UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

EL CONCEPTO DE FUNCIÓN COMO UNA INTEGRACIÓN DE LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

JULIÁN DARÍO GARCÍA HENAO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

MAESTRÍA EN LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

MEDELLÍN

2013

EL CONCEPTO DE FUNCIÓN COMO UNA INTEGRACIÓN DE LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

JULIÁN DARÍO GARCÍA HENAO
Estudiante

Dr. ALCIDES DE J. MONTOYA CAÑOLA
Director

Tesis para obtener el título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
MAESTRÍA EN LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
MEDELLÍN
2013

El concepto de función como una integración de los registros de representación.

Resumen

El siguiente trabajo tiene como propósito central identificar cuáles son las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver problemas relacionados con el concepto de función, principalmente la lineal y la cuadrática, además de establecer si los estudiantes relacionan los diferentes registros de representación y si conciben la variación y el cambio como elementos de una función. Todo bajo el enfoque de la modelación matemática y las situaciones problemas que fueron fundamentales en la realización de los instrumentos para la recolección de la información.

Para tal motivo se tomó una muestra de 28 estudiantes del grado noveno pertenecientes al colegio Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo del municipio de Rionegro (ANT), con los cuales se aplicaron una serie de instrumentos con el fin de resolver la siguiente pregunta: **¿Qué relaciones se deben establecer entre los registros de representación del concepto de función para entenderlo como modelo matemático?**

Para abortar tal cuestionamiento se retomaron como referentes teóricos los planteamientos de Posada & Villa (2006), Azcárate & Deuloffu (1996), quienes paralelamente permitieron orientar el análisis de los resultados de esta investigación. Desde la perspectiva de estos autores, se planteó la idea de función como modelo matemático, es decir, un objeto que atrapa la variación y el cambio, además de las diversas interpretaciones y relaciones que se pueden hacer de la representación tabular, algebraica, gráfica y el lenguaje natural que en conjunto forman los registros de representación que se abordan en el trabajo.

El marco teórico se desarrolla en cinco apartados, en el primero y segundo de ellos se hace referencia a la modelación matemática como método de enseñanza, además se define lo que se entiende por modelación matemática. En el tercer apartado se habla sobre las situaciones problemas y su importancia dentro del aula de clases. En el cuarto apartado se habla de los algoritmos estereotipados y se diferencian los sumisos y los innovadores, en el último apartado se habla sobre el concepto de función, primero haciendo una reseña histórica, luego a la enseñanza de concepto y cuáles deberían ser las mejores estrategias para la enseñanza del mismo según los autores retomados y por último se centra el estudio de los registros de representación y sus principales características.

De otro modo, las situaciones que sirvieron como objetos para la recolección de la información fueron tres en la primera se le da la oportunidad a que los estudiantes planten una situación y la modelen, en la segunda se tiene como objeto detonador de la actividad un partido de futbol y por último se creó una historia en la que los estudiantes deberían seguir una serie de pistas para poder encontrar un tesoro, dichas actividades contaron con preguntas orientadoras que permitían que los estudiantes ordenaran las ideas y presentaran resultados de forma adecuada.

Para el análisis de las actividades planteadas se hizo una triangulación entre la información recogida en los instrumentos, el marco teórico y la voz del autor de este trabajo, acompañado de entrevistas y registros fotográficos. Durante el análisis de esta actividad se observa que los 28 estudiantes observados presentan diferentes niveles de comprensión del concepto de función, sin embargo sólo una pequeña parte de este grupo se pudo realizar una integración de los registros de representación, lo que para los autores referenciados en este trabajo significa que han comprendido la función como un modelo matemático, el resto de los estudiantes relacionan algunos de los registros, lo que les permite tener nociones del concepto pero no su total comprensión. Además se hace un análisis de los resultados obtenidos al implementar la modelación matemáticas y las situaciones problema, puesto que era una metodología nueva para los estudiantes.

Por último, se presentan las conclusiones del proceso de investigación frente a los elementos que intervienen en la construcción del concepto de función.

THE CONCEPT OF INTEGRATION FUNCTION AS A REPRESENTATION OF THE RECORDS.

ABSTRACT

The following paper is aimed at identifying which strategies students use to solve problems related to the concept of function, especially the linear and quadratic, besides establishing whether students relate the different registers of representation and whether the variation conceive and change as a function elements.

Everything under the mathematical modeling approach, and problems that were instrumental in the realization of tools for gathering information.

For this reason, a sample of 28 ninth grade students from Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo High School in Rionegro (ANT), which is applied a range of tools to address the following question: **What relations records must be established between the representation of the concept of function as a mathematical model to understand?**

To abort such questioning was resumed as theoretical approaches concerning Posada & Villa (2006), Azcárate & Deuloffu (1996), who allowed parallel guide the analysis of the results of this research.

From the perspective of these authors, raised the idea of function as a mathematical model, that is, an object that captures the variation and change, in addition to various interpretations and relationships that can make tabular representation, algebraic, graphical and natural language which together form the representation registers that are addressed in the paper.

The framework is divided into five sections, the first and second ones refers to mathematical modeling as a teaching method, It is also defined what is meant by mathematical modeling. In the third section They are discussed the problems and situations with their importance within the classroom. In the fourth section, It discusses the algorithms making a difference between the stereotyped and the submissives and innovators. In the final section, It is discussed the concept of function, first doing a historical review, then the concept teaching and what should

be the best strategies for teaching it according to the authors. Finally, It focuses in the study of representation registers and their main characteristics.

Otherwise, the situations that served as objects for data collection were three: In the first, It is given the opportunity to students to propose and to model a situation, the second one aims to trigger an activity about a soccer match and finally created a story was created in which students should follow a series of clues to find a treasure, these activities were performed withy guided questions that allowed students ordered to submit ideas and results properly.

For analysis of the proposed activities became a triangulation between the information contained in the instruments, the theoretical framework and the voice of the author of this paper, together with interviews and photographic records. During the analysis of this activity It was shown that the observed 28 students have different levels of understanding the concept of function, however only a small part of this group could made integration of representation registers, It means, according to the referenced authors that they understand the function as a mathematical model, the other students relate some records allowing them to have some knowledge of the concept but not full understanding. It also provides an analysis of the results obtained by implementing the mathematical modeling and problem situations, since it was a new methodology for students.

Finally, conclusions of the research process are presented from the elements involved in the construction of the concept of function.

CONTENIDO

TABLA DE ILUSTRACIONES

INTRODUCCIÓN

En el contexto escolar la enseñanza de la funciones se ha limitado a la aplicación de algoritmos y a la memorización de ecuaciones, dejando a un lado las diferentes interpretaciones que se pueden obtener de este concepto, esto se debe a que aún se continua enseñando el concepto de función a partir de la teoría conjuntos, dejando a un lado elementos fundamentales como son la variación y el cambio y su relación con los diferentes registros de representación.

La enseñanza y aprendizaje del concepto de función implica tener una mirada estructurada de los elementos que lo componen, además de relacionar los diferentes registros de representación a partir de unos muy buenos saberes previos, que le va a permitir al estudiante comprender que es lo que encuentra haciendo, lo que posibilita que se pueda aplicar en diferentes situaciones, tanto dentro del ámbito escolar como de la vida diaria.

La finalidad que se ha trazado con este trabajo, es la de indagar si los estudiantes al resolver situaciones problemas, relacionan los diferentes registros de representación,   para entender el concepto de función   como un modelo matemático, es decir, analizando sí en los diferentes procedimientos y estrategias que realizan los estudiantes, establecen algún tipo de conexión entre los conceptos, o si por el contrario los ven como elementos separados.

El trabajo se realizó en el Colegio Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo del Municipio de Rionegro (ANT), con 28 estudiantes del grado 9°, proceso que duro seis meses, en donde se dictaron clases bajo el modelo establecido por la institución, lo que permitió que los educandos tuvieran algunos saberes previos a la hora de resolver las actividades propuestas para este trabajo, lo que sirvió para realizar un análisis acerca de las estrategias pedagógicas y metodológicas que se pueden utilizar para enseñar el concepto de función.

La experiencia de aula realizada fue de corte cualitativo , utilizando el estudio de caso como metodología de la investigación, además fue seleccionado todo un grupo de la institución, a quienes se les hizo un seguimiento continuo, tanto dentro como fuera del aula, analizando el por qué y el cómo de sus respuestas.

El desarrollo del trabajo está estructurado en cinco capítulos:

En el primer capítulo titulado “planteamiento del problema” se realiza una justificación sobre la pertinencia e importancia de la investigación, además se da cuenta del diseño metodológico de la investigación.

En el segundo capítulo titulado “antecedentes” se recopilan dos investigaciones realizadas en diferentes momentos y que hacen parte de los referentes teóricos que se tuvieron en cuenta para la investigación.

En el tercer capítulo titulado “marco teórico” se presentan las teorías y referentes teóricos que se tomaron para el análisis de la investigación. Partiendo de la modelación matemática y las situaciones problema como metodología de enseñanza, continuando con los algoritmos estereotipados y finalizando con un análisis del concepto de función partiendo de la historia del mismo hasta sus principales elementos en la actualidad.

En el cuarto capítulo titulado “Diseño de actividades” se muestran los tres instrumentos aplicados a los estudiantes para efectos de la recolección de la información, en este se realiza un análisis de cada una de las actividades.

En el quinto capítulo se analizan los resultados, a partir de dos categorías que emergieron de la información recogida, en las cuales se pretende dar solución al objetivo y al problema de la investigación. Para lograrlo se realiza una triangulación entre el marco teórico, las voces de los participantes y las voces de los autores del trabajo.

En el sexto capítulo se presentan las conclusiones que surgieron de los análisis de los resultados y que sintetizan el trabajo, además se presentan algunas recomendaciones que pueden servir de apoyo para nuevas investigaciones y para fortalecer la labor de los docentes en ejercicio.

Capítulo 1

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 MOTIVACIÓN

La educación en Colombia a través de los años ha sufrido múltiples cambios y eso se puede evidenciar en todas las reformas que se han realizado durante su historia, sin embargo, lo que se escribe muy pocas veces se aplica y esto se hace evidente en las estadísticas del sector educativo[1] que da el ministerio de educación nacional colombiana en donde se muestra que el modelo pedagógico tradicional es aplicado en gran parte del país, caso mucho más evidente en el municipio de Rionegro (ANT) en donde más del 50% de las instituciones educativas trabajan bajo este modelo.

[1] Las estadísticas se puede ver en la siguiente página web: http://menweb.mineducacion.gov.co/seguimiento/estadisticas/

El ministerio de Educación desde la reforma curricular, luego con los lineamientos y estándares en el área de las matemáticas ha propuesto una formación de pensamientos aplicables y útiles para aprender cómo aprender, además propone un conocimiento adaptable por fuera del aula de clases, donde el estudiante debe tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, exponer sus opiniones y ser receptivo a la de los demás.

Sin embargo, es evidente que bajo un modelo tradicional lo que propone el MEN, no puede ser aplicado correctamente, puesto que, en este modelo el estudiante solo recibe una información y ésta es aplicada a problemas que muchas veces están descontextualizados, es decir, el educando debe repetir lo que se le ha enseñado, pero no tiene la autonomía de expresar lo que siente.

Según Morín (2001), en la educación del futuro se debe ubicar la información y los elementos en su contexto para que adquieran sentido, es decir, se debe educar para que los estudiantes puedan aplicar lo que ven en el aula de clases en diferentes contextos, eso no significa que se baje la rigurosidad de lo que se enseña sino que se replanten las estrategias de aprendizaje.

Igualmente, la labor docente requiere una constante actualización en los procesos de enseñanza/aprendizaje y en los saberes propios de cada docente, para así brindar a los estudiantes cursos de calidad que sean útiles en su formación. De aquí que, deba existir un compromiso constante por mejorar cada día y buscar diferentes estrategias de trabajo dentro del aula.

Es por lo anterior que el rol del docente que transmite conocimiento se debe replantear en la medida que todo lo que se desea saber se encuentra en libros y especialmente en la internet, pero también es claro que si no se tiene una orientación adecuada el estudiante se puede perder en un mar de conocimiento que no va tener ningún significado para él, es por esto que la nueva concepción del docente es crear estrategias que permitan acercarse al estudiante con el saber y con un reto mayor que es el de darle una aplicabilidad tanto dentro del aula como por fuera, a lo que se enseña.

Ahora bien, en las matemáticas el concepto de función es de gran trascendencia en el ámbito escolar, ya que, como lo expresan Azcárate & Deuloffu (1996), en el mundo actual y especialmente en los medios de comunicación la mayor parte de la información sobre los fenómenos de cambio en las diferentes ramas se difunde por medio de tablas y gráficas, que son dos de las formas de expresar la relación funcional. Por lo que se debe estudiar cuidadosamente para poder brindarle al educando suficientes herramientas para que pueda interpretar la información que hay a su alrededor, además de mostrar su importancia dentro formación académica y profesional.

Finalmente, todo lo escrito anteriormente es la principal motivación para realizar un trabajo sobre la enseñanza del concepto de función que sea acorde a los nuevos retos que exige la educación actual y que pueda servir de consulta a docentes y estudiantes que se encuentren preocupados por mejorar su labor.

1.2 APORTES

Este trabajo dará una nueva visión de la enseñanza del concepto de función, la cual será muy acorde a lo que plantean los lineamientos curriculares en cuanto a que se tendrá en cuenta el contexto del estudiante y sus mayores intereses para su enseñanza sin olvidar el rigor matemático.

Además, para los docentes en ejercicio y en formación este trabajo les dará herramientas para comprender mejor el concepto de función, ya que se hará una investigación seria y con toda la rigurosidad investigativa, para obtener unos resultados que puedan mostrar cuales son las mejores estrategias para abordar este concepto en particular.

1.3 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La educación matemática en Colombia ha sufrido múltiples cambios, así lo muestra los documentos para tal fin como la Renovación Curricular de la década de los ochenta, los Lineamientos Curriculares de 1998 y, los Estándares Básicos de Matemáticas del 2006, vigentes en el sistema educativo colombiano, los cuales ofrecen elementos de orden didáctico para el mejoramiento de las metodologías de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Desde las interacciones en el aula, se puede observar que la metodología de las clases de matemáticas, no ha cambiado sustancialmente en relación con la de aquellos tiempos, en que lo más relevante era la enseñanza de fórmulas y algoritmos, además, que sus contenidos eran impartidos en forma fragmentada, privando a los estudiantes de comprender su estructura y de observar las relaciones que se dan entre los conceptos matemáticos.

Igualmente se observa que aunque en los últimos años la tecnología ha avanzado en todas sus ramas, y es más asequible tener computadores dentro de las Instituciones, la educación no se ha apropiado de estos elementos adecuadamente, en cierta parte porque muchas de las centros educativos no cuentan con material suficiente, y en otros casos porque las salas de informática solo son utilizadas por el área de tecnología e informática.

En el caso de las funciones se observa que su enseñanza se ha centrado en la memorización de ecuaciones que permiten llegar a resultados pero no se trabaja de forma adecuada el conjunto de representaciones que se involucran en dicho tema, tales como: el lenguaje natural, la representación tabular, representación algebraica y representación gráfica.

Dándole mayor importancia a la representación algebraica, tabular y gráfica, pero dejando a un lado el lenguaje natural lo que se hace evidente en la dificultad que presentan los estudiantes para representar algebraicamente una situación del mundo real, además se observa dentro de los salones que aunque se trabajan estas tres representaciones, los estudiantes no las relacionan como elementos de una misma función.

Dificultad que se evidencia en la Institución Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo del municipio de Rionegro en el grado noveno, en el cual a los estudiantes se les dificulta pasar del lenguaje natural al algebraico y viceversa, igualmente aunque estos resuelven ecuaciones algebraicas y las grafican adecuadamente, no las relacionan como elementos de una misma función, lo que dificultad una comprensión más elaborada del concepto.

También se ha encontrado que aunque se han desarrollado muchas investigaciones con base al tema, aun se continúan viendo las mismas dificultades y errores en su enseñanza, todo lo anterior motivó a realizar un trabajo sobre lo referenciado, a nivel local.

1.4 HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

El concepto de función puede continuar presentando muchas dificultades si se siguen los modelos clásicos de enseñanza, en la medida que los estudiantes no van a encontrar ninguna relación de lo que trabajan en el aula con diferentes fenómenos que pueden existir en el mundo, en la medida que simplemente van a estar realizando algoritmos para obtener un resultado.

Sin embargo, esto puede cambiar si se estudian los diferentes registros de representación (tabular, grafico, algebraico y lenguaje natural) con los que se puede analizar una función, en la medida que se tendrán cuatro componentes que aunque diferentes en su modo de representación van a conducir a un mismo elemento, lo que abrirá la mente del estudiante debido a que no se ceñirá a la solución de un algoritmo, sino que podrá encontrar diferentes situaciones en donde se puede aplicar lo visto en clase.

