Medidas de Young y Aplicaciones

Julián Eduardo Acuña González
Matemático
Código: 830475

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Junio de 2012

Medidas de Young y Aplicaciones

Julián Eduardo Acuña González
Matemático
Código: 830475

Trabajo de Grado para optar al título de
Mágister en Ciencias Matemáticas

Director
Leonardo Rendón Arbeláez, Ph. D.
Doctor en Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Junio de 2012

Título en español

Medidas de Young y Aplicaciones.

Title in English

Young Measures and Applications.

Resumen: Se estudia el teorema fundamental de las medidas de Young. Se expone la teoría necesaria para formular el teorema. Después de demostrar el teorema se dan algunos ejemplos simples. Se desarrollan ciertas herramientas técnicas y finalmente se da una aplicación avanzada del resultado.

Abstract: We study the fundamental theorem of Young measures. We include the preliminary theory necessary for the formulation of the theorem. After proving the theorem we give some simple examples. Finally, we develop some technical tools for an advanced application of the result.

Palabras clave: Teoría de la Medida, Análisis Funcional, Young, Variacional, Representación.

Keywords: Measure Theory, Functional Analysis, Young, Variational, Representation.

Introducción

Los teoremas de representación juegan un papel significativo en el desarrollo de las matemáticas. Se trata usualmente de teoremas de enunciado sencillo (por ejemplo, el teorema de Representación de Riez en espacios de Hilbert, o el Teorema de Radon-Nykodyn en espacios de medida) pero de gran contenido teórico. Su fuerza reside en permitir ver ciertos objetos complejos o de naturaleza difusa, en términos de otros más manejables y concretos (por ejemplo, todo funcional lineal en L^p se puede identificar con una función en L^q, donde q es el exponente conjugado de p).
El objetivo de este trabajo es estudiar un teorema de representación de particular importancia en cálculo de variaciones y en ecuaciones diferenciales parciales. Se trata del teorema fundamental de las medidas de Young, al cual también nos referiremos como el teorema fundamental.
Se busca estudiar el siguiente problema: dada una sucesión de funciones medibles entre espacios euclidianos, qué se puede decir de su composición con una función continua dada en cuanto a convergencia débil, en particular si la función en cuestión es no lineal. A grandes rasgos, dada una sucesión de funciones medibles, el teorema fundamental garantiza convergencia débil-* en L^∞ de una subsucesión, más aun garantiza convergencia débil-* de la composición de dicha subsucesión con cualquier función continua. La potencia adicional es que se logran representar estos límites débiles en términos de una familia de medidas que no dependen de la función escogida. Esto permite usar herramientas muy generales de teoría de la medida para obtener información de dichos límites.
En el trabajo se presenta una introducción detallada y algunos ejemplos relevantes en relación a las medidas de Young. Cabe resaltar que la lectura sólo demanda conocimientos generales de análisis funcional y teoría de la medida. En el primer capítulo se dan las herramientas básicas para la demostración del teorema fundamental, en particular se explica en detalle la teoría de integrales de Bochner. Se incluye una prueba bastante general de un resultado de dualidad en estos espacios -un teorema de representación en sí mismo-. En el segundo capítulo se usa este resultado fuertemente en la prueba del teorema fundamental. A continuación se desarrollan algunas consecuencias del teorema, en particular un lema tipo Fatou respecto a funciones de Carathéodory.
Los problemas de minimización de funcionales no lineales en dominios «admisibles», llamados problemas variacionales, hacen parte del estudio de ecuaciones diferenciales parciales; por ejemplo, en el problema de Dirichlet las soluciones están asociadas a la optimización de un funcional de energía. En algunos casos hay herramientas para garantizar la convergencia débil en L^p de ciertas aproximaciones al «minimizador» (concretamente, convergencia débil de una sucesión que aproxima el ínfimo del funcional). A la luz del teorema fundamental, ciertas hipótesis adicionales permiten mejorar esa convergencia débil y de hecho

garantizar la convergencia fuerte en L^p. Un primer ejemplo simple se incluye al final del segundo capítulo. Así mismo se incluye el ejemplo clásico variacional debido a L.C. Young, con el cual se dio origen a la teoría de medidas de Young.

Finalmente, en el tercer capítulo se estudia una situación más elaborada que ilustra concretamente la utilidad de las herrmaientas técnicas desarrolladas. En este caso el objetivo es el mismo que en el problema variacional, es decir pasar de convergencia débil a convergencia fuerte en L^p.

En el apéndice se incluyen por claridad los enunciados de dos teoremas recurrentes en buena parte del trabajo, el Teorema de convergencia de Vitali y el teorema de Dunford-Pettis. También se demuestra la desigualdad de Jensen generalizada usada en el ejemplo variacional.

Para facilitar la lectura se adoptan convenciones de notación. Por ejemplo, si no se especifica la medida a utilizar se supone que es la medida de Lebesgue. Igualmente si A es un conjunto medible la notación $m(A)$ se usa para la medida de Lebesgue del conjunto A. También se usa escritura compacta para ciertos conjuntos, por ejemplo $\{f \geq 0\} := \{x : f(x) \geq 0\}$. La notación de corchetes de dualidad es estándar en análisis funcional. Esto significa que si μ es un funcional lineal en el espacio de Banach X y $x \in X$, $\langle \mu, x \rangle := \mu(x)$. Así mismo, si X es un espacio de Banach denotaremos a X' como su dual topológico. En este trabajo en particular, es común que los funcionales lineales sean representados por cargas (medidas con signo), por lo tanto si μ es una medida y f es una función medible, $\langle \nu, f \rangle := \int_\Omega f d\mu$. Extendiendo esto, en algunos casos se usa notación abreviada para vectores en $\mathbb{R}^n$, por ejemplo si $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ es una función de valor vectorial, digamos $F = (F_1, \ldots, F_d)$, la notación $\int_\Omega F d\mu = \langle \mu, F \rangle$ debe ser interpretada como el vector $(\int_\Omega F_1 \, d\mu, \ldots, \int_\Omega F_d \, d\mu)$. Para funciones vectoriales la notación $F \in L^p(\Omega)$ debe ser entendida por componentes, esto es $F_i \in L^p(\Omega)$ $i = 1, \ldots, d$. Como es de uso común se usa la abreviación c.t.p. (casi todo punto) para propiedades que son válidas salvo en un conjunto de medida nula. En cualquier caso las convenciones obedecen más a la presentación de los enunciados y por lo general serán aclaradas nuevamente al momento de leer las demostraciones.

Índice general

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1. $C_0(\mathbb{R}^d)$ y su dual $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$

En esta sección definimos el espacio de medidas de Radon. Recordemos que para $1 \leq p < \infty$, el dual de L^p es L^q donde q es el exponente conjugado de p. Esto falla en el caso $p = \infty$, pues el dual de L^∞ no es L^1. Se hace necesario entonces buscar una representación útil para el espacio de funcionales lineales. Por ejemplo, si $f \in L^1$, f induce un funcional lineal en L^∞ definido por

$$g \mapsto \int_\Omega fg.$$

Notemos que esta correspondencia de hecho define también una medida para el caso $f \geq 0$, $g = \chi_E$. Esto lleva a buscar representaciones de los espacios duales a través de medidas (específicamente de cargas, también llamadas medidas con signo en la literatura).

Definición 1.1.1. *Denotamos por $C_c(\mathbb{R}^d)$ al subespacio de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ formado por las funciones continuas de soporte compacto.*
Definimos $C_0(\mathbb{R}^d)$ como la clausura de $C_c(\mathbb{R}^d)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Notemos que $C_c(\mathbb{R}^d)$ es separable por el teorema de Stone-Weirestrass, naturalmente esto implica que $C_0(\mathbb{R}^d)$ es también separable.

Definición 1.1.2. *Decimos que un funcional lineal α (no necesariamente acotado) en $C_0(\mathbb{R}^d)$ (respectivamente $C_c(\mathbb{R}^d)$) es **positivo** si $\alpha(f) \geq 0$ para toda $f \geq 0$ en $C_0(\mathbb{R}^d)$ (o $C_c(\mathbb{R}^d)$).*

Definición 1.1.3. *Dado un espacio topológico Hausdorff (X, τ) decimos que una medida μ es **Borel** si está definida por lo menos en la sigma álgebra de Borel asociada al esapcio topoógico X.*

Definición 1.1.4. *Dada una medida Borel μ en el espacio topológico (X, τ) decimos que es **regular** (o **regular interior**) si se satisface*

$$\mu(E) = sup\left\{\mu(K) : K \subset E, K\, compacto\right\},$$

para cada E medible.

Definición 1.1.5. *Una **medida de Radon positiva**, es una medida μ en X que cumple las siguientes condiciones:*

1. *μ es Borel regular.*
2. *$\mu(K) < \infty$ para cada K compacto.*

Recordemos que una carga μ sobre un espacio de medida X, se descompone como diferencia de dos medidas $\mu = \mu^+ - \mu^-$, por el teorema de descomposición de Jordan ([2] p. 83). La variación total de μ esta dada por

$$\|\mu\| = \mu^+(X) + \mu^-(X).$$

Definimos su valor absoluto por $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$. El espacio de cargas de variación total finita es un espacio de Banach con la variación total como norma ([3] IV 2.16). A continuación extendemos la noción de medida de Radón positiva a cargas.

Definición 1.1.6. *Una **medida de Radon** es una carga μ en X de variación total finita para la cual $|\mu|$ es una medida de Radon positiva. El espacio de medidas de Radon lo denotamos $\mathcal{M}(X)$.*

El siguiente teorema de representación nos brinda una conección directa entre las medidas de Radón y los funcionales lineales acotados en $C_0(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 1.1.7. ***(Riesz-Markov)*** *Para cada α funcional lineal acotado en $C_0(\mathbb{R}^d)$, existe una única medida de Radon en $\mathbb{R}^d$ tal que*

$$\langle \alpha, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mu,$$

además $\|\mu\| = \|\alpha\|$ y $\alpha \geq 0$ si y sólo si μ es una medida (esto es, positiva).

Demostración. La demostración se puede encontrar en [7] p. 364. □

Recíprocamente, si μ es una medida de Radon y $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ entonces se induce un funcional lineal por integración el cual denotamos $\tilde{\mu}$, además dicho funcional es acotado:

$$\langle \tilde{\mu}, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mu \leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)| \right) |\mu|(\mathbb{R}^d) = \|f\| \|\mu\|.$$

Por lo tanto tenemos el siguiente resultado fundamental:

Teorema 1.1.8. *El dual de $C_0(\mathbb{R}^d)$ es isométricamente isomorfo al espacio de medidas de Radon, esto es*

$$(C_0(\mathbb{R}^d))' = \mathcal{M}(\mathbb{R}^d).$$

El isomorfismo canónico está dado por

$$\langle \tilde{\mu}, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mu.$$

Además, la correspondencia transforma funcionales lineales positivos en medidas positivas.

En lo sucesivo usamos la notación μ para referirnos tanto a la medida de Radon como al funcional lineal inducido por integración.

1.2. Soportes de medidas

La noción de soporte de una medida nos da una idea de dónde la medida se encuentra localizada, a continuación damos una definición rigurosa y algunas propiedades importantes. La referencia principal es [4] sec 4.9.

Definición 1.2.1. *Dado un espacio topológico (X, τ) y una medida Borel μ, decimos que $x \in X$ pertenece al soporte de μ si $\mu(U) > 0$ para toda vecindad abierta U de x. Denotamos a este conjunto supp μ.*

Ejemplo 1.2.2.

- *Si m es la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$, entonces supp $m = \mathbb{R}^n$.*
- *Si X es un espacio Hausdorff y δ_x es la medida de Dirac concentrada en $x \in X$, entonces supp $\delta_x = \{x\}$.*
- *Si $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ es una función continua entonces para la medida definida por $\mu(E) = \int_E f(x)\, dx$, se tiene que supp μ = supp f (véase definición 1.3.1).*

Proposición 1.2.3. *supp μ es cerrado para toda medida Borel μ.*

Demostración. Sea $x \in X \setminus \operatorname{supp} \mu$. Esto significa por definición de $\operatorname{supp} \mu$ que existe una vecindad abierta U_x de x con $\mu(U_x) = 0$. Sin embargo U_x es vecindad de todos sus puntos y así se sigue que $x \in U_x \subset X \setminus \operatorname{supp} \mu$. Por lo tanto $X \setminus \operatorname{supp} \mu$ es abierto. □

Bajo ciertas condiciones se puede garantizar que los conjuntos por fuera del soporte de una medida tienen medida nula. En seguida damos dos ejemplos de esta situación.

Proposición 1.2.4. *Sea X un espacio topológico 2-contable. Si μ es una medida Borel en X y $A \subset X \setminus$ supp μ es un conjunto medible, entonces $\mu(A) = 0$.*

Demostración. Basta considerar el caso $A = X \setminus \operatorname{supp} \mu$. Para todo $y \in A$ existe una vecindad abierta $U_y \subset A$, con $\mu(U_y) = 0$ como se mostró en la proposición anterior. Por lo tanto $A = \bigcup_{y \in A} U_y$. Al ser X 2-contable, A es también 2-contable y por lo tanto es un espacio de Lindelöf. Se sigue que el cubrimiento se reduce a uno numerable, es decir $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{y_k}$. Se concluye que A es un conjunto de medida nula ya que es unión numerable de conjuntos de medida nula. □

Proposición 1.2.5. *Si μ es una medida de Radon positiva en X y $A \subset X \setminus$ supp μ es un cojnunto medible, entonces $\mu(A) = 0$.*

Demostración. Por regularidad de la medida μ basta demostrar que esto sucede para A compacto. El argumento es similar al de la proposición anterior: Para todo $y \in A$ existe una vecindad abierta $U_y \subset X \setminus \operatorname{supp} \mu$, con $\mu(U_y) = 0$. Así $A \subset \bigcup_{y \in A} U_y$. Este cubrimiento se reduce a uno finito por compacidad, es decir $A \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{y_k}$. Por lo tanto A es de medida nula al estar contenido en una unión finita de conjuntos de medida nula. □

De acuerdo con el teorema 1.1.8, una medida da Radon en $\mathbb{R}^d$ queda caracterizada por el funcional lineal correspondiente en $(C_0(\mathbb{R}^d))'$. La siguiente proposición muestra que de hecho el soporte de una medida queda determinado también por el comportamiento de la medida en cierto conjunto de funciones continuas.

Proposición 1.2.6. *Sea μ una medida Borel en $\mathbb{R}^d$ y K un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^d$. Entonces supp $\mu \subset K$ si y sólo si $\langle \mu, f\rangle = 0$ para toda $f \in C_0^K(\mathbb{R}^d)$, donde*

$$C_0^K(\mathbb{R}^d) := \{f \in C_0(\mathbb{R}^d) : f|_K \equiv 0\}.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $\operatorname{supp}\mu \subset K$ entonces por la proposición 1.2.4 $\mu(\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{supp}\mu) = 0$, y así para $f \in C_0^K(\mathbb{R}^d)$ tenemos que

$$\langle \mu, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu = \int_{\operatorname{supp}\mu} f\, d\mu = 0.$$

($\Leftarrow$) Supongamos que $\langle \mu, f\rangle = 0$ para toda $f \in C_0^K(\mathbb{R}^d)$, razonamos por contradicción: Si existe
$x \in \operatorname{supp}\mu \setminus K$, entonces al ser K cerrado existe una bola abierta de radio $\varepsilon > 0$ y centro en x, $B := B(\varepsilon; x)$, tal que $B \cap K = \emptyset$. Sea $U := B(\varepsilon/2; x)$. Existe una función continua f tal que $f(U) \equiv 1$ y $f(\mathbb{R}^d \setminus B) \equiv 0$, naturalmente esto implica que $f \in C_0^K(\mathbb{R}^d)$, además puesto que $f \geq \chi_U$

$$\langle \mu, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu \geq \int_{\mathbb{R}^d} \chi_U\, d\mu = \mu(U) > 0,$$

lo cual contradice la hipótesis. $\square$

Modificando ligeramente el razonamiento de la proposición anterior podemos llegar a extraer información del soporte de una medida incluso de una sola función. Esto se resume en el siguiente hecho.

