

Análisis matricial de estructuras

Curso con MATLAB

Jorge Eduardo Hurtado
Profesor Titular
Universidad Nacional de Colombia

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción general | 1 |
| 1.1. Matriz de rigidez de una barra a tensión axial | 1 |
| 1.2. Formación de las matrices de la estructura | 5 |
| 1.3. Significado de la matriz de rigidez | 6 |
| 1.4. Formación automática de la matriz de rigidez | 7 |
| 1.5. Cálculo de desplazamientos y reacciones | 10 |
| 1.6. Cálculo de fuerzas internas en los elementos | 11 |
| 1.7. Ejemplo 1 | 12 |
| 2. Armaduras planas y espaciales | 19 |
| 2.1. Sistemas de coordenadas local y global | 20 |
| 2.2. Principio del contragradiente | 23 |
| 2.3. Matriz de rigidez de un elemento de armadura | 24 |
| 2.4. Matriz de rigidez de la armadura | 26 |
| 2.5. Cálculo de reacciones y fuerzas internas | 32 |
| 2.6. Ejemplo 2 | 33 |
| 2.7. Armaduras espaciales | 43 |
| 2.8. Ejemplo 3 | 46 |
| 3. Vigas | 53 |
| 3.1. Matriz de rigidez de una viga | 53 |
| 3.2. Ejemplo 4 | 59 |
| 3.3. Análisis de vigas biempotradas | 64 |
| 3.4. Cargas en el interior de una viga | 66 |
| 3.5. Ejemplo 5 | 68 |
| 4. Pórticos planos | 75 |
| 4.1. Matriz de rigidez de un elemento de pórtico | 75 |
| 4.2. Ejemplo 6 | 80 |
| 4.3. Elementos cargados en el interior | 84 |
| 4.4. Ejemplo 7 | 85 |
| 4.5. Ejemplo 8 | 89 |

| | |
|--|------------|
| 5. Edificios | 93 |
| 5.1. Configuración del edificio | 93 |
| 5.2. Noción de diafragma | 93 |
| 5.3. Ejemplo | 98 |
| 5.4. Condensación de las matrices de rigidez de pórticos planos | 103 |
| 5.5. Ejemplo | 108 |
| 5.6. Ejemplo | 110 |
| 5.7. Matriz de rigidez del edificio | 116 |
| 5.8. Ejemplo | 117 |
| 5.9. Cargas sísmicas | 119 |
| 5.9.1. Fuerzas | 119 |
| 5.9.2. Pares de torsión | 120 |
| 5.9.3. Acción bidireccional | 121 |
| 5.10. Resumen del análisis de edificios bajo cargas sísmicas | 122 |
| 5.11. Ejemplo | 123 |
| 5.11.1. Fuerzas sísmicas | 123 |
| 5.11.2. Matrices de rigidez | 126 |
| 5.12. Consideración de los movimientos horizontales bajo cargas verticales | 129 |
| 5.12.1. Descomposición de los movimientos | 130 |
| 5.12.2. Análisis | 132 |
| A. Nociones de MATLAB | 135 |
| A.1. Características de MATLAB | 135 |
| A.2. Operaciones fundamentales | 136 |
| A.3. Vectores y matrices | 137 |
| A.4. Funciones | 145 |
| A.5. Bucles y decisiones condicionales | 146 |
| A.6. Programas | 147 |
| A.7. Archivos de datos y resultados | 148 |
| B. Códigos de los ejemplos | 149 |
| B.1. Ejemplo 1 | 149 |
| B.2. Ejemplo 2 | 150 |
| B.3. Ejemplo 3 | 155 |
| B.4. Ejemplo 4 | 158 |
| B.5. Ejemplo 5 | 159 |
| B.6. Ejemplo 6 | 161 |
| B.7. Ejemplo 7 | 164 |
| B.8. Ejemplo 8 | 167 |

Índice de figuras

| | |
|---|----|
| 1.1. Barra sometida a tensión axial. (a): Modelo. (b): Fuerzas internas y desplazamientos. | 1 |
| 1.2. Barra sometida a tensión axial discretizada en elementos finitos. (a): Discretización. (b): Fuerzas internas y desplazamientos en el elemento finito k | 3 |
| 1.3. Equilibrio entre elementos para la formación de las matrices del problema de tensión axial. | 4 |
| 1.4. Numeración de elementos y nodos de la barra sometida a tensión axial. | 6 |
| 1.5. Interpretación de la matriz de rigidez elemental. (a): Primera columna. (b): Segunda columna. | 7 |
| 1.6. Interpretación de la cuarta columna de la matriz de rigidez general (ecuación 1.27). | 8 |
| 1.7. Columna de sección variable. | 12 |
| 2.1. Armadura estáticamente indeterminada. | 19 |
| 2.2. Fuerzas internas en un elemento de la armadura. | 20 |
| 2.3. Fuerzas internas en un elemento de la armadura. (a) Sistema local; (b) sistema global | 21 |
| 2.4. (a) Paralelogramos de fuerzas equivalentes. (b) Relaciones entre las fuerzas. | 21 |
| 2.5. Generalización de la transformación de coordenadas. | 23 |
| 2.6. Trabajo realizado por las fuerzas en los sistemas local y global. | 25 |
| 2.7. Ejemplo de correspondencia entre las numeraciones local y global de los grados de libertad. | 28 |
| 2.8. Armadura de dos barras. (a) Geometría y cargas. (b) Numeración de grados de libertad. | 29 |
| 2.9. Armadura articulada. Geometría y cargas. | 33 |
| 2.10. Armadura articulada. Numeración de grados de libertad. | 34 |
| 2.11. Estructura original y posición deformada (con un factor de amplificación de 500). | 42 |
| 2.12. Ejemplo de armadura espacial. | 44 |
| 2.13. Fuerzas internas en un elemento de armadura espacial. (a) Sistema local ortogonal; (b) sistema global ortogonal. | 46 |
| 2.14. Armadura espacial con forma de casquete esférico. | 47 |
| 2.15. Posición deformada del casquete esférico. | 50 |
| 3.1. Viga en voladizo. | 53 |
| 3.2. Problemas para deducir la matriz de rigidez de una barra en flexión. (a): Problema 1; (b) Problema 2. | 54 |
| 3.3. Solución de los problemas contrarios. | 56 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 3.4. | Numeración de los grados de libertad de la viga. | 57 |
| 3.5. | Viga biempotrada. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos. (c) Numeración de grados de libertad. | 59 |
| 3.6. | Equilibrio de los nodos en fuerzas cortantes. | 62 |
| 3.7. | Equilibrio de los nodos en momentos flectores e interpretación de la deformación de la viga. | 63 |
| 3.8. | Diagramas de cortante y momento flector. | 63 |
| 3.9. | Viga biempotrada. (a) Modelo estructural. (b) Hipótesis de diagrama de momentos. (c) Diagrama de momentos final. | 65 |
| 3.10. | Vigas biempotradas. (a) Modelos estructurales. (b) Diagramas de cortante. (c) Diagramas de momento. | 66 |
| 3.11. | (a) Descomposición de una viga biempotrada. (b) Implicaciones para una estructura en general. | 67 |
| 3.12. | Viga continua. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos. (c) Numeración de grados de libertad. | 69 |
| 3.13. | Viga continua. (a) Fuerzas de empotramiento en el elemento 1. (b) Fuerzas de empotramiento en el elemento 2. (c) Elementos del vector de fuerzas \mathbf{R} | 70 |
| 3.14. | Viga continua. (a) Diagrama de cortante. (b) Diagrama de momentos. | 74 |
| 4.1. | Pórtico de dos vanos y tres pisos sometido a la acción de cargas de gravedad y sísmicas. | 76 |
| 4.2. | Fuerzas internas en un elemento de pórtico. (a) Sistema local; (b) sistema global. | 78 |
| 4.3. | Fuerzas de empotramiento de un elemento de pórtico. (a) Sistema local (fuerzas \mathbf{r}_e); (b) sistema global (fuerzas \mathbf{R}_e) | 79 |
| 4.4. | Pórtico sometido a una carga horizontal. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos. | 80 |
| 4.5. | Diagramas de fuerzas internas del pórtico sometido a carga lateral. (a) Fuerzas internas de cada elemento. (b) Diagrama de fuerzas axiales. (c) Diagrama de cortantes. (d) Diagrama de momentos. (e) Elástica. | 81 |
| 4.6. | Pórtico sometido a una carga vertical distribuida uniformemente. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos. | 86 |
| 4.7. | Diagramas de fuerzas internas del pórtico sometido a carga vertical distribuida uniformemente. (a) Fuerzas internas de cada elemento. (b) Diagrama de fuerzas axiales. (c) Diagrama de cortantes. (d) Diagrama de momentos. (e) Elástica. | 88 |
| 4.8. | Pórtico bajo carga vertical concentrada y asimétrica. (a) Modelo estructural. (b) Elástica. | 89 |
| 5.1. | Configuración y cargas de un edificio típico. | 94 |
| 5.2. | Diafragma flexible en un plano ortogonal. | 95 |
| 5.3. | Diafragmas flexible y rígido en su plano. | 95 |
| 5.4. | Equivalencia de fuerzas en un diafragma rígido. | 96 |
| 5.5. | Sobre el grado de libertad torsional. | 97 |
| 5.6. | Secciones de las columnas (a) y las vigas (b). | 98 |
| 5.7. | Pórtico de un vano y cinco pisos sometido a la acción de cargas verticales. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos. | 100 |

| | |
|---|-----|
| 5.8. Grados de libertad móviles considerados en el cálculo de la matriz condensada. | 104 |
| 5.9. Viga de cortante. | 106 |
| 5.10. Construcción de la matriz de rigidez de un pórtico. | 109 |
| 5.11. Ejemplo de cálculo de la matriz condensada. | 111 |
| 5.12. Grados de libertad considerados en el cálculo de la matriz condensada. | 112 |
| 5.13. Equivalencia de fuerzas en un diafragma rígido. (a): Fuerza en el sistema local. (b): Fuerzas equivalentes en el sistema global. | 115 |
| 5.14. Ejemplo de cálculo de la matriz de rigidez de un edificio. | 118 |
| 5.15. Acción sísmica bireccional y torsión accidental. | 121 |
| 5.16. Edificio sometido a fuerzas sísmicas. | 124 |
| 5.17. Desplazamientos de los pisos. | 128 |
| 5.18. Pórtico bajo carga vertical concentrada y asimétrica. (a) Modelo estructural. (b) Elástica. 129 | |
| 5.19. Superposición de análisis para considerar movimientos horizontales producidos por cargas verticales. (a) Modelo estructural con restricción lateral. (b) Aplicación de la reacción lateral. | 131 |

Capítulo 1

Introducción general

Este capítulo contiene una introducción general al método matricial de rigidez para el análisis de estructuras. El propósito es ilustrar todos los pasos del método, con la excepción de la rotación de coordenadas, que es explicada en el capítulo siguiente. Para ello, se utilizará una de las estructuras más simples desde el punto de vista mecánico: una cadena de elementos sometidos a tensión axial. Igualmente, se muestra la solución completa del problema por medio del lenguaje MATLAB en un ejemplo concreto.

1.1. Matriz de rigidez de una barra a tensión axial

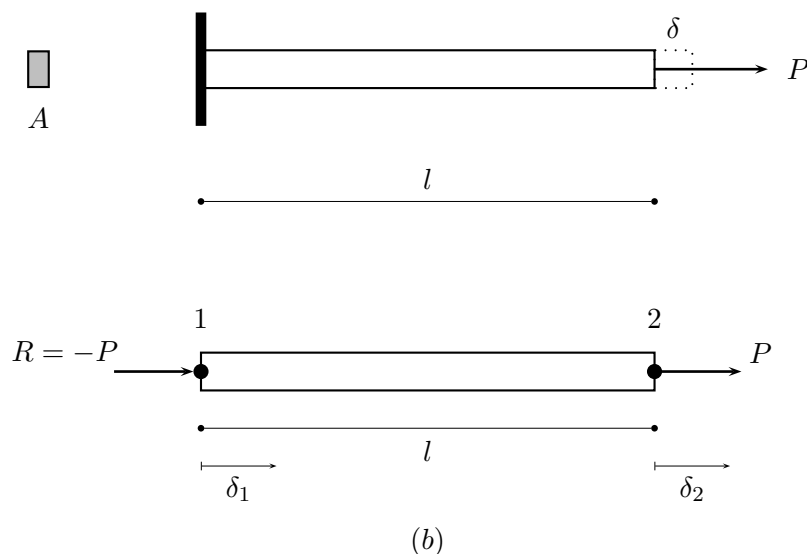


Figura 1.1: Barra sometida a tensión axial. (a): Modelo. (b): Fuerzas internas y desplazamientos.

Consideremos la figura 1.1. En ella aparece una barra de sección constante A y módulo de elasticidad E empotrada en un extremo y sometida a tracción axial por una carga concentrada P . El desplazamiento del extremo libre es

$$\delta = \frac{Pl}{AE} \quad (1.1)$$

Por tanto, la carga se puede expresar en función del desplazamiento como

$$P = k\delta \quad (1.2)$$

donde

$$k = \frac{AE}{l} \quad (1.3)$$

es la *constante de rigidez axial de la barra*. La ecuación (1.2) permite la interpretación siguiente:

La constante de rigidez axial de una barra empotrada en un extremo es la fuerza necesaria para causar un desplazamiento unitario en el extremo libre.

Ahora bien, la reacción en el extremo izquierdo $R = -P$ y la fuerza aplicada, de igual valor absoluto, someten a la barra a un estado de tracción. Si consideramos, en general, los desplazamientos de los dos extremos de la barra, numerados como aparece en la figura, tendremos que $\delta_1 = 0$ y $\delta_2 \equiv \delta$. Por tanto, podremos expresar las fuerzas externas en función de ellos, de la manera siguiente:

$$P = \frac{AE}{l}\delta = \frac{AE}{l}(\delta_2 - \delta_1) \quad (1.4)$$

y, por tanto,

$$R = -P = \frac{AE}{l}(\delta_1 - \delta_2) \quad (1.5)$$

Las ecuaciones anteriores se pueden reunir en forma matricial, así:

$$\begin{pmatrix} R \\ P \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Los términos que componen esta ecuación son el vector de desplazamientos (o *grados de libertad*)

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

el *vector de fuerzas nodales*

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} R \\ P \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

y la *matriz de rigidez*:

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

En consecuencia, la ecuación (1.6) se puede expresar en la forma

$$\mathbf{p} = \mathbf{k}\mathbf{d} \quad (1.10)$$

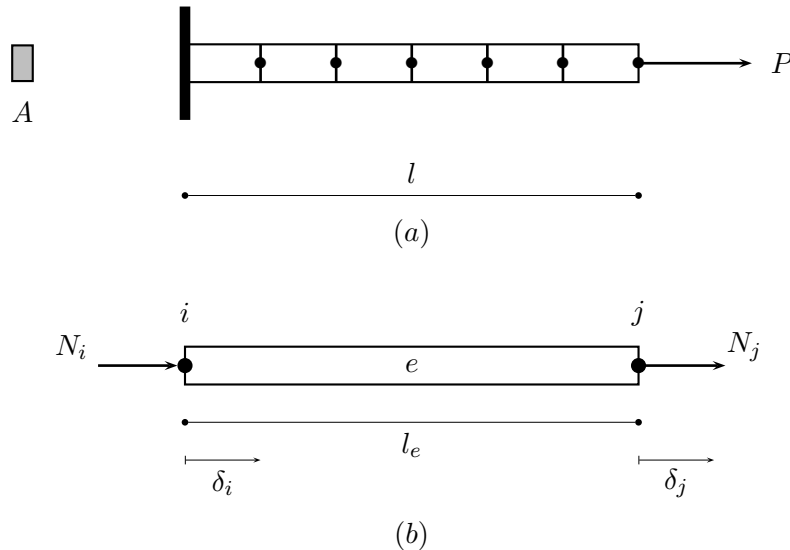


Figura 1.2: Barra sometida a tensión axial discretizada en elementos finitos. (a): Discretización. (b): Fuerzas internas y desplazamientos en el elemento finito k .

Consideremos ahora la misma barra, modelada esta vez como una serie de elementos unidos por nodos que permiten la transmisión de la fuerza (*elementos finitos*), como se muestra en la figura 1.2. Como la barra tiene sección constante A , para cada elemento finito se tiene $A_e = A$, $e = 1, 2, \dots, m$, donde m es el número total de elementos. Por otra parte, como la fuerza axial P no varía a lo largo de la barra, las fuerzas internas en los extremos del elemento e cumplen la relación $N_i = -N_j = P$. Sin embargo, los desplazamientos δ_i y δ_j serán diferentes, debido a la evolución del desplazamiento axial, desde un valor nulo en el extremo izquierdo de la estructura, al valor δ , dado por la ecuación (1.1), en el extremo derecho de la misma.

Generalizando lo hecho anteriormente, tenemos que, en vista de que el estiramiento total del elemento δ_e es igual a la diferencia entre los desplazamientos de los extremos,

$$\delta_e = \delta_j - \delta_i \quad (1.11)$$

la aplicación de la ecuación (1.1) da como resultado

$$N_j = \frac{A_e E}{l_e} \delta_e = \frac{A_e E}{l_e} (\delta_j - \delta_i) \quad (1.12)$$

y, por tanto,

$$N_i = \frac{A_e E}{l_e} (\delta_i - \delta_j) \quad (1.13)$$

expresiones que pueden ser reunidas en forma matricial de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} N_i \\ N_j \end{pmatrix} = \frac{EA_e}{l_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Los términos que componen esta ecuación son el vector de desplazamientos (o *grados de libertad del elemento*)

$$\mathbf{d}_e = \begin{pmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

el vector de fuerzas nodales del elemento

$$\mathbf{p}_e = \begin{pmatrix} N_i \\ N_j \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

y la matriz de rigidez del elemento:

$$\mathbf{k}_e = \frac{EA_e}{l_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

En consecuencia, la ecuación (1.6) se puede expresar en la forma

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \quad (1.18)$$

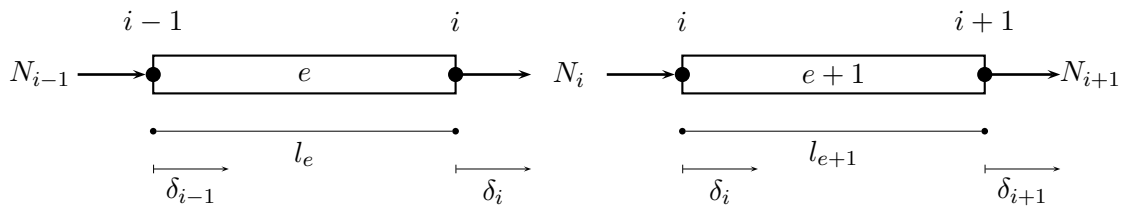


Figura 1.3: Equilibrio entre elementos para la formación de las matrices del problema de tensión axial.