Para lograr esto se propone crear diferentes situaciones en donde el estudiante pueda analizar e interpretar funciones polinómicas en diferentes contextos que sean conocidos para ellos como puede ser el ámbito familiar, escolar, deportivo y recreativo, pero siempre con la finalidad de que se relacionen las diferentes representaciones del concepto.

1.5 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

A partir de las teorías encontradas y las observaciones en el trabajo del aula, se evidencia la necesidad de indagar la forma como los estudiantes abordan actividades asociadas al concepto de función; y poder documentar desde allí el tipo de relaciones que construyen, y las estrategias para obtener mejores resultados en su enseñanza por lo tanto surge la pregunta que motivó el trabajo de investigación: **¿Qué relaciones se deben establecer entre los registros de representación del concepto de función para entenderlo como modelo matemático?**

1.6 OBJETIVOS

1.6.1 Objetivo General

Desarrollar una propuesta pedagógica - didáctica dirigida a obtener mejoras en los procesos de enseñanza / aprendizaje del concepto de función que potencien el desarrollo del pensamiento variacional y que permita establecer relaciones entre los registros de representación con estudiantes grado noveno.

1.6.2 Objetivos Específicos

- Elaborar una estrategia de intervención que propicie espacios de aprendizaje mediante la formulación y solución de situaciones problemáticas.

- Establecer criterios y categorías que permitan evaluar las relaciones entre los registros de representación.

1.7 ALCANCE

El alcance que se quiere obtener con éste trabajo es mostrar que relaciones se deben establecer entres los registros de representación del concepto de función para entenderlo como un modelo matemático, para esto se hará un rastreo bibliográfico y un marco teórico que permita que el lector tenga ideas claras y concisas de lo que se está hablando y lo que se desea hacer.

Asimismo se aplicaran una serie de instrumentos dentro del aula de clases con un grupo de estudiantes, para analizar si al entregarle a los educandos situaciones en donde tengan que aplicar los diferentes registros de representación de los que se estará hablando a lo largo del escrito, se obtendrá una mejor comprensión del concepto.

Además se categorizaran los resultados con el fin de analizar los hechos más significativos y más repetitivos de cada instrumento, con el fin de obtener resultados que permitan mejorar la enseñanza de los mismos. Sin embargo, no se realizará una propuesta de enseñanza del concepto, pero quedará abierta esta actividad para futuros trabajos.

1.8 METODOLOGÍA DE TRABAJO

El presente estudio se caracterizará por ser una investigación cualitativa; “La frase metodología cualitativa se refiere en su más amplio sentido a la investigación que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable”. Taylor (1996, p. 19). En esta se emplea el estudio de casos como método de investigación, como lo expresa C.A.R.E. y citado por L.A.C.E (1999, p. 6) “El hecho de que existan muchas definiciones del caso significa que existe, en efecto solo una el estudio de casos es una lucha por alcanzar la madurez metodológica y personal”. Por lo tanto, este método fue seleccionado ya que no se busca establecer generalizaciones en una determinada población, sino estudiar un caso particular, tratar de interpretarlo y comprenderlo.

Por tal motivo para éste trabajo se tomara un grupo de 28 estudiantes pertenecientes a el grado 9°A del Colegio Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo ubicado en el Municipio de Rionegro (ANT), de carácter privado, en donde se tomaran estudiantes con rendimiento superior, básico e insuficiente, y se le aplicaran una serie de instrumentos que serán los que arrojarán la información que será analizada y triangulada para obtener datos que puedan dar respuesta a la pregunta planteada.

1.8.1 Técnicas e instrumentos utilizados en la recolección de la información

La información se recogerá a partir de entrevistas en profundidad, diarios de campo, fotos, actividades de aula y registros fílmicos, todo con el aval de los estudiantes que serán participes de la investigación.

1.8.1.1. Observación participante.

La observación participante será una herramienta fundamental para el trabajo, se llevará a cabo durante las interacciones con los participantes de la investigación, en charlas extra clase, acompañada del carácter crítico y reflexivo del investigador. Como lo afirma Taylor "La observación participante es empleada para designar la investigación que involucra la interacción social entre el investigador y los informantes durante la cual se recogen datos de modo sistemático y no intrusivo". (1996, p. 31)

La participación que se llevara a cabo en la investigación será una *participación moderada* debido a que en algunos momentos el investigador intervendrá y guiará a los participantes actividades que se plantearán.

1.8.1.2. Entrevistas en profundidad.

Las entrevistas como parte de las técnicas de recolección de información se utilizarán después de cada actividad, con el propósito de entrar en detalle con las soluciones que no permitían una interpretación clara y significativa. Como lo afirma Taylor (1996, p. 101), Las "entrevistas cualitativas en profundidad son reiterados encuentros cara a cara entre el investigador y los informantes, encuentros éstos dirigidos hacia la comprensión de las perspectivas que tienen los informantes respecto de sus vidas, experiencias o situaciones, tal como lo expresan en sus propias palabras”.

Las entrevistas en profundidad tendrán un carácter de semi- estructuradas, en la medida que se tendrá un guion que se desarrollara a lo largo de la entrevista, pero no se establecido para desarrollarlo, por el contrario se le dará toda la libertad a los participantes para que hablan libremente.

1.8.1.3. Diario de campo.

El diario de campo es una buena herramienta para sistematizar la observación, por este motivo, es también parte fundamental de este estudio, se convierte en un material que permite a los docentes plasmar sus interpretaciones, reflexiones de sus vivencias y reconocer las dificultades en búsqueda de soluciones, además, facilitar un desarrollo sistemático y reflexivo de la labor docente. Como afirma Viviana González Maura, (2006, p. 9) “El valor del diario como instrumento potenciador de desarrollo profesional se manifiesta en la posibilidad que brinda al sujeto, a partir de la reflexión sistemática de su desempeño, identificar problemas y plantearse posibles estrategias de solución dirigidas al auto-perfeccionamiento profesional y a la mejora de la práctica educativa”.

1.8.1.4 Fotos.

Las fotos servirán para plasmar momentos y objetos que serán relevantes para el proceso de investigación, además para mostrar al lector del trabajo una imagen de los participantes de la investigación.

1.8.1.5 Registros fílmicos.

Los registros fílmicos se realizarán para no perder de vista ningún detalle que se presentará en el aula de clase, siendo soporte para reconocer en los diálogos con los estudiantes, formas de razonar, además, sirven de apoyo para el análisis de los resultados, ya que cuando los maestros observan y dialogan con algunos alumnos, otros pueden hacer aportes que sean relevantes en el momento.

1.8.1.6. Actividades de aula.

Las actividades que se desarrollarán tendrán como objetivo que los estudiantes del grado noveno comprendan las relacionen entre los registros de representación del concepto de función, para esto se utilizarán situaciones problema que permitan comprender mejor estos conceptos, además se utilizarán como mediadores software, que permitirán una apropiación más clara del concepto.

Capítulo 2

2. ANTECEDENTES

El concepto de función en la educación matemática ha tenido gran trascendencia por tal motivo, ha sido centro muchos los estudios que se han realizado sobre el tema, sin embargo, para efectos de este trabajo se han rastreados algunos textos en particular, que se consideran coherentes y aportantes para efectos de la investigación.

En el artículo "El razonamiento algebraico y la modelación matemática" de Posada F. & Villa J. (2006) los autores argumentan que tanto en libros de texto como dentro de las aulas de clases se trabaja el concepto de función bajo la propuesta del grupo Bourbaki, que es una propuesta enmarcada en el lenguaje de los conjuntos, haciendo que los estudiantes aprendan que una función es un conjunto de pares ordenados de la forma (x, y), de tal manera que a cada elemento de x le corresponda un único elemento de y.

Lo que según ellos implica que el concepto de función dependa en su totalidad de la comprensión que presenten los estudiantes de los conceptos abstractos de conjunto, par ordenado y regla de correspondencia, además expresan que *“desaparece la importante idea de ver este concepto un objeto matemático que atrapa la variación y el cambio, es decir como un modelo matemático”* Posada & Villa (2006; 128)

Asimismo plantean que la enseñanza bajo el modelo del grupo Bourbaki, no permite captar el papel fundamental que juegan los diferentes registros semióticos de representación en la comprensión del concepto de función. Lo que dificulta la construcción de interrelaciones que se pueden establecer con otras ciencias.

Los autores expresan que muchos de los fracasos y dificultades que se presentan al enseñar el concepto de función se presenta por dejar a un lado las consideraciones antes planteadas como lo expresan a continuación:

> *Los fracasos en la comprensión del concepto de función se presentan porque su estudio se hace al margen de las anteriores consideraciones. Es decir, se estudia a espaldas del papel que juega como objeto que permite atrapar matemáticamente la covariación entre dos o más cantidades de magnitud, de la misma o distinta naturaleza, a través de algún registro semiótico de representación. Dicho de otra forma no permite entenderlo como modelo matemático de un conjunto de situaciones que se rigen por características similares.*Posada& Villa (2006; 129)

Otra fuente consultada fue el texto sobre didáctica de las matemáticas llamado “Funciones y graficas “cuyo autores son Carmen Azcárate y Jordi Deuloffu en el cual se plantea como debe ser la enseñanza y el aprendizaje de distintos conceptos relacionados a las funciones, además de hacer un recorrido histórico que permite ver la importancia de éste a través de la historia.

Según Azcárate & Deuloffu (1996), la idea de función nace a partir del estudio de los fenómenos de cambio que surgieron de problemas generados por la física y especialmente por el estudio del movimiento y se representa a través de diferentes lenguajes como el verbal, tabular, gráfico y algebraico, cada uno de ellos apropiado para resaltar ciertas características de la función.

Asimismo expresan que en su propuesta ponen mayor relevancia al lenguaje de las gráficas, que no debe quedarse reducido a la construcción de gráficas a partir de expresiones algebraicas, cuyas variables carecen de significado concreto, cosa que según ellos ha estado sucediendo en la escuela durante muchos años. Por el contrario para los autores las gráficas cartesianas "*son una forma para representar una función, que permite el estudio de las mismas y en particular de las características globales, sin necesidad de recurrir prematuramente, a rigurosas definiciones de conceptos muy abstactos" Azcárate & Deuloffu (1996, 60).*

Además plantean que el lenguaje tiene un papel de gran importancia en el aprendizaje de las matemáticas, puesto que afirman que la adquisición de un concepto depende de la capacidad de reconocer e interpretar una representación del mismo, por otra parte plantean que un concepto en la mayoría de las ocasiones se encuentra relacionado con otros temas, es así como dentro del esquema del concepto de función aparecen otros términos como variable, dependencia, transformación y sucesión.

Igualmente plantean que el aprendizaje de las funciones, pasa en primer lugar por un conocimiento de cada uno de los lenguajes de representación (descripción verbal, tabla de valores, gráfica, formulación o ecuación), es decir*, "por la adquisición de la capacidad para leer e interpretar cada uno de ellos y posteriormente para traducir de uno a otro" Azcárate & Deuloffu (1996, 63).*

No obstante, en ambos trabajos se hace un estudio de los registros de representación pero sin profundizar en la relación que existe entre ellos, puesto que en el texto funciones y graficas se enfatiza más en el lenguaje análisis de las gráficas, y el texto El razonamiento algebraico y la modelación matemática se preocupa más por el lenguaje natural, en consecuencia, el trabajo que se desea realizar intenta integrar los cuatros registros de representación simultáneamente con el fin de analizar si puede existir una mejor comprensión del concepto bajo esta iniciativa.

Capítulo 3

3. MARCO TEÓRICO

3.1 MODELACIÓN MATEMÁTICA

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia desde el año 1998 con el surgimiento de los Lineamientos Curriculares ha pensado en la modelación matemática como una herramienta para enseñar matemáticas, en la medida que permite a los estudiantes interactuar con unas matemáticas contextualizadas y aplicables a diferentes modelos, en este sentido los lineamientos curriculares en matemáticas expresan que “ cuando hablamos de la actividad matemáticas en la escuela destacamos que el alumno aprende matemáticas haciendo matemáticas, lo que supone como esencial la resolución de problemas en la vida diaria” (MEN, 1998, pág. 97). En este sentido, se considera que el paso para integrar la resolución de problemas a contextos significativos para los estudiantes es la modelación.

No obstante, este modelo no es utilizado en gran parte del país, como lo muestran las estadísticas del ministerio de educación en donde se evidencia que la mayor parte de los colegios aún continúan trabajando un modelo tradicional, en este mismo sentido Villa-Ochoa et al. (2008) expresa que:

> *[…] a pesar de que estos elementos cumplen diez años de estar incluidos en los documentos oficiales del Ministerio de Educación Nacional, en esta investigación se ha encontrado que en algunas instituciones educativas no se han apropiado de estos planteamientos, y por el contrario sigue predominando una visión de las matemáticas como un área formal y abstracta constituida por definiciones, axiomas e ideas comprimidas y "exactas" ,cuya aplicación se encuentra en un conjunto reducido de situaciones artificiales que, en algunos casos, poco o nada tiene que ver con la realidad* (pág. 1).

Ahora bien, para poder acercarse a lo que es la modelación matemática primero se debe diferenciar entre tres términos que hacen parte de la misma y es el modelo, modelaje y modelización.

- El **modelo matemático** es el paso de situaciones del mundo real que requieren soluciones matemáticas a un lenguaje matemático al que se le puedan aplicar operaciones básicas o complejos, es decir, pasar del lenguaje natural a el lenguaje algebraico, en este mismo sentido, Biembengut, M., & Hein, N. (s.f.). expresan que *"Al conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna manera, un fenómeno en cuestión o un problema realista, lo denominamos Modelo matemático"*.

- El **modelaje matemático** es el proceso por el cual se obtiene un modelo matemático, para esto se requiere del análisis de diferentes situaciones problemas en las que se pueda aplicar soluciones matemáticas, ya que no todas las situaciones pueden ser convertidas en modelos y además hay que tener mucho cuidado para que temas en específico se pueden trabajar, según Biembengut, M., & Hein, N. (s.f.). el modelador debe tener una dosis significativa de intuición y creatividad para interpretar el contexto, discernir que contenido matemático se adapta mejor y tener sentido lúdico para jugar con las variables involucradas.

- La **modelación matemática** de un fenómeno o situación problema, es un conjunto de relaciones y representaciones de un problema en cuestión, esto a su vez no solo permite llegar a una solución particular, sino que es un proceso de generalización que puede permitir la interacción con otras ramas del saber.

3.2 LA MODELACIÓN MATEMÁTICA COMO MÉTODO DE ENSEÑANZA

En la modelación matemática como metodología de enseñanza requiere la elección de un tema, en el cual se plantean preguntas o interrogante que se quieren resolver, a través del uso de las matemáticas y de la investigación sobre el tema.

Según Villa-Ochoa, J. A. (2010), la modelación ha sido fuente de múltiples estudios lo que ha causado que hayan dos maneras de concebirla dentro del aula, la primera de ellas es concibiendo al profesor como modelador de la situación y quien guía la misma, mientras que, por otra parte, se considera que los estudiantes deben ser los encargados de elegir una situación y plantearse problemas que se resolverán matemáticamente.

Sin embargo para fines de esté de esta investigación se le dará prioridad a la primera manera, que es el modelo que trabajan según Villa-Ochoa, J. A. (2010), *“En Biembengut y Hein (2004), Bassanezi (2002), Villa-Ochoa (2007) y muchos otros se muestran algunas maneras de asumir la modelación desde la primera manera” (pág. 169).*

Desde esta perspectiva el docente debe ser el encargado de formular, orientar y guiar la situación con el fin de que los estudiantes comprendan y puedan llegar a resultados concretos de lo que se encuentran haciendo, además se debe encargar de despertar el interés buscando situaciones contextualizadas y cercanas a las realidades de los alumnos.

En este mismo sentido, cuando el docente es quien organiza y guía las situaciones problema a resolver, tiene la posibilidad de tener mayor control sobre los pasos, que seguirán los estudiantes y esto posibilitará que sea orientarlo bajos los parámetros y perspectivas que se quieren para obtener resultados más significativos y relevante a la hora de adquirir y fortalecer un concepto.

Asimismo para Biembegut & Hein (2004) la aplicación de la modelación matemática, quiere propiciar en el alumno:

- Integración de las matemáticas con otras áreas del conocimiento
- Interés por las matemáticas frente a su aplicabilidad
- Mejoría en la aprensión de los conceptos matemáticos
- Capacidad para, leer, formular, interpretar, representar y resolver situaciones problema.
- Estimular la creatividad en la formulación y resolución de situaciones problema
- Habilidad en el uso de la tecnología
- Capacidad para trabajar en grupo.

