINEAL

CARACTERÍSTICAS DEL TEMA A EVALUAR:	INSUFICIENTE	BASICO	ALTO	EXCELENTE
Función lineal	1-3	4-6	6-8	9-10
Sé tabular una función lineal, para encontrar las parejas ordenadas y luego graficarlas en el plano				
Comprendo que para graficar una función lineal basta tener dos parejas ordenadas				
Comprendo el significado de pendiente de la función lineal				
Encuentro la pendiente de una función lineal, teniendo dos parejas ordenadas				
Con el valor de la pendiente, tengo una idea intuitiva de cómo puede quedar la recta de la función en el plano				
Encuentro la ecuación de la recta cuando me dan dos puntos de ella				
Identifico con claridad el intercepto de una función lineal				
Hago variaciones de los elementos de una función lineal dada usando "Geogebra", para hacer mis propias conjeturas sobre la manera como cambia en el plano				
Resuelvo problemas de la cotidianidad usando la función lineal y "Geogebra"				

H. CONCLUSIONES: Se le solicita a los estudiantes que den sugerencias sobre lo positivo o negativo de utilizar un software para abordar el concepto de función lineal, con el fin de mejorar la práctica docente para la siguiente sesión.

4.3 Módulo 3: Función Cuadrática

PROPÓSITO: Aplicar el concepto de función cuadrática en el análisis, interpretación y solución de situaciones y fenómenos de la cotidianidad usando el software “Geogebra”.

ETAPA DE INICIO:

A. MOTIVACIÓN: Se hará con el desarrollo del siguiente applet



Ilustración 14: Crecimiento de ratas

B. ENCUADRE: En esta etapa se dan a conocer las normas para el desarrollo de la clase en la sala de sistemas así:

- Únicamente vamos a trabajar con el software “Geogebra”, así que ninguno debe estar navegando por internet ni utilizando otros programas.
- Desarrollar las guías o applets propuestos para cada actividad tal y como se indica en los mismos.
- Hacer las comprobaciones de cada ejercicio o problema propuesto tanto en el cuaderno como con el programa “Geogebra”.
- Procurar hacer muy buenas observaciones de la gráfica de cada función con el fin de conjeturar sobre las particularidades de las mismas.
- Evitar recurrir en la inmediatez (facilismo), hacer las actividades completas para entenderlas mejor.
- Estudiar para cada clase el tema que estamos trabajando.

ETAPA DE COMPRESIÓN:

C. ENUNCIACIÓN: Se aborda el tema de función cuadrática así:

FUNCIÓN CUADRÁTICA:

Se llama función cuadrática a una función de variable real, que tiene grado dos. La función cuadrática tiene la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c. \quad \text{con } a \neq 0$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

La gráfica de una función cuadrática, representa una parábola cuyo eje de simetría es paralelo al *eje y*.

Esta parábola se abre hacia arriba si $a > 0$, y se dice que es cóncava hacia arriba.

La parábola se abre hacia abajo si $a < 0$, y se dice que es cóncava hacia abajo.

Aunque existen muchas técnicas especiales y métodos abreviados para graficar estas funciones, veremos un método práctico y directo, que consiste en determinar ciertos pares ordenados de la función cuadráticas claves para su gráfica.

EJE DE SIMETRÍA

La curva llamada parábola que corresponde a la gráfica de una función cuadrática, es simétrica con respecto a una recta que es paralela al eje y , esta recta recibe el nombre de eje de simetría y está dado por la fórmula: $x = \frac{-b}{2a}$

EL VÉRTICE

Es el punto más alto o más bajo de la parábola. Si es cóncava hacia abajo el vértice será el punto máximo de la gráfica; si es cóncava hacia arriba será el punto mínimo.

El vértice es un par ordenado donde x es el eje de simetría, e y se obtiene evaluando la ecuación con el eje de simetría.

INTERSECCIÓN CON EL EJE Y

La intersección con el eje y , corresponde al término independiente de la función: $f(x) = ax^2 + bx + c$, o sea corresponde a c . Por lo tanto la intersección con el eje y corresponde al par $(0, c)$.

INTERSECCIÓN CON EL EJE X

La o las intersecciones con el eje x llamadas también raíces de la función, corresponden a un par ordenado donde “ y ” es cero.

Por lo anterior $y = 0$, además $y = ax^2 + bx + c$ entonces se puede encontrar la intersección de esta parábola con el eje de x resolviendo la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$
Las soluciones de una ecuación cuadrática escrita en esta forma están dadas por la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La fórmula anterior puede utilizarse para resolver cualquier ecuación de segundo grado, por eso, es necesario memorizarla y emplearla cuando no se puede recurrir a métodos más sencillos.