1.2. Formación de las matrices de la estructura

A partir de la ecuación deducida para un elemento en tensión axial examinaremos ahora la formación de una ecuación matricial para la estructura formada por la cadena de elementos mostrada en la figura 1.2. Para este fin, consideremos dos elementos sucesivos e y $e + 1$. Sus respectivas ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{pmatrix} N_{i-1} \\ N_i \end{pmatrix} = \frac{EA_e}{l_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{i-1} \\ \delta_i \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

y

$$\begin{pmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{pmatrix} = \frac{EA_{e+1}}{l_{e+1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_i \\ \delta_{i+1} \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

Nótese que tanto en ambas ecuaciones hay expresiones que permiten calcular la fuerza N_i , que pueden ser obtenidas de la segunda fila de la ecuación matricial (1.19) y de la primera fila de la ecuación (1.20). Ellas son

$$\begin{aligned} N_i &= -s_e \delta_{i-1} + s_e \delta_i \\ N_i &= s_{e+1} \delta_i - s_{e+1} \delta_{i+1} \end{aligned} \quad (1.21)$$

donde

$$s_e = \frac{EA_e}{l_e} \quad (1.22)$$

Pero, como indica la figura 1.3, la suma de estas expresiones debe anularse para así asegurar el equilibrio del nodo i . Por tanto

$$-s_e \delta_{i-1} + s_e \delta_i + s_{e+1} \delta_i - s_{e+1} \delta_{i+1} = 0 \quad (1.23)$$

es decir,

$$-s_e \delta_{i-1} + (s_e + s_{e+1}) \delta_i - s_{e+1} \delta_{i+1} = 0 \quad (1.24)$$

La figura 1.4 muestra las numeraciones de elementos y nodos. Esto indica que la ecuación anterior es válida para $i = 2$ a 6 , puesto que en esos nodos no hay fuerza externa. Para el nodo 7 , la ecuación es

$$-s_6 \delta_6 + s_6 \delta_7 = P \quad (1.25)$$

mientras que para el nodo 1 es

$$s_1 \delta_1 - s_1 \delta_2 = R \quad (1.26)$$

Al reemplazar los valores de $i = 2, 3, 4, 5, 6$ en la ecuación (1.24), teniendo en cuenta que, para este caso $e = i$, y que $A_e = A, l_e = l/6$ para todos los elementos $e = 1, 2, \dots, 6$, se obtiene cinco ecuaciones que junto con (1.25) y (1.26) dan como resultado

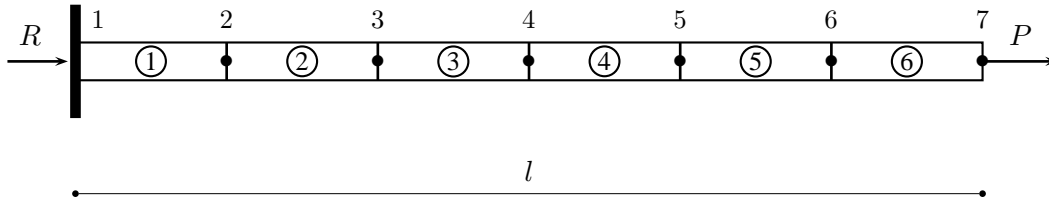


Figura 1.4: Numeración de elementos y nodos de la barra sometida a tensión axial.

$$\begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix} = \frac{6EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

la cual denotaremos en forma compacta así:

$$P = KD \quad (1.28)$$

donde D es el vector de grados de libertad, P el vector de fuerzas externas y K la matriz de rigidez de la estructura. al comparar con la ecuación (1.18) se pueden notar las siguientes diferencias en la nomenclatura: para la ecuación del elemento, se utilizan letras minúsculas y el subíndice e , mientras que para la ecuación general de la estructura se utilizan letras mayúsculas y el subíndice deja de ser necesario.

La solución de la ecuación (1.28) será abordada más adelante, luego de introducir la partición del problema según los tipos de grados de libertad.

1.3. Significado de la matriz de rigidez

Al igual que la constante de rigidez expresada por la ecuación (1.3), los términos de la matriz de rigidez elemental k_e como la de la matriz global de la estructura K tienen un significado preciso, a saber:

El término (i, j) de una matriz de rigidez equivale a la fuerza que se debe aplicar en el grado de libertad i cuando el grado de libertad j es objeto de un desplazamiento unitario, mientras los demás grados de libertad permanecen restringidos.

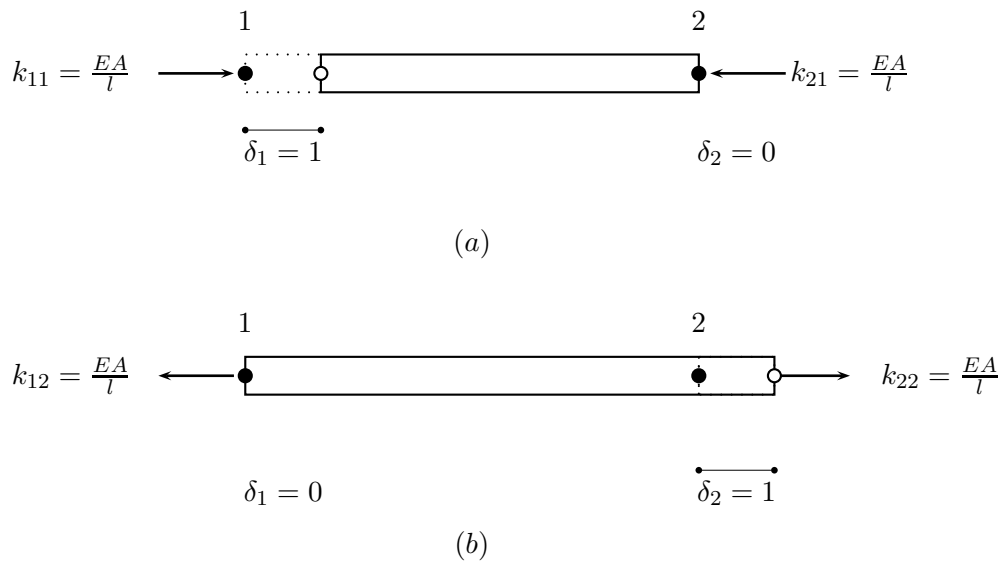


Figura 1.5: Interpretación de la matriz de rigidez elemental. (a): Primera columna. (b): Segunda columna.

Este significado se ilustra en la figura 1.5 para el caso de la matriz elemental \mathbf{k}_e , dada por la ecuación (1.17). Nótese que el movimiento unitario del grado de libertad δ_j implica tanto una fuerza que lo realice como unas fuerzas en los restantes grados de libertad, que deben permanecer restringidos. Por tanto, cada movimiento unitario determina una columna de la matriz de rigidez.

Esta interpretación vale también para el caso general de la matriz de rigidez \mathbf{K} de la estructura. Para el caso de la barra compuesta por seis elementos finitos mostrada en la figura 1.4, cuya matriz de rigidez viene dada por la ecuación (1.27), la figura 1.6 muestra la interpretación de la cuarta columna de \mathbf{K} .

1.4. Formación automática de la matriz de rigidez

La principal ventaja del método de rigidez es que permite la formación automática de las matrices que componen el problema. Dada la definición de una estructura en términos del número total de grados de libertad n y las matrices de rigidez elementales \mathbf{k}_e , la automatización se hace posible por el hecho de que los elementos de las matrices de rigidez son simplemente fuerzas, como se ilustró en la sección anterior. En consecuencia, la aplicación de la primera ley de Newton a estas fuerzas conduce a un simple proceso de acumulación de la información que aportan los elementos.

Para ilustrar esto, considérese de nuevo la formación de la matriz de rigidez general realizada anteriormente (ecuación 1.23), que presentamos ahora de la siguiente manera:

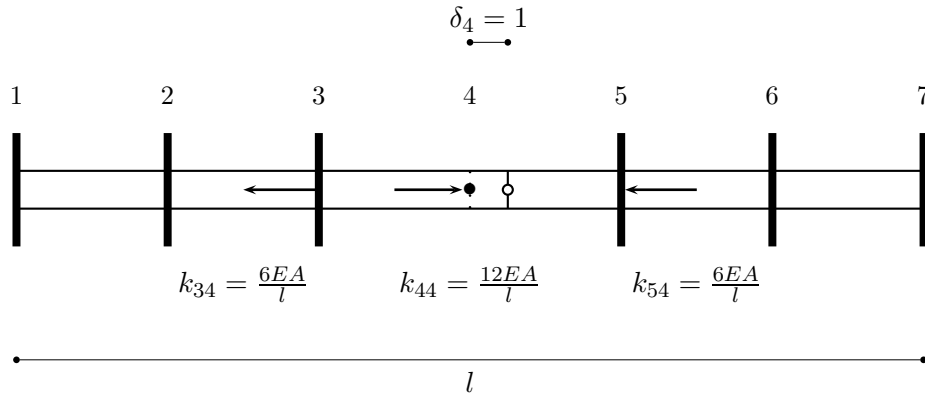


Figura 1.6: Interpretación de la cuarta columna de la matriz de rigidez general (ecuación 1.27).

$$[-s_e \delta_{i-1} + s_e \delta_i] + [s_{e+1} \delta_i - s_{e+1} \delta_{i+1}] = 0 \quad (1.29)$$

Nótese que los únicos elementos de rigidez presentes en el primer corchete corresponden al elemento e , mientras que en el segundo hay solamente elementos de rigidez del elemento $e + 1$. Por tanto, esta ecuación se puede expresar en la forma

$$\left[\begin{pmatrix} -s_e & s_e & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & s_{e+1} & -s_{e+1} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \delta_{i-1} \\ \delta_i \\ \delta_{i+1} \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

en donde se han creado dos vectores de la misma longitud del vector de desplazamientos, uno por cada elemento que contribuye a la ecuación de equilibrio. Esto sugiere el siguiente algoritmo:

1. Crear una matriz \mathbf{K} cuadrada de tamaño $n \times n$, con todos sus elementos iguales a cero.
2. Por cada elemento, agregar las contribuciones de \mathbf{k}_e a \mathbf{K} en las posiciones adecuadas.

El segundo paso del algoritmo requiere la creación de un cuadro de correspondencias entre la numeración local de grados de libertad (que para el caso que nos ocupa es, simplemente, 1,2) y la numeración global, que en elementos como el de tensión axial simple, coincide con la numeración de nodos, como la mostrada en la figura 1.4. Para este caso, el cuadro es la siguiente:

Esto indica que, por ejemplo, con respecto a la matriz de rigidez del elemento 4, \mathbf{k}_4 , el término (1,1) contribuye al valor (4,4) de la matriz \mathbf{K} , el (1,2) al (4,5), el (2,1) al (5,4) y el (2,2) al (5,5). Por otra parte, obsérvese que en la columna de numeración global, los grados de libertad 1 y 7 aparecen una sola vez, mientras que los grados 2 a 6 se encuentran repetidos. Esto se traduce en el

Cuadro 1.1: Correspondencias de grados de libertad para la estructura de la figura 1.4

| Elemento | Numeración local | Numeración global |
|----------|------------------|-------------------|
| 1 | 1 | 1 |
| | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 |
| | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 3 |
| | 2 | 4 |
| 4 | 1 | 4 |
| | 2 | 5 |
| 5 | 1 | 5 |
| | 2 | 6 |
| 6 | 1 | 6 |
| | 2 | 7 |

hecho de que los términos (2, 2) a (6, 6) de la matriz de rigidez \mathbf{K} en la ecuación (1.27) tengan factor 2, mientras que los términos (1, 1) y (7, 7) tienen factor 1.

Lo anterior significa que el proceso de automatización se facilita si la información contenida en cada matriz \mathbf{k}_e , que en el caso presente es de tamaño 2×2 , se traslada a una matriz $\Delta\mathbf{K}_e$, de tamaño $n \times n$, donde n es el número total de grados de libertad, con base en el cuadro de correspondencias. La matriz $\Delta\mathbf{K}_e$ representa la contribución del elemento e a la matriz de rigidez general de la estructura. Esta última será la suma de tales contribuciones:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^m \Delta\mathbf{K}_e \quad (1.31)$$

Así, por ejemplo, para el elemento 3, la matriz $\Delta\mathbf{K}_3$ será

$$\Delta\mathbf{K}_3 = \frac{6EA}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

puesto que, según el cuadro 1.1, el término (1, 1) de \mathbf{k}_3 se sitúa en la posición (3, 3) de $\Delta\mathbf{K}_e$, el

(1, 2) en (3, 4), el (2, 1) en (4, 3) y el (2, 2) en (4, 4). Al proceder de manera semejante con todos los elementos se obtiene la matriz de rigidez que aparece en la ecuación (1.27).

1.5. Cálculo de desplazamientos y reacciones

En una estructura estáticamente determinada como la mostrada en la figura 1.4, las reacciones en los apoyos se pueden determinar por medio de las ecuaciones de equilibrio global derivadas de la primera ley de Newton. En este caso, el resultado es $R = -P$. Sin embargo, en el caso general de estructuras estáticamente indeterminadas, las reacciones son desconocidas. Por eso conviene realizar una partición de las matrices implicadas en ecuación anterior, aislando los grados de libertad asociados a las reacciones, que son normalmente de valor nulo. En el caso presente, el grado de libertad asociado al apoyo es δ_1 . Por tanto, la partición adecuada es

$$\begin{pmatrix} R \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix} = \frac{6EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & \vdots & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & \vdots & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \cdots \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

la cual puede ser escrita en la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_a \\ \mathbf{P}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_a \\ \mathbf{D}_b \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

donde $\mathbf{D}_a, \mathbf{P}_a$ son los subvectores de desplazamientos y fuerzas, respectivamente de los grados de libertad restringidos, mientras que $\mathbf{D}_b, \mathbf{P}_b$ son los correspondientes subvectores de los grados de libertad libres. Es evidente que \mathbf{P}_a corresponde a las reacciones en los apoyos. Por su parte, la submatriz \mathbf{K}_{aa} relaciona los grados de libertad restringidos entre sí, \mathbf{K}_{bb} hace lo propio con los desplazamientos libres, mientras que $\mathbf{K}_{ab}, \mathbf{K}_{ba}$ corresponden a las relaciones cruzadas entre grados de libertad restringidos y libres. Nótese que $\mathbf{K}_{ab} = \mathbf{K}_{ba}^T$.

Es importante destacar que en la partición indicada en la ecuación (1.34) al subvector \mathbf{D}_a de desplazamientos *conocidos* (nulos porque la restricción es total) le corresponde un vector \mathbf{P}_a de reacciones *desconocidas*, mientras que lo contrario sucede para los grados de libertad libres: \mathbf{P}_b es *conocido*, por estar formado por fuerzas externas, mientras que \mathbf{D}_b es *desconocido*. De esta suerte, a partir de la segunda fila de la ecuación (1.34), se puede formular la ecuación siguiente:

$$\mathbf{P}_b = \mathbf{K}_{ba}\mathbf{D}_a + \mathbf{K}_{bb}\mathbf{D}_b \quad (1.35)$$

lo que permite calcular los movimientos desconocidos así:

$$\mathbf{D}_b = \mathbf{K}_{bb}^{-1} (\mathbf{P}_b - \mathbf{K}_{ba} \mathbf{D}_a) \quad (1.36)$$

pues el término del lado derecho contiene solamente términos conocidos. Ahora bien, a partir de la primera fila de la ecuación (1.34) se tiene que

$$\mathbf{P}_a = \mathbf{K}_{aa} \mathbf{D}_a + \mathbf{K}_{ab} \mathbf{D}_b, \quad (1.37)$$

la cual, al tener en cuenta la ecuación (1.36) se transforma en

$$\mathbf{P}_a = \mathbf{K}_{aa} \mathbf{D}_a + \mathbf{K}_{ab} \mathbf{K}_{bb}^{-1} (\mathbf{P}_b - \mathbf{K}_{ba} \mathbf{D}_a) \quad (1.38)$$

Para \mathbf{D}_a nulo, las ecuaciones anteriores se simplifican así:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_b &= \mathbf{K}_{bb}^{-1} \mathbf{P}_b \\ \mathbf{P}_a &= \mathbf{K}_{ab} \mathbf{D}_b \end{aligned} \quad (1.39)$$

Al resolver la primera de las ecuaciones anteriores se obtienen los desplazamientos en los grados de libertad libres, mientras que la segunda da el valor de las reacciones en los apoyos.

1.6. Cálculo de fuerzas internas en los elementos

Una vez calculados los desplazamientos \mathbf{D}_b , con base en el cuadro de correspondencias de las numeraciones local y global de los grados de libertad resulta posible formar los vectores \mathbf{d}_e , $e = 1, 2, \dots, M$, extrayendo de \mathbf{D}_b los valores pertinentes. Por ejemplo, del cuadro 1.1 es claro que, para el elemento 3

$$\mathbf{d}_3 = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} D(3) \\ D(4) \end{pmatrix}$$

donde δ_1, δ_2 son los desplazamientos de los extremos del elemento en numeración local, que equivalen respectivamente a los elementos $D(3), D(4)$ del vector \mathbf{D} .

Con los vectores de desplazamientos así formados, las fuerzas internas en cada elemento se calculan por medio de la ecuación (1.18). En el caso del elemento 3, las fuerzas se obtienen por medio de la operación siguiente:

$$\mathbf{p}_3 = \frac{6EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(3) \\ D(4) \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

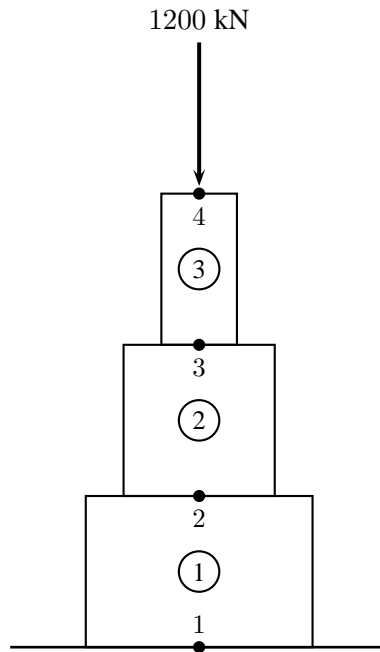


Figura 1.7: Columna de sección variable.

1.7. Ejemplo 1

Consideremos la estructura mostrada en la figura 1.7, que consiste en tres elementos de diferente área seccional sometidos a una carga de compresión de valor 1200 kN. Las áreas de los elementos son $A_1 = 0,25$, $A_2 = 0,16$ y $A_3 = 0,09\text{m}^2$, mientras que el módulo de elasticidad es $E = 2 \times 10^7\text{kN/m}^2$ para todos ellos. Por tanto, las matrices de rigidez son

$$\mathbf{k}_e = \frac{EA_e}{l_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

con $l_e = 1$ m para $e = 1, 2, 3$. El cuadro 1.2 muestra las correspondencias entre las numeraciones local y global.