En este sentido villa et. Al (2008) En el texto *El proceso de modelación matemática en las aulas escolares. A propósito de los 10 años de su inclusiones los lineamientos curriculares colombianos* afirma que

> *"La modelación matemática, más que una herramienta para construir conceptos, se convierte en una estrategia que posibilita el entendimiento de un concepto matemático inmerso en un "micromundo" (contexto dotado de relaciones y significados) que prepara al estudiante para ir desarrollando una actitud diferente de preguntarse y abordar los problemas de un contexto real." (pág. 1)*

Ahora bien, para abordar este trabajo dentro del aula de clases Biembegut & Hein (2004), consideran que se deben plantear un modelo matemático por el medio del cual se pueda enseñar un contenido particular, que puede ser abordado desde diferentes ramas del conocimiento o desde las mismas matemáticas y para esto, plantean una serie de etapas para enseñar el tema.

1. Exposición del tema: En esta etapa el profesor expondrá de forma abreviada los conceptos y lo que se desea desarrollar, haciendo que los alumnos se planten preguntas sobre el tema trabajado.

2. Delimitación del problema: a partir de las preguntas planteadas por los educandos, se seleccionan algunas que permitan acercarse al contenido programático, además, en esta etapa se le podría solicitar a los estudiantes que consultaran e investigaran en libros y con expertos sobre el tema.

3. Formulación del problema: luego de hacerse preguntas e indagar en libros se puede plantear un problema, en el que se formulen hipótesis y se organicen datos que se pueden analizar utilizando contenido matemático.

4. Desarrollo del contenido programático: Es esta etapa se relaciona el contenido programático (concepto, definición, propiedad entre otros) y se relaciona con las preguntas y el problema a resolver.

5. Presentación de ejemplos análogos: en este momento se presentan a los estudiantes situaciones en las que se puedan ampliar las ideas íníciales y así evitar que el problema se restrinja, además, en esta etapa puede ser importante el uso de la tecnología, como calculadoras y software.

6. Formulación de un modelo matemático y resolución del problema a partir del modelo: aquí se propone a los alumnos que resuelvan el problema planteado inicialmente.

7. Interpretación de la solución y validación del modelo: En este momento el estudiante evalúa los resultados obtenidos y verifica la veracidad de los resultados.

Sin embargo estas siete etapas no necesariamente tiene que ser aplicadas en la misma clase por lo que se pueden utilizar diferentes momentos para que se apliquen.

3.3 SITUACIONES *PROBLEMA*

Desde la reforma curricular y la elaboración de los lineamientos curriculares, por parte del ministerio de educación nacional colombiano, se ha venido hablando de las situaciones problemas como un modelo para acercarse al conocimiento matemático en la escuela.

Los lineamientos curriculares plantean que las aplicaciones y problemas matemáticos no solo deben darse después del haberse enseñado el contenido sino que pueden utilizarse como mediador para el aprendizaje, para lograr esto se plantea que deben desarrollarse una serie de situaciones problemáticas en donde los estudiantes puedan explorar problemas, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos.

Las situaciones problema según Jhon Jairo Munera son:

> *Un espacio para la actividad matemática, en donde los estudiantes, al participar con sus acciones exploratorias en la búsqueda de soluciones a las problemáticas planteadas por el docente, interactúan con los conocimientos matemáticos y a partir de ellos exteriorizan diversas ideas asociadas a los conceptos en cuestión.* (Munera, 2011, pág.181)

En otras palabras las situaciones problemas son un espacio donde el estudiante interactúa con el conocimiento a partir de una serie de situaciones que van a movilizar los saberes previos que el educando pose para obtener un nuevo conocimiento, y en donde el docente actuará como mediador entre lo que saben y ese nuevo saber, además orientará el trabajo y la producción de los estudiantes con la finalidad de formalizar el nuevo conocimiento.

Estas a su vez realzan y le dan un nuevo sentido al papel del estudiante dentro del aula de clases, puesto que este ya no es un ser pasivo que recibe la información por parte del docente, información que en gran parte de los casos no es significativa y por lo tanto no es apropiada ni aplicada, no obstante al enseñar bajo el modelo de las situaciones problema el estudiante se convierte en un ser activo, que tiene un papel predominante, puesto que es él quien construye un nuevo saber a partir de sus saberes previos, mientras que el docente actúa como un ser que orienta la actividad, en este sentido Jhon Jairo Munera expresa que "las situaciones problema dinamizan la actividad del estudiante y orientan su manera de pensar respecto a las actividades planteadas y los conceptos implícitos en las mismas"(Munera, 2011, pág.181)

Asimismo, Luis moreno Armella dice que "La resolución de situaciones problema supone una serie de interacciones simétricas entre estudiantes y de interacciones simétricas entre los estudiantes y el profesor, pero también supone la superación de un conflicto cognitivo interno del sujeto entre sus conocimientos anteriores y los que resuelven la situación planteada" (Armella, 2002, 40)

Además expresa que la situación problema es el detonador de la actividad cognitiva; para que esto suceda debe tener las siguientes características:

a) Debe involucrar implícitamente los conocimientos que se va a aprender.
b) Debe representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez, debe ser accesible para él.
c) Debe permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores.
d) Debe ofrecer una resistencia suficiente para llevar al alumno a poner en duda sus conocimientos y a proponer nuevas soluciones.
e) Debe contener su propia validación.

3.4 ALGORITMOS ESTEREOTIPADOS

La matemática escolar está marcada por la enseñanza de algoritmos como el de la multiplicación, el de la suma, el de Euclides o el método de Gauss para resolver ecuaciones, entre otros, sin embargo, este aspecto preocupa actualmente a la investigación, dado que es poco el interés por construir los algoritmos desde relaciones conceptuales significativas.

Fernández (2005) dice que se podría expresar vagamente, que un algoritmo es el conjunto de pasos a efectuar, necesariamente ordenados y finitospara lograr un objetivo. Igualmente expresa que esta definición no sólo es aplicable en la educación, sino a toda la vida, puesto que siempre que se desea realizar algo se siguen una serie de pasos que requieren de la observación, la experimentación y la lógica.

En la educación matemática también se demandan los procesos anteriores, puesto que sería imposible construir un algoritmo, sin el razonamiento lógico, sin el saber específico, y el pensamiento creativo. por ejemplo, al resolver un problema, primero se observa y se analiza qué algoritmo hay que aplicar, luego se experimenta con él y por último se considera si ésta puede ser una respuesta lógica para el enunciado del problema.

El mismo autor plantea que en la actividad escolar se distinguen dos tipos de algoritmos: el sumiso y el innovador. El algoritmo sumiso es aquel que se enseña en el aula de clases, pero no se entiende cuáles son los elementos matemáticos que intervienen para su solución, y se convierte en un procedimiento que se realiza por mecanización y no por comprensión. En este mismo sentido Fernández plantea que un algoritmo sumiso es “el que se impone para realizar la acción operativa, –el pensamiento se somete a una aceptación de lo que hace sin entender por qué lo hace–, obligando al entendimiento del alumno que lo utiliza, a rendirse ante la rutina de su aplicación" (2005, p.32).

Algunos ejemplos de algoritmos sumisos son la solución de ecuaciones, dado que los alumnos hablan de que cuando un número está sumando, pasa a restar y cuando está multiplicando pasa a dividir, en este caso el estudiante, no comprende que lo que está aplicando en realidad es la propiedad uniforme, y la propiedad inversa. Otro ejemplo es la descomposición de un número en factores primos, se observa cuando los estudiantes no reconocen, primero que es una descomposición única, y segundo que todos los factores son divisores de él.

El algoritmo innovador, es aquel que el estudiante aplica a partir de sus saberes previos, ya que no lo realiza utilizando los algoritmos propuestos por el docente, sino que él se ingenia procedimientos para su solución, en este sentido Fernández expresa que un algoritmo innovador "sería aquel que se aplica con opción de decisión propia, comprendiendo y entendiendo, tanto lo que se hace como el porqué de ello." (2005, p.33)

El quehacer matemático no se encuentra en la aplicación de los algoritmos, sino en todos los componentes intelectuales, que han posibilitado llegar a él, es decir, lo más importante es reconocer los elementos que permitieron construirlo, ya que así se entendería el por qué y para qué se utiliza. Puesto que si no ocurre esto se concebirá la actividad matemática como un proceso de repetición de fórmulas para llegar a un resultado.

Asimismo Fernández expresa que:

> *La matemática no está en la aplicación reiterada de movimientos, sino en la cantidad de ideas que se relacionan. Hay muchas formas de llegar al resultado si se comprende lo*

> *que se hace, y hay mil formas de multiplicar que se apoyan siempre en propiedades y relaciones matemáticas. El algoritmo, debería ser el punto de llegada y siempre como necesidad de abreviar el tiempo dedicado a la obtención del cálculo pedido (2005, p.33)*

Como lo expresa el autor, el algoritmo debería surgir por una necesidad de simplificación, es decir, se deberían dar bases para que el estudiante aplique sus saberes previos en la solución de situaciones matemáticas, con opción de decisión propia, lo cual posibilitaría que éste no se convirtiera en un algoritmo que se realizara por imposición.

Igualmente plantea que cuando se aplica un algoritmo sumiso, en muchas ocasiones, tardan más en conseguir el resultado que si lo intentan por sus propios métodos, que para las matemáticas escolares también son algoritmos válidos, y siempre innovadores. El aplicar un algoritmo sumiso imposibilita que el estudiante pueda ver diferentes métodos de solución, ya que siempre se está pensando en una secuencia para llegar a un resultado, la cual, en muchas ocasiones se realiza de forma equívoca.

> *Cuando a un niño que entiende lo que hay que hacer se le desafía convenientemente es capaz de crear originales formas de llegar al desenlace numérico. No ocurre lo mismo con los niños que se han visto sometidos desde sus primeras experiencias matemáticas a la penosa aplicación reiterada de algoritmos sumisos, en éstos disminuye considerablemente su capacidad para establecer relaciones y, paradójicamente, su cálculo mental se expresa con un rendimiento muy bajo, debido a que intentan imitar mentalmente la forma en que opera el algoritmo impuesto. Fernández (2005, p.34)*

Todo lo anterior significa que más que enseñar algoritmos a los estudiantes, hay que brindarles la posibilidad de que ellos los construyan, con el fin de que puedan ver a las matemáticas más allá de una simple aplicación de un algoritmo y pasen a comprenderla como una estructura llena de relaciones.

3.5 CONCEPTO FUNCIÓN

3.5.1 BREVE RESEÑA HISTORICA

La importancia del concepto de función a través de la historia se debe a las grandes aplicaciones prácticas que tiene en la actualidad, en la medida que ha sido de gran utilidad en áreas como las matemáticas y la física, encontrando en los principales exponentes de estas áreas los mayores aportes para el surgimiento del concepto de función como lo conocemos hoy en día.

Sus orígenes inician en la edad antigua y aunque difícilmente se pueda hablar del concepto de función en esta época, si se pueden tomar algunas ideas que tuvieron cierta relación con su aparición, es así como en la civilización babilónica con sus trabajos en astronomía, obtuvieron datos de gran interés para el conocimiento de las funciones, según Azcárate & Deuloffu (1996) “acaso sea en ellos donde se encuentra el carácter más remoto”.

Posteriormente en la época griega surge la idea de proporción, el problema de la inconmensurabilidad y la distorsión entre número y magnitud, los cuales representaron serios problemas en el mundo griego, puesto que en esta época siempre se trabajó la proporción pero de magnitudes del mismo tipo, dado que magnitudes de diferente tipo carecían de significado, estos problemas y sus posteriores descubrimientos ofrecieron un gran aporte al concepto de función.

La edad media tuvo sus mayores preocupaciones en el estudio de las cosas sujetas al cambio y en particular del movimiento, fueron las escuelas de Oxford y París los principales centros de estudio del desarrollo de la ciencia en este periodo, sin embargo fue en la edad moderna la época más importante para el desarrollo del concepto de función, puesto que vivieron entre otros Galileo, Descartes, Fermat, Newton, Leibnitz y Gregory, que contribuyeron entre otros al surgimiento de la geometría analítica, y luego del cálculo infinitesimal, que contribuyeron al progreso del estudio de la función.

Según Azcárate & Deuloffu (1996) hasta el siglo XVII, las funciones podían expresarse utilizando lenguaje verbal, representaciones tabulares y representaciones gráficas, un ejemplo de esto es la función logarítmica que fue descubierta por Burgi y Neper paralelamente el primero representándolo tubularmente y el segundo a partir de la comparación de movimientos, sin embargo años más tarde en 1637 Descartes con la creación de la geometría analítica da un aporte decisivo al concepto de función, ya que en el mismo trabajo aparece por primera vez en una ecuación una relación de dependencia entre las variables x e y, de manera que de una variable se puedan calcular los valores correspondiente a la otra variable, lo que permitiría llegar años más tarde a la ideas fundamentales en donde las funciones se consideraran como relaciones entre conjuntos de números, más que como entre << cantidades>> y el otro, representar a las funciones por medio de fórmulas.

En este sentido Azcárate & Deuloffu expresan que

> *Descartes supone desde una perspectiva moderna, una cierta restricción, al entender por ecuación únicamente lo que conocemos por ecuación algebraica, la representación de curvas por medio de ecuaciones representa uno de los avances más importantes en el desarrollo de las matemáticas, gracias al cual su estudio se convertirá desde este momento en la cuestión principal, con la consiguiente extensión a otras ramas de la matemática, en especial al cálculo infinitesimal (1996, pág.48)*

Sin embargo, Descartes solo considero las funciones algebraicas excluyendo otras curvas que no podían ser tratadas bajo su método de análisis, pero fue años después cuando Newton inicio el estudio de funciones en series infinitas de potencias, cuando se redujeron en gran parte las restricciones de los estudios de Descartes, haciendo posible la representación analítica de la mayoría de las funciones estudiadas en aquellos tiempos.

Paralelamente Leibnitz fue otro de los matemáticos que contribuyó decisivamente al desarrollo del concepto de función, y al igual que Newton sus primeras obras fueron dedicadas el estudio de series infinitas, encontrando que la determinación de una tangente a una curva depende de la razón entre la diferencia de las ordenadas y abcisas cuando estas tienden a cero, así como el cálculo de áreas depende de los rectángulos cuya abcisa tiende a cero y que ambos problemas son inversos, llegando a la misma conclusión que Newton.

Según Boyer y citado por Azcárate & Deuloffu“ la manera de razonar de Newton estaba mucho más próxima de la fundamentación moderna del calculo que la de Leibnitz, pero la eficacia de la notación diferencial y lo plausible de las ideas de Leibnitz provocan una tendencia a aceptar mejor la idea de diferencial que la de Fluxión” (1996, pág. 49).

El termino de función aparece por primera vez en 1673 en un manuscrito de Leibnitz, sin embargo para este tiempo el significado que le atribuía era al problema de cálculo de ordenadas a partir de cierta propiedad de las tangentes, pero en 1694 utiliza la palabra en un sentido más general, aunque todavía poco preciso, y referido como siempre a cuestiones de geometría diferencial.

Según Azcárate & Deuloffu (1996) la primera definición explicita del concepto de función como expresión analítica, fue publicada en 1718 por Jean Bernoulli, cuya notación no perduro y fue Euler en 1740 quien utilizo la notación f(x) utilizada hasta estos días.

3.5.2 ENSEÑANZA/ APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Según Posada & Villa (2006; 128) la enseñanza del concepto de función en la escuela se ha centrado en el modelo del grupo Bourbaki quienes basados en la definición de conjuntos consideran una definición de función de la siguiente manera:

> *Una función **f** es una regla que asigna a cada elemento **x** de un conjunto **A**, exactamente un elemento, llamado f(x), de un conjunto **B.** El conjunto A se llama dominio de la función. El número f(x) es el valor de f en x y se lee "f de x". El rango o recorrido de f es el conjunto de todos los valores posibles de f(x), conforme x varía en todo el dominio. Un símbolo que representa un número arbitrario en el dominio de una función f se llama **variable independiente**. Un símbolo que representa un número arbitrario en el rango de una función f se llama **variable dependiente.**(Stewart, 2006. pag.11)*

Lo que desde el punto de vista de los autores hace que el problema general a resolver en la escuela sea el de hacer que los estudiantes comprendan que una función es un conjunto de pares ordenados de la forma (x, y).

Otra dificultad que se presenta en la enseñanza según Azcárate & Deuloffu (1996) es poner de relieve ante todo, el valor del lenguaje de las gráficas, que no debe quedarse reducido a la construcción de rectas y parábolas a partir de expresiones algebraicas cuyas variables carecen de significado concreto. Sin embargo, estos expresan que las gráficas deben ser un elemento que permitan observar las características globales de las funciones sin recurrir a rigurosas definiciones de conceptos muy abstractos.

Otra dificultad radica según los autores es que en este concepto no hay una única definición, y expresan que estas definiciones se pueden clasificar según el aspecto que más se destaca

- Correspondencia entre valores de variables
- Correspondencia entre elementos de dos conjuntos
- Dependencia entre dos variables
- Conjunto de par ordenados

Otra dificultad es expresada en el texto *pensamiento variacional y tecnologías computacionales del ministerio de educación nacional colombiano del 2004* los cuales expresan que cuando se habla de funciones en el contexto escolar se piensa en funciones numéricas, por lo que su enseñanza se centra, a veces en exceso, en el estudio de ecuaciones y los objetos algebraicos que la definen.