Ver los siguientes applets en los que se muestra el eje de simetría, el vértice, el intercepto con el eje y , así como las raíces de cada función:



Ilustración 15: Amplitud y desplazamiento de la parábola



Ilustración 16: Crecimiento de conejos

MODELACIÓN: Con el software “Geogebra” el docente construye las siguientes funciones; mientras que explica los procesos, los estudiantes deben tomar nota en sus cuadernos:

I. $f(x) = -2x^2 + 5$.

*En la hoja de cálculo se escribe en:

A1: "x" B1: = $f(x)$.

A2: - 5 B2: = $-2 * A2 * A2 + 5$ enter y se arrastra esta ventana hasta B50.

A3: = $A2 + 0.25$ enter y se arrastra A3 hasta A50.

En C2: escribimos (A2, B2) enter y se arrastra hasta C50.

*Una vez tabulada la función, se ven los pares ordenados en el plano, el docente los aprovecha para describir la curva que se va generando a medida que disminuye la distancia en la celda A2, reemplazando el valor 0.25 por 0.125, luego arrastra hasta A50. Los estudiantes empiezan a comprender que entre menos distancia se deje más juntos van a quedar los puntos, los cuales forman la parábola $f(x) = -2x^2 + 5$; la cual se digita en la ventana de entrada y al dar enter, une todos los puntos anteriores, confirmando lo que ya los estudiantes habían conjeturado.

*El docente aprovecha para señalar el eje de simetría, el vértice, el intercepto con el eje y, así como las raíces de la función. También señala el dominio y el rango.

*Luego se hacen otros cambios como: El signo del coeficiente de x^2 , luego el término independiente.

II. $f(x) = 3x^2 - x - 1$.

Siguiendo un proceso similar al anterior, se hacen variaciones tanto de signos como de coeficientes en esta función.

ETAPA DE DESARROLLO:

D. SIMULACIÓN: Usando el programa "Geogebra", así como en el cuaderno (Con la orientación del docente) construir las funciones que se originan de las siguientes situaciones de la cotidianidad; además hallar el dominio, el rango y explicar por qué son funciones cuadráticas:

- I. En un laboratorio¹⁸ se realizó un estudio en una colonia de microorganismos, sin proporcionarles alimento durante todos los días que duró la investigación, y se estableció que la cantidad m (en millones) de microorganismos variaba en función del tiempo (en días) transcurridos desde que se originó el estudio, según la siguiente fórmula: $m(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{7}{2}$

Determinar:

- a) ¿Con qué cantidad de microorganismos se comenzó?
- b) ¿Cuál fue la mayor cantidad de microorganismos obtenida?
- c) ¿Desaparecen todos los microorganismos en algún momento?. Si es así, ¿cuándo?

II. **MERCADEO**¹⁹: Una compañía de investigación de mercados estima que n meses después de la introducción de un nuevo producto, miles de familias lo usarán.

La función que representa la situación es $f(n) = -\frac{10}{9}n^2 + \frac{120}{9}n$, con $0 \leq n \leq 12$.

Calcula el número máximo de familias que usarán el producto. Tener presente que en el eje x se representarán los meses y en el eje y las familias en miles.

III. **FÍSICA**²⁰: La ecuación $h(t) = -16t^2 + v_0t + h_0$ es comúnmente usada para modelar un objeto que ha sido lanzado o aventado. Una pelota es lanzada hacia arriba a 48 pies/s desde una plataforma que está a 100 pies de altura. Encontrar la altura máxima que alcanza la pelota y qué tanto tiempo le tomará llegar ahí. La función que modela dicha situación es $h(t) = -16t^2 + 48t + 100$. Igualmente trazar el eje de simetría, hallar las raíces de la función y explicar qué significan.

E. EJERCITACIÓN

Desarrollar las siguientes actividades en el cuaderno y luego verificar que han quedado correctas utilizando el software “Geogebra” :

- I. Hallar: Eje de simetría, vértice, intercepto con el eje y , raíces de la función $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$. Después hacer algunos cambios ya sea en los coeficientes, los signos o en el término independiente y escribir cómo queda la gráfica en el plano. Sacar sus propias conclusiones.

19

http://www.dav.sceu.frba.utn.edu.ar/homovidens/TRABAJO_FINAL_jadur/paginas/aplicaciones.htm.html

20

http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/U10L2T1_RESOURCE/U10_L2_T1_text_final_es.html

II. Seguir el proceso anterior con la función: $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

ETAPA DE CIERRE:

F. DEMOSTRACIÓN: El docente debe estar haciendo un recorrido permanente por la sala de sistemas verificando que los estudiantes estén desarrollando las actividades propuestas tanto en el cuaderno como con el software “Geogebra”; para dar una nota apreciativa por el trabajo de los estudiantes. De esta manera evita que los estudiantes únicamente hagan el trabajo con “Geogebra” y no en sus cuadernos puesto que el software es solo una herramienta la cual les debe servir para corroborar los resultados obtenidos a través de los procesos algebraicos desarrollados con lápiz y papel.