Resolveremos el problema en MATLAB de la manera siguiente. En primer lugar, definimos los datos del problema:

```
E=2e7; A_1=0.25; A_2=0.16; A_3=0.09;
```

Con esta información las matrices de rigidez elementales son

Cuadro 1.2: Correspondencias de grados de libertad para la estructura de la figura 1.7

| Elemento | Numeración local | Numeración global |
|----------|------------------|-------------------|
| 1 | 1 | 1 |
| | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 |
| | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 3 |
| | 2 | 4 |

```
k_1=E*A_1*[1 -1; -1 1]
```

```
k_1 =
```

```
    5000000    -5000000
   -5000000     5000000
```

```
k_2=E*A_2*[1 -1; -1 1];
```

```
k_3=E*A_3*[1 -1; -1 1]
```

En vista de que el número total de grados de libertad es igual a cuatro, para formar la matriz de rigidez global \mathbf{K} inicialmente la creamos como una matriz nula de tamaño 4×4 :

```
K=zeros(4,4);
```

Para incorporar la información del elemento 1, creamos un vector que informa los grados de libertad en numeración global que reúne este elemento:

```
g_1=[1 2];
```

A continuación, creamos la matriz $\Delta\mathbf{K}_1$ que traslada la contribución del elemento, de la numeración local a la global:

```
DeltaK_1=zeros(4,4); DeltaK_1(g_1,g_1)=k_1
```

```
DeltaK_1 =
```

```
    5000000    -5000000     0     0
   -5000000     5000000     0     0
         0         0     0     0
         0         0     0     0
```

Luego agregamos esta contribución a la matriz global:

```
K=K+DeltaK_1
```

```
K =
```

```

5000000    -5000000         0         0
-5000000     5000000         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
```

Al proceder de manera similar para los elementos 2 y 3, tenemos:

```
g_2=[2 3]; DeltaK_2=zeros(4,4); DeltaK_2(g_2,g_2)=k_2;
K=K+DeltaK_2;
```

```
g_3=[3 4]; DeltaK_3=zeros(4,4); DeltaK_3(g_3,g_3)=k_3;
K=K+DeltaK_3;
```

Después de realizadas estas operaciones, la matriz K de la estructura es

```
K =
```

```

1.0e+006 *
    5.0000   -5.0000         0         0
   -5.0000    8.2000   -3.2000         0
         0   -3.2000    5.0000   -1.8000
         0         0   -1.8000    1.8000
```

Las particiones de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas externas, definidas por la ecuación (1.34), se realizan fácilmente en MATLAB por medio de los vectores

```
a=[1]; b=[2 3 4];
```

que corresponden a los grados de libertad restringidos y no restringidos, respectivamente. Con ellos, las cuatro submatrices de la matriz de rigidez se calculan así:

```
K_aa=K(a,a); K_ab=K(a,b); K_ba=K(b,a); K_bb=K(b,b);
```

```
K_aa =
```

```
5000000
```

```
K_ab =
```

```
-5000000         0         0
```

```
K_ba =
```

```
-5000000
         0
         0
```

$K_{bb} =$

$$1.0e+006 * \begin{bmatrix} 8.2000 & -3.2000 & 0 \\ -3.2000 & 5.0000 & -1.8000 \\ 0 & -1.8000 & 1.8000 \end{bmatrix}$$

Ahora bien, el vector de fuerzas externas es

$$P = [0 \ 0 \ 0 \ -1200]'$$

$P =$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1200 \end{bmatrix}$$

De él extraemos el vector P_b de manera semejante a lo hecho con la matriz de rigidez:

$$P_b = P(b)$$

$P_b =$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1200 \end{bmatrix}$$

Al aplicar las ecuaciones (1.39) se obtienen los desplazamientos en los grados de libertad no restringidos

$$D_b = K_{bb}^{-1} P_b$$

$D_b =$

$$\begin{bmatrix} -0.0002 \\ -0.0006 \\ -0.0013 \end{bmatrix}$$

así como la reacción en el apoyo:

$$P_a = K_{ab} D_b$$

$P_a =$

$$1.2000e+003$$

Obsérvese que los desplazamientos de los grados de libertad que forman el vector D_b son negativos, lo que indica el estado de compresión de la estructura en su conjunto. Además, crecen en valor absoluto, debido al decrecimiento del área seccional hacia arriba. Por otra parte, nótese que el valor de la reacción es igual al de la fuerza externa aplicada y de signo positivo, lo que demuestra que la estructura se encuentra en perfecto equilibrio.

El paso final es el cálculo de las fuerzas internas en cada elemento, por medio de la ecuación (1.18). Para ello formamos primero el vector completo D , que consta de $D_a = 0$ y D_b :

```
D=zeros(4,1);
D(b)=D_b;
```

Los desplazamientos de los grados de libertad de cada elemento se extraen de D por medio del mismo vector de índices usado anteriormente. Para el elemento 1,

```
d_1=D(g_1)
```

lo que da como resultado

```
d_1 =
    1.0e-003 *
         0
    -0.2400
```

La aplicación de la ecuación (1.18) da como resultado las siguientes fuerzas en los extremos del elemento:

```
p_1=k_1*d_1
p_1 =
    1.0e+003 *
         1.2000
    -1.2000
```

Al proceder de manera análoga con para los elementos restantes se obtienen los siguientes resultados:

```
d_2 =
    1.0e-003 *
    -0.2400
    -0.6150

p_2 =
    1.0e+003 *
```



```
1.2000  
-1.2000
```

d_3 =

```
-0.0006  
-0.0013
```

p_3 =

```
1200  
-1200
```

Obsérvese que todos los elementos se encuentran en un estado de compresión con fuerzas de 1200 kN, como se puede anticipar, al tratarse de una estructura estáticamente determinada en compresión simple.

Capítulo 2

Armaduras planas y espaciales

En este capítulo se extiende el método de rigidez, introducido en el capítulo anterior para cadenas de barras sometidas a tensión axial, a las armaduras o cerchas, compuestas de barras articuladas. Un ejemplo ilustrativo de esta clase de estructuras se muestra en la figura 2.1. Puesto que en las armaduras los elementos están sometidos al mismo estado tensional, la matriz de rigidez elemental es idéntica a la deducida en el capítulo anterior. La diferencia fundamental entre las armaduras y las cadenas reside en la diversa orientación de los elementos. Esto hace necesario el empleo de diferentes sistemas de coordenadas para cada elemento, por una parte, y para la estructura en general, por otra.

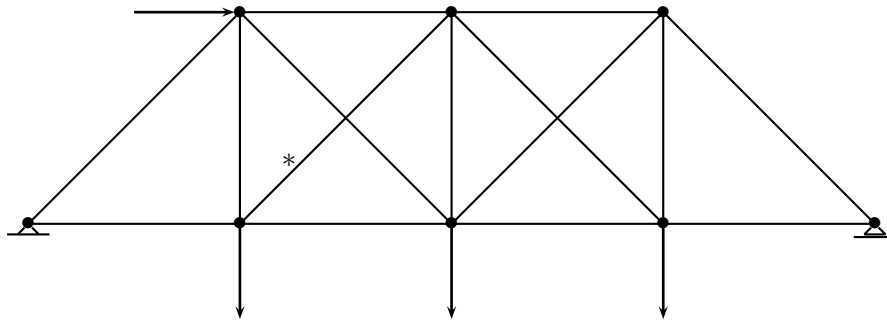


Figura 2.1: Armadura estáticamente indeterminada.

2.1. Sistemas de coordenadas local y global

Consideremos la figura 2.1. Es claro que la barra inclinada señalada con * tendrá unas fuerzas internas como las que se muestran en la figura 2.2, que no son paralelas a ninguno de los dos ejes coordenados en los que están definidas las fuerzas externas y las reacciones. Entre las fuerzas internas N_i , N_j y los desplazamientos de los nodos i y j en la dirección del elemento media la relación deducida en el capítulo anterior

$$\begin{pmatrix} N_i \\ N_j \end{pmatrix} = \frac{EA_e}{l_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

la cual se expresa en forma matricial como

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \quad (2.2)$$

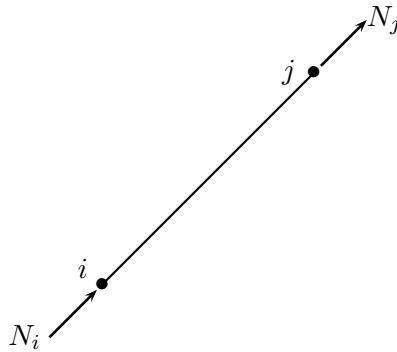


Figura 2.2: Fuerzas internas en un elemento de la armadura.

Como en toda la estructura los elementos tienen, en general, orientaciones diferentes, es necesario convertir todas las fuerzas internas a un sistema de coordenadas común, como el sistema cartesiano global, formado por un eje horizontal y otro vertical. Para realizar esta transformación, consideremos la figura 2.3, que muestra las fuerzas internas y sus equivalentes en el sistema global. Con el fin de hacer una deducción general que sea útil para elementos de pórticos, en el sistema local se han añadido dos fuerzas cortantes V_i y V_j que, obviamente, son nulas en el caso de armaduras.

La figura 2.4 muestra los paralelogramos de las fuerzas N y V , de una parte, y de las fuerzas X y Y de otra. En estas fuerzas se han retirado los subíndices que señalan los nodos i y j , pues la deducción ha de ser válida para cualquier punto. Como las fuerzas X y Y han de ser equivalentes a las fuerzas N y V , las diagonales de los paralelogramos han de coincidir, pues las resultantes de ambos

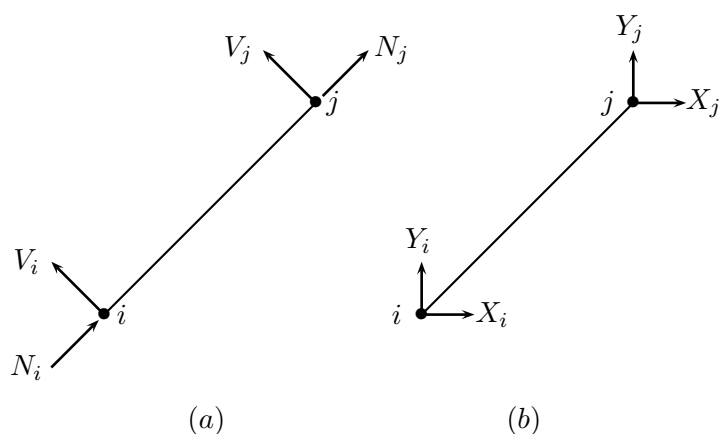


Figura 2.3: Fuerzas internas en un elemento de la armadura. (a) Sistema local; (b) sistema global

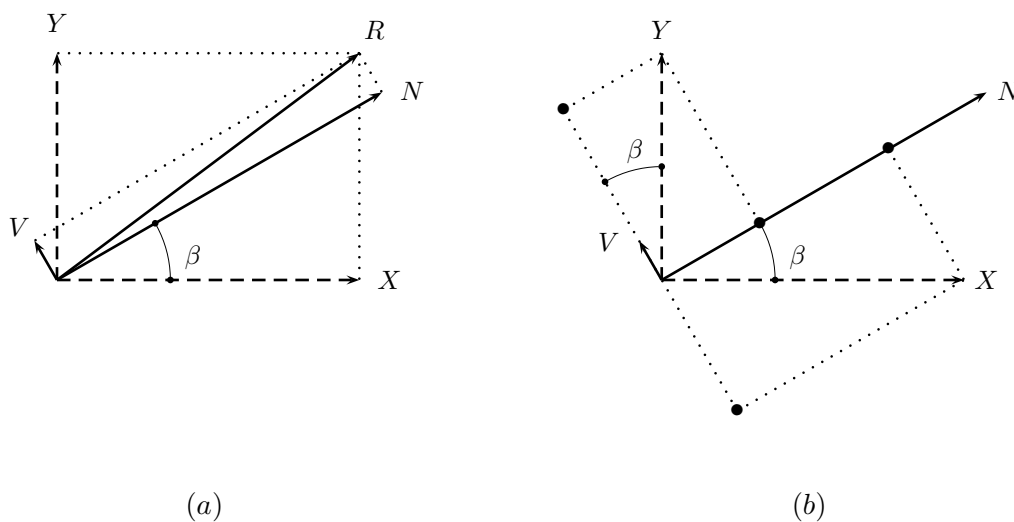


Figura 2.4: (a) Paralelogramos de fuerzas equivalentes. (b) Relaciones entre las fuerzas.

pares de fuerzas deben ser iguales en magnitud y sentido. Por tanto, como muestra la parte (b) de la

figura, las equivalencias son las siguientes:

$$\begin{aligned} N &= X \cos \beta + Y \sin \beta \\ V &= -X \sin \beta + Y \cos \beta \end{aligned} \quad (2.3)$$

Para comprobar la validez de estas relaciones, calculemos el valor de la resultante en el sistema local:

$$\begin{aligned} N^2 &= X^2 \cos^2 \beta + Y^2 \sin^2 \beta + 2XY \cos \beta \sin \beta \\ V^2 &= X^2 \sin^2 \beta + Y^2 \cos^2 \beta - 2XY \cos \beta \sin \beta \end{aligned}$$

Por tanto

$$R^2 = N^2 + V^2 = X^2 + Y^2$$

lo cual indica que la resultante es la misma para ambos pares de fuerzas ortogonales (q.e.d). Las relaciones indicadas por la ecuación (2.3) se pueden presentar en la forma

$$\begin{pmatrix} N \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Esta ecuación se puede expresar de manera compacta en la forma siguiente:

$$\mathbf{p} = \mathbf{T}\mathbf{P} \quad (2.5)$$

con

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} N \\ V \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

La matriz \mathbf{T} se denomina *matriz de transformación* o *rotación*. Por otra parte, de la figura 2.4 resulta evidente que las fuerzas (X, Y) se pueden expresar en función de las fuerzas (N, V) en la forma

$$\begin{aligned} X &= N \cos \beta - V \sin \beta \\ Y &= N \sin \beta + V \cos \beta \end{aligned} \quad (2.7)$$

lo cual indica que

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}^T \mathbf{p} \quad (2.8)$$

Por simple comparación de las ecuaciones (2.5) y (2.8) se puede ver que

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T \quad (2.9)$$

es decir, que la inversa de la matriz de transformación está dada por su transpuesta. Las matrices que cumplen esta condición se denominan *ortogonales*. La ecuación anterior implica que

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^T = \mathbf{I} \quad (2.10)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de orden 2.

Con el fin de generalizar la transformación así deducida al caso de armaduras espaciales en el capítulo siguiente, es conveniente observar que la ecuación (2.4) se puede presentar en la forma

$$\begin{pmatrix} N \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Phi_{XN} & \cos \Phi_{YN} \\ \cos \Phi_{XV} & \cos \Phi_{YV} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

donde Φ_{AB} es el ángulo que forman los ejes A y B (ver la figura 2.5). Los elementos de la matriz de transformación reciben el nombre de *cosenos directores*.

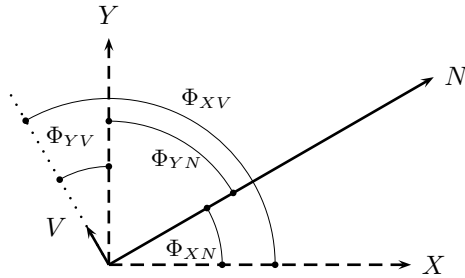


Figura 2.5: Generalización de la transformación de coordenadas.

2.2. Principio del contragradiante

Denotemos ahora por ρ, δ, ξ los desplazamientos en las direcciones de R, N, V , respectivamente, y por u, v los desplazamientos en las direcciones X, Y , respectivamente. El trabajo realizado por la resultante está dado por (ver la figura 2.6)

$$W = R\rho \quad (2.12)$$

Es evidente que el mismo trabajo lo realizan las fuerzas (N, V) o las fuerzas (X, Y) . Los valores de estos trabajos son

$$W = N\delta + V\xi = Xu + Yv \quad (2.13)$$

Esta equivalencia puede ponerse en la forma

$$W = \mathbf{p}^T \mathbf{d} = \mathbf{P}^T \mathbf{D} \quad (2.14)$$

donde

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \delta \\ \xi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Al incorporar la ecuación (2.5) en este resultado se obtiene

$$\mathbf{P}^T \mathbf{T}^T \mathbf{d} = \mathbf{P}^T \mathbf{D} \quad (2.16)$$

Esta ecuación expresa la identidad del trabajo realizado por las mismas fuerzas \mathbf{P} a lo largo de los desplazamientos $\mathbf{T}^T \mathbf{d}$, por una parte, y \mathbf{D} , por otra. Esto indica que

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^T \mathbf{d} \quad (2.17)$$

y, por tanto,

$$\mathbf{d} = \mathbf{T} \mathbf{D} \quad (2.18)$$

en virtud de la ecuación (2.10). Considerando conjuntamente las ecuaciones (2.5) y (2.17) se tiene que, si las fuerzas en un sistema local se obtienen de las fuerzas del sistema global como $\mathbf{p} = \mathbf{T} \mathbf{P}$, los desplazamientos medidos en el sistema global se obtienen de los medidos en el sistema local por medio de la expresión $\mathbf{D} = \mathbf{T}^T \mathbf{d}$. Esta ley se denomina *principio del contragradiente*. Este nombre proviene, por una parte, del hecho de que la matriz \mathbf{T} reúne las derivadas de \mathbf{p} con respecto a \mathbf{P} y, por otra, de la transposición de la matriz necesaria para realizar la conversión opuesta de los desplazamientos.

2.3. Matriz de rigidez de un elemento de armadura

Al especificar la ecuación (2.5) para los dos nodos i y j de un elemento de armadura como el mostrado en la figura 2.3, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} N_i \\ V_i \\ N_j \\ V_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

la cual está compuesta por el *vector de fuerzas internas en coordenadas locales*

$$\mathbf{p}_e = \begin{pmatrix} N_i \\ V_i \\ N_j \\ V_j \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

el *vector de fuerzas internas en coordenadas globales*

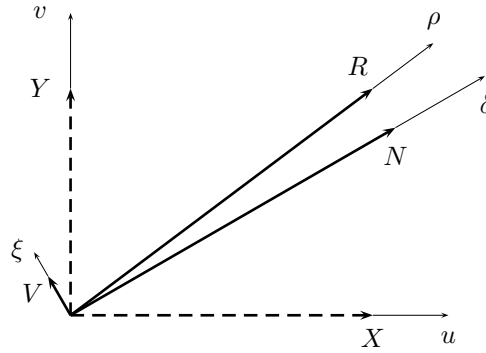


Figura 2.6: Trabajo realizado por las fuerzas en los sistemas local y global.

$$\mathbf{P}_e = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

y la matriz de transformación de coordenadas del elemento

$$\mathbf{T}_e = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Esta última puede ser expresada de manera equivalente como

$$\mathbf{T}_e = \begin{pmatrix} \cos \Phi_{XN} & \cos \Phi_{YN} & 0 & 0 \\ \cos \Phi_{XV} & \cos \Phi_{YV} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Phi_{XN} & \cos \Phi_{YN} \\ 0 & 0 & \cos \Phi_{XV} & \cos \Phi_{YV} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

La relación entre las fuerzas internas en los dos sistemas se puede expresar en la forma compacta

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{T}_e \mathbf{P}_e \quad (2.24)$$

La matriz \mathbf{T}_e , de orden 4×4 cumple con las relaciones de ortogonalidad (2.9) y (2.10), es decir

$$\mathbf{T}_e^{-1} = \mathbf{T}_e^T, \quad \mathbf{T}_e \mathbf{T}_e^T = \mathbf{I} \quad (2.25)$$

Ahora bien, entre las fuerzas \mathbf{p}_e y los desplazamientos asociados a ellas

$$\mathbf{d}_e = \begin{pmatrix} \delta_i \\ \xi_i \\ \delta_j \\ \xi_j \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

media la relación

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \quad (2.27)$$

con

$$\mathbf{k}_e = \frac{E_e A_e}{l_e} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

que expresa, por una parte, las relaciones entre las fuerzas axiales colineales N_i, N_j y los desplazamientos en su propia dirección δ_i, δ_j deducidas en el capítulo anterior y, por otra, el hecho de que las fuerzas V_i, V_j son nulas:

$$\begin{pmatrix} N_i \\ V_i \\ N_j \\ V_j \end{pmatrix} = \frac{E_e A_e}{l_e} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_i \\ \xi_i \\ \delta_j \\ \xi_j \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

2.4. Matriz de rigidez de la armadura

Al reemplazar la ecuación (2.24) en la ecuación (2.27) se obtiene

$$\mathbf{T}_e \mathbf{P}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \quad (2.30)$$

Como $\mathbf{d}_e = (\mathbf{T}_e^T)^{-1} \mathbf{D}_e = \mathbf{T}_e \mathbf{D}_e$, la ecuación anterior queda

$$\mathbf{T}_e \mathbf{P}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e \mathbf{D}_e \quad (2.31)$$

Premultiplicando ambos lados de la ecuación por \mathbf{T}_e^T

$$\mathbf{T}_e^T \mathbf{T}_e \mathbf{P}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e \mathbf{D}_e \quad (2.32)$$

y teniendo en cuenta que $\mathbf{T}_e \mathbf{T}_e^T = \mathbf{I}$ (ecuación 2.25), se llega finalmente a que las fuerzas internas del elemento en el sistema de coordenadas están dadas por

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{D}_e \quad (2.33)$$

con

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e \quad (2.34)$$

Esta última es la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales. Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.22) y (2.28), el resultado de esta operación es el siguiente:

$$\mathbf{K}_e = \frac{E_e A_e}{l_e} \begin{pmatrix} \eta^2 & \eta\mu & -\eta^2 & -\eta\mu \\ \eta\mu & \mu^2 & -\eta\mu & -\mu^2 \\ -\eta^2 & -\eta\mu & \eta^2 & \eta\mu \\ -\eta\mu & -\mu^2 & \eta\mu & \mu^2 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

donde $\eta \equiv \cos \beta$ y $\mu \equiv \sin \beta$. Nótese que, a diferencia de la matriz de rigidez \mathbf{k}_e en coordenadas locales, dada por la ecuación (2.28), en coordenadas globales no hay necesariamente filas de valor nulo. Esto se explica por el hecho de que ninguna de las dos fuerzas X e Y es necesariamente paralela al eje del elemento. Por otra parte, obsérvese que los valores de η y μ pueden ser obtenidos directamente por medio de las siguientes expresiones:

$$\eta = \frac{x_j - x_i}{l_e} \quad (2.36)$$

$$\mu = \frac{y_j - y_i}{l_e} \quad (2.37)$$

donde (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son las coordenadas de los nodos inicial y final del elemento e . En función de estas coordenadas, la longitud del elemento se puede obtener por el teorema de Pitágoras:

$$l_e = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (2.38)$$

Al estar expresadas las diversas matrices \mathbf{K}_e en un sistema común de coordenadas, la matriz de rigidez de la estructura se obtiene por superposición de las matrices $\Delta \mathbf{K}_e$ de todos los elementos, donde $\Delta \mathbf{K}_e$, de tamaño $n \times n$ se construye a partir del cuadro de correspondencias entre los grados de libertad en las numeraciones local y global, como se explicó en el capítulo anterior. Obsérvese que en este caso, n es igual a dos veces el número de nodos. Como ejemplo, la figura 2.7 muestra una barra que une los nodos 4 y 9 de una armadura. Para esta clase de elemento, los grados de libertad en la numeración local siempre llevan la numeración 1, 2, 3, 4, la cual determina la matriz \mathbf{K}_e de la ecuación (2.35). Por otra parte, los números que aparecen entre paréntesis en la figura corresponden a la numeración global de los grados, número que son obtenidos así:

- Número del grado de libertad horizontal del nodo i : $2i - 1$
- Número del grado de libertad vertical del nodo i : $2i$

En consecuencia, para la barra de la figura, la información de la matriz \mathbf{K}_e se pone de la siguiente manera en la matriz $\Delta \mathbf{K}_e$: (1, 1) en (7, 7), (1, 2) en (7, 8), (1, 3) en (7, 17), (1, 4) en (7, 18), (2, 2) en (8, 8), etc.