Para todos los autores antes mencionados el elemento más importante a tener en cuenta a la hora de enseñar el concepto de función es poderlo ver como un objeto matemático que atrapa la variación y en cambio, es decir como un modelo matemático que pueda interrelacionarse con otras ciencias como la física, química, la ingeniería etc. Además de poder captar el papel fundamental que juegan los registros de representación en la comprensión del concepto.

Por un lado Azcárate & Deuloffu (1996) expresan que el aprendizaje de las funciones pasa, en primer lugar, por un conocimiento de cada uno de los registros de representación, es decir, por la adquisición de la capacidad para leer e interpretar cada uno de ellos y posteriormente para traducir de uno a otro.

Por otro lado Posada & Villa (2006) el concepto matemático como modelo matemático implica la construcción de un registro simbólico analítico de una situación que generalmente se presenta en lenguaje natural para llegar a la construcción de sofisticados sistemas simbólicos matemáticos, haciendo uso intermedio de los registros tabulares y gráficos especialmente.

Lo anterior evidencia según los autores, que para comprender el concepto de función de una manera adecuada, su estudio no debe quedar reducido a una ecuación algebraica, sino que debe involucrar diferentes registros de representación, ya que cada uno de estos elementos ofrecen información valiosa para analizar desde diferentes puntos de visto el concepto de función.

3.5.3 REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

En la enseñanza de las matemáticas el lenguaje tiene un papel primordial, ya que podemos afirmar que cuando un estudiante puede representar, argumentar, reconocer e interpretar situaciones problemáticas o simples ejercicios el estudiante tiene buenas bases del concepto que está estudiando.

Según Azcárate & Deuloffu (1996) para el concepto de función se presentan las siguientes representaciones, modelo Físico o simulación, descripción verbal, tablas de valores, grafica, formula o ecuación, las cuales según ellos permiten expresar un fenómeno de cambio, una dependencia de variables.

La descripción verbal o lenguaje natural es uno de los registros que mayor dificultad presenta para ser analizado, puesto que esta nos da una visión descriptiva y generalmente cualitativa de la relación funcional, y en la mayoría de las ocasiones, se parte de esta para interpretar los restantes lenguajes, y así obtener un mayor nivel de abstracción.

Igualmente Posada & Villa (2006) expresan que el lenguaje verbal es uno de los registros que mayor complejidad tienen para su análisis, por un lado debido a que es un registro totalmente discursivo y por tanto ofrece todas las funciones tanto discursivas como metadiscursivas, permitiendo una enorme divergencia en la forma de su empleo, pero por otro lado, según los autores porque es un registro multifuncional, es decir, no permite un tratamiento únicamente por algoritmización.

Según Azcárate & Deuloffu (1996) *la tabla de valores o registro tabular* da una visión cuantitativa, fácilmente interpretable desde la óptica de una correspondencia, es decir de la identificación de pares de valores, pero que es insuficiente a la hora de extraer las características globales de la función.

Asimismo Posada & Villa (2006) dicen es necesario tener presente los siguientes supuestos a la hora de trabajar con el lenguaje tabular:

- Por un conjunto de puntos o de una tabla pasan infinitas funciones polinómicas, lo que hace que no se pueda definir una función para una tabla.
- A pesar de que existan infinitas funciones que satisfacen una tabla de datos, si es posible determinar a través de ella una función polinómica, siempre y cuando se tenga certeza de que es este tipo de función, y que el número de pares ordenados sea mayor al grado del polinomio.

Otro registro de *representación es el grafico cartesiano*, que según Posada & Villa (2006) son principalmente los ejes ortogonales y los puntos definidos por las duplas o tripletas según el espacio en el que se esté trabajando, además dicen que las magnitudes que intervienen en la situación, se identifican con algunos de los ejes coordenados y luego se analizan los cambios y situaciones de dichas cantidades. A una de las cantidades de magnitud se le llamara cantidad independiente y a la otra dependiente.

Ahora bien, Azcárate & Deuloffu (1996) dicen que este registro de representación es un excelente instrumento para expresar la dependencia entre dos variables, además comentan que la capacidad para leer, interpretar y construir graficas cartesianas, permite establecer la relación existente entre las magnitudes representadas, pero al mismo tiempo su conocimiento es un instrumento a través del cual pueden construirse nuevos conceptos como por ejemplo el de variación de una función.

En el registro simbólico algebraico, Posada & Villa (2006) expresan, que los objetos son símbolos que generalmente pertenecen a el alfabeto español en nuestro país, con algunos elementos del alfabeto griego, los números indu –

arábigos, los símbolos de las operaciones y las relaciones aritméticas y signos de agrupación.

Asimismo para *“la determinación de la unidad significante en este registro se le asociara un símbolo a cada cantidad de magnitud y se le llamara variable, de esta forma se habla de los registros que contiene dos variables. Por lo general estas variables se asocian a los símbolos x y f(x), donde x representa la cantidad de magnitud independiente y f(x) la cantidad de magnitud que se relaciona con x “Posada & Villa (2006, pág. 133)*, además expresan que el registro simbólico algebraico permite recoger la generalidad a través del símbolo, en términos de ser un representante de cualquier elemento de un determinado conjunto numérico.

Según Azcárate & Deuloffu (1996) los lenguajes de mayor abstracción y por tanto más difíciles de interpretar son el registro gráfico y simbólico, que son los que permiten obtener una visión más clara y concreta de la función. Proporcionando una mayor información de los otros lenguajes, al mismo tiempo que posibilitan la caracterización de modelos.

Igualmente expresan que:

> *“la gráfica permite ver las características globales de la función (variación y periodos constantes, crecimiento, continuidad, concavidad, máximos y mínimos, periodicidad, etc), también determinables a partir de la ecuación (cuando es posible establecerla a partir de métodos elementales), pero mucho más difíciles de interpretar , ya que su determinación a través del lenguaje algebraico presupone, por un lado el conocimiento del significado de los símbolos utilizados y por otro la interpretación de los abstractos, que a través de la gráfica es posible intuir más fácilmente”* Azcárate & Deuloffu (1996, pág. 62)

Para poder aprender bien las funciones en primer lugar debe haber un dominio de cada uno de los registros de representación es decir, los sujetos deben tener la capacidad de leer e interpretar cada uno de ellos y poder traducir y pasar de uno a otro.

Además Azcárate & Deuloffu (1996) citando a Janvier (1978) muestra la variedad de todas las posibles traducciones:

Hacia / Desde	Descripción verbal	Tabla	Gráfica	Fórmula
Descripción verbal	________	Medida	Boceto	Modelo
Tabla	Lectura	___________	Trazado	Ajuste
Gráfica	Interpretación	Lectura	____________	Ajuste
Fórmula	Interpretación	Cómputo	Gráfica	__________

Tabla 1.

Capítulo 4

4. DISEÑO DE ACTIVIDADES

4.1 GUIA # 1

La primera actividad se encuentra diseñada bajo la metodología de la modelación matemática en la cual el estudiante debe ser el encargado de elegir la situación y a partir de esta solucionar una serie de interrogantes.

En esta se pretende indagar sobre ¿qué es los que consideran los estudiantes como situaciones de variación y de cambio?, en este sentido se dará toda la libertad para que los educandos planten diferentes tipos de situaciones.

Luego de que éstos modelen una situación se iniciaran hacer preguntas, que guiaran la actividad en esta se pretende llevar a los estudiantes por los diferentes registros de representación, con el objetivo de que puedan modelar la situación planteada y puedan predecir qué ocurriría en diferentes momentos de la situación.

La actividad comienza proponiendo a los estudiantes que planten una situación en donde ellos consideren que haya un fenómeno de cambio, por su parte las preguntas 1, 2 y 3 pretenden que los estudiantes puedan identificar las variables de la situación y que puedan encontrar la relación entre las variables, pudiendo definir cuál es la variable dependiente e independiente.

Las preguntas 4, 5, 6 y 7 pretenden que el estudiante a partir de la tabulación de datos pueda realizar una gráfica que represente la situación, además de que la puedan relacionar esta figura con las gráficas de las funciones que ellos ya hayan visto durante el año escolar. Igualmente, se pretende que los alumnos puedan asociar las variables identificadas en las preguntas anteriores para la elaboración de la gráfica.

Finalmente, con la pregunta 8, 9 se quiere que el estudiante genere una función que modele la situación planteada inicialmente, además que, pueda predecir eventos futuros relacionados con la misma y que permitan dar conclusiones acerca de la situación.

Para la elaboración de esta guía se entregara un documento en donde ellos deberán responder todas las preguntas, además se tendrá un acompañamiento pasivo puesto que el objetivo es ver que hacen los estudiantes y que estrategias desarrollan para solucionar la actividad, además de indagar si establecen algún tipo de relación entre los diferentes registros de representación.

UNIVERSIDAD CATOLICA DE ORIENTE
COLEGIO MONSEÑOR ALFONSO URIBE JARAMILLO
Docente: Julián Darío García Henao

Nombre: ____
Nombre: ____
Nombre: ____

ACTIVIDAD N°1

Son muchas las situaciones de la vida en donde se observa que hay un continuo cambio, por eso en esta primera parte, se quiere que desde lo que ustedes conozcan, planté una situación, en donde se observen fenómenos de variación y de cambio.

A partir de situación planteada respondan y justifiquen las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son las magnitudes qué cambian en la situación que planteaste?
2. ¿Podrías definir si hay alguna relación entre las magnitudes y cuál sería?

3. ¿Partiendo de las preguntas 1 y 2 que puedes concluir? ¿crees que una variable puede depender de la otra? Argumenta tu respuesta.
4. ¿Sería posible realizar una gráfica que represente la situación? Argumenta tu respuesta.
5. ¿Sería posible tabular algunos datos con la situación que has elegido. Si tu respuesta es afirmativa toma cuatro datos y crea una tabla con ellos?
6. Con los datos recogidos realiza una gráfica en el plano cartesiano y describe la figura.
7. ¿La figura resultante tiene similitudes que otras qué ya conozcas, si la respuesta es afirmativa argumenta cuáles?
8. A partir de todas las preguntas anteriores ¿sería posible diseñar una función que modela la situación que planteaste inicialmente? Argumenta tu respuesta.
9. ¿Qué puedes concluir de la actividad anterior, crees que puedes tener una mayor información de la situación con los datos obtenidos, la situación que plantaste si cumple con todos los pasos realizados anteriormente?

4.2 GUIA # 2

La segunda actividad se encuentra diseñada bajo la metodología de la modelación matemática, pero en esta ocasión el docente es el que modela, y orienta la situación.

La situación que se desea realizar tiene como motivo el clásico entre nacional y Medellín, el cual se realizará el 31 de agosto de 2012, y se tomó esta situación debido al interés que el futbol despierta en el grado noveno donde se realizará la actividad.

Esta situación costa de dos momentos en el primero se hace una relación entre el número de faltas y el tiempo. El objetivo es que los estudiantes encuentren regularidades y puedan determinar que el número de faltas con respecto al tiempo esta modelado por una función lineal, además se pretenden que utilicen algún método de solución de sistemas de ecuaciones para determinar si las rectas se encuentran en algún momento, finalmente se pretende que se tabulen y se busque una función que modele la situación planteada.

En el segundo momento se pretende que el estudiante relacione la situación con una función cuadrática, además de que pueda relacionar la altura máxima y la distancia que avanza el balón hasta su punto de encuentro con el suelo con los elementos propios de la función cuadrática.

Finalmente se pretende que el estudiante pueda determinar relaciones de variación y de cambio con la situación planteada.

UNIVERSIDAD CATOLICA DE ORIENTE
COLEGIO MONSEÑOR ALFONSO URIBE JARAMILLO
Docente: Julián Darío García Henao

Nombre: ____
Nombre: ____
Nombre: ____

ACTIVIDAD N°2

El Futbol es un juego donde hay dos equipos, cada uno con once jugadores, en éste se utiliza un balón esférico que es pateado por los integrantes del mismo con la finalidad de llegar al arco contrario y hacer un gol. En este juego el único que puede utilizar las manos es el portero, pero a la hora de hacer un saque de meta utiliza el pie para sacar el balón.

Las dimensiones de la cancha son las siguientes, sin embargo, el largo y ancho de la cancha puede variar como se observa en la figura a continuación.

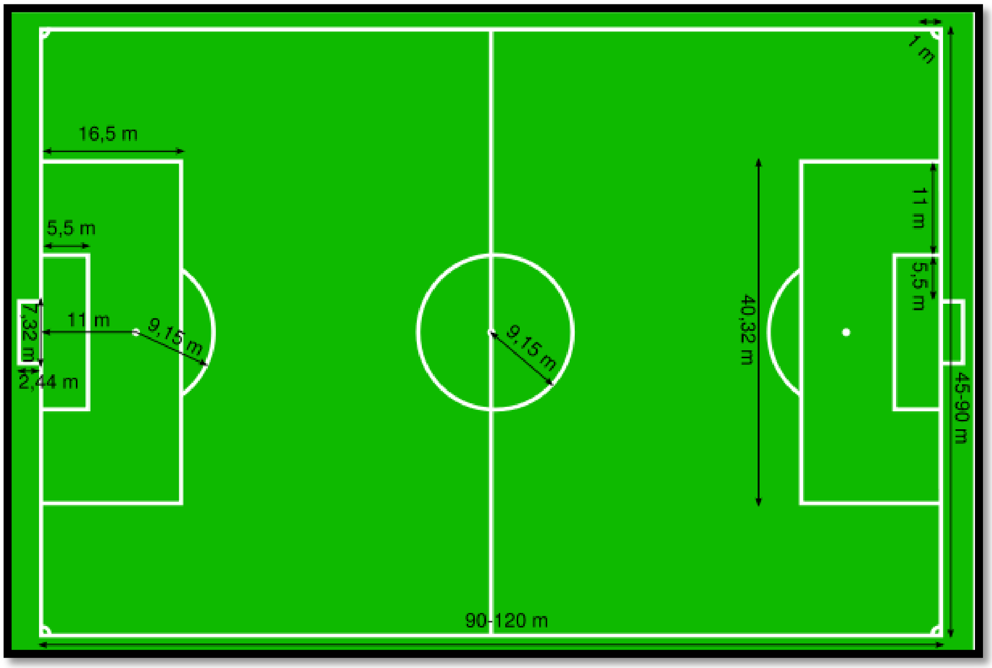


Ilustración 1: Dimensiones cancha de fútbol

1. En Día 31 de agosto del 2012 se jugará el clásico antioqueño de Atlético nacional frente a Deportivo Independiente Medellín, según las estadísticas, se sabe que el atlético nacional realiza una falta cada 5 minutos, y el Medellín realiza 6 faltas cada dos minutos. Si se sabe que el partido dura 94 minutos con el tiempo extra, responde:
   a. ¿cuántas faltas realizan nacional y Medellín en el partido?
   b. ¿Será posible que nacional y Medellín realicen el mismo número de faltas en el partido?
   c. A partir de la información anterior realiza una tabla en donde relaciones el número de faltas y el tiempo y describe que lo que pasa.
   d. Teniendo en cuenta la tabla realizada en el punto anterior realiza dos graficas comparativas con respectos a las faltas que realiza nacional y las que realiza Medellín, escribe la variable dependiente e independiente y justifica tu respuesta. Además, argumenta como hiciste la gráfica.
   e. Partiendo de los puntos anteriores ¿será posible modelar una función para cada uno de los equipos en donde se relacione el número de faltas con respecto al tiempo?
   f. si se sabe que en la primera etapa del campeonato se juegan 18 partidos, cuantas faltas realiza cada uno de los equipos.

Finalmente, que puedes concluir respecto a todas las preguntas anteriores.

2. El partido se encuentra 0 a 0 y la pelota la tiene el portero Castellanos, quien se dispone a realizar un saque de meta se sabe que la trayectoria que tomo el balón se observa en la figura a continuación.

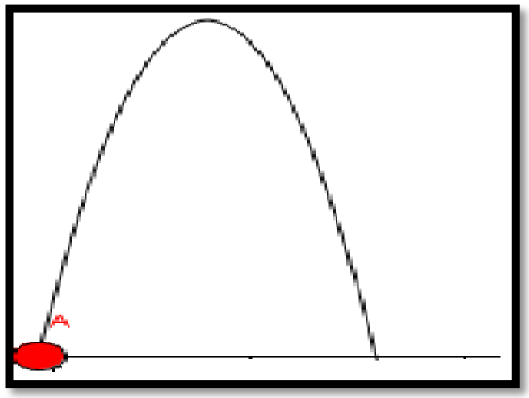


Ilustración 2: Movimiento del balón lanzado por el portero.

a. ¿A qué se te parece la trayectoria que tomo el balón?
b. ¿si se sabe que el movimiento del balón esta guiado bajo la función $f(x) = -0.1x^2 + 8x - 16$, diga la atura máxima que toma el balón y determine cuantos metros avanzo el balón desde la portería del portero Castellanos y cuantos metros le faltan para llegar al arco rival?
c. Si el balón obtiene una altura máxima a los 20 metros después de haber recorrido 5 metros ¿A que distancia caerá el balón con respecto a la portería de Castellanos?
d. Que puedes concluir respecto al movimiento del balón. Argumenta tu respuesta.