Proposición 1.2.7. *Sean $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ una función continua y μ una medida Borel en $\mathbb{R}^d$. Si $\langle \mu, f\rangle = 0$ entonces supp $\mu \subset \ker f$.*

Demostración. Si $x \in \operatorname{supp}\mu \setminus \ker f$, entonces $f(x) > 0$. Por continuidad existe una vecindad abierta U de x y $\varepsilon > 0$ tal que $f(y) \geq \varepsilon$ para todo $y \in U$. Además $\mu(U) > 0$ puesto que $x \in \operatorname{supp}\mu$. Esto nos lleva a la contradicción

$$\langle \mu, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu \geq \int_U f\, d\mu \geq \varepsilon\mu(U) > 0.$$

$\square$

1.3. Nociones básicas de distribuciones

A continuación exponemos los conceptos fundamentales de la teoría de distribuciones, para una motivación más profunda y los ejemplos más relevantes se puede consultar [10].

Definición 1.3.1. *Sea ϕ una función continua de valor real definida en un abierto de $\mathbb{R}^n$. El soporte de ϕ, notado como supp ϕ se define por*

$$supp\, \phi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) \neq 0\}},$$

donde la clausura se toma en $\mathbb{R}^n$. Además decimos que ϕ es de soporte compacto en caso que supp ϕ lo sea. El conjunto de funciones infinitas veces derivables de soporte compacto lo denotamos $\mathcal{D}(\Omega)$.

La notación $\mathcal{D}(\Omega)$ la usamos específicamente cuando hablemos de la siguiente forma de convergencia.

Definición 1.3.2. *Decimos que una sucesión de funciones $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ converge a 0 si existe un compacto $K \in \Omega$ fijo, tal que supp $(\phi_m) \subset K$ para cada m y además ϕ_m y todas sus derivadas parciales de orden superior convergen uniformemente a 0 en K.*

Definición 1.3.3. *Decimos que un funcional lineal T en $\mathcal{D}(\Omega)$ es una distribución en Ω si para cualquier sucesión $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, $\phi_m \to 0$ implica $T(\phi_m) \to 0$. Al espacio de las distribuciones en Ω lo denotamos $\mathcal{D}'(\Omega)$*

Ejemplo 1.3.4. *Si f es una función localmente integrable, es decir para cada $K \subset \Omega$ compacto*

$$\int_K |f| < \infty,$$

entonces el funcional $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$T_f(\phi) = \int_\Omega f\phi$$

es una distribución en Ω.

Ejemplo 1.3.5. *Si $f \in L^p(\Omega)$ entonces f es localmente integrable y T_f es una distribución en Ω.*

Definición 1.3.6. *Decimos que una distribución T es una función en Ω si $T = T_f$ para alguna función f localmente integrable.*

Tratamos a f y a T_f indistintamente, es decir cuando hablemos de una propiedad distribucional de f nos referimos a una propiedad de la distribución T_f. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ con $x = (x_1, \ldots, x_n)$, un *multi-índice* es vector de números enteros no negativos

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

A cada multi-índice α le asociamos los valores definidos a continuación

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \\ \alpha! &= \alpha_1! \ldots \alpha_n!, \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n},\ x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

También decimos que dos multi-índices α y β cumplen la relación $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_i \leq \beta_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Finalmente definimos el operador D^α como

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Una de las propiedades más importantes de las distribuciones es la diferenciación, observemos que si $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ (es decir f es diferenciable y f' es continua), entonces f' es localmente integrable. Así para $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$T_{f'}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f'\phi = -\int_{\mathbb{R}} f\phi' = -T_f(\phi').$$

Adicionalmente notemos que en general para una sucesión $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\phi_n \to 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ entonces $(D^\alpha\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$ y se tiene que $D^\alpha\phi_n \to 0$. Esto nos da la siguiente proposición.

Proposición 1.3.7. *Dado un multi-índice α y una distribución $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ con Ω abierto en $\mathbb{R}^n$, el funcional $D^\alpha T$ sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ definido por*

$$(D^\alpha T)(\phi) := (-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\phi),\ \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

es una distribución en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

De acuerdo con la convención mencionada anteriormente para $u \in L^p(\Omega)$ la notación $D^\alpha u$ se refiere a $D^\alpha T_u$. Para terminar dotamos a $\mathcal{D}'(\Omega)$ de una noción de convergencia (débil).

Definición 1.3.8. *Decimos que una sucesión de distribuciones $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$*

$$T_n(\phi) \to T(\phi).$$

1.4. Espacios de Sobolev

A continuacióndefinimos los espacios de Sobolev, una herramineta fundamental en el estudio de problemas variacionales y también en soluciones débiles para ecuaciones en derivadas parciales.

Definición 1.4.1. *Sea $m > 0$ un entero y $1 \le p \le \infty$. El* ***espacio de Sobolev*** *$W^{m,p}(\Omega)$ se define como*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \le m\}.$$

Recordemos que α denota un multi-índice. Así $W^{m,p}(\Omega)$ es la colección de funciones u en $L^p(\Omega)$ que cumplen que sus derivadas distribucionales hasta orden m están también en $L^p(\Omega)$. Como habíamos señalado nos referimos a que las derivadas de la distribución T_u son distribuciones representadas por funciones en $L^p(\Omega)$. Naturalmente $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio vectorial y de hecho es un espacio de Banach dotado de la norma

$$||u||_{m,p,\Omega} = \sum_{|\alpha|\le m} ||D^\alpha u||_{L^p(\Omega)}.$$

Definición 1.4.2. *Definimos el espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ como la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$.*

Los espacios $W_0^{m,p}(\Omega)$ generalizan la noción de condicion de nulidad en la frontera de Ω. En los problemas de ecuaciones en derivadas parciales clásicos se suele reemplazar la condición de frontera $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$, por la condición más débil $u \in W_0^{m,p}$. El objetivo con esto es buscar soluciones generalizadas (llamadas también débiles) en espacios de Sobolev.

El siguiente teorema debido a Stampacchia nos dice cómo las funciones de Lipschitz transforman los espacios de Sobolev.

Teorema 1.4.3. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Lipschitz. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ entonces $f(u) \in W^{1,p}(\Omega)$. Además si f es diferenciable salvo en un número finito de puntos $t_1, \dots, t_k$, se satisface*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f(u))(x) = \begin{cases} f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x), & u(x) \notin \{t_1, \dots, t_k\} \\ 0, & u(x) \in \{t_1, \dots, t_k\} \end{cases}$$

Demostración. La demostración se puede encontrar en [10], Apéndice 4. □

1.5. Medibilidad para funciones vectoriales

Una de las herramientas que usaremos para la parte central del trabajo será la generalización de función medible y función integrable. En la teoría clásica de funciones medibles se dice que una función cuyo dominio es un espacio medible y de rango en un espacio topológico es medible si la preimagen de todo abierto es un conjunto medible. Cuando queremos definir la noción de medibilidad para funciones que toman valores en un espacio de Banach, podríamos empezar por ver el espacio de Banach con su topoología y utilizar la definición para espacios topológicos. Sin embargo, este enfoque no es muy conveniente, si el objetivo final es desarrollar una forma de integración. Así, es mejor usar una noción de medibilidad (fuerte) a partir de funciones simples. Se sigue, salvo ligeras modificaciones hechas por claridad, la introducción presentada en [14].

Definición 1.5.1. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, X un espacio de Banach y $f : \Omega \to X$ una función arbitraria.*

1. *Definimos la función $\|f\| : \Omega \to [0, \infty)$ por $x \mapsto \|f\|(x) := \|f(x)\|$.*
2. *Decimos que f es débilmente medible si para todo funcional lineal acotado $x' \in X'$, la función de valor real $x' \circ f$, es Σ-medible (en el sentido usual).*
3. *Decimos que f es una función simple si $f(\Omega)$ es contable y $f^{-1}(\{x\})$ es Σ-medible para todo $x \in X$.*
4. *Decimos que f es fuertemente Σ-medible si existe una sucesión de funciones simples $s_n : \Omega \to X$, tales que $s_n \to f$ en $\mu-$c.t.p., esto es*

$$\mu\left(\{x \in X : s_n(x) \not\to f(x)\}\right) = 0.$$

Ejemplo 1.5.2. *Si $g : \Omega \to \mathbb{R}$ es Σ-medible y $b \in X$, entonces la función $F : \Omega \to X$, definida por F(x)=g(x)b, es fuertemente Σ-medible.*

Demostración. Como g es Σ-medible, existe una sucesión de funciones simples (de valor real) $g_n \to g$ μ-c.t.p., así la sucesión $s_n = g_n b$ es una sucesión de funciones (vectoriales) simples que converge a F en μ-c.t.p.. □

Al igual que en la teoría de integración clásica definimos la relación de equivalencia $f \equiv g$ si $f = g$ en μ-c.t.p, lo cual es equivalente a decir que la función de valor real $\|f - g\|$ es nula en μ-c.t.p.

Proposición 1.5.3. *Si $f : \Omega \to X$ es fuertemente medible, entonces es débilmente medible.*

Demostración. Si $s : \Omega \to X$ es una función simple, entonces para cada funcional lineal acotado $x' \in X'$ la función de valor real $x' \circ s$ es simple y medible. Ahora si f es fuertemente medible existe una sucesión de funciones simples $s_n \to f$ μ-c.t.p. lo cual implica por la continuidad de x' que $x' \circ s_n \to x' \circ f$ μ-c.t.p. , y así $x' \circ f$ es medible al ser límite de funciones medibles. □

El Teorema de Pettis relaciona la medibilidad fuerte con la separabilidad en casi todo punto del rango. Para demostrarlo necesitamos primero el siguiente Lema.

Lema 1.5.4. *Sea X un espacio de Banach separable. Entonces existe una sucesión de funcionales $(x'_n)_{n\geq 1} \subset X'$ con $\|x'_n\| \leq 1$ tal que para cualquier $x'_0 \in X'$ con $\|x'_0\| \leq 1$, existe una subsucesión de x'_n que converge débil-$*$ a x_0.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión densa en X y llamemos S' a la bola unitaria cerrada de X'. Para cada n fijo consideremos las funciones

$$\phi_n : S' \to \mathbb{R}^n : x' \mapsto \phi_n(x') := (x'(x_1), \ldots, x'(x_n)).$$

Puesto que $\mathbb{R}^n$ es separable, también lo es $\phi_n(S')$, esto es, para n fijo existe una sucesión $(x'_{n,k})_{k\in N} \subset S'$ tal que $\{\phi_n(x'_{n,k}) : k \in \mathbb{N}\}$ es densa en $\phi_n(S')$. De esta construcción es inmediato que dado $x'_0 \in S'$, existe una subsucesión $(x'_{n,m_n})_{n\in N}$ tal que $|x'_{n,m_n}(x_i) - x'_o(x_i)| < 1/n, (i = 1, \ldots, n)$. Así $\lim_{n\to\infty} x'_{n,m_n}(x_i) = x'_0(x_i)$ para cada i. Se sigue por la densidad de x_n en X que también $\lim_{n\to\infty} x'_{n,m_n}(x) = x'_0(x)$ para todo $x \in X$. Usando la biyección canónica de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ podemos reordenar las sucesiones $(x'_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ en una sola sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que contenga a todas las sucesiones $(x'_{n,m_n})_{n\in N}$ como subsucesiones y concluimos el resultado. □

Definición 1.5.5. *Decimos que $f : \Omega \to X$ es de imagen separable en μ-c.t.p. si existe un conjunto $B \in \Sigma$ de μ-medida nula tal que $f(\Omega \setminus B)$ es separable.*

Teorema 1.5.6. ***(Pettis)*** *$f : \Omega \to X$ es fuertemente medible si y sólo si es débilmente medible y de imagen separable en μ-c.t.p.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Si f es fuertemente medible entonces es débilmente medible. Sea s_n una sucesión de funciones simples con $s_n \to f$ en μ-c.t.p, sea entonces $B = \{x \in X : \underline{s_n(x) \not\to f(x)}\}$, notemos que $s_n(\Omega \setminus B)$ es separable (pues es contable). Así $f(\Omega \setminus B) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} s_n(\Omega \setminus B)$ es también separable.
$(\Leftarrow)$ Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que f es de imagen separable. La clausura del subespacio generado por $f(\Omega)$ es entonces separable, luego tomando este subespacio cerrado (y por lo tanto de Banach) como el de llegada, podemos suponer también que X es separable. Primero, vamos a demostrar que $\|f\|$ es una función medible. Sea entonces x'_n la sucesión en X' que garantiza el lema 1.5.4.
Para cada $a \in \mathbb{R}$ sean $A = \{t \in \Omega : \|f(t)\| \leq a\}$ y $A_{x'} = \{t \in \Omega : |x'(f(t))| \leq a\}$. No es difícil ver que $A \subset \bigcap_{\|x'\|\leq 1} A_{x'}$. Recíprocamente, para cada $t \in \Omega$ por el teorema de

Hahn-Banach, existe $x_t' \in X'$ con $\|x_t'\| = 1$ tal que $x_t'(f(t)) = \|f(t)\|$ y así $A = \bigcap_{\|x'\|\leq 1} A_{x'}$, por otro lado el lema 1.5.4 garantiza que $\bigcap_{\|x'\|\leq 1} A_{x'} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{x_n'}$. En total $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{x_n'}$ y puesto que f es débilmente medible, $A \in \Sigma$ y así $\|f\|$ es medible.
Como f es de rango separable, para cada n entero positivo, podemos cubrir $f(\Omega)$ por un número contable de bolas de radio $1/n$, digamos $\{B(x_{j,n}; 1/n)\}_{j\in\mathbb{N}}$. Como las funciones constantes son fuertemente medibles se sigue por el razonamiento del párrafo anterior que $\|f - x_{j,n}\|$ es medible. Así los conjuntos $B_{j,n} = \{t \in \Omega : f(t) \in B(x_{j,n}; 1/n)\}$ son medibles y forman un cubrimiento de Ω. Definimos

$$f_n(t) = x_{i,n} \leftrightarrow t \in B_{i,n}' = B_{i,n} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_{j,n},$$

notemos que para cada n, $B_{j,n}'$ es una partición de Ω y así f_n está bien definida y $\|f(t) - f_n(t)\| < 1/n$ para cada $t \in \Omega$. . Por lo tanto f al ser límite de las funciones simples f_n resulta fuertemente medible. □

Corolario 1.5.7. *Si X es un espacio de Banach separable, entonces $f : \Omega \to X$ es fuertemente medible si y sólo si es débilmente medible.*

1.6. Integral de Bochner

Definición 1.6.1. ***(Integral para funciones de rango finito)*** *Sea $f : \Omega \to X$ una función simple con $f(\Omega)$ finito y tal que $\mu(f^{-1}(x)) < \infty$ para $x \neq 0$. Sean $f(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $B_i = f^{-1}(x_i)$. Decimos que f es una función integrable de rango finito y definimos la integral de f respecto a μ como*

$$\int_\Omega f\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) x_i.$$

Teorema 1.6.2. ***(Integral vectorial)*** *Sea $f : \Omega \to X$ una función arbitraria. Si existe una sucesión de funciones integrables de rango finito $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f_n \to f$ μ-c.t.p. y se satisface*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\| d\mu = 0, \tag{1.1}$$

decimos que f es Bochner-integrable y podemos definir su integral sobre $\Omega' \in \Sigma$ como

$$\int_{\Omega'} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \chi_{\Omega'} f_n d\mu,$$

donde $\chi_{\Omega'} : \Omega \to \mathbb{R}$ es la función característica de Ω'.

Demostración. Puesto que de la hipótesis f es fuertemente medible, tiene sentido hablar de la integral (1.1). Notemos que de la desigualdad triangular en X se sigue que se satisface

$\| \int_\Omega g\| \leq \int_\Omega \|g\|$, para g una función simple integrable arbitraria. Así

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\Omega'} f_n\,d\mu - \int_{\Omega'} f_m\,d\mu\right\| &= \left\|\int_{\Omega'} (f_n - f_m)\,d\mu\right\| \\ &\leq \int_{\Omega'} \|f_n - f_m\|\,d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} \|f_n - f_m\|\,d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} \|f_n - f\|\,d\mu + \int_{\Omega} \|f - f_m\|\,d\mu,\end{aligned}$$

luego la sucesión $(\int_{\Omega'} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y por lo tanto converge en el espacio de Banach X. Es también claro que dicho límite no depende de f_n puesto que dos sucesiones que cumplan (1.1) se pueden combinar en una sola sucesión que también cumple con la hipótesis. □

Las siguientes dos proposiciones conectan las funciones Bochner-integrables con las funciones simples Bochner-integrables.