Finalmente, la matriz de rigidez de la estructura se obtiene por superposición de todas las matrices $\Delta \mathbf{K}_e$:

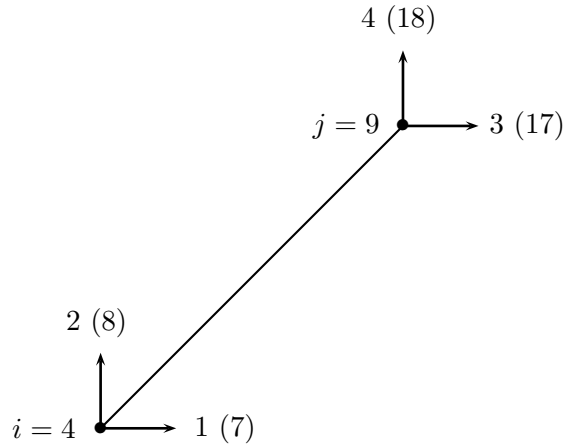


Figura 2.7: Ejemplo de correspondencia entre las numeraciones local y global de los grados de libertad.

$$K = \sum_{e=1}^m \Delta K_e \quad (2.39)$$

donde m es el número de elementos. El problema general queda entonces planteado en la forma

$$P = KD \quad (2.40)$$

donde P es el vector de fuerzas externas y D el de desplazamientos globales de la estructura. De acuerdo con lo expuesto en el capítulo anterior, las matrices que componen este problema se pueden fraccionar en la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} P_a \\ P_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_a \\ D_b \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

donde D_a, P_a son los subvectores de desplazamientos y fuerzas, respectivamente de los grados de libertad restringidos, mientras que D_b, P_b son los correspondientes subvectores de los grados de libertad libres. Por su parte, P_a corresponde a las reacciones en los apoyos. Como los elementos de D_a son todos nulos, los desplazamientos de los grados de libertad no restringidos y las reacciones en los apoyos se calculan por las siguientes expresiones, ya deducidas anteriormente:

$$D_b = K_{bb}^{-1} P_b \quad (2.42)$$

$$P_a = K_{ab} D_b \quad (2.43)$$

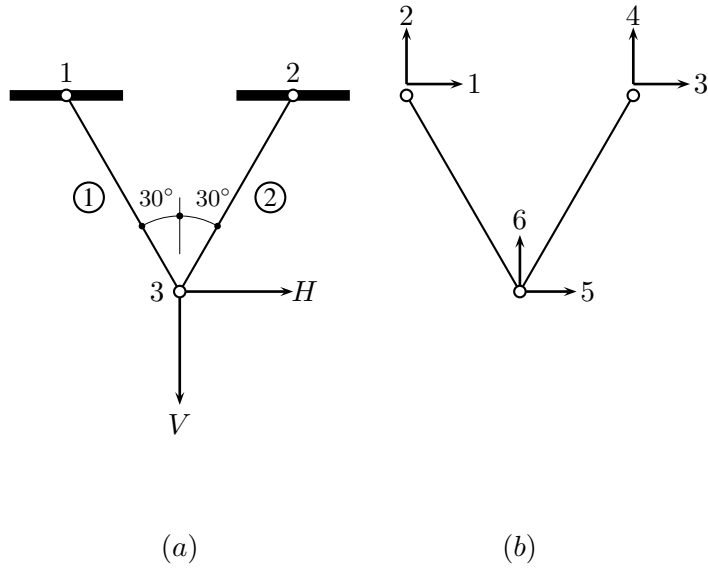


Figura 2.8: Armadura de dos barras. (a) Geometría y cargas. (b) Numeración de grados de libertad.

Como ejemplo, consideremos la armadura sencilla compuesta por dos barras de igual longitud l y área seccional A sometidas a las cargas que indica la figura 2.8. De acuerdo con la numeración de los nodos, la de los grados de libertad es la que aparece en la parte (b) de la figura. Igualmente, los ángulos que forman las barras con el eje horizontal son los que aparecen en el cuadro 1 junto con sus valores de η y μ .

Con base en esta información y de acuerdo con la ecuación (2.35), las matrices de rigidez de los dos elementos en coordenadas globales, toman los siguientes valores:

$$K_1 = \frac{EA}{4l} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ & & 1 & -\sqrt{3} \\ & & & 3 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = \frac{EA}{4l} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ & & 1 & \sqrt{3} \\ & & & 3 \end{pmatrix}$$

Cuadro 2.1: Valores angulares de las barras en la figura 2.8

| Elemento | β | η | μ |
|----------|--------------|----------------|-----------------------|
| 1 | -60° | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 2 | -120° | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

Cuadro 2.2: Correspondencias de grados de libertad para la estructura de la figura 2.8

| Elemento | Numeración local | Numeración global |
|----------|------------------|-------------------|
| 1 | 1 | 1 |
| | 2 | 2 |
| | 3 | 5 |
| | 4 | 6 |
| 2 | 1 | 3 |
| | 2 | 4 |
| | 3 | 5 |
| | 4 | 6 |

En estas ecuaciones sólo se muestra el triángulo superior de las matrices para facilitar su visualización.

Con el fin de obtener las contribuciones ΔK_e de estos elementos a la matriz de rigidez global necesitamos expandir estas matrices al orden 6×6 , de acuerdo con el cuadro de correspondencias 2.2. El resultado es

$$\Delta K_1 = \frac{EA}{4l} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & -1 & \sqrt{3} \\ & 3 & 0 & 0 & \sqrt{3} & -3 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & -\sqrt{3} \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta K_2 = \frac{EA}{4l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ & & & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ & & & & 1 & \sqrt{3} \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

La suma de estas dos contribuciones da como resultado la matriz de rigidez de la estructura:

$$K = \frac{EA}{4l} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & -1 & \sqrt{3} \\ & 3 & 0 & 0 & \sqrt{3} & -3 \\ & & 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ & & & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 6 \end{pmatrix}$$

mientras que el vector de fuerzas asociado a ella es

$$P = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ H \\ -V \end{pmatrix}$$

Para resolver el problema $KD = P$ necesitamos fraccionar las matrices según los grados de libertad restringidos. Al estar libres de movimiento solamente los grados de libertad 5 y 6, el problema de cálculo de desplazamientos se reduce a

$$\frac{EA}{4l} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_5 \\ D_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ -V \end{pmatrix}$$

lo que da como resultado

$$D_5 = \frac{2Hl}{EA}, \quad D_6 = -\frac{2Vl}{3EA}$$

2.5. Cálculo de reacciones y fuerzas internas

Para calcular las fuerzas internas en los elementos seguimos el mismo derrotero planteado en el capítulo anterior, con la salvedad de que ahora se hace necesario usar una vez más la matriz de transformación T . Así, del vector de desplazamientos $D = [D_a \ D_b]^T$ se extraen los desplazamientos propios de cada elemento D_e , $e = 1, 2, \dots, M$. Las fuerzas internas del elemento e en coordenadas globales están dadas por la ecuación (2.33):

$$P_e = K_e D_e$$

donde $K_e = T_e^T k_e T_e$, según la ecuación (2.34). Las fuerzas internas del elemento en las coordenadas que le son propias, se obtienen finalmente por la ecuación (2.24):

$$p_e = T_e P_e$$

Al combinar estas ecuaciones se obtiene

$$p_e = T_e T_e^T k_e T_e D_e$$

lo cual equivale a

$$p_e = k_e T_e D_e \quad (2.44)$$

puesto que $T_e T_e^T = I$.

El vector p_e tiene, o bien la composición $[-N \ 0 \ N \ 0]^T$, o bien la composición $[N \ 0 \ -N \ 0]^T$, donde N es una fuerza axial positiva. El primer caso indica que en el primer nodo del elemento hay una fuerza contraria al sentido positivo de los desplazamientos y fuerzas internas, mientras que en el nodo opuesto lo contrario, lo que significa que el elemento se encuentra en un estado de *tracción*. Lo contrario ocurre en el segundo caso, que denota un estado de *compresión*. Si se adopta la convención usual que define las tracciones como tensiones positivas mientras que las compresiones como tensiones negativas, se tiene que la tercera fila del vector p_e contiene el signo correcto de las mismas en ambos casos. Por tanto, las tensiones en el elemento se calculan en la forma siguiente:

$$\sigma_e = \frac{p_e(3)}{A_e} \quad (2.45)$$

De manera alternativa, al realizar el producto de la tercera fila de la matriz k_e por la matriz T_e se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{EA_e}{l_e} (-1 \ 0 \ 1 \ 0) & \begin{pmatrix} \eta & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \eta \end{pmatrix} \\ & = (-\eta \ -\mu \ \eta \ \mu) \end{aligned}$$

con lo cual una expresión matricial de las tensiones es

$$\sigma_e = \frac{E}{l_e} \begin{pmatrix} -\eta & -\mu & \eta & \mu \end{pmatrix} \mathbf{D}_e \quad (2.46)$$

Esta expresión es de más fácil aplicación en la práctica, pues requiere menos operaciones. La fuerza de tensión axial en cada barra está dada por

$$\begin{aligned} N &= A_e \sigma_e \\ &= \frac{EA_e}{l_e} \begin{pmatrix} -\eta & -\mu & \eta & \mu \end{pmatrix} \mathbf{D}_e \end{aligned} \quad (2.47)$$

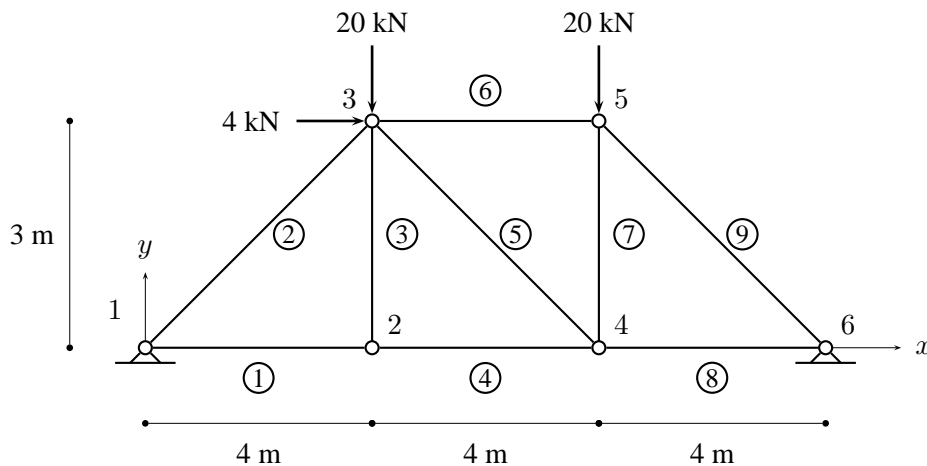


Figura 2.9: Armadura articulada. Geometría y cargas.

2.6. Ejemplo 2

Como ejemplo, consideremos la armadura metálica mostrada en la figura 2.9, sometida a la acción de dos cargas verticales y una horizontal. Todas las barras tienen un módulo de elasticidad $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ y un área seccional $A = 0,005 \text{ m}^2$. En primer lugar creamos estas variables en MATLAB:

```
E=2e8; A=0.005;
```

A continuación ingresamos la información de las longitudes l_e de todos los elementos:

```
l_1=4; l_2=sqrt(4^2+3^2); l_3=3; l_4=4; l_5=sqrt(4^2+3^2);
l_6=4; l_7=3; l_8=4; l_9=sqrt(4^2+3^2);
```

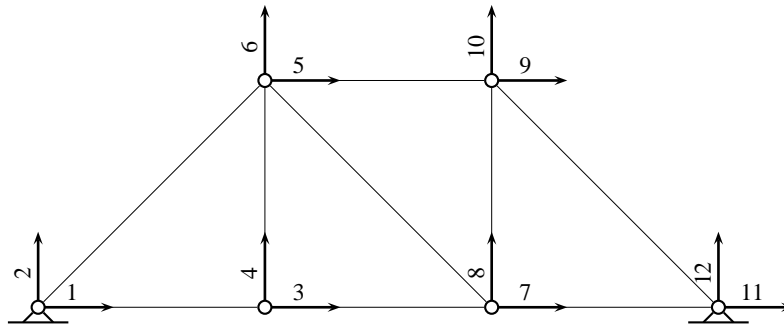


Figura 2.10: Armadura articulada. Numeración de grados de libertad.

Cuadro 2.3: Ángulos de las barras de la armadura con el eje horizontal.

| Barra | β |
|-------|---------|
| 1 | 0 |
| 2 | 36.87 |
| 3 | 90 |
| 4 | 0 |
| 5 | -36.87 |
| 6 | 0 |
| 7 | 90 |
| 8 | 0 |
| 9 | -36.87 |

Con estos datos es posible calcular las matrices de rigidez elementales en coordenadas locales:

$$k_{11} = E \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / l_{11}$$

lo que da como resultado

$$k_{11} =$$

$$\begin{bmatrix} 250000 & 0 & -250000 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -250000 & 0 & 250000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Análogamente,

```
k_2=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_2;
k_3=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_3;
k_4=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_4;
k_5=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_5;
k_6=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_6;
k_7=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_7;
k_8=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_8;
k_9=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_9;
```

Para calcular las matrices de rigidez elementales en coordenadas globales se requiere el cálculo previo de los ángulos que forman los elementos con la dirección positiva del eje horizontal. Estos ángulos aparecen en el cuadro 2.3. Obsérvese que para los elementos 5 y 9 los ángulos tienen un valor negativo.

Calcularemos ahora las matrices de rigidez elementales en coordenadas globales K_e (ecuación 2.34). En primer lugar, con fines ilustrativos destacaremos el cálculo de las mismas para las barras 1 y 2:

```
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_1= [ eta mu 0 0; -mu eta 0 0;
       0 0 eta mu; 0 0 -mu eta];
K_1=T_1'*k_1*T_1
```

K_1 =

$$\begin{array}{cccc} 250000 & 0 & -250000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -250000 & 0 & 250000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

```
beta=36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_2= [ eta mu 0 0; -mu eta 0 0;
       0 0 eta mu; 0 0 -mu eta];
K_2=T_2'*k_2*T_2
```

K_2 =

1.0e+005 *

$$\begin{array}{cccc} 1.2800 & 0.9600 & -1.2800 & -0.9600 \\ 0.9600 & 0.7200 & -0.9600 & -0.7200 \\ -1.2800 & -0.9600 & 1.2800 & 0.9600 \\ -0.9600 & -0.7200 & 0.9600 & 0.7200 \end{array}$$

Nótese que la matriz de rigidez en coordenadas globales de la barra 1 carece de elementos diferentes de cero en las filas y columnas 2 y 4, mientras que la matriz correspondiente para la barra 2 tiene

todos sus elementos diferentes de cero. Esto se debe a que la orientación de la barra 1 es horizontal, por lo que no aporta ninguna rigidez contra el movimiento en la dirección Y , mientras que la barra 2 es inclinada y, por tanto, aporta rigidez tanto en la dirección X como en la dirección Y .

Procederemos de manera análoga para el resto de elementos, así:

```

beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_3= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_3=T_3'*k_3*T_3;

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_4= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_4=T_4'*k_4*T_4;

beta=-36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_5= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_5=T_5'*k_5*T_5;

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_6= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_6=T_6'*k_6*T_6;

beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_7= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_7=T_7'*k_7*T_7;

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_8= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_8=T_8'*k_8*T_8;

beta=-36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_9= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_9=T_9'*k_9*T_9;

```

De manera equivalente, las anteriores matrices pueden ser obtenidas por medio de las ecuaciones (2.36) y (2.37), sin necesidad de calcular los ángulos β . Por ejemplo, para el elemento 2,

```
eta=4/5; mu=3/5;
```

Pasamos ahora a formar la matriz de rigidez de la estructura a partir de las contribuciones de los elementos ΔK_e , según lo explicado anteriormente (ecuación 2.39):

```

K=zeros(12,12);

g_1=[1 2 3 4];
DeltaK_1=zeros(12,12);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[1 2 5 6];
DeltaK_2=zeros(12,12);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

g_3=[3 4 5 6];
DeltaK_3=zeros(12,12);
DeltaK_3(g_3,g_3)=K_3;
K=K+DeltaK_3;

g_4=[3 4 7 8];
DeltaK_4=zeros(12,12);
DeltaK_4(g_4,g_4)=K_4;
K=K+DeltaK_4;

g_5=[5 6 7 8];
DeltaK_5=zeros(12,12);
DeltaK_5(g_5,g_5)=K_5;
K=K+DeltaK_5;

g_6=[5 6 9 10];
DeltaK_6=zeros(12,12);
DeltaK_6(g_6,g_6)=K_6;
K=K+DeltaK_6;

g_7=[7 8 9 10];
DeltaK_7=zeros(12,12);
DeltaK_7(g_7,g_7)=K_7;
K=K+DeltaK_7;

g_8=[7 8 11 12];
DeltaK_8=zeros(12,12);
DeltaK_8(g_8,g_8)=K_8;
K=K+DeltaK_8;

g_9=[9 10 11 12];
DeltaK_9=zeros(12,12);
DeltaK_9(g_9,g_9)=K_9;
K=K+DeltaK_9;

```

Para comprender bien la técnica de ensamblaje, es instructivo comparar las matrices K_e y ΔK_e . Por ejemplo, para el elemento 3,

K_3

$K_3 =$

$1.0e+005 *$

| | | | |
|---|---------|---|---------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 3.3333 | 0 | -3.3333 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | -3.3333 | 0 | 3.3333 |

Delta $K_3 =$

$1.0e+005 *$

Columns 1 through 9

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---------|---|---------|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 3.3333 | 0 | -3.3333 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | -3.3333 | 0 | 3.3333 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Columns 10 through 12

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

Obsérvese que los elementos no nulos de la matriz K_3 han sido colocados en las filas y columnas indicadas por el vector $g_3 = [3 \ 4 \ 5 \ 6]$ en una matriz de tamaño 12×12 .