4.3 GUIA # 3

Con esta actividad se quiere observar si los estudiantes pueden asociar los diferentes temas que han visto durante el año para la solución de una actividad. Esta actividad no cumple los parámetros de la modelación matemática en donde se quiere partir de una situación real, sin embargo, si es una situación problema en donde los estudiantes deberán pasar por los diferentes registros de representación.

Con esta situación se pretende sobretodo indagar si los estudiantes pueden relacionar los diferentes conceptos que ellos debería saber a lo largo del grado noveno, puesto que, para entender el concepto de función como un modelo matemático debe haber una relación de los registros de representación que es la finalidad con esta situación.

La actividad consta de 7 preguntas. En la primera se pretende que los estudiantes a partir de la tabulación de una función puedan modelar una ecuación, aquí se pretende que los estudiantes a partir de dos puntos hallen la ecuación de la recta y que además grafiquen la función en el plano que se ha inscrito en el mapa, en la pregunta dos se desea que los estudiantes recuerden que cuando dos rectas son perpendiculares es porque el productos de las pendientes es -1, además que encuentren la intersección ya sea por sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas o por otro método, que sería la pregunta 3.

En las preguntas 4,5 y 6 se quiere que a partir de un punto el estudiante llegue a la ecuación de la parábola, es decir mediar entre los diferentes registros especialmente el tabular y el simbólico. Finalmente se pide que se dé una conclusión de la actividad. Con el fin de finalizar con los comentarios de los estudiantes.

EL TESORO DE ARQUIMEDES

Durante años se ha buscado el tesoro escondido de matemático Arquímedes, su historia ha traspasado las décadas, y su tesoro lleno de joyas y de grandes reliquias aun continua sin ser descubierto, han sido muchos los que han querido encontrarlo pero muy pocos los que han podido hallar algo, solo se sabe que se encuentra en la isla de Silicia que se muestra en la figura N°1, lo que algunos pocos han podido descubrir es que se ha Trazado un plano cartesiano que tiene su origen en la ciudad de Setta, además que como todo buen matemático trazo dos rectas y una parábola que darían el punto exacto de la ciudad donde se encuentra el tesoro.

Ilustración 3: Mapa parte inferior de Italia

No son muchas las pistas que se tienen del mismo, algunas personas consideran que este tesoro es un mito pero hay algunos que mantiene su ilusión y esperan poder descubrir el misterio, más cuando saben que deben buscar 2 rectas y una parábola.

En la década de los cuarenta un arqueólogos encontró en uno de los libros que aún se conservan de Arquímedes una tabla que parecía insignificante pero que él considero que esa sería algunos de los puntos de una de las rectas del tesoro escondido, la tabla era la siguiente:

x	F(x)
-2	3.18
-1	2.58
1	1.38
2	0.78

En esta se ven algunos puntos, pero nadie ha podido descubrir cuál es la función de la recta que pasa por estos, años más tarde un matemático dedicado al estudio de la vida y obra de Arquímedes encontró el siguiente enunciado “quien quiera mi sabiduría deberá saber, que solo por un punto perpendicular a la recta desconocida pasará la que os dará el nombre de la ciudad donde podréis encontrar lo andas buscando”.

Este matemático supo percibir este fragmento y lo asocio con su tesoro, no lo estaba buscando pero su interés crecía por saber que magnificas cosas podrían existir en el tesoro de tan maravilloso ser, sin embargo, nunca pudo encontrar los datos de la recta y aunque busco y busco nunca pudo encontrar nada a su alrededor. Solo encontró que en gran parte de los documentos de Arquímedes aparecía el número -2,02 ¿sería este un número de la recta perpendicular? ¿Acaso este sería la constante de la recta? El misterio seguía rondando por su cabeza.

Lo último que se supo de este magnífico misterio es que por el punto de intersección de las dos rectas perpendiculares pasa una parábola que tiene como vértice y como punto mínimo la intersección de las dos rectas, igualmente que desde la capilla de la ciudad deberá andar tantos metros a izquierda o derecha como lo diga el número que acompaña a la x en la función de la parábola, y que caminara tantos metros hacia el norte o hacia el sur como lo diga el último número que en la función de la parábola llamamos c.

Esperando solucionar por fin el misterio les doy esta carta con todo lo que se ha encontrado acerca del mismo, esperando que usted pueda solucionar el misterio. Para lograrlo te hago algunas preguntas que orientaran su solución.

1. ¿Cuál es la función de la primera recta? Justifica tu respuesta.
2. ¿Cuál es el valor de la segunda recta? Y ¿cuál es el punto de intersección? Justifica tu respuesta.
3. ¿En qué ciudad se encuentra escondido el tesoro de Arquímedes? Justifica tu respuesta
4. ¿Cuántos metros le toco avanzar a derecha o izquierda para hallar el punto exacto del tesoro?
5. ¿Cuántos metros ando hacia el norte y hacia o hacia el sur?
6. De acuerdo con la pregunta 4 y 5 podrías decir ¿cuál es la ecuación de la parábola?
7. ¿Qué puedes concluir de la actividad anterior?

Capítulo 5

---

5. CATEGORIAS EMERGENTES

Las categorías que se presentan a continuación surgen del análisis de la información recogida a lo largo del proceso de investigación, como resultado de las interacciones de los autores trabajados, lo realizado por los estudiantes y la voz del autor de este trabajo.

5.1 LAS RELACIONES QUE SE ESTABLECEN ENTRE LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN CUANDO SE ABORDAN SITUACIONES QUE INVOLUCRAN EL CONCEPTO DE FUNCIÓN.

Al realizar las tres situaciones se puede notar que los 28 estudiantes presentan diversos procesos de pensamiento en los que se observan algunas similitudes, sin embargo se puede evidenciar que muchos de estos estudiantes no reconocen modelos, dado que en las situaciones planteadas algunos educandos no asociaban los diferentes registros de representación como elementos de una misma función uno de los motivos de que esto suceda puede ser la enseñanza desfragmentada de los contenidos, entendiéndose así cada elemento de las matemáticas como un elemento independiente del otro.

En el caso particular de los tres instrumentos realizados se observa que hay una mayor interpretación de la función lineal, que de la cuadrática, dado que como se observa en la actividad número 2 y 3, los estudiantes asociaron mejor los registros de representación cuando se trabajaba la función lineal.

Un claro ejemplo se observa en la Guía # 2   en el punto 2.b en el cual, se pedía a los estudiantes que encontrara la altura máxima del balón, resumiéndose esto, a simplemente hallar el vértice de la parábola dada su ecuación, puesto que se daba una ecuación negativa que por ende tiene un punto máximo, algo que ya habían realizado con mucha frecuencia, pero solo 9 de los 28 estudiantes pudieron asociarlo al vértice de la parábola y por ende realizarlo adecuadamente.

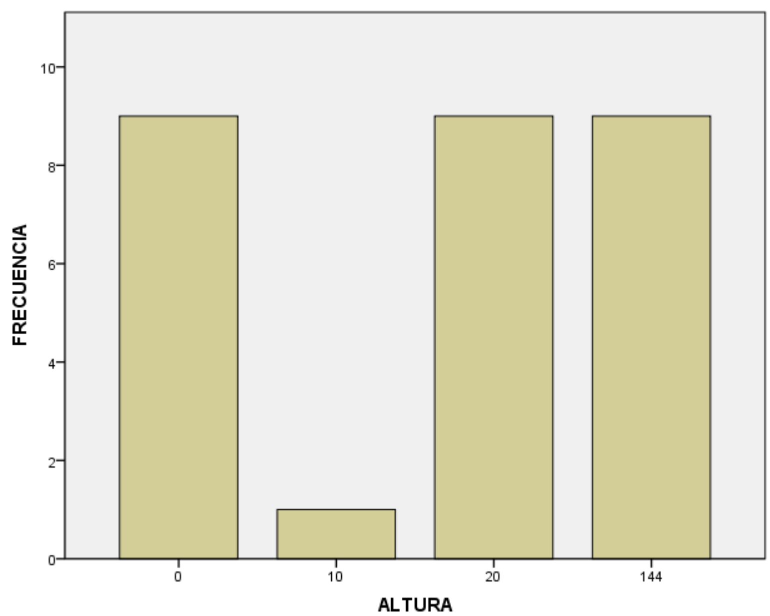
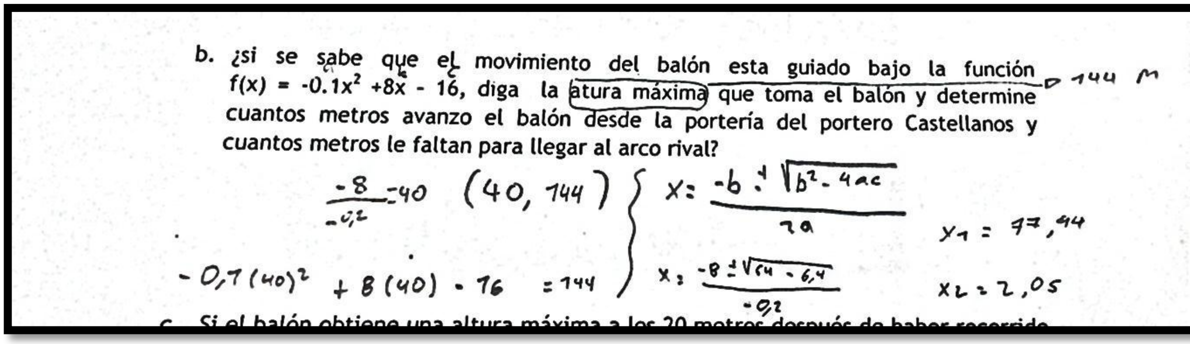


Ilustración 4: Resultados de los estudiantes al buscar la altura máxima del balón

Los estudiantes que colocaron como altura máxima 0 son aquellos que no realizaron nada en este punto, los que dijeron 20 metros lo asociaron con una de las preguntas en donde se decía que esta era la altura máxima, y los que escribieron 144 metros encontraron la altura máxima por medio de $(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$ como se observa en algunos de los trabajos a continuación:



b. ¿si se sabe que el movimiento del balón esta guiado bajo la función $f(x) = -0.1x^2 + 8x - 16$, diga la atura máxima que toma el balón y determine cuantos metros avanzo el balón desde la portería del portero Castellanos y cuantos metros le faltan para llegar al arco rival? → 144 m

$\frac{-8}{-0{,}2} = 40$ (40, 144)

$-0{,}1(40)^2 + 8(40) - 16 = 144$

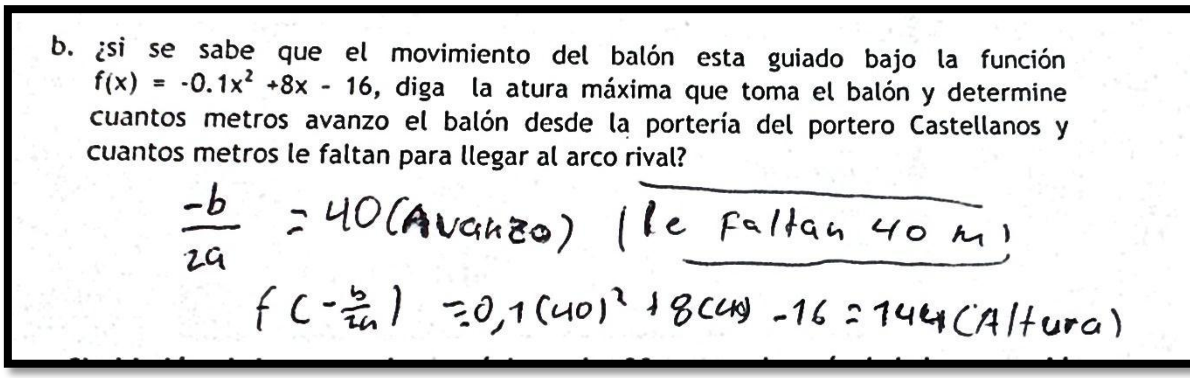
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 6{,}4}}{-0{,}2}$

$x_1 = 77{,}94$

$x_2 = 2{,}05$

Ilustración 5: Estrategia para encontrar la altura máxima del balón.



b. ¿si se sabe que el movimiento del balón esta guiado bajo la función $f(x) = -0.1x^2 + 8x - 16$, diga la atura máxima que toma el balón y determine cuantos metros avanzo el balón desde la portería del portero Castellanos y cuantos metros le faltan para llegar al arco rival?

$\frac{-b}{2a} = 40$ (Avanzo) (le faltan 40 m)

$f(-\frac{b}{2a}) = 0{,}1(40)^2 + 8(40) - 16 = 144$ (Altura)

Ilustración 6: Estrategia para encontrar la altura máxima del balón.

Sin embargo, y a pesar de que la gran mayoría no pueden asociar los algoritmos que ya conocen a los problemas planteados es decir para ellos son algoritmos sumisos, como lo expresa Fernández (2005) cuando habla que éstos son aquellos que se desarrollan pero no se comprenden los elementos matemáticos que intervienen en su solución, se observa que algunos estudiantes si encuentran elementos significativos aplicados y eso se evidencia en los nueve estudiantes que pudieron hallar la altura máxima.

Es decir los estudiantes que respondieron acertadamente tuvieron varios procesos, primero que todo asociaron la ecuación a una parábola que abría hacia abajo y que tenía un punto máximo en la situación, es decir y como lo expresa Azcárate & Deuloffu (1996) cuando se parte de la formula, puede haber una interpretación de la descripción verbal, en este caso del enunciado del movimiento del balón, además de una gráfica que en el caso del problema sería el movimiento parabólico del balón.

Cuando se tiene claro lo anterior se puede realizar la gráfica, que en este caso tiene una característica y es que era negativa es decir que abría hacia abajo y por ende no iba a tener punto mínimo sino máximo. Como se puede observar en la figura a continuación, en donde uno de los estudiantes interpreto con la gráfica los diferentes elementos que se pedían en la situación.

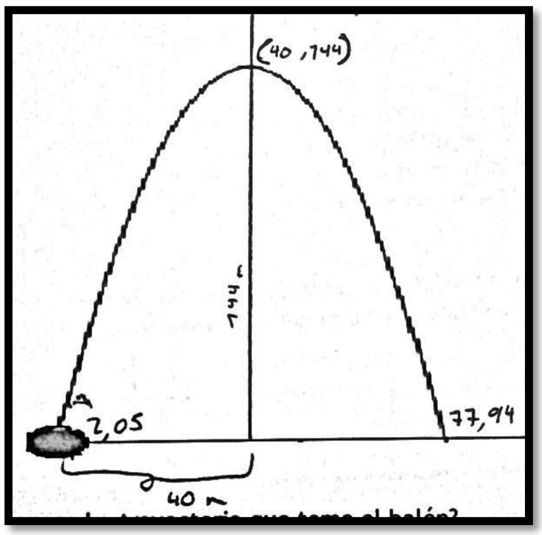


Ilustración 7: Análisis gráfico de la situación planteada.

Sin embargo, para hallar la altura máxima y el recorrido del balón, los estudiantes recurrieron a la ecuación más que a la gráfica, ya que estos contaban con elementos previos que le permitían hacerlo con mayor facilidad, asociándolo igualmente con la gráfica.