LUEGO LOS ESTUDIANTES LLENAN LA SIGUIENTE RÚBRICA:

Tabla 4RÚBRICA FUNCIÓN CUADRÁTICA

CARACTERÍSTICAS DEL TEMA A EVALUAR: Función cuadrática	INSUFICIENTE 1-3	BASICO 4-6	ALTO 6-8	EXCELENTE 9-10
Tabulo con facilidad una función cuadrática dada y la represento en el plano				
Hallo el eje de simetría de una función cuadrática dada y lo interpreto como el elemento que divide la gráfica en dos partes iguales				
Hallo el vértice de una función cuadrática dada y lo interpreto como el punto máximo o mínimo de la función				
Hallo el intercepto de la función con el eje y, interpretándolo correctamente en una situación problema				
Resuelvo correctamente los procesos necesarios para hallar la raíz o raíces de la función cuadrática y las interpreto correctamente en una situación problema				
Hago cambios en los coeficientes, término independiente y signos de cualquier función cuadrática usando Geogebra, con el fin de observar los cambios que se generan en el plano cartesiano				
Uso correctamente el software Geogebra para analizar las características de la función cuadrática				

G. CONCLUSIONES: Para esta etapa final el docente de manera conveniente debe solicitar a sus estudiantes que den sus apreciaciones acerca del trabajo realizado, para que estos comentarios sirvan de retroalimentación y mejoría en el trabajo venidero.

Tabla 5 RÚBRICA PARA EL DOCENTE

Para el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares extendidas en este tema, el/la docente:	INSUFICIENTE 1-3	BASICO 4-6	ALTO 6-8	EXCELENTE 9-10
Coordina y explica cómo es el trabajo en la sala de sistemas.				
Explica correctamente el manejo del software Geogebra				
Realiza acciones que permiten enriquecer las actividades de enseñanza y aprendizaje usando el software Geogebra.				
Domina y estructura los saberes para facilitar el aprendizaje significativo.				
Lleva a la práctica procesos de enseñanza y de aprendizaje de manera efectiva, creativa e innovadora usando herramientas informáticas.				
Propicia la utilización de la tecnología de la información y la comunicación.				
Revisa permanentemente el trabajo que los estudiantes realizan en la sala de sistemas				
Provee de bibliografía relevante y orienta a los estudiantes en la consulta de fuentes para la investigación.				
Maneja software que le permita mostrar a los estudiantes herramientas para la comprensión en la solución de los problemas				

5. Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

- Es necesario en el proceso de enseñanza de funciones en Básica secundaria retomar con mayor énfasis el concepto de función como relación de magnitudes o representación de una ley de variación, permitiendo romper la barrera que sesga dicho concepto a solo una imagen visual o curva generada o una expresión analítica aislada, por tal motivo, las aplicaciones y solución de las situaciones problemas planteadas en los diferentes módulos propuestos con el software GEOGEBRA son una estrategia didáctica valiosa para tal fin.
- Indudablemente el software “Geogebra” es una herramienta de gran utilidad para la orientación de un sinnúmero de temáticas (incluidas funciones cúbicas, exponenciales, logarítmicas, entre otras) con el potencial para generar aprendizajes significativos en los estudiantes; además, por ser un software de uso libre puede ser instalado fácilmente en las salas de sistemas de las instituciones Educativas y ser una herramienta de trabajo permanente de los docentes en el área de matemáticas.
- Los applets son recursos interactivos que la matemática se puede hacer más dinámica con el diseño de este tipo de ayudas que ayudan a repensar la manera como se puede abordar un tema para que intencionalmente capture la atención del estudiante en matemáticas.

5.2 Recomendaciones

A continuación se presentan algunas sugerencias a los docentes de Básica Secundaria en el proceso de implementación de la propuesta:

- Verificar el grado de apropiación del concepto de función, función lineal y cuadrática implementando los módulos propuestos en el grado noveno en una Institución Educativa de básica Secundaria.
- Para evitar la disminución en la destreza y habilidad en el cálculo mental y manual de los estudiantes, se recomienda complementar el desarrollo de los módulos interactivos propuestos con la comprobación de resultados o solución de talleres sin herramientas informáticas.
- Garantizar que toda la población de estudio en la implementación posea en forma digital o físicamente los módulos de trabajo.
- Cada applet tiene una plantilla la cual puede ser modificada o complementada de acuerdo a las necesidades del docente y a su entorno. Para hacer algún cambio debe seguir estos pasos:

Clic: Abrir la plantilla

Hacer la modificación

Clic: Archivo

Clic: Exporta

Clic: Hoja dinámica como página web

*En el formato escribir las modificaciones pertinentes al cambio realizado

Clic: Exporta como página web (Parte superior)

Clic: Exporta (Parte inferior)

*Reescribe y guardar

A. Anexo: Video tutorial básico uso de Geogebra

[Video_1357930045.wmv](#)

B. Anexo: Historia de Geogebra

Geogebra es un software libre de matemática para educación en todos sus niveles. Reúne dinámicamente, aritmética, geometría, álgebra y cálculo en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente [26]. Geogebra está escrito en Java, lo que lo hace más versátil puesto que su acceso está disponible en múltiples plataformas.

Su creador es Markus Hohenwarter, quien comenzó el proyecto en el año 2001 en la Universidad de Salzburgo (Austria) como tesis de grado para la maestría en Enseñanza de Matemáticas y Ciencias Informáticas, presentándolo en el 2002. Actualmente continúa mejorando éste software en la Universidad de Atlantic, Florida. En diciembre de 2012 fue lanzada la versión más reciente [6].

Geogebra ha sido traducido ya a 40 idiomas incluido el español, lo que significa que son muchos los usuarios que se sirven de este programa para el aprendizaje de las matemáticas e inclusive de física.

Markus Hohenwarter en una entrevista explica que "Geogebra es una forma de mostrar las matemáticas de una manera interactiva para que los estudiantes puedan tener una experiencia de primera mano con esta ciencia".²¹

²¹http://www.diariocordoba.com/noticias/cordobalocal/markus-hohenwarter-analiza-su-software-geogebra-para-docentes-y-estudiantes_583903.html

C. Anexo: Aprendizaje significativo

APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO: Es el tipo de aprendizaje en que un estudiante relaciona la información nueva con la que ya posee, reajustando y reconstruyendo ambas informaciones en este proceso²². Es el tipo de aprendizaje que se pretende conseguir con esta propuesta sobre el concepto de función usando el software Geogebra.

El conocimiento como fin en sí mismo: Las materias organizadas con sentido y enseñadas por profesores competentes pueden impulsar considerablemente hacia el aprendizaje como fin en sí mismo [8]. A esto le llama Ausubel, “Principio programático”. Es por ello que debe haber una secuencia con determinado orden para abordar el concepto de función para que el educando encuentre la relación entre un contenido y el siguiente.

Significado y aprendizaje significativo: El aprendizaje significativo por recepción involucra la adquisición de significados nuevos. Requiere tanto de una actitud de aprendizaje significativo como de la presentación al alumno de material potencialmente significativo. La última condición en cambio, presupone: 1° que el material de aprendizaje en sí pueda estar relacionado de manera no arbitraria (plausible, sensible y no azarosamente) y sustancial (no al pie de la letra) con cualquier estructura cognoscitiva apropiada (que posea significado “lógico”), y 2° que la estructura cognoscitiva del alumno particular contiene ideas de afianzamiento relevantes con las que el nuevo

²²http://es.wikipedia.org/wiki/Aprendizaje_significativo

material puede guardar relación. La interacción entre los significados potencialmente nuevos y las ideas pertinentes de la estructura cognoscitiva del alumno da lugar a los significados reales o psicológicos [8].

En primer lugar el material de aprendizaje es solo potencialmente significativo; en segundo término, debe estar presente una actitud de aprendizaje significativo [8]. Ausubel hace una marcada referencia a la actitud del aprendiz, ya que se debe contar con una buena disposición de su parte para que el aprendizaje no se convierta en aprendizaje por repetición. En este aspecto de tanta relevancia, es evidente que nos encontramos a diario con estudiantes desinteresados por el conocimiento y si nombramos las razones, serían demasiadas ya que éstas varían de un estrato a otro, de una familia a otra, de un contexto a otro (idiosincrasia, nivel socioeconómico, nivel de escolaridad de los padres y familiares más cercanos, el tipo de vecindario que rodea al estudiante, las amistades que posee, etc...); así pues nuestra tarea es buscar estrategias de enseñanza que nos permitan acercar al estudiante al conocimiento y aprehensión del concepto de función.

Según Ausubel, el aprendizaje significativo por recepción es importante en la educación porque es el mecanismo humano por excelencia que se utiliza para adquirir y almacenar la vasta cantidad de ideas e información representada por cualquier campo del conocimiento [8]. Como el ser humano no es capaz de aprender grandes cantidades de información a menos que ésta sea repetida una y otra vez, es por ello que para que haya aprendizaje significativo, deben estar presentes dos características importantes: su sustancialidad y su falta de arbitrariedad [8].