Con el fin de resolver el problema de desplazamientos se requiere partir la matriz de rigidez según los grados de libertad restringidos y no restringidos. De la figura 2.10 es claro que los vectores correspondientes son:

$a = [1 \ 2 \ 11 \ 12]; \ b = [3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10];$

Por tanto,

$$K_{aa}=K(a,a); K_{ab}=K(a,b); K_{ba}=K(b,a); K_{bb}=K(b,b);$$

De la figuras 2.9 y 2.10 resulta claro que el vector de fuerzas es

$$P=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4 \ -20 \ 0 \ 0 \ 0 \ -20 \ 0 \ 0]';$$

y, por tanto, para los grados de libertad no restringidos se tiene que

$$P_b=P(b);$$

Esto permite calcular los desplazamientos los grados de libertad no restringidos y las reacciones en los apoyos, así:

$$D_b=K_{bb} \setminus P_b;$$

$$P_a=K_{ab} * D_b;$$

Al reunir los desplazamientos en todos los grados de libertad se obtiene el vector

$$D=zeros(12,1);$$

$$D(b)=D_b;$$

cuyo valor es

$$D =$$

$$1.0e-003 * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0018 \\ -0.3301 \\ 0.0497 \\ -0.3301 \\ 0.0036 \\ -0.3778 \\ -0.0623 \\ -0.3748 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular las tensiones en los elementos aplicamos directamente la ecuación 2.46:

$$\text{beta}=0;$$

$$\text{eta}=\text{cosd}(\text{beta}); \text{mu}=\text{sind}(\text{beta});$$

$$D_1=D(g_1);$$

$$\text{sigma}_1=E * [-\text{eta} \ -\text{mu} \ \text{eta} \ \text{mu}] * D_1 / l_1$$

$$\text{beta}=36.87;$$

$$\text{eta}=\text{cosd}(\text{beta}); \text{mu}=\text{sind}(\text{beta});$$

```

D_2=D(g_2);
sigma_2=E*[-eta -mu eta mu]*D_2/l_2

beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_3=D(g_3);
sigma_3=E*[-eta -mu eta mu]*D_3/l_3

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_4=D(g_4);
sigma_4=E*[-eta -mu eta mu]*D_4/l_4

beta=-36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_5=D(g_5);
sigma_5=E*[-eta -mu eta mu]*D_5/l_5

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_6=D(g_6);
sigma_6=E*[-eta -mu eta mu]*D_6/l_6

beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_7=D(g_7);
sigma_7=E*[-eta -mu eta mu]*D_7/l_7

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_8=D(g_8);
sigma_8=E*[-eta -mu eta mu]*D_8/l_8

beta=-36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_9=D(g_9);
sigma_9=E*[-eta -mu eta mu]*D_9/l_9

```

El resultado de estas operaciones es

```

sigma_1 =
    88.8889

sigma_2 =
   -6.3333e+003

sigma_3 =
    4.8506e-012

```



```

sigma_4 =
    88.8889

sigma_5 =
   -333.3338

sigma_6 =
   -5.6000e+003

sigma_7 =
    200.0007

sigma_8 =
   -177.7778

sigma_9 =
   -7.0000e+003

```

La unidad de medida de estas tensiones es, obviamente, kN/m^2 . Obsérvese que el elemento 3 se encuentra sin tensión alguna, como puede deducirse por simple equilibrio del nodo 2. (El ínfimo valor que aparece más arriba obedece a la acumulación de errores de redondeo). Por su parte, los elementos 1, 4 y 7 se encuentran en tracción y los elementos restantes en compresión.

Con el fin de comprender mejor la situación de la estructura bajo las cargas a las que se encuentra sometida, es interesante dibujar su posición deformada sobrepuesta a su forma original. Para ello creamos primero una matriz XY que reúne las coordenadas x e y de los nodos:

```

XY=zeros(6,2);
XY(1,:)= [0 0];
XY(2,:)= [4 0];
XY(3,:)= [4 3];
XY(4,:)= [8 0];
XY(5,:)= [8 3];
XY(6,:)= [12 0];

```

Luego creamos una matriz con el estado de geometría deformada, $XYdef$, que se obtiene al sumar los desplazamientos amplificados por un factor a las coordenadas iniciales. En este caso adoptaremos un factor de 500:

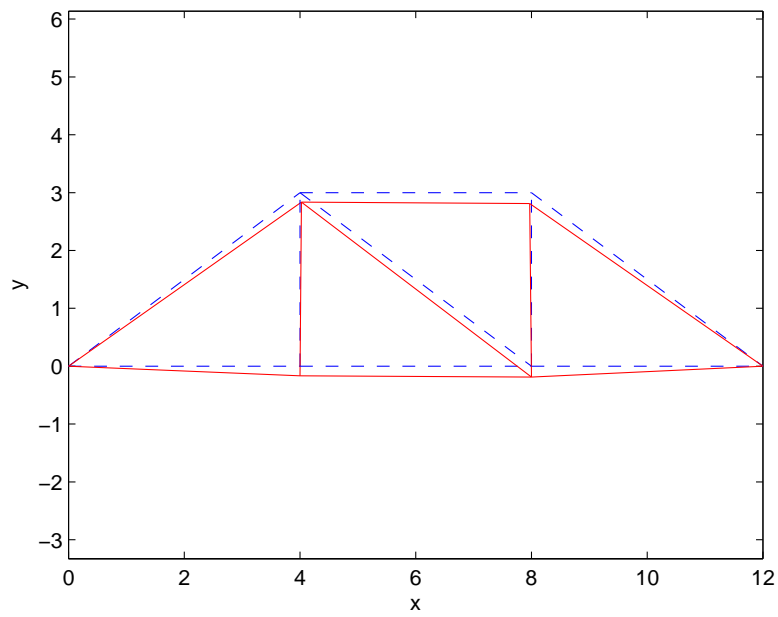


Figura 2.11: Estructura original y posición deformada (con un factor de amplificación de 500).

```

XYdef=zeros(size(XY));
fac=500;
c=0;
for i=1:6
    c=c+1;
    XYdef(i,1)=XY(i,1)+fac*D(c);
    c=c+1;
    XYdef(i,2)=XY(i,2)+fac*D(c);
end

```

En el bucle se hace uso de un contador (*c*) que recibe dos valores por nodo, los cuales corresponden a los desplazamientos en las direcciones *X* e *Y* de cada uno.

Ahora crearemos la matriz topológica de la estructura, en la cual cada fila define los nodos inicial y final del elemento correspondiente:

```

IJ=zeros(9,2);
IJ(1,:)= [1 2];
IJ(2,:)= [1 3];
IJ(3,:)= [2 3];
IJ(4,:)= [2 4];
IJ(5,:)= [3 4];
IJ(6,:)= [3 5];
IJ(7,:)= [4 5];
IJ(8,:)= [4 6];
IJ(9,:)= [5 6];

```

Con esta información, el siguiente bucle crea las figuras original (*Q*) y deformada (*Qdef*) de la estructura por medio de la técnica de direccionamiento indirecto de MATLAB:

```

figure
for e=1:9
    Q=[XY(IJ(e,1),1) XY(IJ(e,1),2);...
        XY(IJ(e,2),1) XY(IJ(e,2),2)];
    Qdef=[XYdef(IJ(e,1),1) XYdef(IJ(e,1),2);...
        XYdef(IJ(e,2),1) XYdef(IJ(e,2),2)];
    plot(Q(:,1),Q(:,2),'--b',Qdef(:,1),Qdef(:,2),'-r')
    hold on
end
xlabel('x')
ylabel('y')
axis equal

```

La figura 2.11 muestra el resultado.

2.7. Armaduras espaciales

A partir de las deducciones realizadas anteriormente para el caso de armaduras planas, extendemos ahora el método de rigidez para el caso de armaduras espaciales como la mostrada en la figura 2.12.

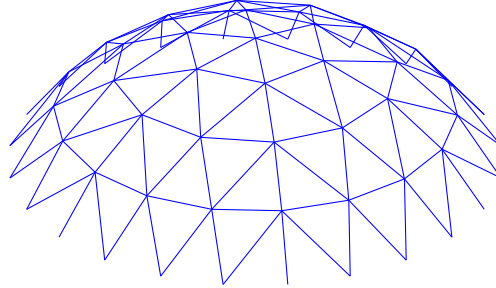


Figura 2.12: Ejemplo de armadura espacial.

En primer lugar, a las fuerzas N y V del sistema local se añade ahora una fuerza ortogonal de naturaleza cortante, que denotaremos por G . En el sistema local, las fuerzas correspondientes se denotan ahora por X, Y, Z (ver la figura 2.13). En consecuencia, la ecuación (2.11), que relaciona los dos sistemas de fuerzas, toma ahora la forma

$$\begin{pmatrix} N \\ V \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Phi_{XN} & \cos \Phi_{YN} & \cos \Phi_{ZN} \\ \cos \Phi_{XV} & \cos \Phi_{YV} & \cos \Phi_{ZV} \\ \cos \Phi_{XG} & \cos \Phi_{YG} & \cos \Phi_{ZG} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Por su parte, la matriz de rigidez elemental en coordenadas locales, que en el sistema plano está dada por la ecuación (2.28), pasa a ser ahora

$$\mathbf{k}_e = \frac{E_e A_e}{l_e} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

mientras que la matriz de transformación pasa a ser

$$\mathbf{T}_e = \begin{pmatrix} \cos \Phi_{XN} & \cos \Phi_{YN} & \cos \Phi_{ZN} & 0 & 0 & 0 \\ \cos \Phi_{XV} & \cos \Phi_{YV} & \cos \Phi_{ZV} & 0 & 0 & 0 \\ \cos \Phi_{XG} & \cos \Phi_{YG} & \cos \Phi_{ZG} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Phi_{XN} & \cos \Phi_{YN} & \cos \Phi_{ZN} \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Phi_{XV} & \cos \Phi_{YV} & \cos \Phi_{ZV} \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Phi_{XG} & \cos \Phi_{YG} & \cos \Phi_{ZG} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

A partir de las dos ecuaciones anteriores, resulta posible la aplicación de la ecuación (2.34) para obtener la matriz de rigidez de la barra en el sistema de coordenadas global:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e$$

Nótese que al realizar este producto los cosenos directores correspondientes a las fuerzas V y G resultan siempre multiplicados por cero, por lo cual el resultado final estará determinado exclusivamente por los cosenos $\cos \Phi_{XN}$, $\cos \Phi_{YN}$ y $\cos \Phi_{ZN}$. la matriz de rigidez es, en consecuencia,

$$\mathbf{K}_e = \frac{E_e A_e}{l_e} \begin{pmatrix} \eta^2 & \eta\mu & \eta\nu & -\eta^2 & -\eta\mu & -\eta\nu \\ \eta\mu & \mu^2 & \mu\nu & -\eta\mu & -\mu^2 & -\mu\nu \\ \eta\nu & \mu\nu & \nu^2 & -\eta\nu & -\mu\nu & -\nu^2 \\ -\eta^2 & -\eta\mu & -\eta\nu & \eta^2 & \eta\mu & \eta\nu \\ -\eta\mu & -\mu^2 & -\mu\nu & \eta\mu & \mu^2 & \mu\nu \\ -\eta\nu & -\mu\nu & -\nu^2 & \eta\nu & \mu\nu & \nu^2 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

donde los cosenos directores se obtienen por medio de las siguientes expresiones:

$$\eta \equiv \cos \Phi_{XN} = \frac{x_j - x_i}{l_e} \quad (2.52)$$

$$\mu \equiv \cos \Phi_{YN} = \frac{y_j - y_i}{l_e} \quad (2.53)$$

$$\nu \equiv \cos \Phi_{ZN} = \frac{z_j - z_i}{l_e} \quad (2.54)$$

con la longitud del elemento dada por

$$l_e = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (2.55)$$

Una vez calculadas las matrices de rigidez en coordenadas globales \mathbf{K}_e para todas las barras, el proceso de ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura \mathbf{K} se realiza por el mismo procedimiento automático ya mencionado. Esto es, la matriz de rigidez \mathbf{K}_e , de tamaño 6×6 se expande a una matriz $\Delta \mathbf{K}_e$ de tamaño $n \times n$, donde n es el número de grados de libertad, igual a tres veces el número de nodos. Por tanto, la primera diferencia con el problema plano reside en que, para cada nodo, los grados de libertad se obtienen de la manera siguiente:

- Número del grado de libertad del nodo i en la dirección x : $3i - 2$

- Número del grado de libertad del nodo i en la dirección y : $3i - 1$
- Número del grado de libertad del nodo i en la dirección z : $3i$

Una diferencia adicional tiene lugar al calcular las tensiones en las barras, dada para el caso plano por la ecuación (2.45). En el caso espacial, la posición indicativa No. 3 del vector p_e pasa a ser la No. 4. Por tanto, la ecuación matricial correspondiente, obtenida de manera similar a la (2.46) es

$$\sigma_e = \frac{E}{l_e} \begin{pmatrix} -\eta & -\mu & -\nu & \eta & \mu & \nu \end{pmatrix} D_e \quad (2.56)$$

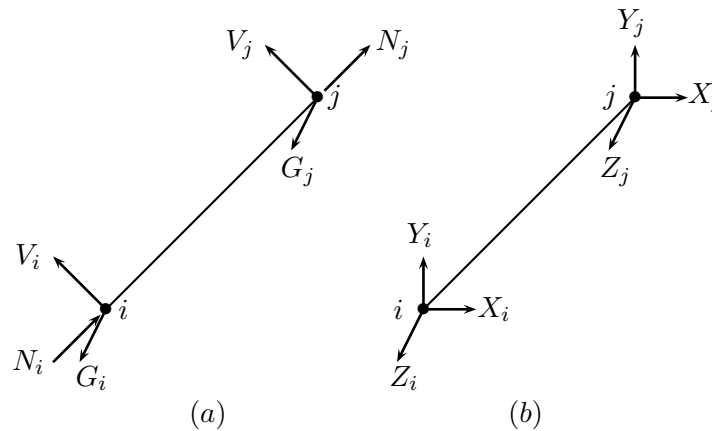


Figura 2.13: Fuerzas internas en un elemento de armadura espacial. (a) Sistema local ortogonal; (b) sistema global ortogonal.

2.8. Ejemplo 3

Consideremos la estructura mostrada en la figura 2.14. Se trata de un domo que se aproxima a la forma de un casquete esférico. Las coordenadas de los nodos aparecen en el cuadro 2.4 mientras que la topología de la estructura en el cuadro 2.5. El módulo de elasticidad de las barras es $E = 205,8 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ y el área seccional es $A = 0,0001 \text{ m}^2$ para todas ellas. La estructura se encuentra sometida a la acción de cargas verticales hacia abajo en los nodos 1 a 7. En el nodo 1 su valor es de 6 kN, mientras que en los restantes de 3 kN.

De acuerdo con esta información, la estructura tiene 13 nodos, $13 \times 3 = 39$ grados de libertad y 24 barras. Los nodos 8 a 13 se encuentran restringidos de movimiento en todas las direcciones. Por tanto, para la partición del problema definimos los vectores

$$a=22:39; \quad b=1:21;$$

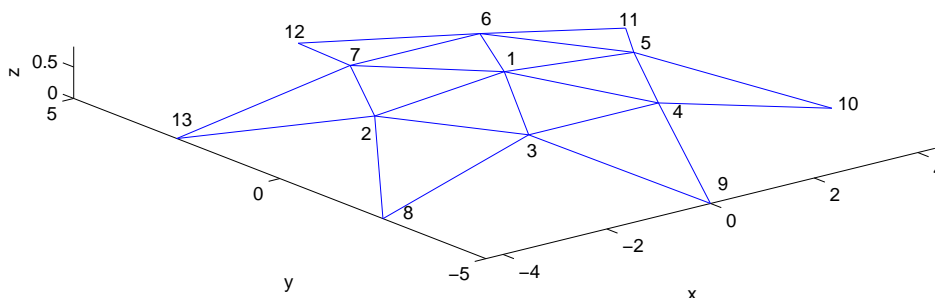


Figura 2.14: Armadura espacial con forma de casquete esférico.

Cuadro 2.4: Coordenadas de los nodos del domo circular (en m).

| Nodo | x | y | z |
|------|-------|--------|--------|
| 1 | 0 | 0 | 0.8216 |
| 2 | -2.5 | 0 | 0.6216 |
| 3 | -1.25 | -2.165 | 0.6216 |
| 4 | 1.25 | -2.165 | 0.6216 |
| 5 | 2.5 | 0 | 0.6216 |
| 6 | 1.25 | 2.165 | 0.6216 |
| 7 | -1.25 | 2.165 | 0.6216 |
| 8 | -4.33 | -2.5 | 0 |
| 9 | 0 | -5.0 | 0 |
| 10 | 4.33 | -2.5 | 0 |
| 11 | 4.33 | 2.5 | 0 |
| 12 | 0 | 5.0 | 0 |
| 13 | -4.33 | 2.5 | 0 |

donde el primero corresponde a los grados restringidos (de $3 \times 8 - 2 = 22$ hasta $3 \times 13 = 39$) mientras que el segundo a los libres (de 1 hasta $3 \times 7 = 21$).