En este sentido Azcárate & Deuloffu (1996) expresan que "la gráfica permite <<ver>> las características globales de la función (variaciones y periodos constantes, crecimiento, continuidad, máximos y mínimos) también determinables a partir de la ecuación (cuando es posible establecerla a partir de métodos elementales)" (pág. 62)

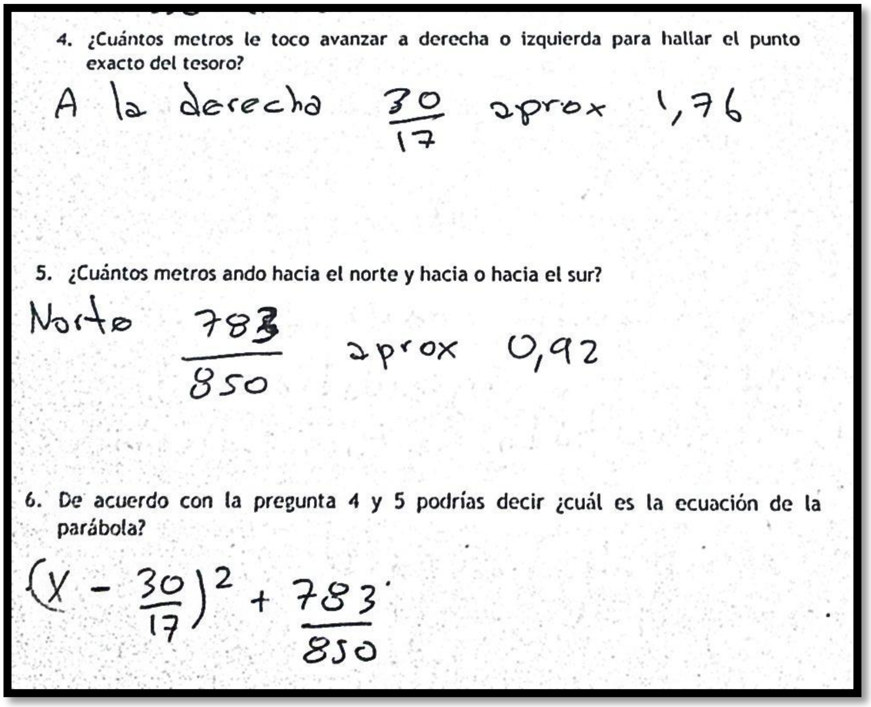
En este sentido se debe tener claro que aunque los estudiantes tenían la gráfica para su interpretación ellos recurrieron a las ecuaciones que conocían para solucionar la actividad, es decir tenían un mayor nivel de abstracción y de comprensión que se ha logrado a lo largo del estudio de las funciones, sin dejar de lado la interpretación que les da una gráfica , asimismo, se debe resaltar que estas ecuaciones no pueden ser consideradas como algoritmos sumisos puesto los estudiantes tuvieron un análisis y un razonamiento acorde a lo que buscaban, a tal medida que ellos interpretaron un enunciado y lo asociaron con una ecuación para finalmente llegar a unos resultados.

Es decir estos nueve estudiantes se estaban acercando a una interpretación más elaborada del concepto de función que es la que Posada & Villa (2006) llaman como un modelo matemático que es en donde se tiene presente la variación y el cambio.

Por su parte en la guía # 3 en la pregunta número 6 en donde se pide que se halle la ecuación de la parábola dado el vértice se tiene que solo 7 alumnos respondieron, 1 respondió incorrectamente y el resto no mostro ningún resultado.

Además es de resaltar que los siete estudiantes que respondieron acertadamente hacían parte de los nueve que respondieron adecuadamente las situaciones anteriores. Es decir, se observa que a pesar de las diversas situaciones ellos continuaban teniendo buenos razonamientos, y continuaban asociando los diversos registros de representación.

A continuación se muestran algunos ejemplos de los estudiantes que respondieron acertadamente la pregunta en cuestión.



4. ¿Cuántos metros le toco avanzar a derecha o izquierda para hallar el punto exacto del tesoro?

A la derecha $\frac{30}{17}$ aprox 1,76

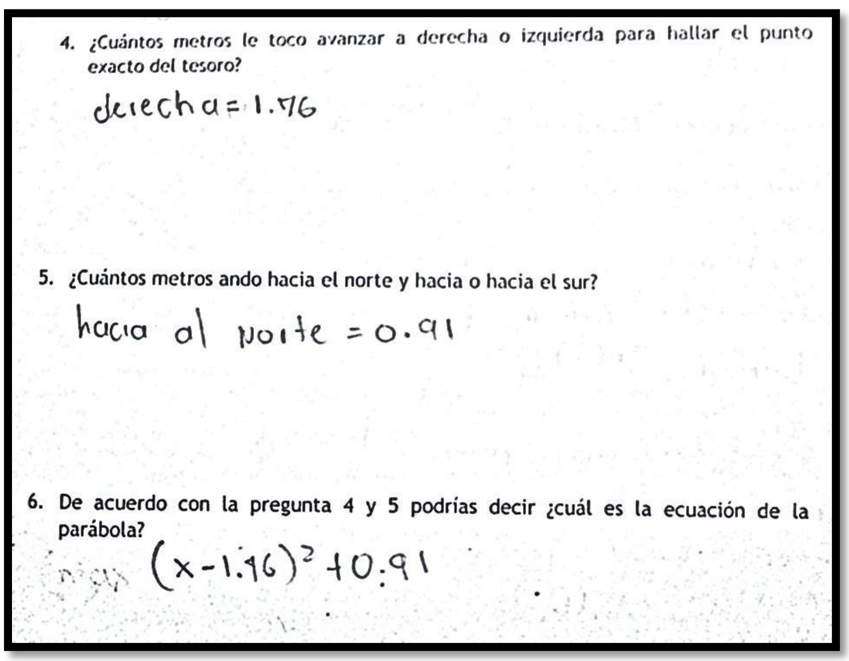
5. ¿Cuántos metros ando hacia el norte y hacia o hacia el sur?

Norte $\frac{783}{850}$ aprox 0,92

6. De acuerdo con la pregunta 4 y 5 podrías decir ¿cuál es la ecuación de la parábola?

$\left(x - \frac{30}{17}\right)^2 + \frac{783}{850}$

Ilustración 8: Estrategias para hallar la ecuación de una parábola.



4. ¿Cuántos metros le toco avanzar a derecha o izquierda para hallar el punto exacto del tesoro?

derecha = 1.76

5. ¿Cuántos metros ando hacia el norte y hacia o hacia el sur?

hacia al norte = 0.91

6. De acuerdo con la pregunta 4 y 5 podrías decir ¿cuál es la ecuación de la parábola?

$(x-1.76)^2+0.91$

Ilustración 9: Estrategias para hallar la ecuación de una parábola.

En estas respuestas se observa que los estudiantes no llegaron a la ecuación general de la parábola, ya que no se realizó el producto notable que aparece en la expresión, pero al indagar con ellos el porqué de esta respuesta, se evidencio que ellos recordaban que de esta forma se hallaba el vértice, máximos y mínimos, eje de simetría, y según ellos revirtiendo el proceso hallarían la ecuación.

A partir de esto se puede evidenciar, como los estudiantes presentan muchas dificultades para interpretar la representación algebraica en una función cuadrática, puesto que solo ¼ de los estudiantes tuvieron respuestas acertadas, esto entra en concordancia con lo que dicen Azcárate & Deuloffu (1996) quienes comentan que la obtención de modelos en general como la ecuación que expresa la relación funcional presenta importantes dificultades, pues es en estas donde se debe abstraer lo esencial de aquella función.

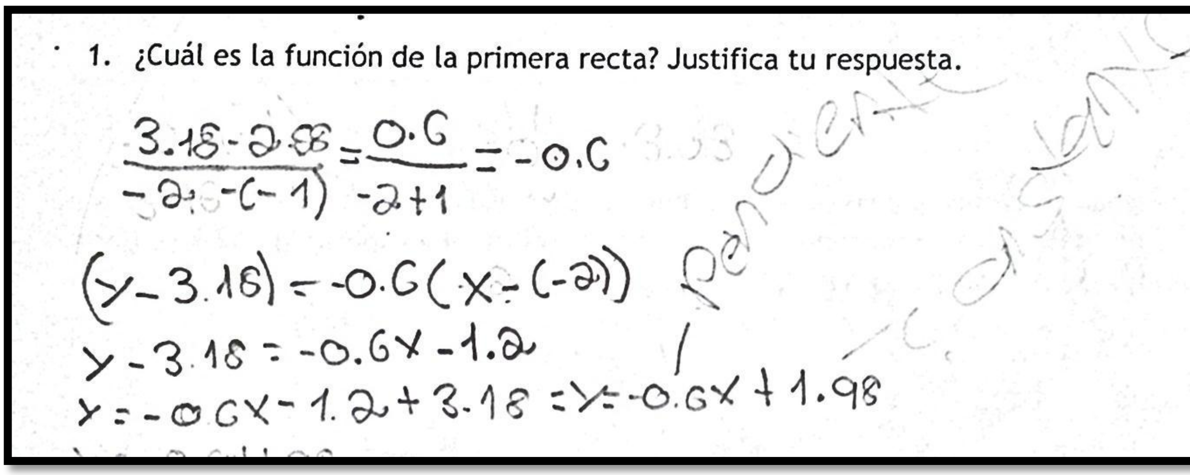
Sin embargo es interesante saber que para poder llegar a esta respuesta los estudiantes tuvieron que haber realizado primero un proceso en donde se requería que los ellos aplicaran conceptos de la función lineal y es aquí donde se evidencia que los estudiantes tienen un mejor manejo de ésta, puesto que 19 de los 28 estudiantes encontraron los puntos que se requerían en las preguntas 4 y 5, pero solo 7 pudieron pasar de una representación tabular a una representación algebraica, cuando se trabajó la función cuadrática, es decir no hay una interrelación de los diferentes registros de representación de la función, por lo tanto no hay una comprensión total del mismo.

Es decir los estudiantes pueden relacionar los registros de representación más fácilmente cuando se realizan situaciones que involucran la función lineal, como se observa en las imágenes a continuación:

Cuando se presentó en la actividad 3 la siguiente tabla los estudiantes pudieron pasar de la representación tabular a la representación algebraica, asociando así elementos vistos durante el año a la actividad a resolver.

x	F(x)
-2	3.18
-1	2.58
1	1.38
2	0.78

Cuando a los estudiantes se les dijo que esta tabla de datos hacían parte de recta, ellos pudieron recordar como hallar la ecuación de la recta dada dos puntos, así en el enunciado de la situación no apareciera implícito que eso lo debía desarrollar como se muestra en las siguientes imágenes:



1. ¿Cuál es la función de la primera recta? Justifica tu respuesta.

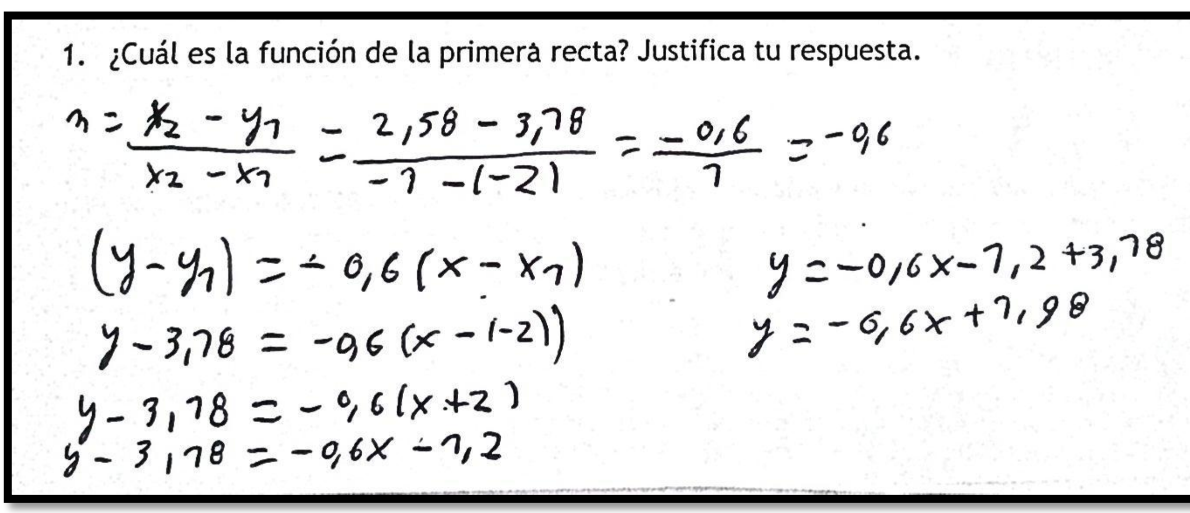
$$\frac{3.18-2.58}{-2-(-1)}=\frac{0.6}{-2+1}=-0.6$$

$$(y-3.18)=-0.6(x-(-2))$$

$$y-3.18=-0.6x-1.2$$

$$y=-0.6x-1.2+3.18=y=-0.6x+1.98$$

Ilustración 10: Estrategias para hallar la ecuación de la recta dados dos puntos.



1. ¿Cuál es la función de la primera recta? Justifica tu respuesta.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2,58-3,18}{-1-(-2)}=\frac{-0,6}{1}=-0,6$$

$$(y-y_1)=-0,6(x-x_1)$$

$$y-3,18=-0,6(x-(-2))$$

$$y-3,18=-0,6(x+2)$$

$$y-3,18=-0,6x-1,2$$

$$y=-0,6x-1,2+3,18$$

$$y=-0,6x+1,98$$

Ilustración 11: Estrategias para hallar la ecuación de la recta dado dos puntos.

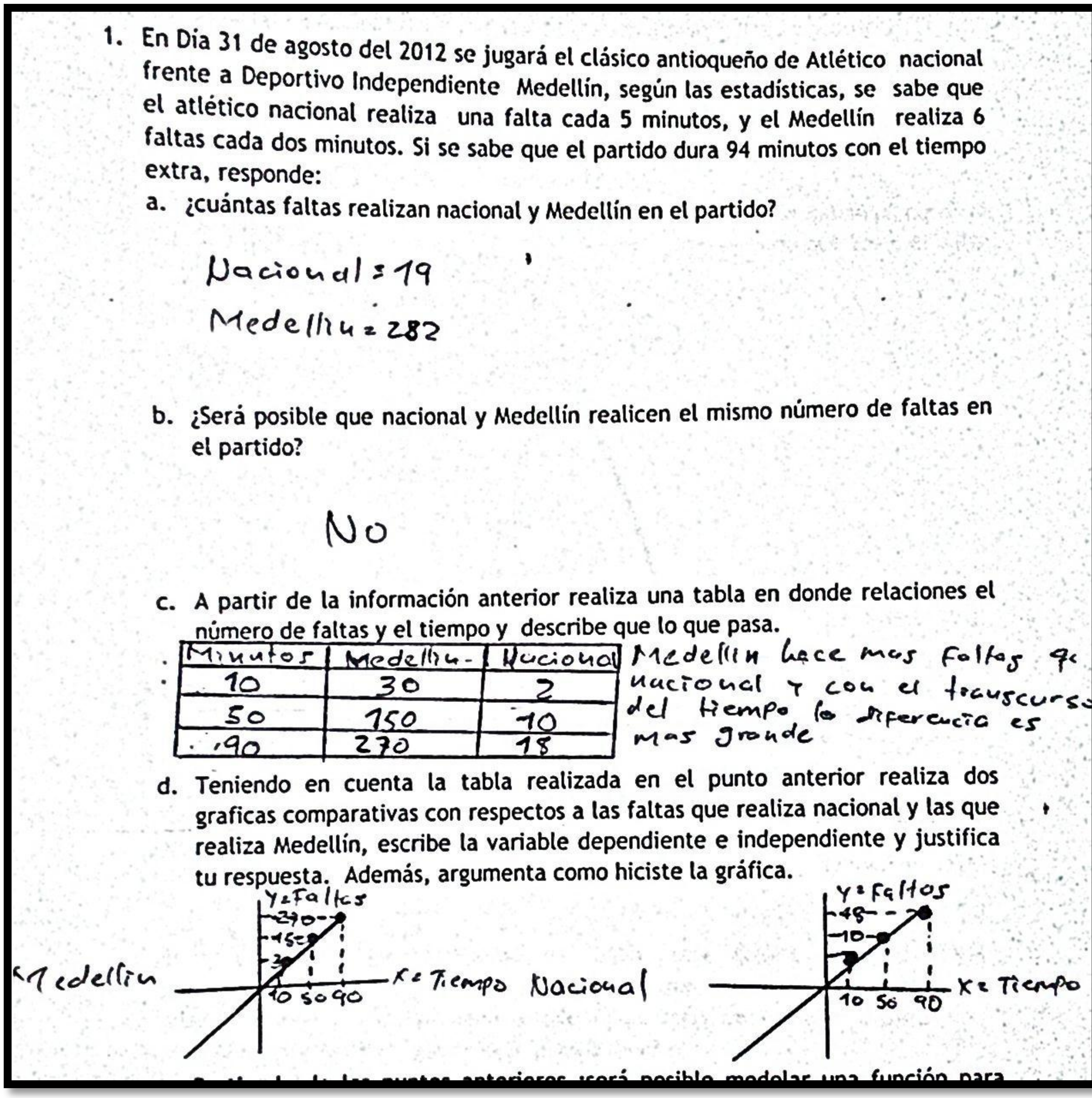
Es muy interesante ver como los estudiantes pueden retomar sus conocimientos previos, para solucionar nuevas situaciones lo que hace ver cierto grado de comprensión de los temas antes vistos.

Pero asimismo se evidencia en la actividad 2 como los estudiantes en situaciones que interviene una función lineal, pueden pasar del lenguaje natural al tabular con facilidad pero presentan mayor dificultad cuando van a realizar el gráfico.

Es interesante saber que todos los estudiantes resolvieron adecuadamente los puntos 1.a, 1.b y 1.c, sin embargo a la hora de realizar la gráfica muchos no la realizaron adecuadamente en el mayor de los casos realizaban escalas que no se encontraban acordes, ya que no mantenían ninguna regularidad.