En su teoría Ausubel manifiesta que se pueden distinguir tres tipos de aprendizaje significativo por recepción: el aprendizaje por representaciones (muy cercano al aprendizaje por repetición), el aprendizaje de conceptos y el aprendizaje de proposiciones [8]. Esta propuesta didáctica de la enseñanza del concepto de función para estudiantes de grado 9° de bachillerato, está fundamentada en este tipo de aprendizaje, ya que se pretende que el alumno relacione a través de proposiciones lógicas el tema en mención con su vida diaria y su entorno, ayudado con el uso del software "Geogebra".

EL APRENDIZAJE DE PROPOSICIONES: Este puede ser subordinado (inclusivo), superordinado y combinatorio. Se hará especial énfasis en el aprendizaje superordinado ya que en éste, según Ausubel, el aprendizaje de proposiciones ocurre cuando una proposición nueva se relaciona con ideas subordinadas específicas en la estructura cognoscitiva existente y con un fundamento amplio de contenidos generalmente pertinentes a la estructura que puede ser incluida en él [8]. Es por ello que se debe recurrir constantemente a los conocimientos previos que el estudiante tiene, especialmente a aquellos recibidos en el curso anterior con el fin de que pueda relacionar las ideas nuevas con otras que ya trae.

En el aprendizaje verdadero de proposiciones el objeto no estriba en aprender proposiciones de equivalencia representativa, sino el significado de proposiciones verbales que expresen ideas diferentes a las de equivalencia representativa [8]. Por tal razón es relevante el afianzamiento de los conceptos nuevos para que el alumno al hacer construcciones de proposiciones sobre el concepto de función, éstas tengan sentido cognoscitivo para él.

EL LENGUAJE: El lenguaje es un facilitador importante del aprendizaje significativo por recepción [8]. La forma como sean expresadas las nuevas ideas, los conceptos y los temas, hará que el estudiante comprenda mejor el significado de los mismos, en consecuencia es importante tener en cuenta que el vocabulario debe ser muy cercano al lenguaje común utilizado por los aprendices y evitar los tecnicismos, los cuales confunden y alejan al estudiante del conocimiento. Por ejemplo al hablar de función, recurrir frecuentemente al término relación entre un objeto y otro en la que exista determinada condición.

EL APRENDIZAJE EN EL SALÓN DE CLASES: Se ocupa principalmente de la adquisición, retención y uso de grandes cuerpos de información potencialmente significativa [8]. Es por ello que desde el inicio de la clase, se debe dar a conocer el propósito de la misma, es decir lo que se pretende, con suficiente claridad y con

psicología de aprendizaje significativo; así despertamos la curiosidad y trazamos metas de aprendizaje las cuales se irán logrando a lo largo del desarrollo del tema.

CONDICIONES DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO: La esencia de este proceso reside en que ideas expresadas simbólicamente son relacionadas de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria se quiere decir que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno.

También se presupone que el alumno manifieste una actitud de aprendizaje significativo, es decir una disposición para relacionar sustancial y no arbitrariamente el nuevo material con su estructura cognoscitiva [8]. Entonces para que ocurra realmente el aprendizaje significativo no es suficiente con que el material nuevo sea intencionado y sustancialmente relacionable con las ideas correspondientes y pertinentes al tema de función, sino que también se debe presentar de una manera atractiva y motivadora; por ejemplo hacer un recorrido histórico sobre la evolución de éste concepto y su importancia en el mundo moderno, al igual que hacer referencia a situaciones en las cuales se debe hacer modelaciones de fenómenos físicos o biológicos que requieren para su comprensión del concepto de función.

CRITERIOS PARA EL MATERIAL DE APRENDIZAJE: El material de aprendizaje para que sea significativo debe ser relacionable no arbitrario pero sí sustancialmente con las ideas pertinentes y correspondientes que se hallen dentro de la capacidad de aprendizaje del ser humano. El primer criterio es el de la relacionabilidad no arbitraria, significa simplemente que si el material en sí muestra la suficiente intencionalidad (o falta de arbitrariedad), entonces hay una base adecuada y casi obvia de relacionarlo de modo no arbitrario con los tipos de ideas correspondientes pertinentes que los seres humanos son capaces de aprender [8]. El segundo criterio el de la relacionabilidad sustancial, significa esto que si el material de aprendizaje es lo suficientemente no arbitrario, un símbolo ideativo equivalente (o grupo de símbolos) podría relacionarse con la estructura cognoscitiva sin que hubiese ningún cambio resultante en el significado. Para esta propuesta se usará como material de aprendizaje guías interactivas llamadas applets construidas con “Geogebra”

EL APRENDIZAJE DE VOCABULARIO COMO APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO: La adquisición de significados de las palabras refleja un proceso cognoscitivo activo y significativo que involucra el establecimiento en la estructura cognoscitiva de equivalencia representativa entre símbolo nuevo y el contenido cognoscitivo idiosincrático que su referente significa [8]. Así pues se debe establecer la relación constantemente entre las diferentes formas de representar una función (tabular, gráfica y algebraica) para que el estudiante incorpore en su léxico el nuevo vocabulario con sentido.