Proposición 1.6.3. *Sea $f : \Omega \to X$ una función simple con $f(\Omega) = \{x_i\}_{i=1}^\infty$, $x_i \neq 0$. Entonces f es Bochner-integrable si y sólo si $\|f\|$ lo es, además*

$$\int_{\Omega'} f\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i \cap \Omega')x_i,$$

donde $B_i = f^{-1}(\{x_i\})$, en particular la serie es convergente y $\mu(B_i) < \infty$.

Demostración. $(\Rightarrow) f$ es fuertemente medible al ser límite puntual de funciones de rango finito (y por lo tanto simples). Se sigue que $\|f\|$ es medible, además es integrable por la desigualdad

$$\int_\Omega \|f\|\,d\mu \leq \int_\Omega \|f_n\|\,d\mu + \int_\Omega \|f - f_n\|\,d\mu.$$

$(\Leftarrow)$ Si $\|f\|$ es integrable, entonces puntualmente $f = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \chi_{B_i} x_i$, por lo tanto, al ser los B_i disjuntos,

$$\|f\| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{B_i} \|x_i\|.$$

Se sigue por el teorema de convergencia monótona que

$$\int_\Omega \|f\|\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(B_i)| \|x_i\|,$$

en particular la serie es convergente y $\mu(B_i) < \infty$ para todo i. Finalmente definamos $g_n = \sum_{i=1}^n \chi_{B_i} x_i$, entonces $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones integrables de rango finito, además

$$\int_{\Omega} \|f - g_n\| = \sum_{i=n+1}^{\infty} \chi_{B_i} \|x_i\| \to 0,$$

es claro que $g_n \to f$ μ-c.t.p. Así, por definición de la integral de Bochner, tenemos que f es Bochner-integrable y

$$\int_{\Omega'} f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \chi_{\Omega'} g_n = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i \cap \Omega') x_i.$$

□

La afirmación siguiente muestra que podemos intercambiar las funciones integrables de rango finito por funciones simples Bochner-integrables, en la definición de integral de Bochner.

Proposición 1.6.4. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones simples Bochner-integrables con $f_n \to f$ en $\mu - c.t.p.$ y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \|f_n - f\| d\mu = 0,$$

entonces f es Bochner-integrable.

Demostración. Aplicando la proposición anterior a cada f_n, existen funciones integrables de rango finito g_n, con $\int_{\Omega} \|g_n - f_n\| < 1/n$, así

$$\int_{\Omega} \|g_n - f\| \, d\mu \leq \int_{\Omega} \|g_n - f_n\| \, d\mu + \int_{\Omega} \|f_n - f\| \, d\mu \to 0.$$

Por lo tanto f es Bochner integrable.

□

Teorema 1.6.5. ***(Bochner)*** *Sea $f : \Omega \to X$ una función fuertemente medible. Entonces f es Bochner integrable si y sólo si $\|f\|$ lo es.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si f es Bochner-integrable, entonces $\|f\|$ es medible, además si f_n es como en (1.1) se sigue que

$$\int_{\Omega'} \|f\| \, d\mu \leq \int_{\Omega'} \|f_n\| \, d\mu + \int_{\Omega'} \|f - f_n\| \, d\mu,$$

lo cual implica que $\|f\|$ es integrable. Podemos decir algo más, tenemos la desigualdad

$$\int_{\Omega'} |\|f_n\| - \|f_m\|| \; d\mu \leq \int_{\Omega'} \|f_n - f_m\| \, d\mu,$$

como consecuencia $\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega'} \|f_n\| \, d\mu$ existe y además

$$\int_{\Omega'} \|f\| \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega'} \|f_n\| \, d\mu.$$

($\Leftarrow$) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples que convergen a f en μ-c.t.p. Definimos $g_n(t) = f_n(t)$ si y sólo si $\|f_n(t)\| \leq 2\|f(t)\|$ (y $g_n(t)$ igual a 0 en otro caso). Entonces, puesto que $\|g_n\| \leq 2\|f\|$, se sigue que $\|g_n\|$ es integrable y por la proposición 1.6.3 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones simples Bochner-integrables y además converge a f en μ-c.t.p.. Finalmente por la desigualdad triangular $\|f - g_n\| \leq 3\|f\|$. Como por hipótesis $\|f\|$ es integrable podemos aplicar el teorema de convergencia dominada y deducir que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega'} \|f - g_n\| \, d\mu = 0.$$

Notemos que no necesariamente g_n es de rango finito. Sin embargo, la ecuación anterior es suficiente para garantizar que f es Bochner-integrable, gracias a la proposición 1.6.4. $\square$

Corolario 1.6.6. *Si f es Bochner integrable entonces*

$$\left\| \int_{\Omega'} f \, d\mu \right\| \leq \int_{\Omega'} \|f\| \, d\mu.$$

Demostración. Si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión definida en la anterior demostración, entonces el teorema de convergencia dominada muestra que

$$\int_{\Omega'} \|f\| \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega'} \|g_n\| \, d\mu,$$

y la afirmación se sigue de la correspondiente desigualdad para funciones simples Bochner-integrables. $\square$

Corolario 1.6.7. *S f es Bochner-integrable y $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ cumple* $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$. *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f \, d\mu = 0.$$

Demostración. Se sigue del corolario anterior y la integrabilidad uniforme de las funciones integrables A.0.4. $\square$

Corolario 1.6.8. *La integral de Bochner es sigma-aditiva. Es decir, si $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una partición en conjuntos medibles de $\Omega' \in \Sigma$ y f es Bochner-integrable, entonces*

$$\int_{\Omega'} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} f d\mu.$$

Demostración. Inmediato de la sigma-aditividad de la integral de $\|f\|$ y el corolario 1.6.6 $\square$

1.7. Medibilidad débil-$*$ y dualidad

Nuestro objetivo ahora es demostrar uno de los resultados técnicos centrales en la demostración del teorema fundamental de las medidas de Young (teorema 2.1.1). A lo largo de esta sección se supone que X es un espacio de Banach separable.

Definición 1.7.1. *Denotamos al espacio de funciones Bochner integrables (módulo equivalencia en μ-c.t.p.) por $L^1(\Omega, X)$, este es un espacio vectorial normado con la norma*

$$\|f\|_1 = \|f\|_{L^1(\Omega,X)} := \int_\Omega \|f\| \, d\mu.$$

De acuerdo con la siguiente afirmación, podemos construir una gran cantidad de funciones en $L^1(\Omega, X)$ a partir de funciones en $L^1(\Omega)$.

Proposición 1.7.2. *Si $g \in L^1(\Omega)$ y $b \in X$, entonces la función $F : \Omega \to X$ definida por F(x)=g(x)b, está en el espacio $L^1(\Omega, X)$. Además el subespacio generado por las funciones de esta forma es denso en $L^1(\Omega, X)$.*

Demostración. F es fuertemente medible por el ejemplo 1.5.2, además F es Bochner integrable por el teorema 1.6.5 puesto que $\|F\|_1 = \|g\|_1\|b\|$.
Por otro lado, toda función simple integrable es Bochner integrable y de hecho es suma finita de funciones de la forma $F(x) = g(x)b$, donde $g \in L^1(\Omega)$ es una función característica y $b \in X$. Se sigue por la definición de integral vectorial que el subespacio generado por este tipo de funciones es denso en $L^1(\Omega, X)$. $\square$

Definición 1.7.3. *Sea $\nu : \Omega \to X'$ una función. Usamos la notación $\nu_x := \nu(x)$ para $x \in \Omega$. Decimos que ν es débil-$*$ medible si para toda $F \in L^1(\Omega, X)$, la correspondencia $x \mapsto \langle \nu_x, F(x)\rangle$, $x \in \Omega$ es una función medible.*

Proposición 1.7.4. *Sea Ω un espacio de medida sigma finito. Para que una función $\nu : \Omega \to X'$ sea débil-$*$ medible es suficiente y necesario que la correspondencia $x \mapsto \langle \nu_x, a\rangle$ sea una función medible para cada $a \in X$.*

Demostración. Si $x \mapsto \langle \nu_x, a\rangle$ es medible para cada $a \in X$, se sigue que $x \mapsto \langle \nu_x, F(x)\rangle$ es medible para cada $F \in L^1(\Omega, X)$ puesto que F es aproximable por funciones simples. Recíprocamente, si $x \mapsto \langle \nu_x, F(x)\rangle$ es medible para cada $F \in L^1(\Omega, X)$, en particular lo es para $F_n = a\chi_{\Omega_n}$, donde $\mu(\Omega_n) < \infty$ y $\cup\Omega_n = \Omega$ y se sigue que $x \mapsto \langle \nu_x, a\rangle$ es medible para cada $a \in X$. $\square$

A la luz de esta proposición, si Ω es sigma-finito, podemos dotar a las funciones débil-$*$ medibles de la norma

$$\|\nu\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \|\nu_x\| \, .$$

Tomar supremo escencial se justifica, puesto que $\|\nu_x\| = \sup_{\|a\|\leq 1} |\langle \nu_x, a\rangle|$ y así la función $x \mapsto \|\nu_x\|$ es medible.

Definición 1.7.5. *Al espacio de funciones débil-$*$ medibles de norma $\|\cdot\|_\infty$ finita, módulo la relación $\nu \equiv \phi \Leftrightarrow \|\nu - \phi\| = 0$, lo denotamos $L^\infty_\omega(\Omega, X')$.*

Observación 1.7.6. *Toda función constante es débil-$*$ medible, en efecto fijando $a' \in X'$, la correspondencia $x \mapsto \langle a', F(x)\rangle$ es medible para cada $F : \Omega \to X$ fuertemente medible, puesto que F es también débilmente medible.*

Ahora damos la siguiente definición para aclarar la notación el la demostración del siguiente teorema.

Definición 1.7.7. *Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ entonces también es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, para diferenciar estos dos espacios denotaremos al segundo por $V_{\mathbb{Q}}$. Decimos que W es un $\mathbb{Q}$-**subespacio** de V si W es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ el cual es subespacio de $V_{\mathbb{Q}}$.*
*Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y W es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, decimos que una función $T : W \to V$ es $\mathbb{Q}$-**lineal** si es una transformación lineal entre W y $V_{\mathbb{Q}}$.*

Nuestro objetivo ahora es probar el siguiente teorema de representación. Una versión mucho más abstracta del teorema (y que requiere más herramientas teóricas) se puede encontrar en [4] p.588. Aquí el autor demuestra una generalización de la prueba presentada en [12], referencia en donde sólo se expone el caso particular $X = C_0(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 1.7.8. *Sea Ω es un espacio de medida sigma-finito. Sea $\Phi \in \left(L^1(\Omega, X)\right)'$ un funcional lineal acotado. Entonces existe un único $\nu \in L^\infty_\omega(\Omega, X')$ tal que*

$$\Phi(F) = \int_\Omega \langle \nu_x, F(x)\rangle \, d\mu(x),$$

y también se satisface $\|\Phi\| = \|\nu\|$.

Demostración. Sea $g \in B \subset X$, donde B es un $\mathbb{Q}$-subespacio contable y denso de X, $h \in L^1(\Omega) = L^1(\Omega; \mathbb{R})$. Para cada par g, h definimos $F_{g,h} : \Omega \to X$ por la correspondencia $x \mapsto h(x)g$. De la proposición 1.7.2 se sigue que $F_{g,h} \in L^1(\Omega, X)$. Ahora observemos que

$$|\Phi(F_{g,h})| \leq \|\Phi\| \left\|F_{g,h}\right\|_1 = \|\Phi\| \, \|g\| \|h\|_1,$$

por lo tanto la función

$$\begin{aligned} \phi_g :& L^1(\Omega) \to \mathbb{R} \\ & h \mapsto \Phi(F_{g,h}) \end{aligned}$$

define un elemento de $\left(L^1(\Omega)\right)'$, el cual es canónicamente (e isométricamente) isomorfo a $L^\infty(\Omega)$, puesto que Ω es sigma-finito. Esto significa que existe $u_g \in L^\infty(\Omega)$, único salvo equivalencia en c.t.p. con

$$\Phi(F_{g,h}) = \phi_g(h) = \int_\Omega u_g(x)h(x) \, d\mu(x),$$

para todo $h \in L^1(\Omega)$. Sean $N_g := \{x \in \Omega : |u_g(x)| = \infty\}$ y $N := \cup_{g\in B} N_g$. Como $u_g \in L^\infty(\Omega)$ se sigue que N_g es de medida nula. Así, por ser B contable, N resulta de medida nula. Por lo tanto $u_g(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \Omega \setminus N$ y para cada $g \in B$.
Fijemos $x \in \Omega \setminus N$. La correspondencia $\alpha_x : B \to \mathbb{R}$ definida por $g \mapsto \alpha_x(g) := u_g(x)$, es $\mathbb{Q}$-lineal: en efecto, para $h \in L^1(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{Q}$, y $g_1, g_2 \in B$, tenemos que $g_1 + \lambda g_2 \in B$ ya que B es $\mathbb{Q}$-espacio, además

$$\phi_{g_1+\lambda g_2}(h) = \Phi(F_{g_1+\lambda g_2,h}) = \Phi(F_{g_1,h}) + \lambda\Phi(F_{g_2,h}) = \phi_{g_1}(h) + \lambda\phi_{g_2}(h).$$

Por lo tanto $\phi_{g_1+\lambda g_2} = \phi_{g_1} + \lambda\phi_{g_2}$. Así $u_{g_1+\lambda g_2} = u_{g_1} + \lambda u_{g_2}$ y α_x es $\mathbb{Q}$-lineal. Por otro lado tenemos la desigualdad

$$\begin{aligned}|\alpha_x(g)| = |u_g(x)| \leq \|u_g\|_\infty = \|\phi_g\| &= \sup_{\|h\|\leq 1} |\phi_g(h)| \\ &= \sup_{\|h\|\leq 1} |\Phi(F_{g,h})| \\ &\leq \sup_{\|h\|_1\leq 1} \|\Phi\|\,\|g\|\|h\|_1 \\ &\leq \|\Phi\|\,\|g\|.\end{aligned}$$

Por lo tanto α_x es continuo y por densidad de B, define un elemento $\nu_x \in X'$ tal que

$$\langle \nu_x, g\rangle = \alpha_x(g) = u_g(x),$$

para todo $g \in B$ y todo $x \in \Omega \setminus N$. Las relaciones anteriores muestran que

$$\Phi(F_{g,h}) = \int_\Omega u_g(x)h(x)\,d\mu(x) = \int_\Omega \langle \nu_x, g\rangle h(x)\,d\mu(x) = \int_\Omega \langle \nu_x, F_{g,h}(x)\rangle\,d\mu(x).$$

Como consecuencia inmediata de la proposición 1.7.2, el subespacio generado por las funciones $F_{g,h}$ con $g \in B$, $h \in L^1(\Omega)$ es denso en $L^1(\Omega, X)$. Por lo tanto, la función $\nu : \Omega \to X'$, definida en casi todo punto por $\nu(x) = \nu_x$ es débil-$*$ medible. Así, concluimos que de hecho lo anterior vale para $F \in L^1(\Omega, X)$ arbitraria, es decir

$$\Phi(F) = \int_\Omega \langle \nu_x, F(x)\rangle\,d\mu(x).$$

Su norma en $L^\infty_\omega(\Omega, X')$ es finita: de hecho se satisface que

$$|\langle \nu_x, g\rangle| = |u_g(x)| \leq \|\Phi\|\|g\|,$$

para $g \in B$. Por densidad de B en X, esto implica que $\|\nu_x\| \leq \|\Phi\|$ para todo $x \in \Omega \setminus N$ y así

$$\|\nu\|_\infty \leq \|\Phi\|,$$

más aun

$$\begin{aligned}\|\Phi\| &= sup_{\|F\|_1\leq 1} \int_\Omega |\langle \nu_x, F(x)\rangle|\,d\mu(x) \\ &\leq sup_{\|F\|_1\leq 1} \int_\Omega \|\nu_x\|\|F(x)\|\,d\mu(x) \leq \|\nu\|_\infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|\Phi\| = \|\nu\|_\infty$. □

Corolario 1.7.9. *Para un espacio de medida sigma finito Ω y un espacio de Banach separable X existe un isomorfismo isométrico entre $(L^1(\Omega, X))'$ y $L^\infty_\omega(\Omega, X')$ dado por la correspondencia $\nu \mapsto \Phi$, donde $\nu \in L^\infty_\omega(\Omega, X')$ y $\Phi \in (L^1(\Omega, X))'$ se define por*

$$\Phi(F) = \int_\Omega \langle \nu_x, F(x)\rangle\,d\mu(x).$$

Demostración. Sean ϕ_g, u_g, N y ν como en la demostración del teorema anterior. En primer lugar hay que verificar que la correspondencia $T : (L^1(\Omega, X))' \to L^\infty_\omega(\Omega, X')$ dada por la construcción $\Phi \mapsto \nu$ queda bien definida[1]. En efecto, supongamos que a la familia de funcionales ϕ_g, se le asocia otra familia $\tilde{u}_g \in L^\infty(\Omega)$ con $u_g = \tilde{u}_g$ en c.t.p.. Denotemos $I_g := \{x \in \Omega : u_g(x) = \tilde{u}_g(x)\}$. Entonces $S_g := X \setminus I_g$ es de medida nula y por lo tanto $S := \cup_{g \in B} S_g$ es de medida nula. Sea $\tilde{N}$ el conjunto de medida nula donde podemos garantizar que todas las funciones $\tilde{u}_g$ son de valor finito. Así mismo denotemos por $\tilde{\nu}$ al elemento correspondiente en $L^\infty_\omega(\Omega, X')$ generado por la construcción. Entonces, para todo $g \in B$ y $x \in X \setminus (N \cup \tilde{N} \cup S)$

$$\langle \nu_x, g \rangle = u_g(x) = \tilde{u}_g(x) = \langle \tilde{\nu}_x, g \rangle.$$

Por lo tanto $\nu = \tilde{\nu}$ en $L^\infty_\omega(\Omega, X')$ y así la correspondencia $T(\Phi) = \nu$ está bien definida.