Muchos utilizaron regla de tres para resolver la pregunta 1.a, es decir los estudiantes se apropiaron de conocimientos previos para su solución, sin embargo al indagar con ellos qué relación tenía la función lineal con una regla de proporcionalidad, en este caso directa, no supieron dar una respuesta . es decir, no tenían conocimiento de que cuando se habla de una regla de proporcionalidad se está hablando de una función lineal, dado que para ellos es muy difícil reconocer patrones y modelos, sino se le ha hecho una introducción del tema con anterioridad.

En la figura a continuación se observa como el estudiante responde correctamente las primeras preguntas, así en algunas de ellas no se evidencie el proceso, pero se puede ver como en la gráfica el estudiante realiza dos graficas iguales sin tener en cuenta primero la escala con la cual iba a realizarla y segundo que la pendiente de la recta que correspondía a las faltas del Medellín era mucho mayor que la de los hinchas del Nacional, a pesar de que lo expresa verbalmente en un punto anterior. Esto muestra una falta de interpretación de las mismas, puesto que, no hay una asociación del lenguaje natural y del registro tabular con la gráfica.



1. En Día 31 de agosto del 2012 se jugará el clásico antioqueño de Atlético nacional frente a Deportivo Independiente Medellín, según las estadísticas, se sabe que el atlético nacional realiza una falta cada 5 minutos, y el Medellín realiza 6 faltas cada dos minutos. Si se sabe que el partido dura 94 minutos con el tiempo extra, responde:

a. ¿cuántas faltas realizan nacional y Medellín en el partido?

Nacional = 19

Medellín = 282

b. ¿Será posible que nacional y Medellín realicen el mismo número de faltas en el partido?

No

c. A partir de la información anterior realiza una tabla en donde relaciones el número de faltas y el tiempo y describe que lo que pasa.

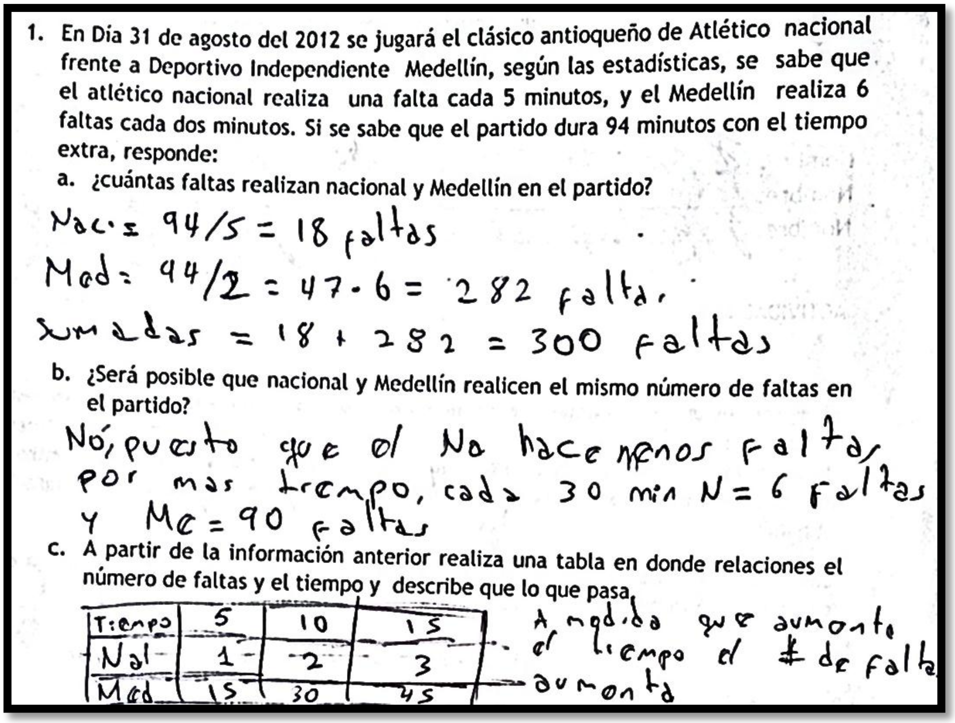
Minutos	Medellín	Nacional
10	30	2
50	150	10
90	270	18

Medellín hace mas faltas que nacional y con el trascurso del tiempo la diferencia es mas grande

d. Teniendo en cuenta la tabla realizada en el punto anterior realiza dos graficas comparativas con respectos a las faltas que realiza nacional y las que realiza Medellín, escribe la variable dependiente e independiente y justifica tu respuesta. Además, argumenta como hiciste la gráfica.

Ilustración 12: Uso de los diferentes registros de representación

A continuación se presenta el trabajo de uno de los pocos estudiantes que interpreto los diferentes registros de representación y los relaciono entre sí para poder culminar con el modelo matemático que pedía la actividad.



1. En Día 31 de agosto del 2012 se jugará el clásico antioqueño de Atlético nacional frente a Deportivo Independiente Medellín, según las estadísticas, se sabe que el atlético nacional realiza una falta cada 5 minutos, y el Medellín realiza 6 faltas cada dos minutos. Si se sabe que el partido dura 94 minutos con el tiempo extra, responde:

a. ¿cuántas faltas realizan nacional y Medellín en el partido?

Nac: 94/5 = 18 faltas

Med: 94/2 = 47·6 = 282 falta.

sumadas = 18 + 282 = 300 faltas

b. ¿Será posible que nacional y Medellín realicen el mismo número de faltas en el partido?

Nó, puesto que el Na hace menos falta, por mas tiempo, cada 30 min N = 6 faltas y Me = 90 faltas

c. A partir de la información anterior realiza una tabla en donde relaciones el número de faltas y el tiempo y describe que lo que pasa.

Tiempo	5	10	15
Nal	1	2	3
Med	15	30	45

A medida que aumenta el tiempo el # de falta aumenta

Ilustración 13: Relación entre los registros de representación

En el caso del estudiante de la figura reconoce además una regularidad y es la de decir que a medida que pasa el tiempo aumentan las faltas, asimismo en una pregunta posterior es capaz de justificar que el número de faltas depende del tiempo, lo que hace ver en él un mayor análisis de la situación lo que se evidencia en la gráfica que realiza y en las ecuaciones que presenta.

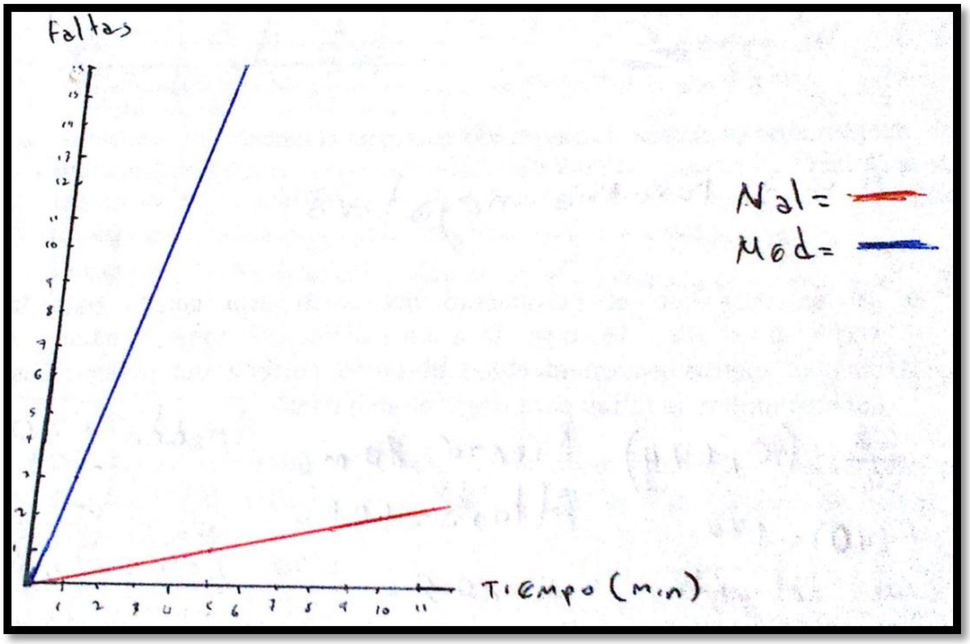
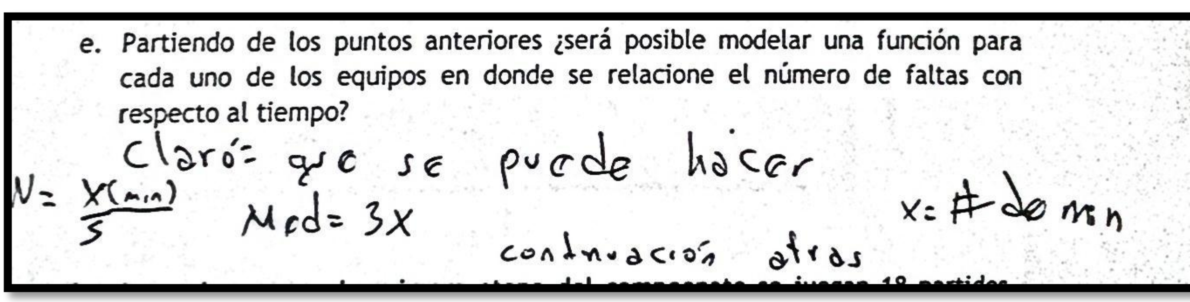


Ilustración 14: Uso del plano cartesiano y su relación con la tabla de datos.

Además puede llegar a un modelo matemático que representa el número de faltas en función del tiempo, pero para comprobar que este si está bien modelado toma unos puntos de la tabla que realizó y halla la ecuación de la recta dado dos puntos, es decir tiene muchos elementos para poder fundamentar lo que realiza.

En este caso los algoritmos que realiza el estudiante pueden ser considerados como innovadores, sin embargo y es de resaltar que el estudiante tiene la capacidad de aplicar ecuaciones que conoce para verificar el resultado.



e. Partiendo de los puntos anteriores ¿será posible modelar una función para cada uno de los equipos en donde se relacione el número de faltas con respecto al tiempo?

Claró: que se puede hacer

$N= \frac{X(min)}{5}$ Mod= 3X x: # de min

continuación otras

Ilustración 15: Modelación del número de faltas con respecto al tiempo

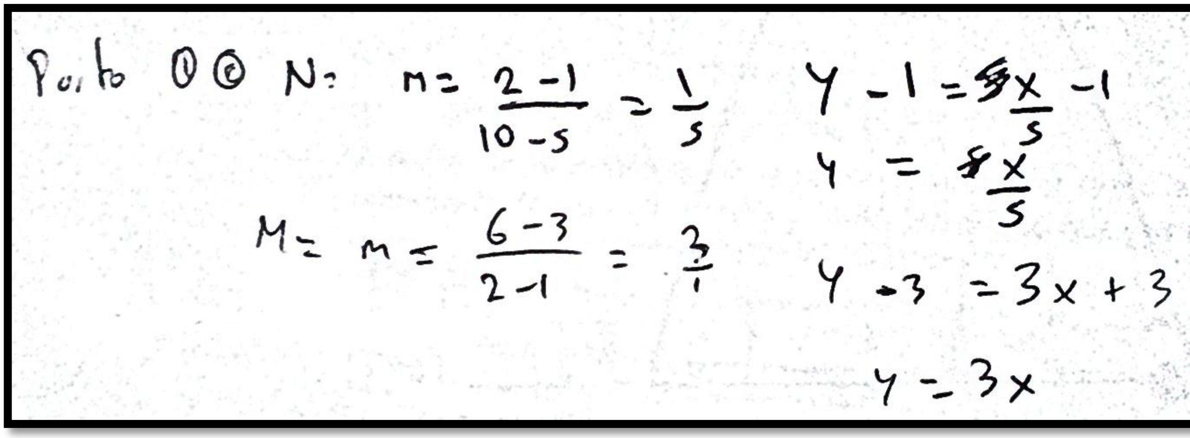


Ilustración 16: comprobación del modelo diseñado

Además el estudiante realiza lo que plantea Azcárate & Deuloffu (1996) cuando habla de las posibles traducciones que se pueden hacer de los registros de representación, cuando se parte de la descripción.

Igualmente en el desarrollo de la actividad el estudiante tiene muy presente la variación y el cambio dentro de la situación lo que hacer ver que el estudiante entiende la función como un modelo matemático.

Además es de resaltar que solo cuatro estudiantes pudieron lograr obtener el modelo de la situación, lo que evidencia una gran dificultad para llegar a la representación algebraica es el que mayor grado de abstracción pose.

Finalmente desde este análisis que se hace de los trabajos de los estudiantes se observa que son muy pocos los estudiantes que pueden modelar situaciones relacionadas con funciones esto debido a que son sólo algunos los estudiantes que relacionan los registros de representación, sin embargo se nota en estos que alcanzaron hacerlo unos grados de abstracción y de comprensión muy elaborados.

5.2 LA MODELACIÓN MATEMÁTICA UN ELEMENTO POTENCIALIZADOR E INTEGRADOR DE LOS DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTACIÓN PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN COMO MODELO MATEMÁTICO.

Al implementar las dos primeras actividades las cuales se desarrollaron bajo el enfoque de la modelación matemática., se ha evidenciado que los estudiantes estuvieron más activos y receptivos, según ellos porque era un trabajo en donde ellos tenían más participación era más cercano a su realidad y era guiado o particionado para una mejor comprensión.

A continuación se muestran algunos comentarios de los estudiantes cuando respondieron la pregunta sobre que conclusión tenían de la actividad, en esta 11 de los 28 estudiantes tuvieron comentarios muy similares a los presentados a continuación:

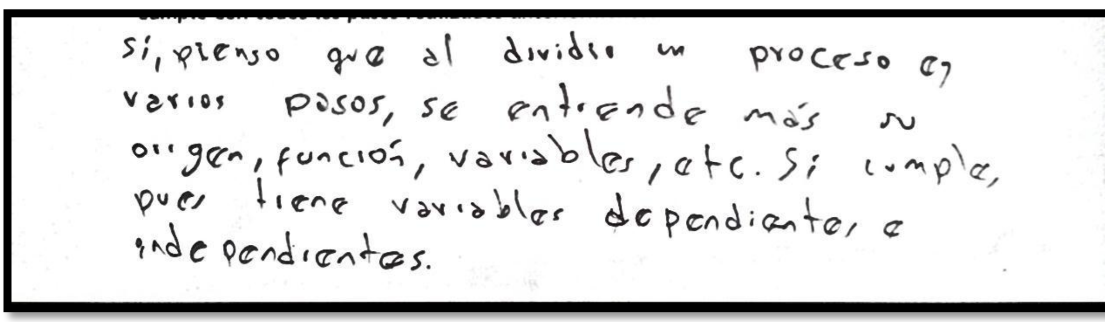

si, pienso que al dividir un proceso en varios pasos, se entiende más su origen, función, variables, etc. Si cumple, pues tiene variables dependiente, e independientes.

Ilustración 17: Análisis de los estudiantes respecto a las estrategias de enseñanza.

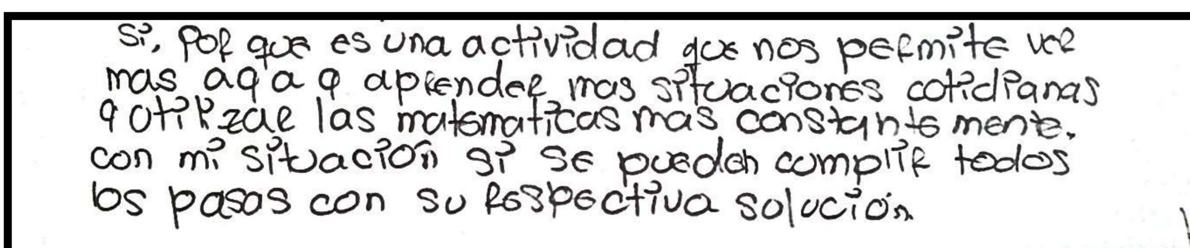

Si, por que es una actividad que nos permite ver mas aqa a q aprender mas situaciones cotidianas q utilizar las matematicas mas constantemente. con mi situación si se pueden cumplir todos los pasos con su respectiva solución

Ilustración 18: Análisis de los estudiantes respecto a las estrategias de enseñanza.