AFIANZAMIENTO DE LA INFORMACIÓN NUEVA CON LAS IDEAS EXISTENTES: En el aprendizaje significativo, el proceso de adquirir información produce una modificación tanto de la información recién adquirida como del aspecto específicamente pertinente de la estructura cognoscitiva con el que aquella está vinculada [8]. El resultado de la interacción que tiene lugar entre el nuevo material que se va a aprender y la estructura cognoscitiva existente constituye una asimilación de significados nuevos y antiguos para formar una estructura cognoscitiva más altamente diferenciada [8]. Por tanto con el material elaborado con “Geogebra” que se debe trabajar con los estudiantes de manera coherente con los principios programáticos, se debe propiciar la adquisición del nuevo concepto sobre función.

LOS CONCEPTOS: Una vez adquiridos, los conceptos ejecutan muchas funciones en el desempeño cognoscitivo. Al nivel más simple de utilización, están implicados obviamente en la categorización perceptual de la experiencia sensorial. A la utilización cognoscitiva de los conceptos existentes la ejemplifica ese tipo de aprendizaje por recepción en que una clase genérica conocida debe ser identificada como tal (categorización cognoscitiva) y en que conceptos, subconceptos y proposiciones nuevas, son adquiridos, asimilándolos en entidades proposicionales o conceptuales más inclusivas [8]. Al abordar el concepto de función los estudiantes ayudados con el programa “Geogebra”, deberán interactuar con sus PC y los applets, con lo cual en la medida que avanzan en el desarrollo del tema deben ir categorizando los temas que subyacen al concepto de función; como los conceptos de relación, clases de relación, producto cartesiano, relación inversa, etc...

ESTRUCTURA COGNOSCITIVA Y TRANSFERENCIA: La siguiente es una de las frases más significativas de doctor David P Ausubel:

“Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría éste: de todos los factores que influyen en el aprendizaje, el más importante consiste en lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto, y enséñese consecuentemente”.

Ausubel y Novak [8] con respecto a la frase anterior hacen los siguientes interrogantes:

¿Cuáles son las principales variables de la estructura cognoscitiva y de qué manera afectan el aprendizaje y la retención significativos?

¿Qué medidas pedagógicas puede tomar el profesor para aumentar al máximo la influencia de la transferencia o el efecto de las variables de la estructura cognoscitiva ‘sobre el aprendizaje ordinario en el salón de clase’?

¿Qué hay de las diferencias individuales en materia de funcionamiento cognoscitivo (el estilo de aprendizaje)? [8]

De la naturaleza misma del progreso de la estructura psicológica del conocimiento, a través del proceso de asimilación, se desprende que la estructura cognoscitiva existente- tanto el conocimiento sustancial de la estructura del conocimiento de un individuo como sus propiedades principales de organización dentro de un campo específico de estudio, en un momento dado- es el factor principal que influye en el aprendizaje y la retención significativos dentro de este mismo campo [8]. Es por ello que se debe contar con las estructuras de pensamiento que el individuo trae consigo, es decir con lo que él ya sabe para que dichos conocimientos posibiliten el surgimiento de significados nuevos y mejoren la organización y la retención del conocimiento sobre función; al respecto Ausubel menciona que las propiedades sustanciales y de organización del antecedente (conocimientos previos) afectan decisivamente a la precisión y a la claridad de los nuevos significados.

Si la estructura cognoscitiva es clara, estable y convenientemente organizada, surgen significados precisos y faltos de ambigüedad que tienden a retener su fuerza de dissociabilidad [8]. Al cambiar el escenario de aprendizaje y pasar de la enseñanza del concepto de función como es tradicional en un aula con la ayuda de un tablero a una sala de informática usando el programa “Geogebra” y el recurso didáctico como son los applets, el estudiante tendrá la posibilidad de interactuar dinámicamente con el tema, facilitando la aprehensión del mismo.