En segundo lugar, usando su buena definición es rutinario demostrar que T es lineal: Si ϕ^k_g, u^k_g, $\nu^k := T(\Phi^k)$ son las funciones asociadas a Φ^k, $k = 1, 2, 3$, $\Phi^3 = \Phi^1 + \lambda\Phi^2$, entonces por definición

$$\phi^1_g + \lambda\phi^2_g = \phi^3_g,$$

el isomorfismo canónico entre el dual de $L^1(\Omega)$ y $L^\infty(\Omega)$ implica que

$$u^1_g + \lambda u^2_g = u^3_g,$$

por lo tanto en casi todo punto $x \in \Omega$,

$$\langle \nu^1_x + \lambda\nu^2_x, g \rangle = u^1_g(x) + \lambda u^2_g(x) = u^3_g(x) = \langle \nu^3_x, g \rangle,$$

y así

$$\nu^3 = \nu^1 + \lambda\nu^2.$$

Por el Teorema anterior T es una isometría lineal. Para terminar basta ver que T es sobreyectiva. Sea entonces $\nu \in L^\infty_\omega(\Omega, X')$, se define Φ como el candidato natural, es decir

$$\Phi(F) := \int_\Omega \langle \nu_x, F(x) \rangle \, d\mu(x).$$

De su definición es evidente que $\Phi \in (L^1(X, \Omega))'$. Puesto que ν_x es escencialmente acotado en X' las funciones $v_g(x) := \langle \nu_x, g \rangle$ forman una familia en $L^\infty(\Omega)$, además

$$\Phi(F_{g,h}) = \int_\Omega \langle \nu_x, gh(x) \rangle \, d\mu(x) = \int_\Omega v_g(x)h(x) \, d\mu(x).$$

Siguiendo la construcción que define a $T(\Phi)$ esto muestra que de hecho $v_g = u_g$ (en casi todo punto) y así $T(\Phi) = \nu$, como se deseaba. $\square$

Corolario 1.7.10. $L^\infty_\omega(\Omega, X')$ *es un espacio de Banach si* (Ω, Σ, μ) *es un espacio de medida sigma finito y* X *es un espacio de Banach separable.*

[1] Esta verificación es necesaria ya que en un paso de la construcción estamos evaluando en un punto funciones en $L^\infty(\Omega)$.

Para terminar este capítulo, demostraremos la siguiente proposición sobre la separabilidad de los espacios $L^1(\Omega, X)$.

Proposición 1.7.11. *Si $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ es separable y X es un espacio de Banach separable, entonces $L^1(\Omega, X)$ es separable.*

Demostración. Sea A un subconjunto denso contable de $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ y B un subconjunto denso contable de X. Primero vamos a demostrar que el conjunto

$$S = \{F_{g,h} : g \in X, h \in L^1(\Omega)\} \subset L^1(\Omega, X),$$

es separable, donde $F_{g,h}$ está definida por $x \mapsto h(x)g$ (ver proposición 1.7.2). Sean $g \in X$ y $h \in L^1(\Omega)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $g' \in B$ tal que $\|g - g'\|\|h\|_1 < \varepsilon/2$. A su vez existe $h' \in A$ con $\|h' - h\|_1\|g'\| < \varepsilon/2$, así

$$\begin{aligned} \|F_{g,h} - F_{g',h'}\|_1 &= \|F_{g-g',h} + F_{g',h-h'}\|_1 \\ &\leq \|F_{g-g',h}\|_1 + \|F_{g',h-h'}\|_1 \\ &= \|g - g'\|\|h\|_1 + \|g'\|\|h - h'\|_1 < \varepsilon. \end{aligned}$$

esto muestra que el conjunto contable

$$\{F_{g,h} : g \in B, h \in A\} \subset S,$$

es denso en S. Se sigue que el subespacio generado por S es separable y por densidad (proposición 1.7.2), también $L^1(\Omega, X)$ es separable. □

Corolario 1.7.12. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es medible entonces $L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}^d))$ es separable, además hay un isomorfismo isométrico entre $(L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}^d)))'$ y $L^\infty_\omega(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$.*

CAPÍTULO 2

Medidas de Young

2.1. Teorema Fundamental de las Medidas de Young

A continuación presentamos una versión debida a originalmente a Ball [1] y refinada posteriormente por Hungerbühler [8] del Teorema fundamental de las Medidas de Young, que supone hipótesis bastante débiles. La demostración se hace desde la perspectiva del análisis funcional. La forma del teorema como enunciamos aquí está basada en [13].

Teorema 2.1.1. *Sea Ω un conjunto Lebesgue medible de $\mathbb{R}^n$ y sea $z^j : \Omega \to \mathbb{R}^d$ una sucesión de funciones medibles. Entonces existen una subsucesión $(z^{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y una función $\nu : \Omega \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ débil-$*$ medible, tales que:*

(i) *(a)* $\nu_x \geq 0$ *para casi todo* $x \in \Omega$.
(b) $\|\nu_x\| = \int_{\mathbb{R}^d} d\nu_x \leq 1$ *c.t.p.* $x \in \Omega$.

(ii) *Para toda* $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$,

$$f(z^{j_k}) \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{f},$$

donde $\overline{f}(x) = \langle \nu_x, f \rangle$ *en* $L^\infty(\Omega)$.

(iii) *Dado* $K \subset \mathbb{R}^d$ *compacto, si la función* $x \mapsto dist(z^{j_k}(x), K)$ *converge a* 0 *en medida, entonces supp* $\nu_x \subset K$ *c.t.p.* $x \in \Omega$.

(iv) $\|\nu_x\| = 1$ *c.t.p.* $x \in \Omega$ *si se satisface*

$$\lim_{M\to\infty} \sup_k m\left(\left\{|z^{j_k}| \geq M\right\}\right) = 0,$$

llamada ***condición de ajuste****. El recíproco se tiene si* $m(\Omega) < \infty$.

(v) *Si además de la condición de ajuste se tiene* $A \subset \Omega$ *medible,* $f \in C(\mathbb{R}^d)$ *y* $\left\{f(z^{j_k})\right\}$ *es relativamente secuencialmente débilmente compacto* [1] *en* $L^1(A)$*, entonces*

$$f(z^{j_k}) \rightharpoonup \overline{f}$$

[1] Decimos que un subconjunto B de un espacio de Banach X es relativamente secuencialmente débilmente compacto si toda sucesión en B posee una subsucesión débilmente convergente en X.

en $L^1(A)$.

Demostración. **Partes (i) y (ii)**. Para cada $x \in \Omega$ definimos las medidas

$$\nu_x^j = \delta_{\{z^j(x)\}},$$

donde δ_A es la medida de Dirac concentrada en A. Notemos que

$$\left\|\nu_x^j\right\| = 1\,, \left\langle \nu_x^j, f\right\rangle = f(z^j(x)).$$

Así, La función $\nu^j : \Omega \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, dada por $x \mapsto \nu^j(x) := \nu_x^j$, es escencialmente acotada y débil-$*$ medible, esto es $\nu^j \in L_\omega^\infty(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$. Su norma está dada por

$$\left\|\nu^j\right\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \left\|\nu_x^j\right\| = 1.$$

Por lo tanto, la sucesión $(\nu^j)_{j\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L_\omega^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$. Recordemos que $L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}^d))$ es separable y además tenemos el isomorfismo de dualidad (corolario 1.7.12)

$$L_\omega^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)) \cong \Big(L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}^d))\Big)',$$

dado por

$$\langle \mu, \psi\rangle = \int_\Omega \langle \mu_x, \psi_x\rangle\, dx,$$

para cada par $\mu \in L_\omega^\infty(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$ y $\psi \in L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}^d))$. Del teorema de Banach-Alaoglu se sigue que existe una subsucesión $(\nu^{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\nu^j)_{j\in\mathbb{N}}$ que es débil-$*$ convergente. Digamos

$$\nu^{j_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu. \tag{2.1}$$

Notemos que por la semicontinuidad inferior de la norma

$$\|\nu\|_\infty \le \liminf_k \left\|\nu^{j_k}\right\|_\infty = 1,$$

lo cual nos da la parte (i) (b) del enunciado del teorema.
Volviendo a (2.1), la convergencia débil-$*$ significa que para toda $\psi \in L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}^d))$

$$\lim_{k\to\infty} \left\langle \nu^{j_k}, \psi\right\rangle = \langle \nu, \psi\rangle\,,$$

si desarrollamos esto usando el isomorfismo de dualidad y la definición de las ν^j, obtenemos

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \psi_x(z^{j_k}(x))dx = \int_\Omega \langle \nu_x, \psi_x\rangle\, dx, \tag{2.2}$$

en particular, si $\varphi \in L^1(\Omega)$ y $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ la correspondencia

$$\psi_x(y) = \varphi(x) f(y),$$

define un elemento $\psi \in L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}^d))$ (proposición 1.7.2) y con esta ψ la ecuación (2.2) se vuelve

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi(x) f(z^{j_k}(x))dx = \int_\Omega \varphi(x)\, \langle \nu_x, f\rangle\, dx,$$

que no es otra cosa que la parte (ii) del teorema:

$$f(z^{j_k}) \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{f} \ (L^\infty(\Omega)), \tag{2.3}$$

con

$$\bar{f}(x) := \langle \nu_x, f \rangle .$$

La parte (i) (a) se sigue del hecho que las ν_x^j son medidas positivas: Si $f \geq 0$ con $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$, entonces para toda $\varphi \in L^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$,

$$\int_\Omega \varphi(x) \langle \nu_x, f \rangle \, dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi(x) f(z^{j_k}(x)) dx \geq 0. \tag{2.4}$$

Si $\langle \nu_x, f \rangle < 0$ en un conjunto A, de medida positiva finita, entonces tomando $A_n = \{x \in A : \langle \nu_x, f \rangle \leq -1/n\} \cap A$, $A = \cup_n A_n$ y así $m(A_N) > 0$ para algún N. Tomando $\varphi = \chi_{A_N}$,

$$\int_\Omega \varphi(x) \langle \nu_x, f \rangle \, dx \leq -\frac{1}{N} m(A_N) < 0,$$

lo cual contradice (2.4). Por lo tanto ν_x es una medida positiva para casi todo $x \in \Omega$.

Parte (iii). Para demostrar la parte (iii), observemos que $\operatorname{dist}(z^{j_k}, K) \to 0$ en medida es equivalente a la siguiente afirmación: dado U abierto, con $K \subset U$, y $\varepsilon > 0$, existe N tal que si $k > N$, se tiene que

$$m\left(\left\{x \in \Omega : z^{j_k}(x) \notin U\right\}\right) < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Ahora, definamos el conjunto de funciones

$$C_0^K(\mathbb{R}^d) := \left\{ g \in C_0(\mathbb{R}^d) : g|_K \equiv 0 \right\},$$

$\operatorname{supp} \nu_x \subset K$ equivale a ver que $\langle \nu_x, f \rangle = 0$ para toda $f \in C_0^K(\mathbb{R}^d)$ según la proposición 1.2.6. Sea $f \in C_0^K(\mathbb{R}^d)$, entonces para $\alpha > 0$, $U = f^{-1}(-\alpha, \alpha)$ es un abierto que contiene a K, luego por (2.5), existe N tal que $k > N$ implica

$$m\left(\left\{x \in \Omega : z^{j_k}(x) \notin f^{-1}(-\alpha, \alpha)\right\}\right) < \varepsilon,$$

es decir

$$m\left(\left\{x \in \Omega : |f(z^{j_k}(x))| \geq \alpha\right\}\right) < \varepsilon,$$

lo cual demuestra que también $f(z^{j_k}) \to 0$ en medida. Sea

$$V_k = \left\{x \in \Omega : |f(z^{j_k}(x))| \geq \alpha\right\},$$

para $\varphi \in L^1(\Omega)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega f(z^{j_k}) \varphi \right| &\leq \left| \int_{V_k} f(z^{j_k}) \varphi \right| + \left| \int_{\Omega - V_k} f(z^{j_k}) \varphi \right| \\ &\leq \|f\|_\infty \int_{V_k} |\varphi| + \alpha \int_{\Omega - V_k} |\varphi| \\ &\leq \|f\|_\infty \int_{V_k} |\varphi| + \alpha \|\varphi\|_1 , \end{aligned}$$

tomando límites en la anterior desigualdad llegamos a [2]

$$\lim_{k\to\infty}\left|\int_\Omega f(z^{j_k})\varphi\right| \leq \alpha \|\varphi\|_1 .$$

Observemos que el límite del lado izquierdo efectivamente existe debido a la convergencia débil-$*$ que garantiza la parte (ii) del teorema. Como la desigualdad anterior vale para todo $\alpha > 0$, concluimos que

$$\lim_{k\to\infty}\left|\int_\Omega f(z^{j_k})\varphi\right| = 0.$$

En consecuencia $f(z^{j_k}) \stackrel{*}{\rightharpoonup} 0$, y por unicidad del límite, tenemos entonces que $\bar{f} = 0$, es decir $\langle \nu_x, f\rangle = 0 \quad$ c.t.p. $x \in \Omega$, como habíamos dicho esto es equivalente a $\operatorname{supp}\nu_x \subset K$ c.t.p. $x \in \Omega$ que es lo que se quería demostrar en la parte (iii).

Parte (iv). Para demostrar la afirmación (iv), definimos la siguiente función auxiliar $T^M \in C_0(\mathbb{R}^d)$,

$$T^M(z) := \begin{cases} 1 & |z| \leq M \\ 1 + M - |z| & M \leq |z| \leq M+1 \\ 0 & |z| \geq M+1 \end{cases} \tag{2.6}$$

Es inmediato que $\left\|T^M\right\|_\infty = 1$. Si $E \subset \Omega$ es medible y de medida finita, entonces $\chi_E \in L^1(\Omega)$ luego aplicando la parte (ii) del teorema a T^M resulta

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_E T^M(z^{j_k}(x))dx &= \int_E \left\langle \nu_x, T^M(z^{j_k})\right\rangle dx \\ &\leq \int_E \|\nu_x\|\, dx,\end{aligned} \tag{2.7}$$

notemos que

$$\int_E (1 - T^M(z^{j_k})) \leq m(\{|z^{j_k}| \geq M\} \cap E),$$

y por lo tanto

$$m(E) - m(\{|z^{j_k}| \geq M\} \cap E) \leq \int_E T^M(z^{j_k}(x))dx. \tag{2.8}$$

Ahora, supongamos que se satisface la condición de ajuste

$$\lim_{M\to\infty}\sup_k m\left(\left\{|z^{j_k}| \geq M\right\}\right) = 0. \tag{2.9}$$

Como $m(\{|z^{j_k}| \geq M\} \cap E) \leq m(\{|z^{j_k}| \geq M\}) \leq \sup_k m\left(\left\{|z^{j_k}| \geq M\right\}\right)$, (2.8) implica

$$m(E) - \sup_k m(\{|z^{j_k}| \geq M\}) \leq \int_E T^M(z^{j_k}(x))dx, \tag{2.10}$$

tomando límite sobre k, usando (2.7) y luego sobre M usando (2.9), concluimos de (2.10) que

$$m(E) \leq \int_E \|\nu_x\|\, dx. \tag{2.11}$$

[2] Puesto que $\varphi \in L^1(\Omega)$ es uniformemente integrable, $\lim \int_{V_k} |\varphi| = 0$. Véase ejemplo A.0.4.