Comenzaremos por definir las propiedades generales

Cuadro 2.5: Topología del domo circular.

| Barra | Nodo i | Nodo j |
|-------|----------|----------|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 3 |
| 3 | 1 | 4 |
| 4 | 1 | 5 |
| 5 | 1 | 6 |
| 6 | 1 | 7 |
| 7 | 2 | 3 |
| 8 | 3 | 4 |
| 9 | 4 | 5 |
| 10 | 5 | 6 |
| 11 | 6 | 7 |
| 12 | 2 | 7 |
| 13 | 2 | 8 |
| 14 | 3 | 8 |
| 15 | 3 | 9 |
| 16 | 4 | 9 |
| 17 | 4 | 10 |
| 18 | 5 | 10 |
| 19 | 5 | 11 |
| 20 | 6 | 11 |
| 21 | 6 | 12 |
| 22 | 7 | 12 |
| 23 | 7 | 13 |
| 24 | 2 | 13 |

% Módulo de elasticidad:

E=205.8*1e6;

% Área:

A=1e-4;

y las cargas

P=zeros(39,1);

P(3)=-6;

P(6)=-3;

P(9)=-3;


```
P(12)=-3;
P(15)=-3;
P(18)=-3;
P(21)=-3;
```

Con base en la información contenida en los cuadros 2.4 y 2.5, la longitud del elemento 1, dada por la ecuación (2.55) es

$$l_1 = \sqrt{(x(2)-x(1))^2 + (y(2)-y(1))^2 + (z(2)-z(1))^2}$$

```
l_1 =
```

```
2.5159
```

mientras que los cosenos directores, dados por las ecuaciones (2.52), (2.53) y (2.54), son

```
eta=(x(2)-x(1))/l_1
mu=(y(2)-y(1))/l_1
nu=(z(2)-z(1))/l_1
```

```
eta =
```

```
-0.9937
```

```
mu =
```

```
0
```

```
nu =
```

```
-0.0795
```

Por tanto, la matriz de rigidez en coordenadas globales del elemento 1, K_1 y su contribución ΔK_1 a la matriz de rigidez general K se determinan de la manera explicada anteriormente:

```
K=zeros(39,39);
K_1= E*A/l_1*...
[eta^2      eta*mu      eta*nu      -eta^2      -eta*mu      -eta*nu;...
 eta*mu      mu^2        mu*nu      -eta*mu      -mu^2        -mu*nu;...
 eta*nu      mu*nu        nu^2        -eta*nu      -mu*nu        -nu^2;...
 -eta^2      -eta*mu      -eta*nu      eta^2        eta*mu        eta*nu;...
 -eta*mu      -mu^2        -mu*nu      eta*mu        mu^2        mu*nu;...
 -eta*nu      -mu*nu        -nu^2        eta*nu        mu*nu        nu^2]
```

```
K_1 =
```

```
1.0e+003 *
```

```
8.0764      0      0.6461      -8.0764      0      -0.6461
```

```

      0      0      0      0      0      0
    0.6461   0    0.0517 -0.6461   0   -0.0517
   -8.0764   0   -0.6461   8.0764   0    0.6461
      0      0      0      0      0      0
   -0.6461   0   -0.0517   0.6461   0    0.0517

```

```

g_1=[1 2 3 4 5 6];
DeltaK_1=zeros(39,39);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

```

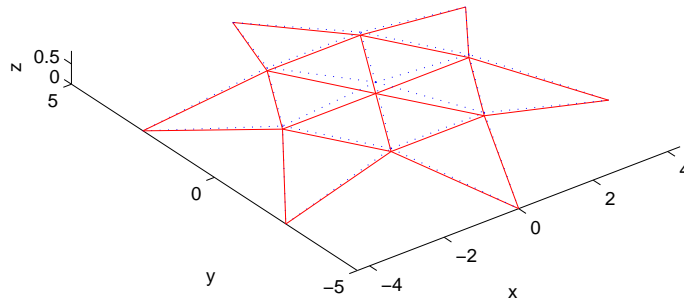


Figura 2.15: Posición deformada del casquete esférico.

Se deja como ejercicio al lector estudiar el código de este ejemplo suministrado en el Apéndice B. Con él se puede comprobar que los desplazamientos de los grados de libertad no restringidos son

D_b =

```

0.0000
-0.0000
-0.0279
-0.0001
-0.0000
-0.0077
-0.0000
-0.0001
-0.0077
0.0000
-0.0001
-0.0077
0.0001

```

```
0.0000
-0.0077
0.0000
0.0001
-0.0077
-0.0000
0.0001
-0.0077
```

mientras que el vector de tensiones en los 24 elementos es

sigma =

```
-12.5391
-12.5401
-12.5401
-12.5391
-12.5401
-12.5401
0.7233
0.7227
0.7233
0.7233
0.7227
0.7233
-10.1670
-10.1679
-10.1669
-10.1669
-10.1679
-10.1670
-10.1670
-10.1679
-10.1669
-10.1669
-10.1679
-10.1670
```

La figura 2.15 muestra la posición deformada del casquete, con deformaciones amplificadas con un factor de 10.

Capítulo 3

Vigas

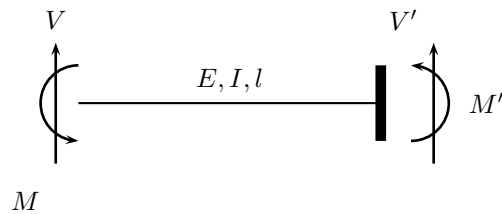


Figura 3.1: Viga en voladizo.

3.1. Matriz de rigidez de una viga

Consideremos la viga en voladizo de sección constante mostrada en la figura 3.1, la cual tiene un módulo de elasticidad E , momento de inercia I y longitud l . En el extremo libre de la viga se encuentran aplicados una carga V transversal y un momento flector M , ambos de sentido positivo. En la figura se representan también las reacciones V' y M' . Por efecto de la carga V la deflexión en el extremo y el ángulo de giro son

$$EI\xi = \frac{Vl^3}{3}, \quad EI\theta = -\frac{Vl^2}{2} \quad (3.1)$$

Por otra parte, a causa del momento M , estos valores son

$$EI\xi = -\frac{Ml^2}{2}, \quad EI\theta = Ml \quad (3.2)$$

En consecuencia, los valores totales son

$$EI\xi = \frac{Vl^3}{3} - \frac{Ml^2}{2}, \quad EI\theta = -\frac{Vl^2}{2} + Ml \quad (3.3)$$

Con base en la definición de la matriz de rigidez dada en el capítulo 1 y en las anteriores ecuaciones, resolveremos los dos siguiente problemas, de lo cual saldrán los valores de las columnas de la matriz. El primer problema consiste en hallar los valores adecuados de V y M para $\theta = 0$. El segundo problema corresponde al caso contrario: $\xi = 0$.

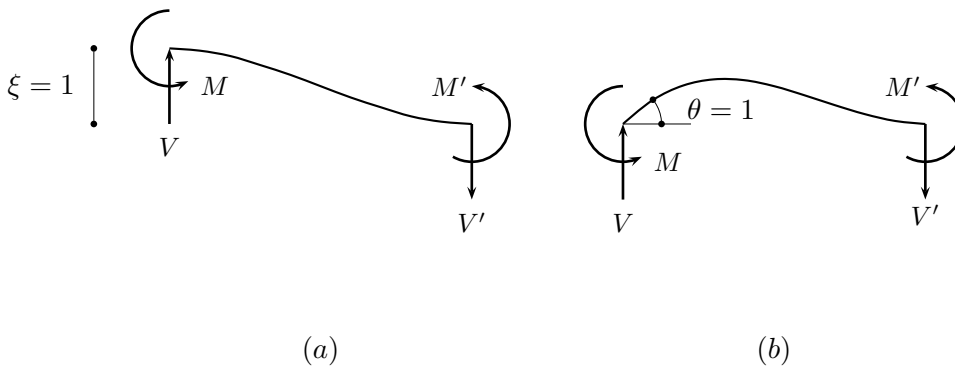


Figura 3.2: Problemas para deducir la matriz de rigidez de una barra en flexión. (a): Problema 1; (b) Problema 2.

Primer problema: Hallar V y M tales que $\theta = 0$.

De la ecuación (3.3) tenemos

$$EI\theta = -\frac{Vl^2}{2} + Ml = 0 \quad \therefore M = \frac{Vl}{2}$$

Por tanto,

$$EI\xi = \frac{Vl^3}{3} - \frac{Ml^2}{2} = \frac{Vl^3}{12}$$

lo cual quiere decir que

$$V = \frac{12EI}{l^3}\xi, \quad M = \frac{6EI}{l^2}\xi \quad (3.4)$$

En la figura 3.2 se encuentra representada esta solución junto con los valores de las reacciones en el apoyo, las cuales se obtienen por equilibrio. Sus valores son

$$V' = -\frac{12EI}{l^3}\xi, \quad M' = \frac{6EI}{l^2}\xi \quad (3.5)$$

En la figura se han omitido los signos de las fuerzas, que son indicados por las direcciones equivalentes. También se muestra la forma de la elástica que surge de las condiciones del problema.

Segundo problema: Hallar V y M tales que $\xi = 0$.

En este caso,

$$EI\xi = \frac{Vl^3}{3} - \frac{Ml^2}{2} = 0 \quad \therefore V = \frac{3M}{2l}$$

por lo cual

$$EI\theta = -\frac{3Ml}{4} + Ml$$

Esto implica que

$$M = \frac{4EI}{l}\theta, \quad V = \frac{6EI}{l^2}\theta \quad (3.6)$$

Por equilibrio,

$$V' = -\frac{6EI}{l^2}\theta, \quad M' = \frac{2EI}{l}\theta \quad (3.7)$$

Esta solución se presenta igualmente en la figura 3.2. Si denominamos los extremos izquierdo y derecho de la viga i y j , respectivamente, podemos hacer las equivalencias $\xi \equiv \xi_i, \theta \equiv \theta_i, V' \equiv V_i, M' \equiv M_i, V \equiv V_j, M \equiv M_j$. Así, las relaciones (3.4), (3.5), (3.6) y (3.7) se pueden superponer así:

$$\begin{aligned}
 V_i &= \frac{12EI}{l^3}\xi_i + \frac{6EI}{l^2}\theta_i \\
 M_i &= \frac{6EI}{l^2}\xi_i + \frac{4EI}{l}\theta_i \\
 V_j &= -\frac{12EI}{l^3}\xi_i - \frac{6EI}{l^2}\theta_i \\
 M_j &= \frac{6EI}{l^2}\xi_i + \frac{2EI}{l}\theta_i
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

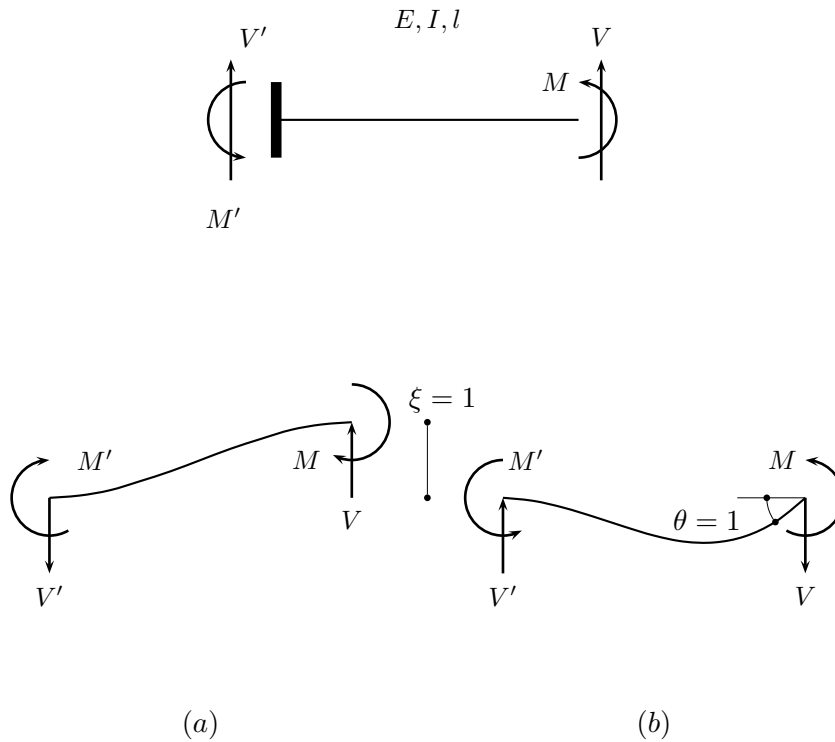


Figura 3.3: Solución de los problemas contrarios.

Con el fin de completar la deducción, es necesario resolver los dos problemas intercambiando las posiciones del apoyo y el extremo libre, como se indica en la figura 3.3. Para el primer caso ($\theta = 0$), la solución es

$$V = -\frac{12EI}{l^3}\xi, \quad M = -\frac{6EI}{l^2}\xi, \quad V' = \frac{12EI}{l^3}\xi, \quad M' = -\frac{6EI}{l^2}\xi
 \tag{3.9}$$

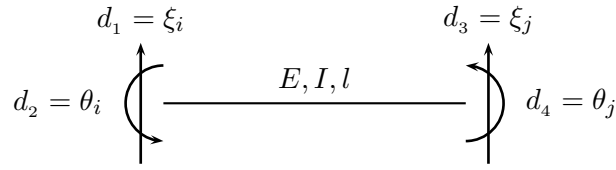


Figura 3.4: Numeración de los grados de libertad de la viga.

mientras que para el segundo

$$V = \frac{6EI}{l^2}\theta, \quad M = \frac{2EI}{l}\theta, \quad V' = -\frac{6EI}{l^2}\theta, \quad M' = \frac{4EI}{l}\theta \quad (3.10)$$

Al proceder de manera análoga a lo hecho anteriormente, es decir, haciendo $\xi \equiv \xi_j, \theta \equiv \theta_j, V \equiv V_j, M \equiv M_j, V' \equiv V_i, M' \equiv M_i$

$$\begin{aligned} V_i &= -\frac{12EI}{l^3}\xi_j + \frac{6EI}{l^2}\theta_j \\ M_i &= -\frac{6EI}{l^2}\xi_j + \frac{2EI}{l}\theta_j \\ V_j &= \frac{12EI}{l^3}\xi_j - \frac{6EI}{l^2}\theta_j \\ M_j &= -\frac{6EI}{l^2}\xi_j + \frac{4EI}{l}\theta_j \end{aligned} \quad (3.11)$$

Al superponer las ecuaciones (3.8) y (3.11) se obtiene finalmente el siguiente resultado

$$\begin{pmatrix} V_i \\ M_i \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \theta_i \\ \xi_j \\ \theta_j \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Lo anterior significa que, en la ecuación básica

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \quad (3.13)$$

la matriz de rigidez de un elemento de viga de sección constante es

$$\mathbf{k}_e = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

de acuerdo con una numeración de los grados de libertad como la que muestra la figura 3.4. Obsérvese que el número de grados de libertad es igual al doble del número de nodos. Por tanto, de manera similar a los casos anteriores, el orden de los grados de libertad es el siguiente:

- Número del grado de libertad vertical ξ del nodo i : $2i - 1$
- Número del grado de libertad rotacional θ del nodo i : $2i$

Para el análisis de vigas, la solución del problema de desplazamientos y fuerzas internas sigue los mismos criterios del capítulo 1, puesto que no hay necesidad en este caso de realizar ninguna transformación de coordenadas. Es decir, se realiza el ensamblaje de las matrices que definen el problema

$$\mathbf{K}\mathbf{D} = \mathbf{P} \quad (3.15)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez de la estructura, \mathbf{D} el vector de desplazamientos de los nodos y \mathbf{P} el vector de cargas aplicadas en ellos. Nótese que, como en la vigas los elementos se encuentran orientados según el eje horizontal, no es necesario aplicar una transformación de coordenadas, de manera que la matriz \mathbf{K}_e es igual a \mathbf{k}_e o, lo que es equivalente, la matriz de transformación es igual a la matriz idéntica:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e = \mathbf{k}_e; \quad \mathbf{T}_e = \mathbf{I} \quad (3.16)$$

El ensamblaje de \mathbf{K} se realiza por el método del cuadro de correspondencias explicado en los capítulos anteriores. Una vez resuelto el problema de desplazamientos (3.15), la ecuación (3.12) puede ser usada para la determinación de las fuerzas internas V y M , correspondientes a la fuerza cortante y al momento flector. Para ello, del vector \mathbf{D} extraemos los desplazamientos \mathbf{D}_e del elemento en coordenadas globales por medio del cuadro de correspondencias de las numeraciones local y global. Una vez realizado este paso, los desplazamientos en coordenadas locales se obtiene por medio de la ecuación

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{T}_e \mathbf{D}_e = \mathbf{D}_e \quad (3.17)$$

La aplicación de la ecuación (3.13) da entonces como resultado

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{D}_e \quad (3.18)$$

El análisis de vigas con cargas en los nodos se ilustra por medio del siguiente ejemplo.

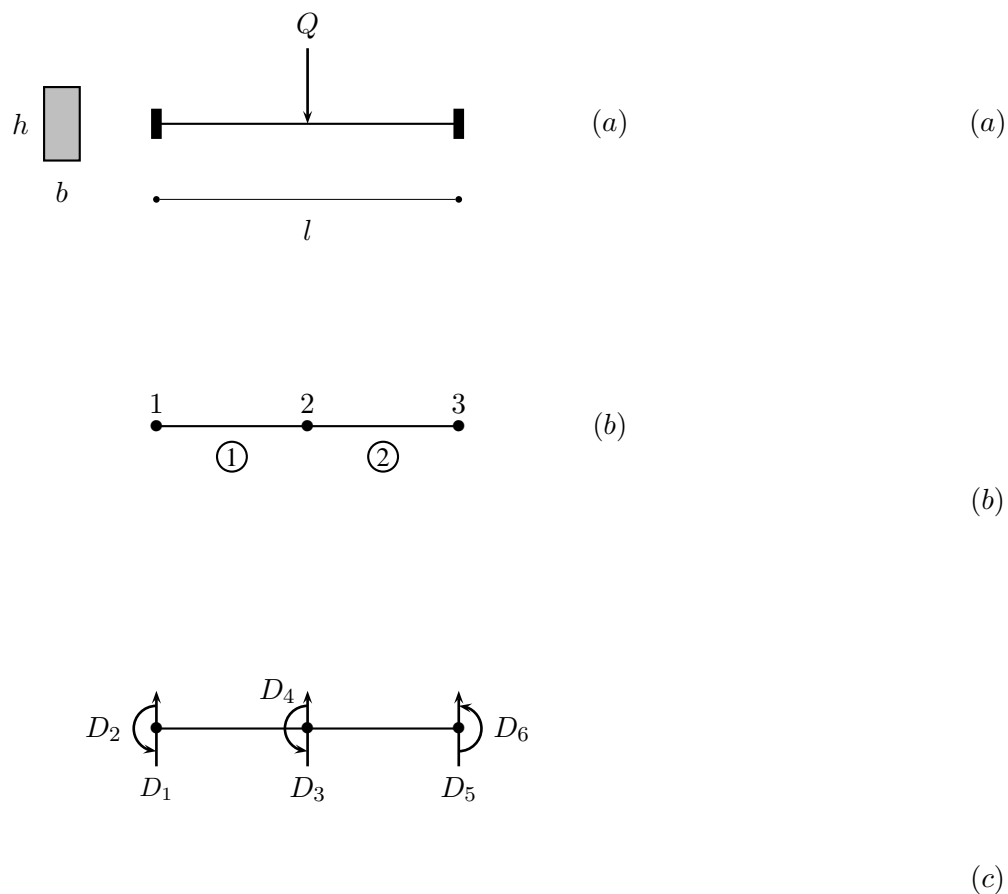


Figura 3.5: Viga biempotrada. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos. (c) Numeración de grados de libertad.

3.2. Ejemplo 4

Consideremos la viga biempotrada que aparece en la figura 3.5 sometida a una carga $Q = 100\text{kN}$ en el centro de la luz. El material es concreto reforzado con un módulo de elasticidad $E = 2 \times 10^7\text{kN/m}^2$. La longitud de la viga es 12 m, la sección rectangular tiene por medidas $b = 0,4\text{ m}$ y $h = 1\text{ m}$. El objetivo del análisis es calcular los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga, con lo cual podremos comprobar la exactitud del método matricial de rigidez, dada la

disponibilidad de los resultados analíticos para esta viga deducidos al comienzo de este capítulo.