Bibliografía

- [1] Actitudes de los docentes frente a la computadora y los medios para el aprendizaje. {En línea}. {Consultado septiembre 08 de 2012}. Disponible en http://investigacion.ilce.edu.mx/panel_control/doc/c36,act99,d6.pdf
- [2] AGUIRRE CONTRERAS, Luis Javier. Enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática utilizando un simulador geométrico desde el enfoque de los conceptos nucleares. Tesis de grado (2008), Universidad de Extremadura, México. Facultad de educación. Documento en pdf
- [3] ALMEIDA CAMPOS, *Santiago*, FEBLES RODRÍGUEZ, *Juan Pedro* y BOLAÑOS RUIZ, *Odalys*. Evolución de la enseñanza asistida por computadoras. {En línea}. {Citado agosto 15 de 2012}. Disponible en: http://www.bvs.sld.cu/revistas/ems/vol11_1_97/ems05197.htm
- [4] ASHFAQ Ishaq. La brecha informática mundial. Revista Finanzas y desarrollo. Septiembre de 2001. {En línea}. {Citado 15 de octubre de 2012}. Disponible en: <http://www.imf.org/external/pubs/ft/fandd/spa/2001/09/pdf/ishaq.pdf>
- [5] AUSUBEL, David P, NOVAK, Joseph D, HANESIAN, Helen. (1983). Psicología educativa, Un punto de vista cognoscitivo. 2da edición. Ed Trillas S.A México. Traducción: SANDOVAL PINEDA, Mario, Lic en Psicología
- [6] Breve historia de Geogebra. {En línea}. {Consultado enero 05 de 2013}. Disponible en: <http://www.maa.org/joma/volume7/hohenwarter/History.html>
- [7] CONTRERAS L, Jonnart, VIVAS V, Marilyn, VIVAS E, Wílder, VIVAS V, Karin. Integración de funciones reales. Tesis de grado. {En línea}. {Consultado octubre 05}. Documento en pdf. Disponible en: <http://webdelprofesor.ula.ve/nucleotachira/vermig/MODULOINTEGRALES.pdf>
- [8] CUESTA BORGES, Abraham. El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica. Tesis doctoral. {En línea}. {Consultado octubre 03 de 2012}. Disponible en:

<http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/4713/acb1de1.pdf;jsessionid=C3F04227E3C82D6C146D50DAE11955DD.tdx2?sequence=1>

[9] DÍAZ BARRIGA, Frida, HERNÁNDEZ ROJAS, Gerardo. (2010). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: Una interpretación constructivista. Ed Mc Graw Gill. 3ª edición.

[10] Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. {En línea}. {Consultado noviembre 04 de 2012}. Disponible en: <http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article-116042.html>

[11] GABRIEL, Salomón, PERKINS, David N y GLOBERSON, Tamar. Coparticipando en el conocimiento: la ampliación de la inteligencia humana con las tecnologías inteligentes. {En línea}. {Citado el 09 de agosto de 2012}. Disponible en: <http://www.uoc.edu/rusc/dt/esp/salinas1104.pdf>

[12] GRANADA, Andrés y TIRADO, Luz Adriana. Principios didácticos de pedagogía conceptual. Noviembre 03 de 2010. {En línea}. {Citado 10 de octubre de 2012}. Disponible en:

<http://pedagogiaconceptual.wordpress.com/2010/11/03/principios-didacticos-de-pedagogia-conceptual/>

[13] HARGREAVES, Andy (Compilador). (2003). Replantear el cambio educativo: un enfoque renovador. Traducción de Gloria Vitale. Amorrortu editores S.A. P (20-30)

[14] HERNÁNDEZ SAMPIERI, Roberto, FERNÁNDEZ COLLADO, Carlos, BAPTISTA LUCIO, Pilar. (1991). Metodología de la investigación. Ed Mc Graw Hill. Texto en pdf

[15] LARSON E, Roland, HOSTETLER, Robert P. (1999). Cálculo y geometría analítica volumen 1ª sexta edición. Ed Mc Graw Hill. P(24-25)

[16] LÓPEZ ALONZO, Silvia G. Un estudio sobre las producciones de estudiantes. El caso de la función constante. 4 de Marzo de 2009. {En línea}. {Consultado agosto 20 de 2012}. Disponible en: [http://www.matematicas.uady.mx/dme/docs/seminario/Resumen2_SIME2009\(1\).pdf](http://www.matematicas.uady.mx/dme/docs/seminario/Resumen2_SIME2009(1).pdf)

[17] LÓPEZ, María V, PETRIS, Raquel H y PELOZO, Silvia B. Estrategias innovadoras mediante la aplicación de software; enseñanza-aprendizaje de funciones matemáticas en los niveles EGB 3. {En línea}. {Consultado octubre 02 de 2012}. Disponible en: <http://www.unne.edu.ar/Web/cyt/com2005/8-Exactas/E-014.pdf>

[18] MARTÍNEZ M, Tarrés J, CASAL A. (2002). El Pensamiento Matemático desde la Antigüedad a nuestros días I. Ed Alianza Editorial, S A. Título original: Mathematical

thought from ancient to modern times de Morris Kline, publicada por Oxford University Press. P (35-450)