Como $\|\nu_x\| \leq 1$ c.t.p. $x \in \Omega$ se sigue que de hecho tenemos igualdad en (2.11) y como E es arbitrario entonces $\|\nu_x\| = 1$ c.t.p. $x \in \Omega$.
Recírpcoamente, supongamos que $\|\nu_x\| = 1$ c.t.p. $x \in \Omega$ y $m(\Omega) < \infty$. Por simplicidad supongamos que $(z^k)_{k\in\mathbb{N}}$ genera directamente la medida ν. Razonamos por contradicción, si la condición de ajuste no se tiene, entonces existe $\varepsilon > 0$ enteros k_j y reales $M_j > 0$ tales que $\lim_{j\to\infty} M_j = \infty$ y

$$m(\{|z^{k_j}| \geq M_j\}) \geq \varepsilon.$$

Puesto que $|z^{k_j}| < \infty$ c.t.p. $x \in \Omega$ se puede suponer también que $k_j \to \infty$. Ahora, dado $\rho > 0$, para j suficientemente grande

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= m(\{|z^{k_j}| \geq M_j\}) + m(\{|z^{k_j}| < M_j\}) \\ &\geq \varepsilon + \int_{\{|z^{k_j}|<M_j\}} 1 \\ &\geq \varepsilon + \int_\Omega T^{M_j+1}(z^{k_j}) \\ &\geq \varepsilon + \int_\Omega T^\rho(z^{k_j}). \end{aligned}$$

Por otro lado, puesto que $\chi_\Omega \in L^1(\Omega)$, por la parte (ii) ya demostrada tenemos que

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega T^\rho(z_j^k) = \int_\Omega \langle \nu_x, T^\rho \rangle \, dx,$$

por lo tanto

$$m(\Omega) \geq \varepsilon + \int_\Omega \langle \nu_x, T^\rho \rangle \, dx. \tag{2.12}$$

Finalmente observemos que si $\rho \to \infty$, entonces para c.t.p. $x \in \Omega$ se tiene por el teorema de convergencia monótona que $\lim_{\rho\to\infty} \langle \nu_x, T^\rho \rangle = \langle \nu_x, 1 \rangle = \|\nu_x\| = 1$. A su vez también $\langle \nu_x, T^\rho \rangle$ es creciente, así nuevamente por el teorema de convergencia monótona

$$\lim_{\rho\to\infty} \int_\Omega \langle \nu_x, T^\rho \rangle \, dx = \int_\Omega 1 = m(\Omega),$$

lo cual contradice (2.12).

Parte (v). Por último supongamos que se tiene la condición de ajuste, $f \in C(\mathbb{R}^d)$ y que $\left\{f(z^{j_k})\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ es relativamente secuencialmente débilmente compacto en $L^1(A)$. Por el corolario A.2.3 del teorema de Dunford-Pettis también $\left\{f^+(z^{j_k})\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\left\{f^-(z^{j_k})\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ son relativamente secuencialmente débilmente compactos. Por lo tanto para demostrar la parte (v) del teorema es suficiente suponer que $f \geq 0$. Es también claro que basta demostrar el resultado para el caso en que A es acotado y (pasando a subsucesiones) $f(z^{j_k}) \rightharpoonup g$ en $L^1(A)$.
Definamos $f^M \in C_0(\mathbb{R}^d)$ por $f^M = T^M f$, donde T^M es como en (2.6). Dada $\phi \in L^\infty(A)$ se afirma que

$$\lim_{M\to\infty} \int_A \phi f^M(z^{j_k}) = \int_A \phi f(z^{j_k}), \tag{2.13}$$

y que esta convergencia es uniforme en k, en otras palabras, para cada $\varepsilon > 0$, existe N que no depende de k tal que $M \geq N$ implica

$$\left| \int_A \phi f^M(z^{j_k}) - \int_A \phi f(z^{j_k}) \right| < \varepsilon.$$

En efecto, para empezar tenemos la desigualdad

$$\int_A \phi \left(f(z^{j_k}) - f^M(z^{j_k}) \right) \leq C \int_{\left\{ |z^{j_k}| \geq M \right\} \cap A} f(z^{j_k}). \tag{2.14}$$

Ahora, dado $\varepsilon > 0$, por el Teorema A.2.2 (Dunford-Pettis) , existe $L > 0$ tal que

$$\sup_k \int_{\left\{ f(z^{j_k}) \geq L \right\} \cap A} f(z^{j_k}) \leq \varepsilon,$$

luego, descomponiendo la integral (2.14) sobre el conjunto $\left\{ f(z^{j_k}) \geq L \right\} \cap A$ y su complemento (relativo a A), obtenemos la desigualdad

$$\int_{\left\{ |z^{j_k}| \geq M \right\} \cap A} f(z^{j_k}) \leq \varepsilon + L \cdot m(\left\{ |z^{j_k}| \geq M \right\}) < 2\varepsilon,$$

donde la última desigualdad es válida para todo k y se justifica por la condición de ajuste (2.9), tomando M suficientemente grande. Se concluye que el límite (2.13) es uniforme en k.

Para terminar, la parte (ii) del teorema nos garanitza, dado que $\chi_A \phi \in L^1(\Omega)$,

$$\lim_{k \to \infty} \int_A \phi(x) f^M(z^{j_k}(x)) dx = \int_A \phi(x) \left\langle \nu_x, f^M \right\rangle dx.$$

Así,

$$\lim_{M \to \infty} \lim_{k \to \infty} \int_A \phi(x) f^M(z^{j_k}(x)) dx = \lim_{M \to \infty} \int_A \phi(x) \left\langle \nu_x, f^M \right\rangle dx.$$

Como el límite (2.13) es uniforme en k esto es

$$\lim_{k \to \infty} \int_A \phi(x) f(z^{j_k}(x)) dx = \lim_{M \to \infty} \int_A \phi(x) \left\langle \nu_x, f^M \right\rangle dx,$$

y dado que $f(z^{j_k}) \rightharpoonup g$

$$\int_A \phi(x) g(x) dx = \lim_{M \to \infty} \int_A \phi(x) \left\langle \nu_x, f^M \right\rangle dx.$$

Supongamos por el momento que $\phi \geq 0$; como f^M resulta creciente y converge puntualmente a f, el teorema de convergencia monótona (aplicado a la medida ν_x) nos da que $\left\langle \nu_x, f^M \right\rangle$ es creciente y converge puntualmente a $\langle \nu_x, f \rangle$, nuevamente por el mismo teorema, esta vez aplicado a la ecuación anterior nos da

$$\int_A \phi(x) g(x) dx = \int_A \phi(x) \langle \nu_x, f \rangle dx. \tag{2.15}$$

Tomando $\phi = \phi^+ - \phi^-$ se sigue que (2.15) también vale para ϕ arbitraria. Así $g(x) = \langle \nu_x, f\rangle$ c.t.p. $x \in A$ como se deseaba. □

Definición 2.1.2. *Llamamos a la función $\nu \in L^\infty_\omega(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$ del Teorema 2.1.1* ***medida de Young*** *o función generalizada de Young. Además decimos que la sucesión $(z^{j_k})_{k\in N}$ genera la medida de Young ν.*

Observación 2.1.3. *Si para algún $p \in [1, \infty)$, la sucesión z^j es acotada en $L^p(\Omega)$, entonces se tiene la condición de ajuste. Esto se sigue de la desigualdad de Chevishev, explícitamente*

$$M^{-p} \int_{\{|z^j|>M\}} |z^j|^p \geq m(\{|z^j| > M\}).$$

Observación 2.1.4. *Es posible definir la noción de medida de Young sin mencionar la sucesión generadora. De hecho, es posible demostrar que toda función $\nu \in L^\infty_\omega(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$ que satisfaga la condición (i) del teorema fundamental de las medidas de Young, es una medida de Young generada por alguna sucesión de funciones medibles.*

Observación 2.1.5. *En [9] se muestra que de hecho las dos condiciones de (iv) son a su vez equivalentes a (v) bajo la hipótesis Ω acotado.*

Observación 2.1.6. *La condición (ii) del Teorema Fundamental de las Medidas de Young es equivalente a la condición $\nu^{j_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu$ de la demostración del teorema (ecuación (2.1)). Esto gracias a la proposición 1.7.2, la cual establece que las funciones $F_{f,\varphi} : \Omega \to C_0(\mathbb{R}^d) : x \mapsto \varphi(x)f$, con $\varphi \in L^1(\Omega)$ y $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$, generan un subespacio denso de $L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}^d))$. En particular, dado $\nu \in L^\infty_\omega(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$, es suficiente probar la identidad (2.3) con $\varphi \in L^1(\Omega)$, $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ arbitrarias, para concluir que ν es la medida de Young generada por z^{j_k}.*

Definición 2.1.7. *Para una función vectorial $F = (f_1, \ldots, f_r)$ y una medida μ en X, $\langle \mu, F\rangle = \int_X F\, d\mu = \int_X F(\xi)\, d\mu(\xi)$ se entiende por componentes, es decir*

$$\langle \mu, F\rangle = (\langle \mu, f_1\rangle, \ldots, \langle \mu, f_r\rangle).$$

En particular si Id es la función identidad de $\mathbb{R}^d$

$$\langle \nu_x, Id\rangle = (\langle \nu_x, \pi_1\rangle, \ldots, \langle \nu_x, \pi_d\rangle) = \int_{\mathbb{R}^d} \xi d\nu_x(\xi),$$

donde $\pi_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es la proyección sobre la i-esima coordenada.

Observación 2.1.8. *El Teorema Fundamental de las Medidas de Young es válido si cambiamos f por una función de rango en $\mathbb{R}^p$. Esto es inmediato aplicando el teorema a las componentes de f.*

Como se había mencionado la versión que hemos presentado del teorema de medidas de Young se basa en suposiciones bastante débiles en cuanto a la sucesión (z^j) y a la función f. A continuación recuperamos el teorema en su versión clásica, como se encuentra por ejemplo en [5]. Esto muestra que el teorema demostrado es más general que otras versiones particulares en la literatura.

2.2. Teorema clásico de las Medidas de Young

Teorema 2.2.1. *Supongamos que $K \subset \mathbb{R}^d$ es acotado y Ω es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. Sea u^ε $(\varepsilon \to 0)$ una sucesión de funciones medibles, con $u^\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}^d$, tal que $u^\varepsilon(x) \in K$ c.t.p. $x \in \Omega$. Entonces existe una sucesión (u^{ε_k}) $(\varepsilon_k \to 0)$ y una familia de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}^d$ $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ con $\operatorname{supp}\nu_x \subset \overline{K}$ tal que si $f \in C(\mathbb{R}^d)$ y*

$$\bar{f}(x) = \langle \nu_x, f\rangle\,, \tag{2.16}$$

entonces

$$f(u^{\varepsilon_k}) \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{f}, \tag{2.17}$$

en $L^\infty(\Omega)$.

Demostración. Sea $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ la medida de Young asociada a u^ε y u^{ε_k} la subsucesión generadora de la medida. Puesto que $u^\varepsilon(x) \in K$ c.t.p. $x \in \Omega$ las partes (ii) y (iii) del teorema 2.1.1 quedan satisfechas automáticamente para el compacto $\overline{K}$ y así $\operatorname{supp}\nu_x \subset \overline{K}$ y también tenemos que ν_x es medida de probabilidad c.t.p. $x \in \Omega$.
Por otro lado sea $f \in C(\mathbb{R}^d)$. Existe una función [3] $g \in C_0(\mathbb{R}^d)$ tal que $g(\overline{K}) = 1$. Entonces $fg \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Aplicando la parte (ii) del teorema 2.1.1 se concluye que

$$fg(u^{\varepsilon_k}) \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{fg},$$

donde $\overline{fg}(x) = \langle \nu_x, fg\rangle$ en $L^\infty(\Omega)$. Puesto que $g(\overline{K}) = 1$ y $u^\varepsilon(x) \in K$ c.t.p. $x \in \Omega$, tenemos que $fg(u^{\varepsilon_k}) = f(u^{\varepsilon_k})$ y además de $\operatorname{supp}\nu_x \subset \overline{K}$ se deduce fácilmente que $\langle \nu_x, fg\rangle = \langle \nu_x, f\rangle$. Por lo tanto se cumplen las ecuaciones (2.16) y (2.17). □

Observación 2.2.2. *En la mayoría de las referencias (por ejemplo [5]) se hace uso de herramientas de teoría de la medida para mostrar este caso particular. Aquí hemos presentado una demostración alternativa (y más corta), que nos da una idea de la fuerza del resultado más general (Teorema 2.1.1). Es de resaltar que esto se debe en buena parte al uso de herramientas de análisis funcional en su demostración.*

Observación 2.2.3. *Es de resaltar el tipo de información de $(z^j)_{j\in\mathbb{N}}$ que se captura con una medida de Young ν generada por la sucesión. Suponiendo que Ω es abierto y fijando $x_0 \in \Omega$, podemos llamar $\nu^j_{x_0,r}$ a la medida de probabilidad que representa distribución de los valores $z^j(x)$ con x en una bola abierta de radio $r > 0$, centrada en x_0, $B_r(x_0)$. En este caso se puede demostrar que la medida de Young ν es el límite iterado*

$$\nu = \lim_{r\to 0} \lim_{j\to\infty} \nu^j_r,$$

donde la convergencia es en $L^\infty_\omega(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$. Un tratamiento riguroso de esta idea se expone en [1].

[3] Por ejemplo, una función cut-off como T^ρ en la demostración de la parte (ii) del Teorema Fundamental de las Medidas de Young.

2.3. Ejemplos

A continuación exponemos algunos ejemplos clásicos de medidas de Young generadas por sucesiones, para otros ejemplos más avanzados véase [13] sec 3.2..

Ejemplo 2.3.1. *Sean a y b reales arbitrarios y $\lambda \in (0,1)$. Consideremos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función periódica de periodo 1 definida por*

$$h(x) = \begin{cases} a, & 0 \leq x < \lambda \\ b, & \lambda \leq x < 1 \end{cases}$$

y definamos $z^j : [0,1] \to R$ por

$$z^j(x) := h(jx),$$

entonces $(z^j)_{j\in\mathbb{N}}$ genera (sin pasar a subsucesiones) la medida de Young

$$\nu_x = \lambda\delta_a + (1-\lambda)\delta_b.$$

En particular ν_x es independiente de x [4].

Demostración. De acuerdo con la observación 2.1.6 es suficiente demostrar que

$$f(z^j) \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{f},$$

para $f \in C_0(\mathbb{R})$ arbitraria, donde $\overline{f}(x) = \langle \nu_x, f\rangle = \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$. Primero veamos que $z^j \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda a + (1-\lambda)b$, para esto es suficiente ver que para φ continua en $[0,1]$

$$\int_0^1 z^j\varphi \to (\lambda a + (1-\lambda)b)\int_0^1 \varphi,$$

ya que las funciones continuas son densas en $L^1([0,1])$ y $(z^j)_{j\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^\infty([0,1])$. Calculando directamente:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 z^j(x)\varphi(x)dx &= \int_0^1 h(jx)\varphi(x)dx \\
&= \sum_{k=0}^{j-1}\left(a\int_{k/j}^{(k+\lambda)/j}\varphi(x)dx + b\int_{(k+\lambda)/j}^{(k+1)/j}\varphi(x)dx\right) \\
&= \sum_{k=0}^{j-1}\left(\frac{a\lambda}{j}\varphi(t_k) + \frac{b(1-\lambda)}{j}\varphi(u_k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{j-1}\frac{a\lambda}{j}\varphi(t_k) + \sum_{k=0}^{j-1}\frac{b(1-\lambda)}{j}\varphi(u_k),
\end{aligned}$$

La existencia de $t_k \in [k/j, (k+\lambda)/j]$ y $u_k \in [(k+\lambda)/j, (k+1)/j]$ se justifica por el teorema del valor intermedio del cálculo integral y la continuidad de φ. En particular t_k y u_k son

[4] Este tipo de medida se llama medida de Young **homogénea**.

elementos del intervalo $[k/j,(k+1)/j]$. Esto significa que

$$\int_0^1 z^j(x)\varphi(x)dx = \lambda a T_j + (1-\lambda) b U_j,$$

donde T_j y U_j son sumas de Riemann para φ con partición en intervalos de tamaño $1/j$. Haciendo $j \to \infty$ obtenemos la primera afirmación, es decir $z^j \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda a + (1-\lambda)b$. La afirmación $f(z^j) \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$ se sigue cambiando h por

$$\hat{h}(x) = \begin{cases} f(a), & 0 \leq x < \lambda \\ f(b), & \lambda \leq x < 1 \end{cases}$$

Nótese que $\hat{h}(x) = f(h(x))$ y así $\hat{z}^j(x) = \hat{h}(jx) = f(h(jx)) = f(z^j(x))$, por lo tanto usando el hecho ya demostrado, $\hat{z}^j \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$, y así $f(z^j) \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$ como se deseaba. □

El siguiente ejemplo clásico ilustra el orgien de las medidas de Young en un contexto variacional.