Comenzaremos por definir las cantidades básicas E, I para los elementos que componen la viga:

```
E=2e7;
b=0.4;
h=1;
I=b*h^3/12;
l_1=6;
l_2=6;
```

Las matriz de rigidez de los elementos, dada por la ecuación (3.14), es

```
k_1=zeros(4,4);
k_1(1,:)=E*I*[12/l_1^3    6/l_1^2 -12/l_1^3    6/l_1^2];
k_1(2,:)=E*I*[6/l_1^2    4/l_1 -6/l_1^2    2/l_1];
k_1(3,:)=E*I*[-12/l_1^3 -6/l_1^2 12/l_1^3 -6/l_1^2];
k_1(4,:)=E*I*[6/l_1^2    2/l_1 -6/l_1^2    4/l_1];
```

k_1 =

```
1.0e+005 *
    0.3704    1.1111   -0.3704    1.1111
    1.1111    4.4444   -1.1111    2.2222
   -0.3704   -1.1111    0.3704   -1.1111
    1.1111    2.2222   -1.1111    4.4444
```

```
k_2=zeros(4,4);
k_2(1,:)=E*I*[12/l_2^3    6/l_2^2 -12/l_2^3    6/l_2^2];
k_2(2,:)=E*I*[6/l_2^2    4/l_2 -6/l_2^2    2/l_2];
k_2(3,:)=E*I*[-12/l_2^3 -6/l_2^2 12/l_2^3 -6/l_2^2];
k_2(4,:)=E*I*[6/l_2^2    2/l_2 -6/l_2^2    4/l_2];
```

k_2 =

```
1.0e+005 *
    0.3704    1.1111   -0.3704    1.1111
    1.1111    4.4444   -1.1111    2.2222
   -0.3704   -1.1111    0.3704   -1.1111
    1.1111    2.2222   -1.1111    4.4444
```

El elemento 1 comprende los nodos $i = 1$ y $j = 2$ y, por tanto, sus grados de libertad son $(2i - 1, 2i, 2j - 1, 2j) = (1, 2, 3, 4)$. Análogamente, para el elemento 2, con nodos 2 y 3, sus grados de libertad son $(3, 4, 5, 6)$. Por tanto, el ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura, de tamaño 6×6 se realiza según la siguiente secuencia de operaciones:

```
K=zeros(6,6);
g_1=[1 2 3 4];
```

```

K_1=k_1;
DeltaK_1=zeros(6,6);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[3 4 5 6];
K_2=k_2;
DeltaK_2=zeros(6,6);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

```

K =

```

1.0e+005 *

    0.3704    1.1111   -0.3704    1.1111         0         0
    1.1111    4.4444   -1.1111    2.2222         0         0
   -0.3704   -1.1111    0.7407         0   -0.3704    1.1111
    1.1111    2.2222         0    8.8889   -1.1111    2.2222
         0         0   -0.3704   -1.1111    0.3704   -1.1111
         0         0    1.1111    2.2222   -1.1111    4.4444

```

De la figura 3.5 es claro que los grados de libertad no restringidos son los de número 3 y 4, mientras que los demás (1,2,5,6) están restringidos. Por esto, la partición de la matriz de rigidez se realiza así:

```

a=[1 2 5 6]; b=[3 4];
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);

```

K_bb =

```

1.0e+005 *

    0.7407         0
         0    8.8889

```

Puede verse que los elementos fuera de la diagonal de la matriz K_{bb} son nulos. Esto se debe a que, por la simetría de la estructura, las contribuciones correspondientes de los elementos 1 y 2 se anulan mutuamente.

El vector de cargas externas es

```
P=[0 0 -100 0 0 0]';
```

por lo cual la solución del problema de desplazamientos se realiza así:

```
P_b=P(b);
D_b=K_bb\P_b;
P_a=K_ab*D_b;
```

```
D=zeros(6,1);
D(b)=D_b;
```

```
D =
```

```
0
0
-0.0014
0
0
0
```

Puede observarse que hay un único desplazamiento no nulo, que corresponde al grado de libertad 3: el desplazamiento vertical en el centro de la viga. El grado de libertad 4 es nulo por simetría. Los demás son nulos por estar restringidos.

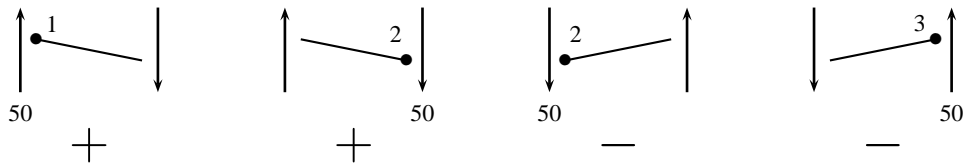


Figura 3.6: Equilibrio de los nodos en fuerzas cortantes.

El vector de las reacciones en los apoyos es

```
P_a =
50
150
50
-150
```

Evidentemente, este resultado coincide con el dado por las ecuaciones (3.19) y (3.20).

Los cortantes y momentos en los elementos se calculan por medio de la ecuación (3.12), previa extracción de los desplazamientos de cada elemento del vector D :

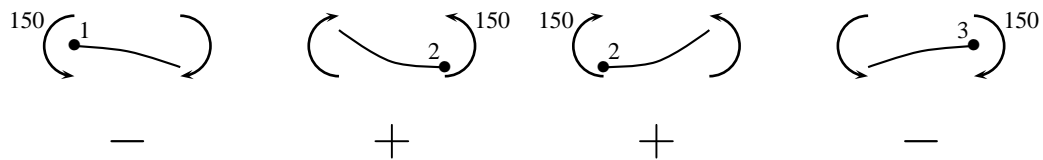


Figura 3.7: Equilibrio de los nodos en momentos flectores e interpretación de la deformación de la viga.

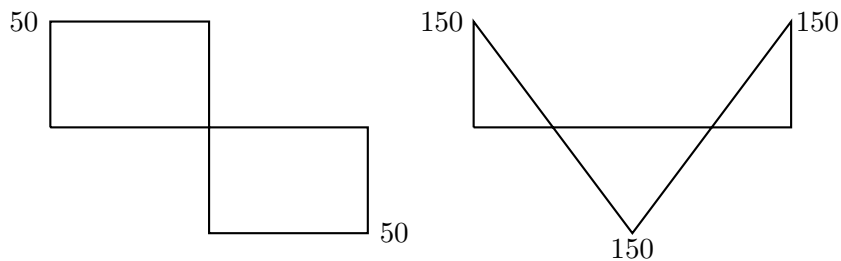


Figura 3.8: Diagramas de cortante y momento flector.

$$D_1 = D(g_1);$$

$$p_1 = k_1 * D_1;$$

$$D_2 = D(g_2);$$

$$p_2 = k_1 * D_2;$$

$$p_1 =$$

- 50
- 150
- 50
- 150

$$p_2 =$$

-50
-150
50
-150

La interpretación de este resultado se muestra en la figuras 3.6 y 3.7, donde los signos de los valores son indicados por medio de las direcciones de los elementos. La segunda ofrece, además, una interpretación de la deformación de la viga, ya que ésta se encuentra determinada por el momento flector. Como es usual en el análisis de vigas, *se definen como positivos el momento flector que causa tracción en la fibra inferior y el cortante que produce un par de giro en el sentido de las agujas del reloj*. Con base en este análisis se obtienen los diagramas de cortante y momento flector mostrados en la figura 3.8.

3.3. Análisis de vigas biempotradas

Consideremos la figura 3.9 que muestra una viga empotrada en sus dos extremos sometida a la acción de una carga Q en el centro de la luz. La viga tiene módulo de elasticidad E , momento de inercia I y longitud l . Se busca determinar el diagrama de momentos de la viga con base en el teorema de área de momentos.

Por ser la viga simétrica, evidentemente las reacciones en los apoyos tiene por valor

$$R = \frac{Q}{2} \quad (3.19)$$

mientras que el valor de los momentos de empotramiento no resulta evidente. Sin embargo, por la condición de que no se pueden producir giros en los extremos, es lógico inferir las direcciones de los mismos, mostradas en la parte superior de la figura. Además, podemos considerar el problema como el de una viga simplemente apoyada sometida a la acción de dos sistemas de fuerzas:

1. La fuerza Q aplicada en el centro del vano.
2. Dos momentos de valor M aplicados en los extremos y de signo contrario a los que aparecen como reacciones en la viga biempotrada.

La aplicación del segundo sistema de cargas tiene por fin contrarrestar el giro producido por la carga Q , de manera que la suma de ambos sea igual a cero, tal como debe ser el caso en la viga biempotrada. Los diagramas de momentos correspondientes a estas dos situaciones aparecen superpuestos en la figura. El correspondiente al primer sistema produce tracción en la fibra inferior de la viga y, por tanto, es de signo positivo. Por su parte, el producido por el segundo sistema produce compresión en la misma fibra y es en consecuencia negativo. Según el teorema de área de momentos, la deflexión en un extremo cualquiera de la viga tiene por valor

$$EI\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{Ql}{4} \cdot l - Ml$$

Al establecer la condición $\theta = 0$ se obtiene

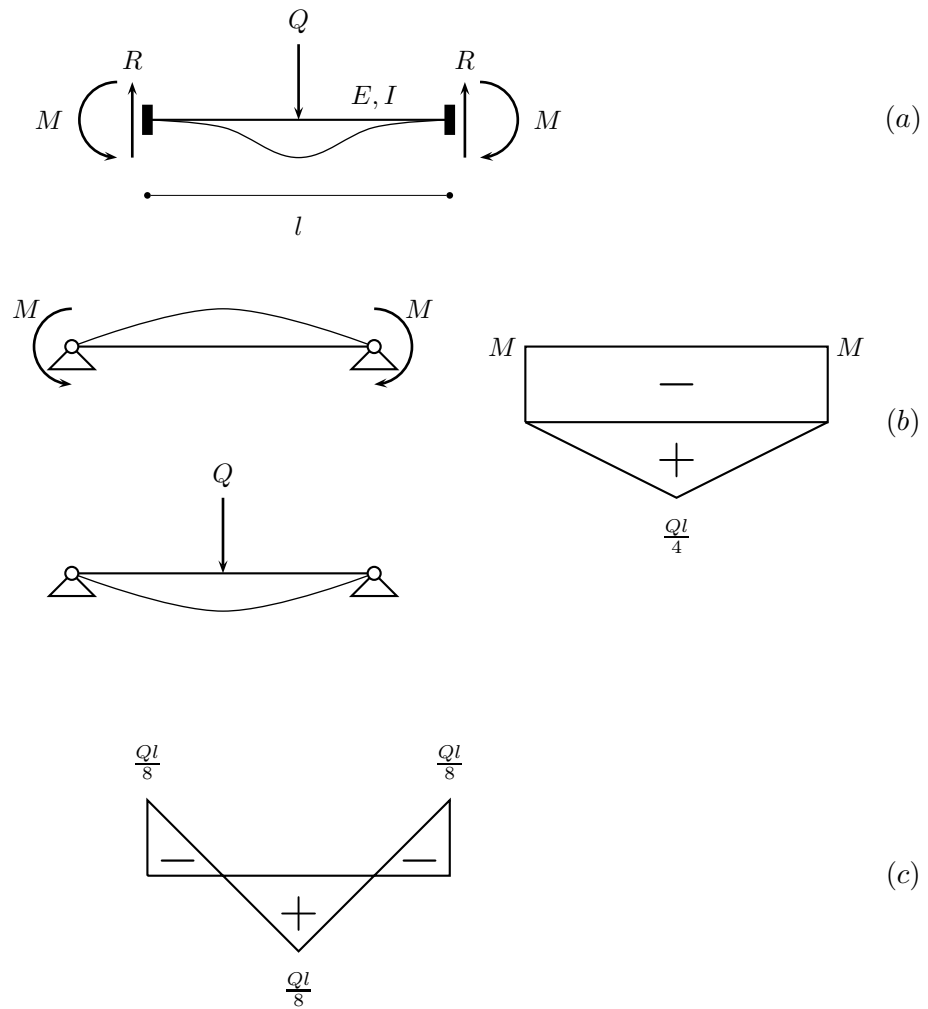


Figura 3.9: Viga biempotrada. (a) Modelo estructural. (b) Hipótesis de diagrama de momentos. (c) Diagrama de momentos final.

$$M = \frac{Ql}{8} \quad (3.20)$$

Con las ecuaciones (3.19) y (3.20) se establece el diagrama final de momentos mostrado en la parte inferior de la figura 3.9.

Al proceder de manera semejante para otras cargas típicas se obtienen los resultados que aparecen en la figura 3.10. Nótese que el momento dado por la ecuación (3.20) es un caso particular del que muestra la figura 3.10(a), con $a = b = l/2$.

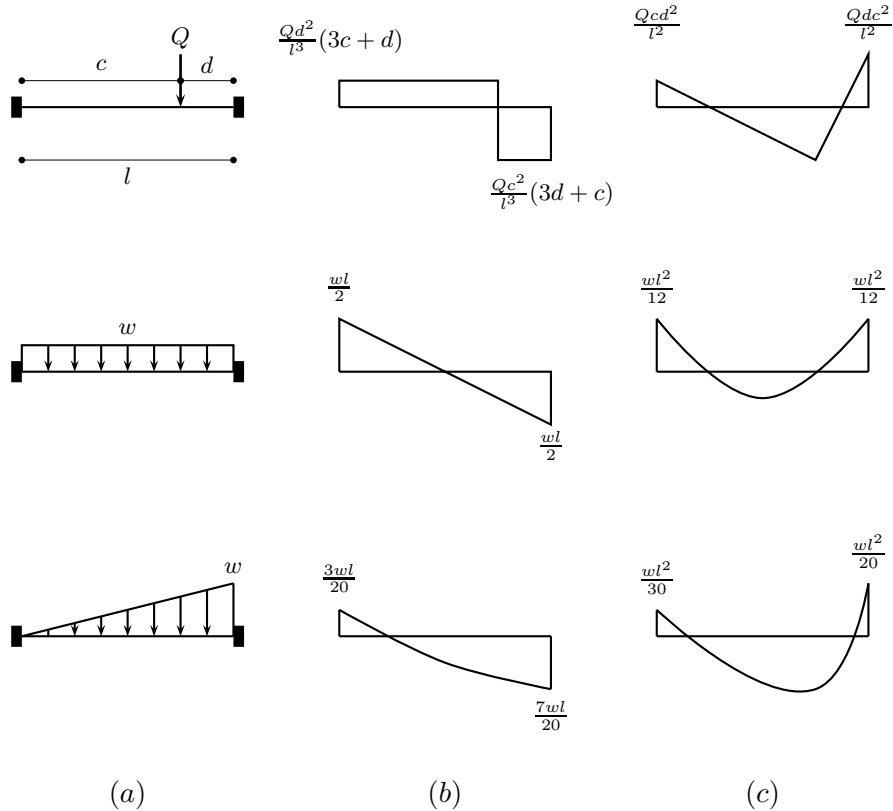


Figura 3.10: Vigas biempotradas. (a) Modelos estructurales. (b) Diagramas de cortante. (c) Diagramas de momento.

3.4. Cargas en el interior de una viga

En el análisis realizado en la sección anterior sobre una viga biempotrada (que denotaremos \mathcal{F}) usamos una viga simple como elemento auxiliar. Analizamos esta última en dos estados: el correspondiente a la carga externa (\mathcal{S}) y el constituido por las reacciones de la viga biempotrada (\mathcal{R}). El resultado del análisis puede interpretarse de la siguiente manera (ver la figura 3.11): Si los momentos

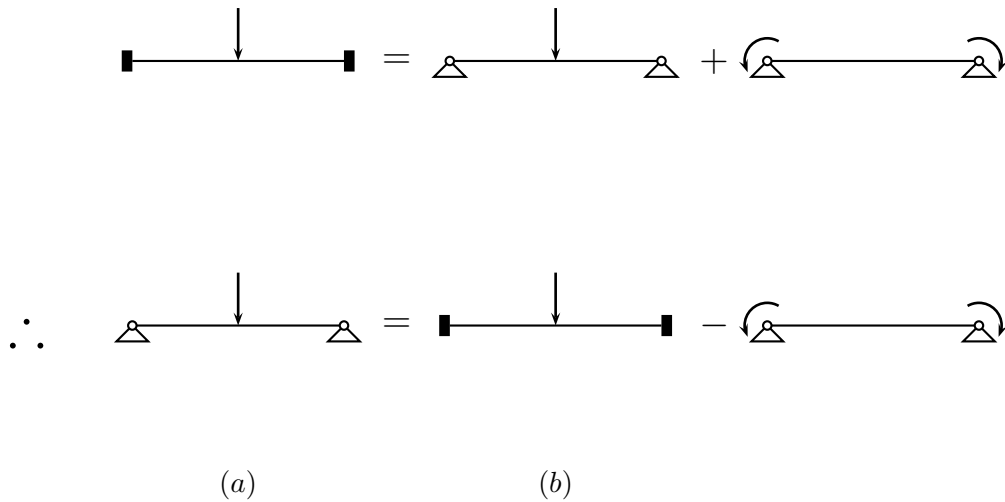


Figura 3.11: (a) Descomposición de una viga biempotrada. (b) Implicaciones para una estructura en general.

de \mathcal{F} (y por tanto las deformaciones) se pueden obtener como los momentos de \mathcal{S} más los de \mathcal{R} , entonces los momentos de \mathcal{S} son iguales a los de \mathcal{F} menos los de \mathcal{R} .

Ahora bien, la elección de la viga simplemente apoyada como elemento auxiliar se hizo en el análisis anterior por razones de conveniencia para simplificar las operaciones. Por tanto el razonamiento anterior no está restringido, de ninguna manera, a tal clase de viga. Así, en general, para una estructura elástica \mathcal{S} con cargas en el interior de sus elementos, sus tensiones y deformaciones se pueden obtener como las resultantes de empotrar en ambos lados los elementos con tales cargas (\mathcal{F}) menos las que surjan por la aplicación de las reacciones de \mathcal{F} en los nodos de la estructura (\mathcal{R}). Simbólicamente,

$$\mathcal{S} = \mathcal{F} - \mathcal{R} \quad (3.21)$$

Esto significa que, cuando se tienen cargas en el interior de una viga (o columna, en el caso de pórticos), la ecuación matricial (3.15) pasa a ser

$$\mathbf{K}\mathbf{D} = \mathbf{P} - \mathbf{R} \quad (3.22)$$

donde \mathbf{R} es el vector que reúne todas las reacciones de los elementos biempotrados que tengan cargas en su interior. En el caso, corriente en la práctica, de que en un nodo converjan varios elementos, el

vector \mathbf{R} se obtiene sumando las contribuciones correspondientes de cada elemento, de la siguiente manera.

Llamemos $\mathbf{r}_e = [\bar{V}_i \ \bar{M}_i \ \bar{V}_j \ \bar{M}_j]^T$ al vector de fuerzas de empotramiento en la numeración local. Por ejemplo, para una viga con carga uniformemente repartida w , de acuerdo con la figura 3.10,

$$\mathbf{r}_e = \begin{pmatrix} \bar{V}_i \\ \bar{M}_i \\ \bar{V}_j \\ \bar{M}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{wl}{2} \\ \frac{wl^2}{12} \\ \frac{wl}{2} \\ -\frac{wl^2}{12} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

En la numeración global, este vector pasa a ser $\Delta \mathbf{R}_e$, con sus cantidades trasladadas desde \mathbf{r}_e según el cuadro de correspondencias. Finalmente, el vector \mathbf{R} se obtiene por superposición:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^m \Delta \mathbf{R}_e \quad (3.24)$$

La solución del problema (3.22) pasa por la partición de las matrices implicadas según los grados de libertad restringidos (tipo a) y no restringidos (tipo b):

$$\mathbf{D}_b = \mathbf{K}_{bb}^{-1}(\mathbf{P}_b - \mathbf{R}_b) \quad (3.25)$$

$$\mathbf{P}_a = \mathbf{K}_{ab}\mathbf{D}_b + \mathbf{R}_a \quad (3.26)$$

donde \mathbf{R}_a resulta de la extracción de los valores correspondientes a los grados de libertad restringidos del vector \mathbf{R} . Esta adición se debe realizar ya que el valor $\mathbf{K}_{ab}\mathbf{D}_b$ sólo obedece a los desplazamientos causados por las cargas en los nodos, pero no tiene en cuenta las cargas en el interior de los elementos.

Finalmente, las fuerzas internas de los elementos se determinan por medio de la ecuación (3.18), a la cual se debe igualmente adicionar el efecto de las cargas en su interior:

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{D}_e + \mathbf{r}_e \quad (3.27)$$

La solución de esta clase de problemas se ilustra con el siguiente ejemplo.

3.5. Ejemplo 5

Consideremos la viga biempotrada con un apoyo intermedio que aparece en la figura 3.12. La viga se encuentra sometida a una carga distribuida de 20 kN/m en el primer vano y una concentrada de 40 kN en el segundo. El material tiene un módulo de elasticidad $E = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ y el momento de inercia es $I = 0,1 \text{ m}^4$ en ambos vanos. Se busca calcular los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga.