[19] Matemática I: Función cuadrática. {En línea}. {Consultado noviembre 02 de 2012}. Disponible

en:http://www.dav.sceu.frba.utn.edu.ar/homovidens/TRABAJO_FINAL_jadur/paginas/aplicaciones.htm.html

[20] Ministerio de Educación Nacional. Al tablero. {En línea}. {Consultado 26 de diciembre de 2012}. Disponible en: <http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-183960.html>

[21] Modelo pedagógico: "Pedagogía conceptual". {En línea}. {Consultado noviembre 12 de 2012}. Disponible en: <http://www.slideshare.net/jucebal100/expos-pedagogia-conceptual>

[22] MORRIS, Kline. (2002). Historia de las matemáticas de la Antigüedad a nuestros días, II. Versión en español, Fernández P Carlos, García Diego A. Ed Alianza Editorial. Título original: Mathematical thought from ancient to modern times de Morris Kline, publicada por Oxford University Press. P (536-540)

[23] OROZCO TROCHES, José Luis. 2011. Juega y construye la matemática 9°. Comunidad de hermanos Maristas de la provincia Norandina-Colombia. Ediciones Maristas. P (65-66)

[24] PLANCHART MÁRQUEZ, Orlando. La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función. Tesis doctoral. {En línea}. {Consultado agosto 10 de 2012}. Disponible en: <http://ponce.inter.edu/cai/tesis/oplanchart/inicio.pdf>

[25] PONTES P, Alfonso (2005). Aplicaciones de las tecnologías de la información y de la comunicación, en la educación científica. Primera parte: Funciones y recursos. Revista Eureka sobre enseñanza y divulgación de las ciencias. Vol 2. {En línea}. {Consultado octubre 01 de 2012}. Disponible en: <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/920/92020102.pdf>

[26] ¿Qué es Geogebra? {En línea}. {Consultado diciembre 12 de 2012}. Disponible en: <http://www.geogebra.org/cms/es/info>

[27] REY, Graciela, BOUBÉE, Carolina, SASTRE VÁZQUEZ, Patricia, CAÑIBANO, Alejandra. Aportes didácticos para abordar el concepto de función. Revista iberoamericana de educación matemática –Diciembre de 2009 - Número 120– Página 162. {En línea}. {Consultado agosto 20 de 2012}. Disponible en: http://www.fisem.org/web/union/revistas/20/Union_020_019.pdf

[28] RIBNIKOV, K. (1974). Historia de las Matemáticas. Ed Mir Moscú. Traducido al español por Valdez Castro Concepción (Doctora en Ciencias Fisicomatemáticas). P (24-164)

[29]RIQUELME PASTRIÁN, Luis Exequiel. Uso de la herramienta Excel como recurso de enseñanza y su contribución al rendimiento en Matemática en alumnos adultos en programa de regularización de estudios. {En línea}. {Consultado octubre 10 de 2012}. Disponible en: http://www.tesis.uchile.cl/tesis/uchile/2004/riquelme_l/sources/riquelme_l.pdf

[30] SALINAS, Jesús (2004). "Innovación docente y uso de las TIC en la enseñanza universitaria". Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento (RUSC). {En línea}. UOC. Vol. 1, nº 1. {Citado octubre 10 de 2012}. Disponible en: <http://www.uoc.edu/rusc/dt/esp/salinas1104.pdf>

[31] SARMIENTO S, Mariela, MANZANILLAP, Jorge. Unidad didáctica para la enseñanza-aprendizaje de funciones matemáticas con ayuda de maple. Universidad de Los Andes. Núcleo Universitario "Rafael Rangel" Venezuela, 2011. Documento en pdf.

[32] SEVILLA ORTIZ, Lorenzo. Informe sobre: Experiencia de utilización de Geogebra en las clases de Matemáticas. { En línea}. {Citado octubre 08 de 2012}. Documento en pdf. Disponible en: <http://www.reypastor.org/departamentos/dmat/loseor/archivos/experienciaaula>.

[33] Temas selectos de Matemáticas I. {En línea}. {Consultado diciembre 26 de 2012}. Disponible en: http://www.cobachbcs.edu.mx/Prog_asig_Ref_DGB/propedeutico/Paquete3_Ciencias_Exactas/Semestre5/TS_Matematicas.pdf

[34] TRUJILLO CEDEÑO, Miriam, GUERRERO PRECIADO, Juan de Jesús, CASTRO NIVIA, Marina. Obstáculos cognitivos en el aprendizaje del concepto de función con la mediación de la calculadora graficadora. Revista de investigación, julio-diciembre, año, (2007) vol 7, número 002. Universidad La Salle, Bogotá, Colombia

[35] UNESCO Institute for Statistics, (2009). Medición de las tecnologías de la información y la comunicación (tic) en educación - manual del usuario. Doc pdf