Ejemplo 2.3.2. ***(L.C. Young)*** *Consideremos el problema variacional*

$$\inf_{u \in S} (I(u)),$$

donde $S = W_0^{1,4}((0,1))$ *y*

$$I(u) = \int_0^1 (u_x^2 - 1)^2 + u^2 \, dx.$$

Entonces

1. *El ínfimo del funcional* I *es* 0 *y existe una sucesión* $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de funciones continuas satisfaciendo* $u^n(0) = u^n(1) = 0$*, tal que* $\lim_{n\to\infty} I(u^n) = 0$*. Además* $z^n := u_x^n$*, genera la medida de Young homogénea* $\nu_x = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$*.*
2. *La medida de Young* ν *generada por las derivadas distribucionales* $z^n := u_x^n$ *de cualquier otra sucesión minimizadora* $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* I *es* $\nu_x = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$*.*

Antes de hacer la demostración de las afirmaciones del ejemplo notemos que la restricción al espacio de Sobolev $W^{1,4}$ es apropiada. De hecho, para una función u en algún espacio de Sobolev, $I(u) < \infty$ implica que $u \in L^2$ y $(u_x)^2 \in L^2$, por lo tanto $u_x \in L^4$. Se sigue que $u \in W^{1,4}((0,1))$. Además, como se había mencionado en los preliminares, la condición $u \in S = W_0^{1,4}((0,1))$ es simplemente la generalización de la condición de forntera $u(0) = u(1) = 0$ a los espacios de Sobolev.

Demostración. 1. Es claro que el ínfimo del funcional I debe ser no negativo, por lo tanto basta encontrar una sucesión que cumpla $\lim_{n\to\infty} I(u^n) = 0$. Para mostrar existencia de la sucesión minimizadora consideremos, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función periódica de periodo 1, que coincide con $|x|$ en el intervalo $[-1/2, 1/2]$. Nótese que f es Lipschitz continua y tiene forma de diente de sierra. Definimos $u^n : (0,1) \to \mathbb{R}$ como $u^n(x) = f(nx)$, cuya forma también es de diente de sierra pero con dientes más y más finos conforme $n \to \infty$. Notemos que la funcion identidad del intervalo $(0,1)$ pertenece a todos los espacios de Sobolev $W^{1,p}((0,1))$: su derivada distribucional (que coincide con la clásica) es la función constante 1 que pertenece a cualquier $L^p((0,1))$. Así mismo la recta nx es una función en $W^{1,p}((0,1))$, en particular para $p=4$. Al componer esta recta con f obtenemos u^n. Así el teorema de Stampacchia 1.4.3 garantiza por un lado que $u^n \in W^{1,4}((0,1))$ y por otro que la derivada distribucional es la esperada en donde u^n es derivable, esto significa que u^n_x toma los valores ± 1 alternadamente. Específicamente $u^n_x = z^n$ donde z^n es la sucesión de funciones del ejemplo anterior con $\lambda = 1/2$, $a=1$, $b=-1$. Por el mismo ejemplo u^n genera la medida de Young homogénea $\nu_x = \frac{1}{2}(\delta_{-1}+\delta_1)$. Finalmente es claro que $(u^n_x)^2 = 1$ y que $u^n \to 0$ en $L^2((0,1))$, por lo tanto $I(u^n) \to 0$.

2. Veamos que todas las sucesiones minimizadoras comparten la propiedad de generar la misma medida de Young. Sea u^n una sucesión minimizadora de I y definamos $z^n := u^n_x$. Una subsucesión que seguimos denotando z^n, genera la medida de Young ν. Puesto que $I(u^n) \to 0$, tenemos que $(z^n)^2 \to 1$ en $L^2((0,1))$ y por lo tanto z^n es acotada en $L^4((0,1))$, la observación 2.1.3 implica que se tiene la condición de ajuste. Por lo tanto al ser $(0,1)$ de medida finita, la parte (iv) del teorema fundamental de las medidas de Young garantiza que ν_x es medida de probabilidad c.t.p. $x \in (0,1)$. Sea $g(z) := (z^2-1)^2$, entonces $g(z^n)$ converge fuerte y débilmente a 0 en $L^1((0,1))$ ya que $I(u^n) \geq \int_0^1 g(z^n)$. En particular $g(z^n)$ es secuencialmente débilmente compacto en $L^1((0,1))$. Por lo tanto aplicando la parte (v) del teorema fundamental de las medidas de Young $g(z^n) \rightharpoonup \bar{g}$ en $L^1((0,1))$, donde $\bar{g}(x) = \langle \nu_x, g\rangle$. Por unicidad del límite se sigue que en c.t.p.

$$\langle \nu_x, g\rangle = 0.$$

Por la proposición 1.2.7 tenemos que $\operatorname{supp}\nu_x \subset \ker g = \{1,-1\}$. Así al ser medida de probabilidad,

$$\nu_x = \lambda(x)\delta_{-1} + (1-\lambda(x))\delta_1.$$

Ahora, escojamos como función la identidad, es decir $Id(p) := p$. De la parte (iv) del teorema fundamental, se tiene que

$$z^n \rightharpoonup \overline{Id},\ \overline{Id}(x) = \langle \nu_x, Id\rangle = 1 - 2\lambda(x). \tag{2.18}$$

Por otro lado, si ϕ es una función suave de soporte compacto en $(0,1)$, tenemos por definición de derivada distribucional que

$$\int_0^1 z^n\phi = -\int_0^1 \phi_x u^n.$$

Puesto que $I(u^n) \geq \|u^n\|_2$, $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en $L^2((0,1))$, por lo tanto el lado derecho de la ecuación anterior converge a 0. Así, tomando límites y usando (2.18), llegamos a que

$$\int_0^1 (1-2\lambda(x))\phi(x)\,dx = 0.$$

Como ϕ es arbitraria y las funciones suaves son densas en $L^2((0,1))$ se sigue por el teorema de representación de Riesz que $1-2\lambda(x)=0$ c.t.p. $x\in\Omega$, así $\lambda(x)=1/2$ en c.t.p. y ν es la medida de Young dada en c.t.p. por

$$\nu_x = \frac{1}{2}(\delta_{-1}+\delta_1).$$

Como la subsucesión escogida de $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es arbitraria se sigue que la sucesión inicial también genera esta medida de Young.

□

2.4. Algunas Consecuencias del Teorema Fundamental

Uno de los principales métodos de aplicación del teorema fundamental de las medidas de Young consiste en usar funciones específicas f y aplicar las partes (ii) y (v) del teorema. Presentamos algunos resultados que se benefician de esta técnica.

Corolario 2.4.1. *Sea $z^j:\Omega\to\mathbb{R}^d$ una sucesión generadora de la medida de Young ν. Si $z^j\to z$ en medida, entonces $\nu_x=\delta_{z(x)}$ c.t.p $x\in\Omega$. El recíproco se tiene si $m(\Omega)<\infty$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $z^j\to z$ en medida entonces para toda $f\in C_0(\mathbb{R}^d)$, tenemos que f es uniformemente continua y por lo tanto $f(z^j)\to f(z)$ en medida. Veamos que también $f(z^j)\overset{*}{\rightharpoonup} f$ en $L^\infty(\Omega)$. Dado $\alpha>0$ sea

$$V_j=\left\{x\in\Omega : |f(z^j(x))-f(z(x))|\geq\alpha\right\},$$

entonces para $\varphi\in L^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \varphi(f(z^j)-f(z))\right| &\leq \int_\Omega |\varphi||f(z^j)-f(z)|\\ &\leq \int_{V_j}|\varphi||f(z^j)-f(z)|+\int_{\Omega\setminus V_j}|\varphi||f(z^j)-f(z)|\\ &\leq \left\|f(z^j)-f(z)\right\|_\infty\int_{V_j}|\varphi|+\alpha\left\|\varphi\right\|_1,\end{aligned}$$

haciendo $j\to\infty$ y $\alpha\to 0$

$$\lim_{j\to\infty}\left|\int_\Omega\varphi(f(z^j)-f(z))\right|=0.$$

Así $f(z^j)\overset{*}{\rightharpoonup} f(z)$. Como la sucesión z^j genera la medida de Young concluimos por unicidad del límite débil-$*$ que $f(z)=\bar{f}$ c.t.p. $x\in\Omega$, esto es $\left\langle\delta_{z(x)},f\right\rangle=f(z(x))=\langle\nu_x,f\rangle$ y así $\nu_x=\delta_{z(x)}$ c.t.p. $x\in\Omega$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\nu_x=\delta_{z(x)}$ y $m(\Omega)<\infty$, la demostración se hace en tres pasos, como se presenta en [8]:

1. Demostramos que $z^j\to z$ en medida para el caso en que z^j es acotada. En efecto, de ser así $f(z^j)$ es escencialmente acotada para cada $f\in C(\mathbb{R}^d)$, y por el Teore-

ma de Dunford Pettis (véase corolario A.2.4) $f(z^j)$ es también relativamente secuencialmente débilmente compacta en $L^1(\Omega)$. Aplicando la parte (v) del Teorema fundamental de las Medidas de Young, llegamos a

$$\lim_{j\to\infty} \|z^j\|^2_{L^2(\Omega)} = \|z\|^2_{L^2(\Omega)},$$
$$z^j \rightharpoonup z \text{ en } L^2(\Omega),$$

para $f(x) = |x|^2$ y $f = Id$ respectivamente. Este par de condiciones (convergencia débil y de normas en el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$) implica convergencia fuerte en $L^2(\Omega)$ y por lo tanto convergencia en medida, como se deseaba.

2. Para z^j arbitraria generando la medida $\nu_x = \delta_{z(x)}$, mostramos que $T_R(z^j) \to T_R(z)$ en medida, donde $R > 0$ y

$$T_R(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}R & |x| > R \\ x & |x| \le R \end{cases}$$

Notemos que T_R es continua y $|T_R| \le R$. Se sigue que para cada $f \in C(\mathbb{R}^d)$ $f \circ T_R$ es continua, además $f \circ T_R(z^j)$ es escencialmente acotada y por el Teorema de Dunford Pettis, es relativamente secuencialmente débilmente compacta en $L^1(\Omega)$; aplicando nuevamente la parte (v) del Teorema Fundamental de las Medidas de Young, se sigue que

$$f \circ T_R(z^j) \rightharpoonup f \circ T_R(z).$$

Por otro lado cualquier subsucesión de $T_R(z^j)$ tiene a su vez una subsucesión que genera una medida de Young μ, para la cual se satisface la parte (v) del teorema, así

$$f \circ T_R(z^{j_k}) \rightharpoonup \overline{f \circ T_R}\ ,\ \overline{f \circ T_R}(x) = \langle \mu_x, f \circ T_R \rangle.$$

Por unicidad del límite débil esto quiere decir que la sucesión (completa) $T_R(z^j)$ genera la medida de Young $\mu_x = \delta_{T_R(z(x))}$. Se sigue por el paso anterior que $T_R(z^j) \to T_R(z)$ en medida.

3. Mostramos que $z^j \to z$ en medida.
En efecto,

$$\begin{aligned} m(\{|z^j - z| > \varepsilon\}) &\le m(\{|z^j - z| > \varepsilon; |z|, |z^j| \le R\}) \\ &\quad + m(\{|z^j| > R\}) + m(\{|z| > R\}) \\ &\le m(\{|T_R(z^j) - T_R(z)| > \varepsilon\}) \\ &\quad + m(\{|z^j| > R\}) + m(\{|z| > R\}). \end{aligned}$$

Cuando $j \to \infty$, la cantidad $m(\{|T_R(z^j) - T_R(z) > \varepsilon\})$ se puede hacer pequeña por el paso 2. Naturalmente $m(\{|z| > R\}) \to 0$ si $R \to \infty$. Finalmente puesto que $\nu_x = \delta_{z(x)}$ es medida de probabilidad, la parte (iii) del teorema fundamental de las medidas de Young nos da la condición de ajuste, esto implica que $m(\{|z^j| > R\}) \to 0$ (uniformemente en j) si $R \to \infty$, así $z^j \to z$ en medida como se deseaba.

$\square$

Corolario 2.4.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de medida finita. Supongamos que $z^j : \Omega \to \mathbb{R}^d$ es una sucesión de funciones medibles generadoras de la medida de Young ν, con $z^j \rightharpoonup z$ en $L^p(\Omega)$. Entonces se satisface la condición de ajuste (parte (iv) del Teorema 2.1.1), en particular ν_x es medida de proabilidad c.t.p. $x \in \Omega$. Además z^j es relativamente secuencialmente débilmente compacto en $L^1(\Omega)$ y z tiene la representación*

$$z(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \xi \, d\nu_x(\xi) = \langle \nu_x, Id \rangle \quad c.t.p. \ x \in \Omega.$$

Donde Id es la función identidad de $\mathbb{R}^d$. Si adicionalmente la sucesión z^j es acotada en $L^\infty(\Omega)$, se tiene que $f(z^j)$ es relativamente secuencialmente débilmente compacto en $L^1(\Omega)$ para cada $f \in C(\mathbb{R}^d)$ y

$$f(z^j) \rightharpoonup \bar{f} \ \text{ en } \ L^1(\Omega).$$

Demostración. $(z^j)_{j\in\mathbb{N}}$ debe ser acotada al ser débilmente convergente[5] en L^p, digamos $\left\|z^j\right\|_p \leq C$. Se sigue que

$$M^p m(\{|z^j| \geq M\}) \leq \int_\Omega |z^j|^p.$$

Naturalmente esto implica

$$\sup_j m(\{|z^j| \geq M\}) \leq \frac{C^p}{M^p},$$

y por lo tanto se tiene la condición de ajuste.
Al ser Ω de medida finita, $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, por lo tanto $z^j, z \in L^1(\Omega)$. Además puesto que en este caso también $L^\infty(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, tenemos que $z^j \rightharpoonup z$ en $L^p(\Omega)$ implica $z^j \rightharpoonup z$ en $L^1(\Omega)$, en particular z^j es relativamente secuencialmente débilmente compacta en $L^1(\Omega)$ (pues es débilmente convergente en $L^1(\Omega)$). Con esto $Id(z^j) = z^j \rightharpoonup \overline{Id}$ en $L^1(\Omega)$ por la parte (v) del teorema fundamental de las medidas de Young en su versión vectorial (observación 2.1.8). Así por unicidad del límite débil z tiene la representación

$$z(x) = \overline{Id}(x) = \langle \nu_x, Id \rangle = \int_\Omega \xi d\nu_x(\xi) \ \text{ c.t.p. } \ x \in \Omega.$$

Si además z^j es acotada en $L^\infty(\Omega)$, lo mismo sucede con $f(z^j)$ para cada $f \in C(\mathbb{R}^d)$ puesto que f es continua. Nuevamente $f(z^j)$ es relativamente secuencialmente débilmente compacta en $L^1(\Omega)$ por el Teorema de Dunford-Pettis (véase A.2.4). La afirmación del corolario se sigue volviendo a usar la parte (v) del teorema fundamental de las medidas de Young. □

2.5. Algunas Herramientas Técnicas

A continuación exponemos dos resultados técnicos que serán útiles más adelante

Definición 2.5.1. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y X, Y espacios topológicos. Decimos que una función $f : \Omega \times X \to Y$ es de Carathéodory si staisface las siguientes condiciones.*

[5] Esto es consecuencia del principio de acotación uniforme en análisis funcional.