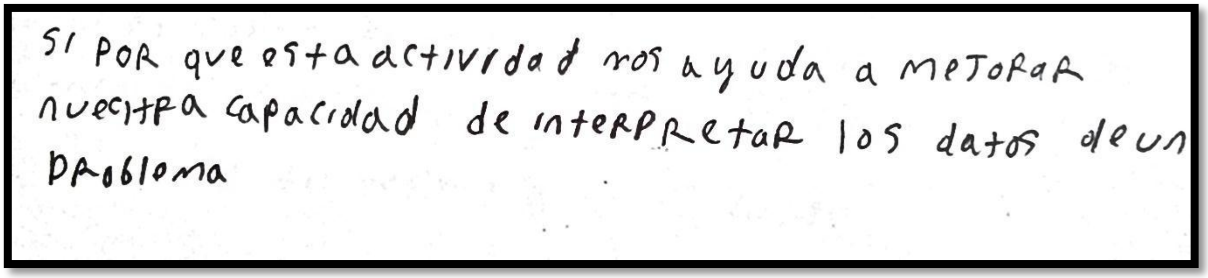

si por que esta actividad nos ayuda a mejorar nuectra capacidad de interpretar los datos deun problema

Ilustración 19: Análisis de los estudiantes respecto a las estrategias de enseñanza.

Como se observa en las figuras 14, 15, 16 todas tienen algo en común todos concuerdan que al desarrollar la actividad por medio de preguntas orientadoras se tiene un mejor discernimiento de los conceptos, además que permite tener una mejor comprensión de los elementos que intervienen en el problema. Como lo expresa Munera (2011, pág. 181) *“Las situaciones problema dinamizan la actividad del estudiante y orientan su manera de pensar respecto a las actividades planteadas y los conceptos implícitos en las mismas”,* es decir, permiten que ellos desarrollen procesos de comprensión más significativos.

En el caso del estudiante de la figura 14. Es interesante observar que expresa, que con la orientación de la situación puede entender mejor el concepto de función y de variable.

Al confrontarlo y preguntarle que entiende él por variable responde que es “*algo que puede cambiar en cualquier momento”,* es decir, el estudiante está expresando lo que el MEN dice sobre la variación y es que la mayoría de situaciones de variación y cambio de la vida diaria involucran de manera explícita la consideración de tiempo, en otras palabras, habla de situaciones de cambio con respecto al tiempo.

Otra respuesta interesante fue la otorgada por el estudiante de la figura 16. Puesto que habla de algo muy importante y es que por medio de la modelación matemática, y en especial con la situación planteada, puede ayudar en la capacidad de interpretar datos en un problema, según el estudiante porque *“Si* *sinceramente Si por que nos ayudó a descomponer el problema, Y a entenderlo mejor”* y agrega *“Pero no si, Nos ayuda a saber las partes de un problema y como solucionarlo”*

En la figura 15. Se observa como la estudiante habla de la relación que se encuentra entre la actividad planteada con la vida diaria, es decir se cumple uno de los principales ideales de la modelación matemática y es el del crear experiencias que sean cercanos a la realidad de los educandos.

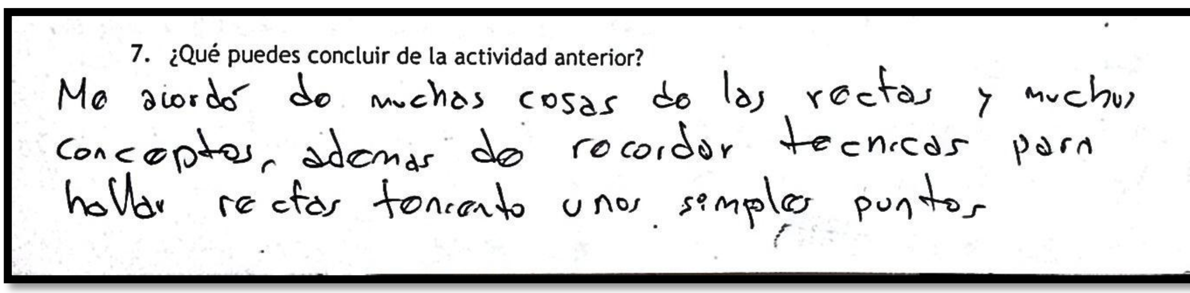
En la primera parte de la actividad 1. se evidenció que al darle la posibilidad de que ellos eligieran la situación, y aunque fue difícil en primera instancia, evidenciado en que muchos quisieron entregar inmediatamente, dado que no se les ocurría nada, en gran medida porque ya se encuentran estereotipados con un tipo de problemas y ejercicios en el cual ellos no tienen que pensar en la situación sino que simplemente deben desarrollarla y en muchos de los casos sin analizar, simplemente solucionando ecuaciones que se han aprendido en el aula de clases.

Es decir, los estudiantes cuando ven funciones matemáticas, lo ven a partir de algoritmos sumisos, ya que estos no son elaborados por sí mismos, sino que son ecuaciones y algoritmos que se les imponen, diciéndoles cómo deben ser realizados, lo que en muchos de los casos, ocasiona que lo que se enseña, no sea lo más atractivo y por ende no sea significativo, causando un aprendizaje momentáneo pero no duradero, lo que se evidencia en muchos de los trabajos de los estudiantes, en donde, no podían asociar nada de lo visto durante el año escolar a dichas actividades.

Con la actividad 1 los estudiantes pudieron encontrar muchas situaciones de cambio y no enfocadas a las matemáticas sino a sus gustos, es decir, aquellos que tiene una mayor afinidad con la biología encontraron en el proceso de metamorfosis del gusano a la mariposa una relación de variación y de cambio, otros por el contrario tomaron automóviles, trenes y aviones, y otros retomaron elementos de la actualidad como es el aumento del precio de la gasolina.

Por su parte en la segunda actividad los estudiantes no pensaron en la situación sin embargo, continuaba con la misma dinámica de la actividad anterior, en esta se involucraron nuevos elementos ya que se preparó para el trabajo de solo dos funciones la lineal y la cuadrática.

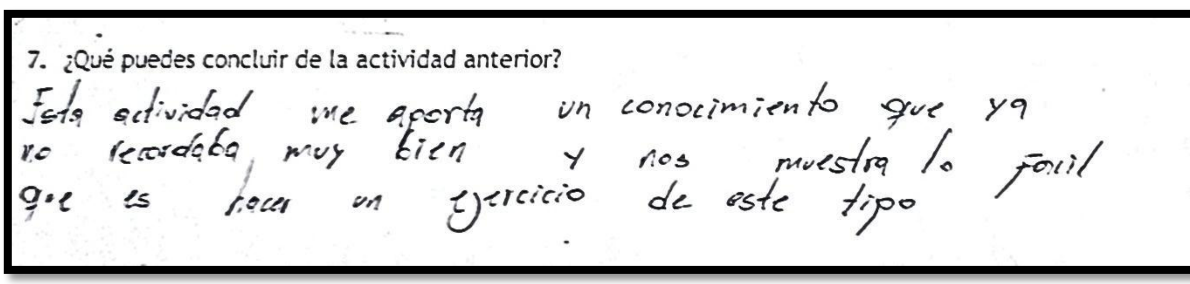
Respecto a la actividad 3 a pasar de que fue una historia ficticia los estudiantes se adentraron mucho en ella intentando encontrar su solución, los educandos al realizar la actividad tuvieron que aplicar todo lo que habían visto durante al año escolar, lo que para ellos fue muy significativo como se observa en las imágenes a continuación:



7. ¿Qué puedes concluir de la actividad anterior?

Me acordó de muchos cosas de las rectas y muchos conceptos, ademas de recordar tecnicas para hallar rectas tomando unos simples puntos

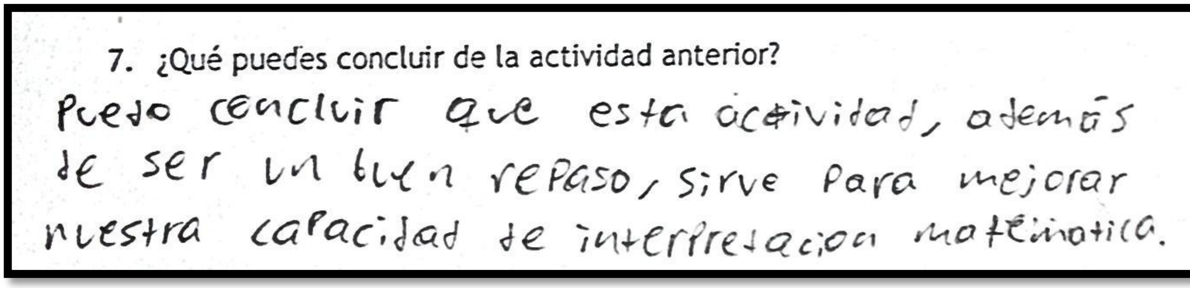
Ilustración 20: Consideraciones sobre las actividades planteadas



7. ¿Qué puedes concluir de la actividad anterior?

Esta actividad me aporta un conocimiento que ya no recordaba muy bien y nos muestra lo facil que es hacer un ejercicio de este tipo

Ilustración 21: Consideraciones sobre las actividades planteadas

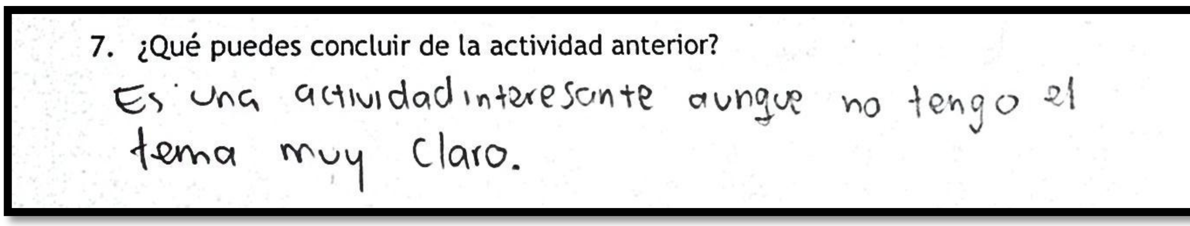


7. ¿Qué puedes concluir de la actividad anterior?

Puedo concluir que esta actividad, además de ser un buen repaso, sirve para mejorar nuestra capacidad de interpretación matemática.

Ilustración 22: Consideraciones sobre las actividades planteadas

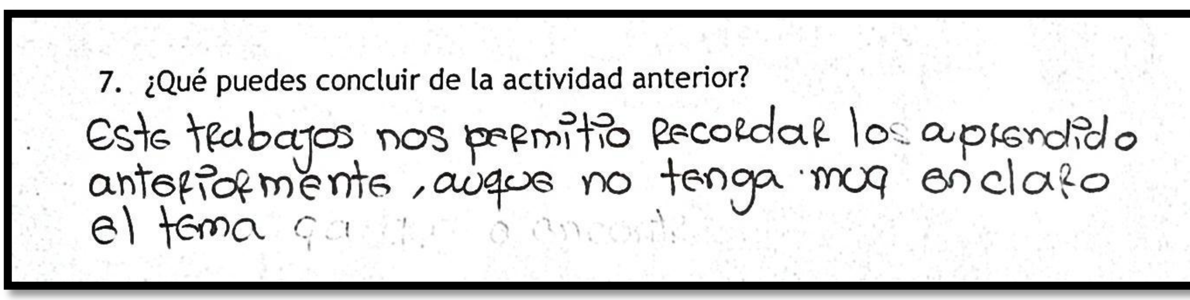
Además de ser una reflexión para los estudiantes quieres pueden ver como realmente se encuentran respecto a sus conocimientos, entendiendo así que pueden tener falencias y dificultades en algunos temas.



7. ¿Qué puedes concluir de la actividad anterior?

Es una actividad interesante aunque no tengo el tema muy claro.

Ilustración 23: Consideraciones sobre las actividades planteadas



7. ¿Qué puedes concluir de la actividad anterior?

Este trabajos nos permitio recordar lo aprendido anteriormente, auque no tenga muy en claro el tema

Ilustración 24: Consideraciones sobre las actividades planteadas

Finalmente lo que se pudo observar con el trabajo bajo el enfoque de la modelación matemática y las situaciones problemas es que aunque no se puedo ver en la totalidad de los estudiantes una comprensión completa del concepto de función entendido como modelo matemático, si permitió que estos entendieran que las funciones va más allá de unas simples ecuaciones, y que por el contrario la función y sus diferentes registros de representación se encuentran es gran parte de los elementos que los rodean, además que es importante ver la interrelación de los diferentes contenidos, que es algo que no se realiza normalmente en las aulas de clases y que es de gran importancia, en el caso de las funciones para que se relaciones los diferentes registros de representación y sobre todo para que no se vea a las matemáticas como un elemento desfragmentado, sino como una secuencia de contenidos que van a estar relacionados.

Capítulo 6

6. CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES Y FUTUROS TRABAJOS.

- En las diferentes actividades presentadas por los estudiantes se observa una dificultad en la asimilación del registro algebraico o simbólico, dado que gran parte de los educandos no pudieron llegar a las diferentes ecuaciones que pedían las actividades, a pesar de identificar las principales características de una función, es decir, podían reconocer los diferentes tipos y algunas de sus características, pero no tenían la capacidad de encontrar una expresión algebraica que tradujera el enunciado.

- Al realizar trabajos con la función lineal y la función cuadrática se puede observar que los estudiantes en las actividades realizadas presentaron una mayor facilidad de asociar los diferentes registros de representación en la función lineal dado que tenían mayor claridad de las partes que lo componían, sin embargo esto se debía a que ellos tenían saberes previos más elaborados, además al trabajar la función cuadrática se requieren algunos casos de factorización lo que hace que a los estudiantes se le dificulte su comprensión, debido a la complejidad que presenta este tema para ellos, además de que requiere un mayor análisis y profundidad.

- A pesar de las dificultades presentadas por la mayoría de los estudiantes, se puedo evidenciar que una pequeña parte de los educandos pudieron asociar los diferentes registros de representación, debido a que poseen buenos saberes previos, lo que muestra que para entender el concepto de función como un modelo matemático primero se debe hacer un estudio de los diferentes elementos que hacen parte de una función , para luego enfocar su estudio en las aplicaciones que pueden tener, es decir, debe haber una muy buena fundamentación teórica de los diferentes conceptos de la función y de los registros para luego poderlos asociarlos entre sí.

- Un elemento que puede promover la integración de los diferentes registros de representación, para entender la función como un modelo matemático, es la modelación matemática, debido a que se pueden realizar situaciones problemas que incorporen los diferentes conceptos, como se realizó en actividades planteadas para éste trabajo, en donde se integraron diferentes temáticas en una sola actividad, sin embargo, para lograr avances significativos se debe organizar todo el currículo con base a estas situaciones, para que haya una comprensión más elaborada de todas las temáticas en el área de matemáticas, para que así existan saberes previos claros y elaborados, lo que permitirá una mayor comprensión de todos los elementos matemáticos y su aplicación a los diferentes contextos.

- Para futuros trabajos es importante buscar estrategias que permitan que los estudiantes puedan asociar los registros de representación a partir de estrategias de enseñanza/ aprendizaje, ya que este trabajo no pretendía realizar unidades de aprendizaje, sino que pretendía identificar los diferentes procedimientos que realizaban los estudiantes y si en ellos se podía observar la integración de elementos que hicieran entender la función como un modelo matemático.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azcárate C. & Deuloffu J. (1996). Funciones y gráficas. Madrid, España. Síntesis.

Biembengut, M., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática, 16* (002), 105-125.

Biembengut, M., & Hein, N. (s.f.). *Modelo, Modelación y Modelaje: Métodos de Enseñanza-Aprendizaje de Matemáticas.* Recuperado el 2 de Abril de 2012, de Matemática Interactiva. Educación Superior: http://matesup.utalca.cl/modelos/articulos/modelacion_mate2.pdf

Fernández, J. (2005). Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas. [Versión electrónica]. Revista iberoamericana de educación matemática. Nº4. Pág. 31- 46.

González, V. (2006). El diario como instrumento de diagnóstico y estimulación del desarrollo profesional del profesorado. [Version electrónica]. Revista iberoamericana de educación. Vol.38. Nº2. Pág. 1 – 14.

LACE. (1999). introducción al estudio de caso en educación. universidad de cádiz. [Versión electrónica] en: http://www.grupolace.org/documentos/docs/EC.pdf

MEN. (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Bogotá: Magisterio.

MEN. (2003). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá: Magisterio.

Morín E. (1999) Los sietes saberes necesarios para la educación del futuro. Paris, Francia. Unesco.

Taylor, S.J., & Bodgan, R. (1996) Introducción a los métodos cualitativos de investigación. Barcelona, España: Paidos.

Posada F. & Villa J. (2006). El razonamiento algebraico y la modelación matemática. Gobernación de Antioquia. Medellín [versión electrónica] en http://funes.uniandes.edu.co/1770/1/capitulo_proyantioqu.pdf

Villa-Ochoa, J. A., Bustamante, C., Berrio, M., Osorio, A., & Ocampo, D. (2008). El proceso de modelación matemática en las aulas escolares. A propósito de los 10 años de su inclusión en los Lineamientos Curriculares colombianos. En G. García (Ed.), *Memorias del Noveno Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (págs. 41-45). Bogotá D. C.

Villa-Ochoa, J. A. (2010). La Modelación Matemática en el currículo. Elementos para la discusión. *Documento presentado en el XI Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Bogotá: ASOCOLME.