1. *$f(\cdot, u)$ es medible para cada $u \in X$.*

2. *$f(t, \cdot)$ es continua para cada $t \in \Omega$.*

El siguiente teorema clásico, es una versión del teorema de Lusin para de funciones Carathéodory.

Teorema 2.5.2. ***(Scorza-Dragoni)*** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un conjunto medible con $m(\Omega) < \infty$ y $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $m(\Omega \setminus K) < \varepsilon$ y $f|_{K \times \mathbb{R}^d}$ es continua.*

Demostración. Véase [11], Teorema 1. □

El siguiente lema hace las veces de lema de Fatou para funciones de Carathéodory, en el contexto de medidas de Young.

Lema 2.5.3. *Sea Ω un conjunto medible de medida finita y $z^j : \Omega \to \mathbb{R}^d$ sucesión generadora de la medida de Young ν.*
Sea $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory y supongamos que la sucesión $f^-(\cdot, z^j(\cdot)))$ es relativamente secuencialmente débilmente compacta en $L^1(\Omega)$. Entonces,

$$\liminf_{j \to \infty} \int_\Omega f(x, z^j(x))\, dx \geq \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y)\, d\nu_x(y)\, dx. \tag{2.19}$$

Si adicionalmente, la sucesión $|f|(\cdot, z^j(\cdot)))$ es relativamente secuencialmente débilmente compacta en $L^1(\Omega)$, entonces

$$f(\cdot, z^j(\cdot)) \rightharpoonup h, \tag{2.20}$$

en $L^1(\Omega)$. Aquí $f(\cdot, z^j(\cdot))$ se entiende como la función de una variable $x \mapsto f(x, z^j(x))$ y h está dada por

$$h(x) = \langle \nu_x, f(x, \cdot) \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) d\nu_x(y).$$

Demostración. Supongamos por el momento que $f \geq 0$ y que $f(x, y) = 0$ si $|y| \geq R$. Por el teorema de Scorza-Dragoni existe una sucesión creciente de compactos $\Omega^k \subset \Omega$ tal que $m(\Omega \setminus \Omega^k) \to 0$ y f es continua en $\Omega^k \times \mathbb{R}^d$. Se define la siguiente sucesión de funciones,

$$F^k : \Omega \to C_0(\mathbb{R}^d), x \mapsto F^k(x) = \chi_{\Omega^k}(x) f(x, \cdot).$$

$F^k \in L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}^d))$ por el estimado

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|F(x)\|\, dx &= \int_\Omega \sup_{|y| \leq R} |f(x, y)| \chi_{\Omega_k}(x)\, dx \\ &= \int_{\Omega_k} \sup_{|y| \leq R} |f(x, y)|\, dx \leq C m(\Omega_k) < \infty,\end{aligned}$$

donde $C = \sup_{|y| \leq R, x \in \Omega_k} |f(x, y)|$. Entonces, como $\nu^j = \delta_{z^j(\cdot)}$ converge débil-$*$ a la medida de Young ν, $\lim_{j \to \infty} \langle \nu^j, F^k \rangle = \langle \nu, F^k \rangle$. Así,

$$\int_\Omega f(x, z^j(x)) dx \geq \int_{\Omega^k} f(x, z^j(x)) dx = \int_\Omega \left\langle \delta_{z^j(x)}, F^k(x) \right\rangle dx$$

aplicando $\liminf_{j\to\infty}$:

$$\liminf_{j\to\infty}\int_\Omega f(x,z^j(x))dx \geq \int_\Omega \left\langle \nu_x, F^k(x)\right\rangle dx = \int_{\Omega^k}\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)d\nu_x(y)\,dx \tag{2.21}$$

de (2.21) y el teorema de convergencia monótona obtenemos la afirmación (2.19) para f. Notemos que la restricción $f(x,y) = 0$ si $|y| \geq R$ se puede eliminar usando una función cut-off como T^M en (2.6) y aplicando el teorema de convergencia monótona. Esto completa la afirmación si $f \geq 0$ o bien si f es acotada inferiormente (simplemente aplicar la afirmación a $f - M \geq 0$).
Para f general, por la hipótesis $h^j := f^-(\cdot, z^j(\cdot))$ es relativamente débilmente compacto. Así, dado $\varepsilon > 0$, por el teorema de Dunford-Pettis, existe $M > 0$ tal que

$$\sup_j \int_{\{h^j\geq M\}} h^j(x)dx < \varepsilon.$$

Definiendo $f_M := \min(f, -M)$ y usando el resultado ya demostrado para funciones acotadas inferiormente, se obtiene

$$\begin{aligned}
\liminf_{j\to\infty}\int_\Omega f(x,z^j(x))\,dx + \varepsilon &\geq \liminf_{j\to\infty}\int_\Omega f(x,z^j(x))\,dx + \sup_j\int_{\{h^j\geq M\}} h^j(x)dx \\
&\geq \liminf_{j\to\infty}\int_\Omega f_M(x,z^j(x))\,dx \\
&\geq \int_\Omega\int_{\mathbb{R}^d} f_M(x,y)\,d\nu_x(y)\,dx \\
&\geq \int_\Omega\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,d\nu_x(y)\,dx.
\end{aligned}$$

El resultado se sigue ya que $\varepsilon > 0$ es arbitrario.

Para demostrar la segunda afirmación, observemos que si adicionalmente la sucesión $|f|(\cdot, z^j(\cdot)))$ es relativamente secuencialmente débilmente compacta en $L^1(\Omega)$, entonces también lo es $f^+(\cdot, z^j(\cdot)))$. Luego aplicando (2.19) a una función de la forma $\pm\varphi(x)f(x,\cdot)$ con $\varphi \in L^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Obtenemos

$$\begin{aligned}
\liminf_{j\to\infty}\int_\Omega \varphi(x)f(x,z^j(x))dx &\geq \int_\Omega\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)f(x,y)d\nu_x(y) \\
&\geq \limsup_{j\to\infty}\int_\Omega \varphi(x)f(x,z^j(x))dx,
\end{aligned}$$

que no es otra cosa que

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega \varphi(x)f(x,z^j(x))dx = \int_\Omega\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)f(x,y)d\nu_x(y).$$

Lo anterior vale para φ arbitraria puesto que vale para φ^+ y φ^-. Se concluye (2.20) como se quería. $\square$

Como podemos ver, el teorema fundamental de las medidas de Young se generaliza a funciones de Carathéodory bajo condiciones apropiadas. en particular tenemos la siguiente observación.

Observación 2.5.4. *En el caso anterior vale un análogo al Corolario 2.4.2, específicamente, si Ω es de medida finita y $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory con $f(\cdot, z^j(\cdot)) \rightharpoonup g$ en $L^p(\Omega)$, entonces $f(\cdot, z^j(\cdot))$ es relativamente secuencialmente compacto en $L^1(\Omega)$ y el límite g se representa en c.t.p. $x \in \Omega$ por*

$$g(x) = \langle \nu_x, f(x, \cdot)\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) d\nu_x(y).$$

Demostración. Usar la proposición anterior y la demostración es análoga a la del corolario 2.4.2. □

Lema 2.5.5. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ medible y $u : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $v^j : \Omega \to \mathbb{R}^m$ funciones medibles, tales que*

$$u^j \to u \quad c.t.p.\, x \in \Omega$$

y supongamos también que $(v^j)_{j\in\mathbb{N}}$ genera la medida de Young ν. Entonces la sucesión $(u^j, v^j) : \Omega \to \mathbb{R}^{d+m}$ genera la medida de Young μ donde

$$\mu_x = \delta_{u(x)} \otimes \nu_x.$$

Demostración. Sea $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in C_0(\mathbb{R}^m)$. Entonces, para $\phi \in L^1(\Omega)$

$$|\phi\varphi(u^j) - \phi\varphi(u)| \le 2\|\varphi\|_\infty |\phi|,$$
$$\varphi(u^j) \to \varphi(u) \quad \text{c.t.p. de } \Omega,$$

así, por el teorema de convergencia dominada

$$\phi\varphi(u^j) \to \phi\varphi(u), \text{ en } L^1(\Omega). \tag{2.22}$$

Por otra parte, del hecho que $(v^j)_{j\in\mathbb{N}}$ genera la medida de Young ν, se sigue que

$$\psi(v^j) \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{\psi}, \text{ en } L^\infty(\Omega), \tag{2.23}$$
$$\overline{\psi}(x) = \langle \nu_x, \psi\rangle.$$

Ahora, se tiene que

$$\phi\varphi(u^j)\psi(v^j) - \phi\varphi(u)\overline{\psi} = \left(\phi\varphi(u^j) - \phi\varphi(u)\right)\psi(v^j) + \phi\varphi(u)\left(\psi(v^j) - \overline{\psi}\right),$$

notemos que de (2.22) y (2.23) se deduce

$$\left|\int_\Omega \left(\phi\varphi(u^j) - \phi\varphi(u)\right)\psi(v^j)\right| \le \|\phi\varphi(u^j) - \phi\varphi(u)\|_1 \|\psi\|_\infty \to 0,$$
$$\int_\Omega \phi\varphi(u)\left(\psi(v^j) - \overline{\psi}\right) \to 0,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\int_\Omega(\varphi\otimes\psi)(u^j,v^j)\phi &= \lim_{j\to\infty}\int_\Omega \varphi(u^j(x))\psi(v^j(x))\phi(x)dx\\ &= \int_\Omega \varphi(u(x))\left\langle \nu_x,\psi\right\rangle\phi(x)dx\\ &= \int_\Omega \left\langle \delta_{u(x)}\otimes\nu_x,\varphi\otimes\psi\right\rangle\phi(x)dx,\end{aligned}$$

esto significa que

$$(\varphi\otimes\psi)(u^j,v^j)\overset{*}{\rightharpoonup}\left\langle\delta_{u(\cdot)}\otimes\nu,\varphi\otimes\psi\right\rangle$$

en $L^\infty(\Omega)$. Si vemos esto en el espacio $L^\infty_\omega(\Omega,\mathcal{M}(\mathbb{R}^{d+m}))$ se puede traducir como

$$\begin{aligned}\left\langle\mu^j,\theta\right\rangle &\to \left\langle\mu,\theta\right\rangle, \\ \mu^j_x &:= \delta_{(u^j(x),v^j(x))},\end{aligned} \tag{2.24}$$

para cada θ de la forma $\theta_x=\phi(x)(\varphi\otimes\psi)$. Como las funciones de esta forma son densas en $L^1(\Omega,C_0(\mathbb{R}^{d+m}))$ se sigue que (2.24) vale para $\theta\in L^1(\Omega,C_0(\mathbb{R}^{d+m}))$ arbitraria y por lo tanto

$$\mu_j\overset{*}{\rightharpoonup}\mu$$

en $L^\infty_\omega(\Omega;\mathcal{M}(\mathbb{R}^{d+m}))$, es decir μ es la medida de Young generada por (u^j,v^j).

□

2.6. Un problema variacional simple

Ejemplo 2.6.1. *Sea $X\subset W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^d)$, donde Ω es un abierto de medida finita de $\mathbb{R}^n$. Consideremos el problema variacional*

$$\min_{u\in X} I[u]\,,\; I[u]=\int_\Omega F(\nabla(u))\,dx,$$

Para $F\in C(\mathbb{R}^d)$ estrictamente convexa. Supongamos también que existe $u\in X$ y una sucesión $u^k\in X$ tal que

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty} I[u^k]=\min_{v\in X} I[v]=m,\\ &\|\nabla u^k\|_{L^\infty(\Omega)}\le c,\\ &\nabla u^k\rightharpoonup\nabla u\,, en\, L^p(\Omega),\end{aligned}$$

entonces $\nabla u^k\to\nabla u$ en $L^p(\Omega)$.

Demostración. La demostración consiste en usar el teorema de convergencia de Vitali (A.1.1). Pasando a subsucesiones podemos suponer que ∇u^k genera la medida de Young

μ. Observemos primero que por el corolario 2.4.2 tenemos que

$$\begin{aligned} F(\nabla u^k) &\rightharpoonup \overline{F} \text{ en } L^1(\Omega) \\ \nabla u(x) &= \langle \mu_x, Id \rangle \text{ c.t.p. } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Jensen Generalizada (B.0.6)

$$\begin{aligned} m = \lim_{k\to\infty} I[u^k] = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega F(\nabla u^k) = \int_\Omega \overline{F} &= \int_\Omega \langle \mu_x, F \rangle \; dx \\ &\geq \int_\Omega F(\langle \mu_x, Id \rangle) \, dx \\ &= \int_\Omega F(\nabla u) \geq m, \end{aligned}$$

por lo tanto todas las cantidades de la ecuación anterior coinciden, en particular

$$\int_\Omega \langle \mu_x, F \rangle \; dx = \int_\Omega F(\langle \mu_x, Id \rangle) \, dx.$$

La desigualdad de Jensen para una medida ν es igualdad si y sólo si la medida involucrada es de Dirac concentrada en $\langle \nu, Id \rangle$, de esto se sigue que μ_x es medida de Dirac concentrada en $\langle \mu_x, Id \rangle = \nabla u(x)$ c.t.p. $x \in \Omega$. Del corolario 2.4.1 se tiene, entonces que $\nabla u^k \to \nabla u$ en medida. Como la subsucesión es arbitraria podemos concluir que la sucesión inicial ∇u^k también converge en medida a ∇u. Como último paso, al tenerse que la función constante c^p que acota a $\left|\nabla u^k\right|^p$ está en $L^1(\Omega)$ se sigue que $|\nabla u^k|^p$ es uniformemente integrable en $L^1(\Omega)$ (véase ejemplo A.0.5). Así, por el Teorema de Convergencia de Vitali $\nabla u^k \to \nabla u$ en $L^p(\Omega)$. $\square$

CAPÍTULO 3

Problemas de Estructura Monótona

En este capítulo estudiaremos problemas de estructura monótona, se trata de una de las aplicaciones más relevantes del teorema fundamental de las medidas de Young. Incluimos el teorema siguiente ya que usa prácticamente todas las herramientas desarrolladas en el capítulo anterior e ilustra la utilidad del enfoque de medidas de Young. Es posible aplicar este teorema al abordar problemas relacionados con mecánica de fluidos y las ecuaciones de Navier-Stokes, temas que sobrepasan el alcance de este trabajo. Referimos al lector a [6].

Teorema 3.0.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{d'}$ de medida finita y sea $A(x, s, \xi) : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una función de Carathéodory (continua en la primera variable y medible en las otras dos variables). Sean $y^n : \Omega \to \mathbb{R}^m$ y $z^n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ sucesiones de funciones medibles. Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *A es estrictamente monótona en ξ, esto es, si $\xi_1 \neq \xi_2$, entonces*

$$[A(x, s, \xi_1) - A(x, s, \xi_2)] \cdot [\xi_1 - \xi_2] > 0$$

para cualquier par x, s. Aquí $\cdot$ denota el producto interno usual de $\mathbb{R}^d$.

2. *Existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que*

$$A(x, s, \xi) \cdot \xi \geq c_1 |\xi|^p, \tag{3.1}$$

$$|A(x, s, \xi)| \leq c_2 |\xi|^{p-1}. \tag{3.2}$$

3.

$$y^n \to \bar{y} \quad c.t.p. \; ,$$

$$z^n \rightharpoonup z \quad en \quad L^p(\Omega), \tag{3.3}$$

$$A(\cdot, y^n, z^n) \rightharpoonup \bar{A} \quad en \quad L^q(\Omega), \; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{3.4}$$

4.

$$\limsup_{n \to \infty} \int_\Omega A(x, y^n, z^n) \cdot z^n \, dx \leq \int_\Omega \bar{A}(x) \cdot z(x) \, dx, \tag{3.5}$$

entonces $z^n \to z$ *en* $L^p(\Omega)$.

Demostración. La demostración consiste en verificar las hipótesis del Teorema de convergencia de Vitali A.1.1.

(i) $z^n \to z$ en medida:
Definimos

$$h(x,\xi) := [A(x,\bar{y}(x),\xi) - A(x,\bar{y}(x),\xi_x)] \cdot [\xi - \xi_x]\,,$$
$$\xi_x := \int_{\mathbb{R}^d} \xi\, d\nu_x(\xi) = \langle \nu_x, \mathbf{Id}\rangle\,.$$

Notemos que por el Corolario 2.4.2, $\xi_x = z(x)$ c.t.p. $x \in \Omega$. Como A es estrictamente monótona en ξ, se sigue que $h(x,\xi) \geq 0$, por lo tanto

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^d} h(x,\xi)\, d\nu_x(\xi)\, dx \geq 0$$

puesto que $\nu_x \geq 0$ c.t.p. $x \in \Omega$. Tenemos también que

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^d} h(x,\xi)\, d\nu_x(\xi)\, dx = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^d} A(x,\bar{y}(x),\xi) \cdot \xi\, d\nu_x(\xi)\, dx - \int_\Omega \left[\int_{\mathbb{R}^d} A(x,\bar{y}(x),\xi) d\nu_x(\xi)\right] \cdot \xi_x\, dx \tag{3.6}$$

y así

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^d} A(x,\bar{y}(x),\xi) \cdot \xi\, d\nu_x(\xi)\, dx \geq \int_\Omega \left[\int_{\mathbb{R}^d} A(x,\bar{y}(x),\xi) d\nu_x(\xi)\right] \cdot \xi_x\, dx. \tag{3.7}$$

Ahora por el Lema 2.5.5, (y^n, z^n) genera la medida de Young $\mu = \delta_{\bar{y}(\cdot)} \otimes \nu$, de donde

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d} A(x,s,\xi) \cdot \xi\, d\mu_x(s,\xi)\, dx = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^d} A(x,\bar{y}(x),\xi) \cdot \xi\, d\nu_x(\xi)\, dx, \tag{3.8}$$
$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d} A(x,s,\xi)\, d\mu_x(s,\xi)\, dx = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^d} A(x,\bar{y}(x),\xi)\, d\nu_x(\xi)\, dx.$$

Vamos a proceder a demostrar la desigualdad contraria de (3.7): observemos primero que las hipótesis del Lema 2.5.3 quedan automaticamente satisfechas para $A(x,s,\xi) \cdot \xi$, la sucesión (y^n, z^n) y la medida de Young μ, gracias a la ecuación (3.1). Por lo tanto aplicando el Lema y (3.8)

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega A(x,y^n,z^n) \cdot z^n\, dx \geq \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^d} A(x,\bar{y}(x),\xi) \cdot \xi\, d\nu_x(\xi)\, dx. \tag{3.9}$$

Del corolario 2.4.2, la observación 2.5.4 y las hipótesis (3.3) y (3.4) se sigue que tanto z como $\bar{A}$ se pueden representar c.t.p. $x \in \Omega$ por

$$\bar{A}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} A(x,s,\xi)\, d\mu_x(s,\xi),$$
$$z(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \xi\, d\nu_x(\xi) = \xi_x,$$

por lo tanto si sustituimos estas expresiones en la ecuación (3.5), obtenemos

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega A(x, y^n, z^n) \cdot z^n \, dx \leq \int_\Omega \left[\int_{\mathbb{R}^d} A(x, s, \xi) \, d\mu_x(s, \xi) \right] \cdot \xi_x \, dx. \tag{3.10}$$

por lo tanto de (3.9) y (3.10):

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^d} A(x, \bar{y}(x), \xi) \cdot \xi \, d\nu_x(\xi) \, dx \leq \int_\Omega \left[\int_{\mathbb{R}^d} A(x, \bar{y}(x), \xi) d\nu_x(\xi) \right] \cdot \xi_x \, dx, \tag{3.11}$$

como se deseaba. Finalmente de las desigualdades (3.11) y (3.7) se deduce la igualdad. Lo cual significa por (3.6) que

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^d} h(x, \xi) \, d\nu_x(\xi) \, dx = 0$$

y puesto que h es no negativa

$$\int_{\mathbb{R}^d} h(x, \xi) \, d\nu_x(\xi) = 0 \quad \text{c.t.p } x \in \Omega,$$

nuevamente esto significa que $h(x, \cdot)$ es nula en ν_x-c.t.p.. Como se trata de una medida de probabilidad (positiva) y $\ker h(x, \cdot) = \{\xi_x\}$ la proposición 1.2.7 implica

$$\operatorname{supp}(\nu_x) = \{\xi_x\} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \xi \, d\nu_x(\xi) \right\} = \{z(x)\} \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega,$$

por lo tanto $\nu_x = \delta_{z(x)}$ c.t.p. $x \in \Omega$ y por el Corolario 2.4.1, tenemos que $z^n \to z$ en medida.

(ii) Integrabilidad uniforme en $L^1(\Omega)$ de la sucesión $|z^n|^p$:
Por simplicidad definamos

$$a^n(x) := A(x, y^n(x), z^n(x)) \cdot z^n(x),$$
$$a(x) := A(x, \bar{y}(x), z(x)) \cdot z(x).$$

Como ya conocemos que $\nu_x = \delta_{z(x)}$ en c.t.p. $x \in \Omega$ podemos reescribir las ecuaciones (3.10) y (3.9) como

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega a^n \leq \int_\Omega a \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega a^n,$$

o sea

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega a^n = \int_\Omega a.$$

Si usamos la desigualdad de Cauchy-Schwartz en $\mathbb{R}^d$ y la hipótesis (3.2)

$$\begin{aligned} \int_\Omega |a| &\leq \int_\Omega |A(x, \bar{y}(x), z(x))||z(x)| \, dx \\ &\leq c_2 \int_\Omega |z|^{p-1}|z| = c_2 \int_\Omega |z|^p \end{aligned}$$

lo cual muestra que $a \in L^1(\Omega)$, el mismo argumento muestra que $a^n \in L^1(\Omega)$ y notemos que además $a, a^n \geq 0$ por la hipótesis (3.1). Vamos a demostrar que $a^n \to a$ en $L^1(\Omega)$: En razón que $z^n \to z$ en medida, vamos a suponer por el momento que $z_n \to z$ en c.t.p. de Ω y por lo tanto $a^n \to a$ en Ω c.t.p. ya que A es de Carathéodory. Dado que $|a - a^n| \leq |a^n| + |a| = a^n + a$, aplicando el lema de Fatou

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \liminf\left(a + a^n - |a - a^n|\right) &\leq \liminf \int_\Omega \left(a + a^n - |a - a^n|\right),\\
\int_\Omega \left(a + \lim a^n - \lim |a - a^n|\right) &\leq \int_\Omega a + \lim \int_\Omega a^n + \liminf \int_\Omega -|a - a^n|\\
2\int_\Omega a &\leq 2\int_\Omega a - \limsup \int_\Omega |a - a^n|\\
0 &\geq \limsup \int_\Omega |a - a^n|.
\end{aligned}$$

Se concluye que $a^n \to a$ en $L^1(\Omega)$ siempre que $z^n \to z$ en c.t.p. de Ω. Naturalmete, este procedimiento es realizable para cualquier subsucesión de a^n y así se puede concluir que para la sucesión inicial vale también $a^n \to a$ en $L^1(\Omega)$. El Teorema de Convergencia de Vitali nos dice que esta convergencia implica que a^n es uniformemente integrable en $L^1(\Omega)$, como consecuencia de la condición $a^n \geq |z^n|^p$ (ecuación (3.1)), $|z^n|^p$ es uniformemente integrable en $L^1(\Omega)$, como se deseaba.

En virtud de (i) y (ii), invocamos el Teorema de Convergencia de Vitali para concluir que $z^n \to z$ en $L^p(\Omega)$. $\square$

APÉNDICE A

Integrabilidad Uniforme

Enunciamos dos teoremas útiles en la parte central del trabajo relativos a familias de funciones en $L^p(X, \Sigma, \mu)$, .

Definición A.0.3. *Dada una familia $\mathcal{K} \subset L^1(X, \Sigma, \mu)$ decimos que $\mathcal{K}$ es uniformemente integrable si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $E \in \Sigma$ con $\mu(E) < \delta$ se tiene*

$$\sup_{f \in \mathcal{K}} \int_E |f| d\mu < \varepsilon.$$

Ejemplo A.0.4. *Si $f \in L^1(X, \Sigma, \mu)$ entonces $\{f\}$ es uniformemente integrable.*

Demostración. Para $f \in L^1(X, \Sigma, \mu)$ se tiene que $\mu(\{f = \infty\}) = 0$ luego si definimos $E_n = \{f > n\}$ tenemos que $\mu(\cap_n E_n) = 0$. Notemos que $|f|\chi_{E_n} \leq |f|$ y además $|f|\chi_{E_n} \to 0$ en μ c.t.p. Luego por el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{n \to \infty} \int_{E_n} |f| d\mu = 0.$$

Así dado $\varepsilon > 0$ existe n tal que

$$\int_{E_n} |f| d\mu < \frac{\varepsilon}{2},$$

esojamos δ de modo que $n\delta < \varepsilon/2$, así si $\mu(E) < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} \int_E |f| d\mu &= \int_{E_n \cap E} |f| d\mu + \int_{(X - E_n) \cap E} |f| d\mu \\ &\leq \int_{E_n} |f| d\mu + n\mu(E) < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Ejemplo A.0.5. *Si $f \in L^1(X, \Sigma, \mu)$ entonces el conjunto de funciones g dominadas por f (es decir $|g| \leq |f|$) es uniformemente integrable.*

Demostración. Inmediato del ejemplo A.0.4 □

A la luz de los dos ejemplos anteriores, el Teorema de Vitali resulta una generalización del teorema de convergencia dominada.

A.1. Teorema de Convergencia de Vitali

Teorema A.1.1. *Sea (f_n) un sucesión de funciones en $L^p(X, \Sigma, \mu)$, entonces f_n converge a una función medible f en $L^p(X, \Sigma, \mu)$ si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *$f_n \to f$ en medida.*
2. *$(|f_n|^p)$ es uniformemente integrable.*
3. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $E \in \Sigma$ de μ-medida finita tal que*

$$\sup_n \left(\int_{X-E} |f_n|^p d\mu \right) < \varepsilon.$$

Demostración. La demostración se puede consultar en [2] p. 76. □

Observación A.1.2. *Notemos que la condición (3) del Teorema de Convergencia de Vitali queda automáticamente satisfecha si $\mu(X) < \infty$, puesto que podemos hacer $E = X$.*

A.2. Teorema de Dunford-Pettis

Definición A.2.1. *Dado $\mathcal{K} \subset L^1(X, \Sigma, \mu)$, decimos que la sigma aditividad de de las integrales*

$$\int_E f d\mu$$

*es **uniforme respecto a** $f \in \mathcal{K}$ si dada una sucesión decreciente de conjuntos medibles $(E_n)_n$ con $\bigcap_n E_n = \emptyset$, se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{f\in\mathcal{K}} \left| \int_{E_n} f d\mu \right| \right) = 0.$$

Teorema A.2.2. *(Dunford-Pettis) $\mathcal{K} \subset L^1(X, \Sigma, \mu)$ es relativamente secuencialmente débilmente compacto si y sólo si es acotado y la sigma aditividad de las integrales $\int_E f d\mu$ es uniforme respcto a $f \in \mathcal{K}$*

Corolario A.2.3. *Si $\mathcal{K} \subset L^1(X, \Sigma, \mu)$ es relativamente secuencialmente débilmente compacto, entonces también lo son las siguiente familias*

$$|\mathcal{K}| = \{|f| : f \in \mathcal{K}\},$$
$$\mathcal{K}^+ = \left\{f^+ : f \in \mathcal{K}\right\},$$
$$\mathcal{K}^- = \left\{f^- : f \in \mathcal{K}\right\},$$

donde $f^+ = \max\{0, f\}$, $f^- = \max\{0, -f\}$.

Demostración. La demostración se puede consultar en [3] p. 292-293. □

Corolario A.2.4. *Si X es un espacio de medida finita y $\mathcal{K}$ es acotado en $L^\infty(X)$, entonces $\mathcal{K}$ es relativamente secuencialmente débilmente compacto en $L^1(X)$.*

Demostración. En este caso $L^\infty(X) \subset L^1(X)$ y así $\mathcal{K} \subset L^1(X)$. Dada una sucesión decreciente de conjuntos medibles $E_m \subset X$, con $\cap_m E_m = \emptyset$, puesto que el espacio X es de medida finita se sigue que $\lim_{m\to\infty} \mu(E_m) = 0$, entonces para $f \in \mathcal{K}$

$$\int_{E_m} |f| \leq C\mu(E_m),$$

donde C no depende de f. Conlcuimos que la sigma aditividad de las integrales $\int_E |f|$ es uniforme respecto a $f \in \mathcal{K}$. $\square$

APÉNDICE B

Desigualdad de Jensen Generalizada

Definición B.0.5. *Decimos que $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es una función convexa si para todo $t \in (0,1)$ y $x, y \in \mathbb{R}^d$ se cumple*

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y).$$

Decimos que $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es una función estrictamente convexa si para todo $t \in (0,1)$ y $x, y \in R^d$ con $x \neq y$ se cumple

$$g(tx + (1-t)y) < tg(x) + (1-t)g(y).$$

A continuación presentamos una generalización de la desigualdad de Jensen que se usa para el estudio de problemas variacionales con medidas de Young.

Teorema B.0.6. ***(Desigualdad de Jensen Generalizada)*** *Sea $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función estrictamente convexa y μ una medida de probabilidad en $\mathbb{R}^d$ de soporte compacto entonces*

$$\langle \mu, g \rangle \geq g\left(\langle \mu, \boldsymbol{Id} \rangle\right),$$

además la igualdad se tiene si y sólo si μ es una medida de Dirac concentrada en $\langle \mu, \boldsymbol{Id} \rangle$.

Demostración. Notemos que $\langle \mu, \mathbf{Id} \rangle \in \mathbb{R}^d$ es

$$\langle \mu, \mathbf{Id} \rangle = \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_1 d\mu(x), \ldots, \int_{\mathbb{R}^d} x_d d\mu(x) \right),$$

al ser g estrictamente convexa, existen constantes b_i, $i = 1, \ldots, n$ tales que para $x \neq y$ en $\mathbb{R}^d$

$$g(x) > g(y) + b_i(x-y)_i, \tag{B.1}$$

por otro lado haciendo $y = \langle \mu, \mathbf{Id} \rangle$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(g(y) + b_i(x-y)_i\right) d\mu(x) = g(y) = g(\langle \mu, \mathbf{Id} \rangle), \tag{B.2}$$

por lo tanto integrando (B.1), junto con (B.2) obtenemos

$$\langle \mu, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) d\mu(x) \geq g(y) = g(\langle \mu, \mathbf{Id} \rangle),$$

como se deseaba. Además si $\operatorname{supp} \mu \neq \{y\}$ es inmediato que la desigualdad es estricta, en tanto si $\operatorname{supp} \mu = \{y\}$ se tiene $\mu = \delta_{\{y\}}$ y así

$$\langle \mu, g \rangle = \left\langle \delta_{\{y\}}, g \right\rangle = g(y) = g(\langle \mu, \mathbf{Id} \rangle).$$

□

Bibliografía

[1] J. Ball, *A version of the fundamental theorem for Young measures*, Lecture Notes in Physics **344** (1989), 207–215.

[2] R.G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, A. Wiley, 1995.

[3] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear Operators, Part 1*, Interscience, 1967.

[4] R.E. Edwards, *Functional Analysis*, Holt, Rinehart and Winston, 1965.

[5] H. Frid, *Compacidade Compensada Aplicada às Leis de Conservacao*, 19° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1992.

[6] Gwiazda, P. and Swierczewska, A., *Large Eddy simulation turbulence model with Young measures*, Applied Mathematics Letters **18** (2005), no. 8, 923–929.

[7] E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer, 1965.

[8] N. Hungerbühler, *A refinement of Ball's Theorem on Young Measures*, New York J. Math **3** (1997), 48–53.

[9] ______, *Young Measures and non-Linear PDEs*, Birmingham, 1999.

[10] S. Kesavan, *Topics in Functional Analyisis and Applications*, John Wiley and Sons, 1989.

[11] A. Kucia, *Scorza Dragoni type theorems*, Fund. Math. **138** (1991), 197–203.

[12] J. Malek, J. Necas and M. Rokyta, *Weak and Measure-valued Solutions to Evolutionary PDEs*, Chapman and Hall, 1996.

[13] S. Müller, *Variational models for microstructure and phase transitions*, Fund. Math. **1713** (1999).

[14] K. Yoshida, *Functional Analysis*, Springer, 1980.