Comenzaremos por definir las cantidades básicas E, I para los elementos que componen la viga:

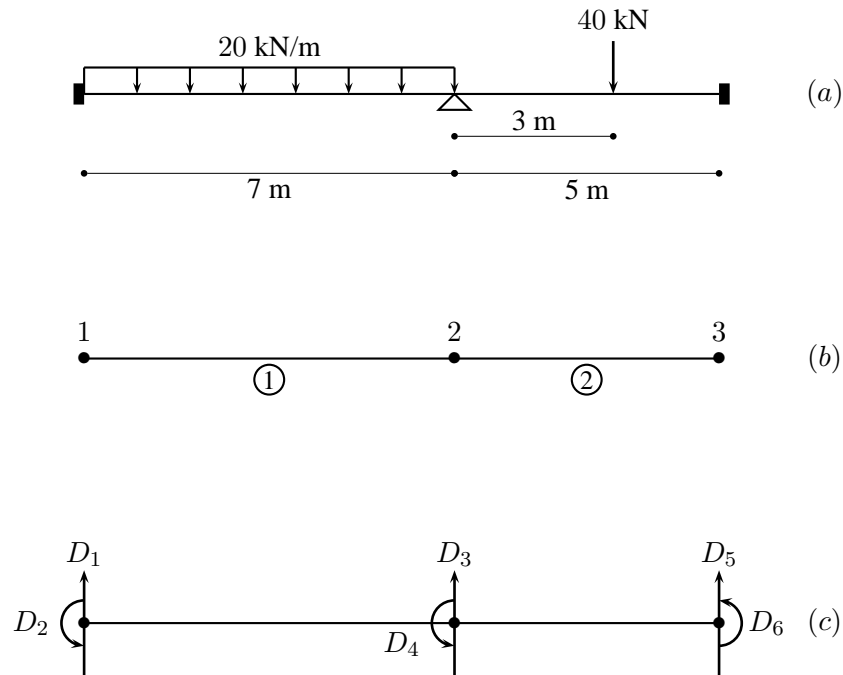


Figura 3.12: Viga continua. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos. (c) Numeración de grados de libertad.

```
E=2e7;
```

```
I_1=0.1;
I_2=0.1;
l_1=7;
l_2=5;
```

La matriz de rigidez de los elementos, definida por la ecuación (3.14), es

```
k_1=zeros(4,4);
k_1(1,:)=E*I_1*[12/l_1^3    6/l_1^2  -12/l_1^3    6/l_1^2];
```

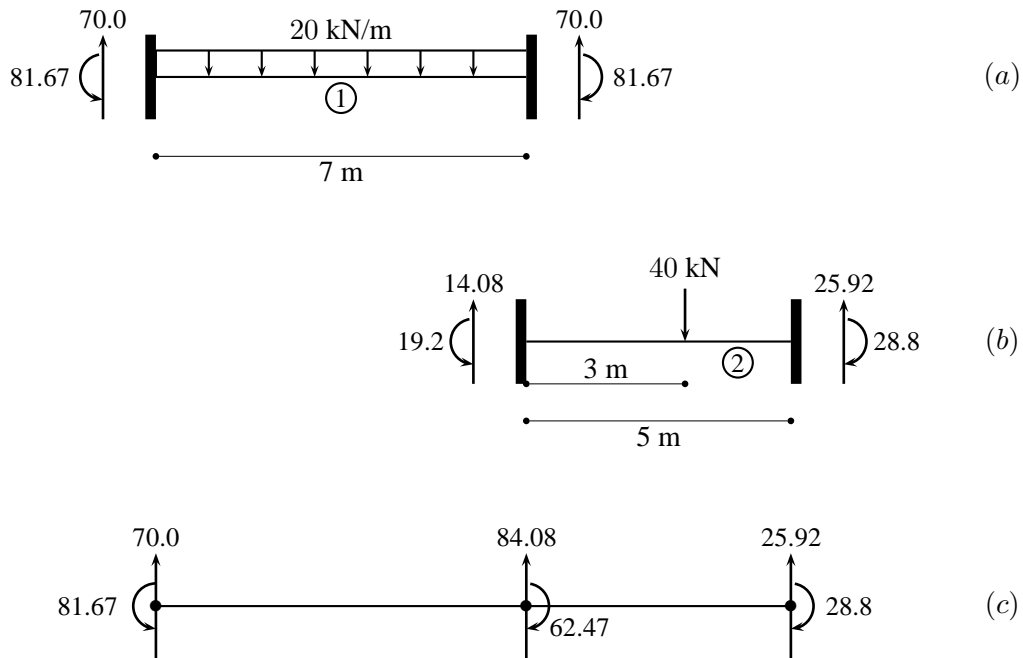


Figura 3.13: Viga continua. (a) Fuerzas de empotramiento en el elemento 1. (b) Fuerzas de empotramiento en el elemento 2. (c) Elementos del vector de fuerzas R .

```

k_1(2,:) = E*I_1*[6/l_1^2    4/l_1    -6/l_1^2    2/l_1];
k_1(3,:) = E*I_1*[-12/l_1^3  -6/l_1^2   12/l_1^3   -6/l_1^2];
k_1(4,:) = E*I_1*[6/l_1^2    2/l_1    -6/l_1^2    4/l_1];

k_2=zeros(4,4);
k_2(1,:) = E*I_2*[12/l_2^3    6/l_2^2   -12/l_2^3    6/l_2^2];
k_2(2,:) = E*I_2*[6/l_2^2    4/l_2     -6/l_2^2    2/l_2];
k_2(3,:) = E*I_2*[-12/l_2^3  -6/l_2^2   12/l_2^3   -6/l_2^2];
k_2(4,:) = E*I_2*[6/l_2^2    2/l_2     -6/l_2^2    4/l_2];

k_1 =

```

```

1.0e+006 *
    0.0700    0.2449   -0.0700    0.2449
    0.2449    1.1429   -0.2449    0.5714
   -0.0700   -0.2449    0.0700   -0.2449
    0.2449    0.5714   -0.2449    1.1429

```

k_2 =

```

    192000    480000   -192000    480000
    480000    1600000  -480000    800000
   -192000   -480000    192000   -480000
    480000    800000   -480000    1600000

```

La matriz de rigidez de la estructura resulta del ensamblaje operado de la siguiente manera:

```

K=zeros(6,6);

g_1=[1 2 3 4]';
DeltaK_1=zeros(6,6);
DeltaK_1(g_1,g_1)=k_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[3 4 5 6]';
DeltaK_2=zeros(6,6);
K_2(g_2,g_2)=k_2;
K=K+DeltaK_2;

```

K =

```

1.0e+006 *
    0.0700    0.2449   -0.0700    0.2449         0         0
    0.2449    1.1429   -0.2449    0.5714         0         0
   -0.0700   -0.2449    0.2620    0.2351   -0.1920    0.4800
    0.2449    0.5714    0.2351    2.7429   -0.4800    0.8000
         0         0   -0.1920   -0.4800    0.1920   -0.4800
         0         0    0.4800    0.8000   -0.4800    1.6000

```

Calcularemos ahora el vector de fuerzas de empotramiento. Con respecto a la figura 3.10, tenemos:

w=20;

```

r_1=[w*_l_1/2;
     w*_l_1^2/12;
     w*_l_1/2;
     -w*_l_1^2/12];

```

```

Q=40; c=3; d=l_2-c;

r_2=[Q*d^2*(3*c+d)/l_2^3;
      Q*c*d^2/l_2^2;
      Q*c^2*(3*d+c)/l_2^3;
      -Q*d*c^2/l_2^2];

r_1 =

    70.0000
    81.6667
    70.0000
   -81.6667

r_2 =

    14.0800
    19.2000
    25.9200
   -28.8000

R=zeros(6,1);
DeltaR_1=zeros(6,1);
DeltaR_2=zeros(6,1);

DeltaR_1(g_1)=r_1;
R=R+DeltaR_1;

DeltaR_2(g_2)=r_2;
R=R+DeltaR_2;

R =

    70.0000
    81.6667
    84.0800
   -62.4667
    25.9200
   -28.8000

```

La figura 3.13 ilustra la superposición de las fuerzas de empotramiento, de acuerdo con la ecuación (3.24). Por su parte, el vector de cargas externas es nulo, puesto que no hay cargas aplicadas directamente en los nodos:

```
P=zeros(6,1);
```

Realizaremos la partición de las matrices para resolver el problema. De acuerdo con la numeración de nodos que aparece en la figura 3.12, todos los grados de libertad se encuentran restringidos con excepción del No. 4. Por tanto,


```
a=[1 2 3 5 6]'; b=4;
```

y, en consecuencia,

```
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P_b=P(b);
R_b=R(b);
```

El desplazamiento del grado de libertad desconocido y las reacciones en los apoyos se obtienen por medio de las ecuaciones (3.25):

```
D_b=K_bb \ (P_b-R_b);
P_a=K_ab*D_b+R(a);
```

```
D=zeros(6,1);
D(b)=D_b;
```

D =

```
1.0e-004 *
    0
    0
    0
  0.2277
    0
    0
```

P_a =

```
75.5774
94.6806
89.4343
14.9883
-10.5806
```

Por último, las fuerzas internas en los elementos se determinan por medio de la ecuación (3.27), luego de extraer del vector de desplazamientos la información pertinente para cada elemento:

```
D_1=D(g_1);
p_1=k_1*D_1+r_1;
```

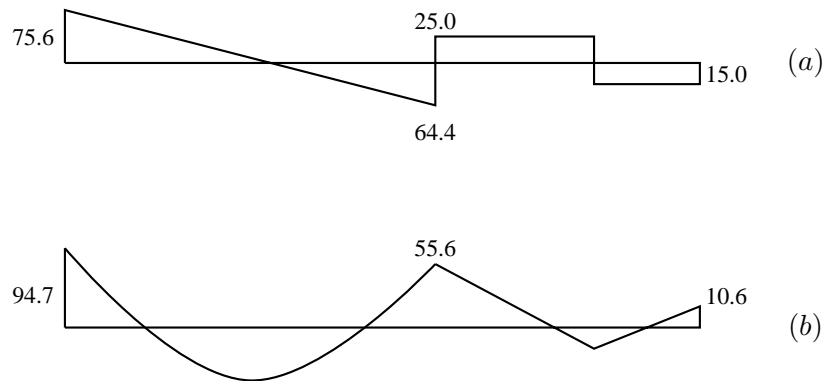


Figura 3.14: Viga continua. (a) Diagrama de cortante. (b) Diagrama de momentos.

$$D_2 = D(g_2);$$

$$p_2 = k_2 \cdot D_2 + r_2;$$

$$p_1 =$$

$$\begin{aligned} &75.5774 \\ &94.6806 \\ &64.4226 \\ &-55.6389 \end{aligned}$$

$$p_2 =$$

$$\begin{aligned} &25.0117 \\ &55.6389 \\ &14.9883 \\ &-10.5806 \end{aligned}$$

Con este resultado se obtienen fácilmente los diagramas de cortante y momento flector mostrados en la figura 3.14. Se deja como ejercicio al lector evaluar los valores intermedios de los diagramas.

Capítulo 4

Pórticos planos

4.1. Matriz de rigidez de un elemento de pórtico

La figura 4.1 muestra un pórtico típico compuesto por vigas y columnas sometido a la acción de cargas de gravedad (normalmente distribuidas de manera uniforme) y sísmicas (normalmente crecientes hacia arriba). Las uniones entre elementos permiten la transmisión de fuerzas horizontales, verticales y momentos.

Con base en lo expuesto en el capítulo anterior, deduciremos a continuación la matriz de un elemento de sección constante caracterizado por un módulo de elasticidad E , momento de inercia I y longitud l . Nótese que, con respecto al elemento usado en el capítulo anterior para una viga, tenemos ahora la presencia de fuerza axiales N_i y N_j , que se agregan a las fuerzas V_i, M_i, V_j y M_j . La ecuación matricial correspondiente a las nuevas fuerzas N_i y N_j es

$$\begin{pmatrix} N_i \\ N_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

mientras que la propia de las fuerzas restantes es

$$\begin{pmatrix} V_i \\ M_i \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \theta_i \\ \xi_j \\ \theta_j \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Al reunir ambas expresiones en una sola ecuación obtenemos:

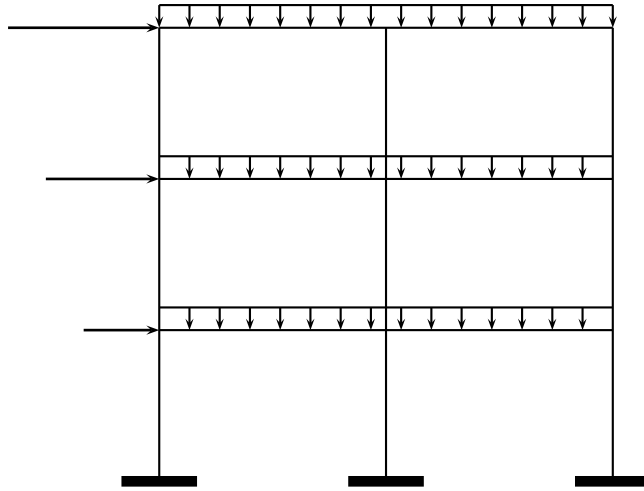


Figura 4.1: Pórtico de dos vanos y tres pisos sometido a la acción de cargas de gravedad y sísmicas.

$$\begin{pmatrix} N_i \\ V_i \\ M_i \\ N_j \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_i \\ \xi_i \\ \theta_i \\ \delta_j \\ \xi_j \\ \theta_j \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Esto indica que, para los vectores de desplazamientos y fuerzas, dados por

$$\mathbf{p}_e = \begin{pmatrix} N_i \\ V_i \\ M_i \\ N_j \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_e = \begin{pmatrix} \delta_i \\ \xi_i \\ \theta_i \\ \delta_j \\ \xi_j \\ \theta_j \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

la matriz de rigidez que los relaciona es

$$\mathbf{k}_e = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

donde se ha omitido el subíndice e en las propiedades de los elementos en aras de la claridad en la notación. La ecuación matricial es, en consecuencia

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \quad (4.6)$$

Consideremos ahora la situación general en la que el elemento tiene un ángulo de inclinación β con respecto a la horizontal (figura 4.2). Al tener en cuenta las deducciones de transformación de fuerzas realizadas en el capítulo 2 y recordando que el vector de momentos es libre (lo cual implica que $M_i = Z_i$ y $M_j = Z_j$), se tiene que la matriz de transformación entre los sistemas de fuerzas local y global mostrados en la figura es

$$\mathbf{T}_e = \begin{pmatrix} \eta & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

donde, como de costumbre, $\eta \equiv \cos \beta$ y $\mu \equiv \sin \beta$, con sus valores dados por

$$\eta = \frac{x_j - x_i}{l_e} \quad (4.8)$$

$$\mu = \frac{y_j - y_i}{l_e} \quad (4.9)$$

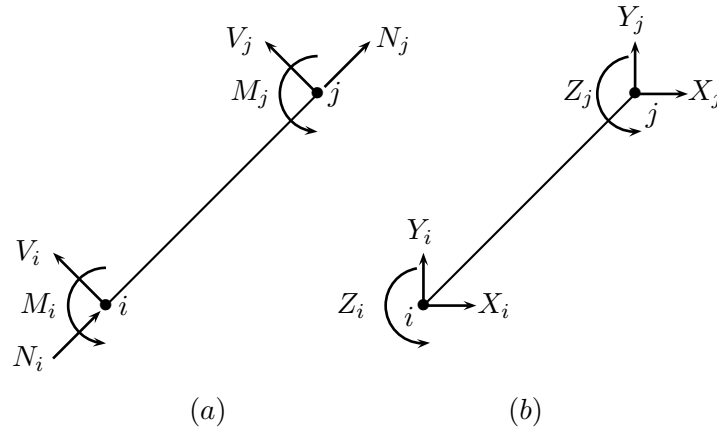


Figura 4.2: Fuerzas internas en un elemento de pórtico. (a) Sistema local; (b) sistema global.

En consecuencia, la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales se obtiene por la operación ya conocida:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e \quad (4.10)$$

Como se ha explicado en los capítulos anteriores, los elementos de esta matriz deben ser colocados en una matriz $\Delta \mathbf{K}_e$, de tamaño $n \times n$, donde n es el número de grados de libertad, de acuerdo con el cuadro de correspondencias entre las numeraciones local y global. La matriz de rigidez del pórtico será entonces

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^M \Delta \mathbf{K}_e \quad (4.11)$$

donde m es el número de elementos. Esta matriz relaciona las fuerzas y desplazamientos en el sistema global de coordenadas:

$$\mathbf{K} \mathbf{D} = \mathbf{P} \quad (4.12)$$

Una vez resuelto el problema de desplazamientos, las reacciones en los apoyos y las fuerzas internas de cada elemento (es decir, axiales, cortantes y momentos) se calculan por medio de las ecuaciones generales deducidas en los capítulos anteriores:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_b &= \mathbf{K}_{bb}^{-1}(\mathbf{P}_b - \mathbf{R}_b) \\
 \mathbf{P}_a &= \mathbf{K}_{ab}\mathbf{D}_b + \mathbf{R}_a \\
 \mathbf{d}_e &= \mathbf{T}_e\mathbf{D}_e \\
 \mathbf{p}_e &= \mathbf{k}_e\mathbf{d}_e + \mathbf{r}_e = \mathbf{k}_e\mathbf{T}_e\mathbf{D}_e + \mathbf{r}_e
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

donde \mathbf{R}_a resulta de la extracción de los valores correspondientes a los grados de libertad restringidos del vector \mathbf{R} y \mathbf{D}_e de una extracción similar de los desplazamientos de los grados de libertad del elemento desde el vector \mathbf{D} .

Para el dibujo de los diagramas de fuerzas internas se ha de definir una fibra de referencia. Normalmente se toma la fibra inferior para las vigas y la derecha para las columnas. Al igual que en las vigas, se define como positivo el momento flector que causa tracción en la fibra de referencia y el cortante que produce un par de giro en el sentido de las agujas del reloj. En cuanto a las tensiones axiales, se define como positiva la tracción y negativa la compresión. Por otra parte, para el dibujo del diagrama de momentos normalmente se ponen del lado de la fibra de referencia los momentos positivos y del lado contrario los negativos, ya que esto permite trazar con claridad la elástica de la viga y comprender el patrón de agrietamiento, inevitable en estructuras de materiales frágiles a la tracción como el concreto. En cuanto a los otros dos diagramas, las convenciones de dibujo son arbitrarias. Basta con colocar el signo en ellos.

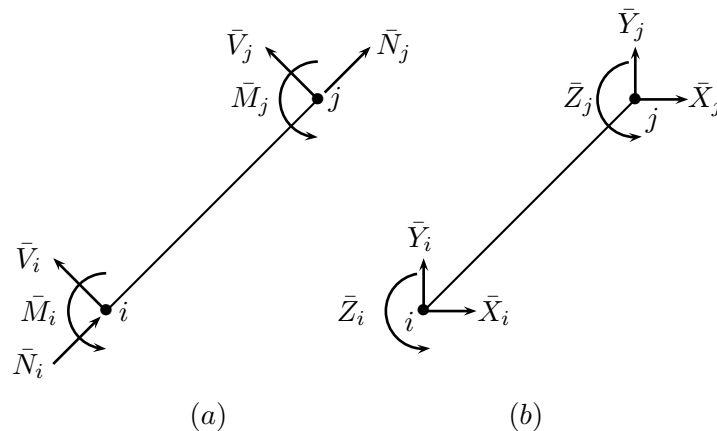


Figura 4.3: Fuerzas de empotramiento de un elemento de pórtico. (a) Sistema local (fuerzas \mathbf{r}_e); (b) sistema global (fuerzas \mathbf{R}_e)

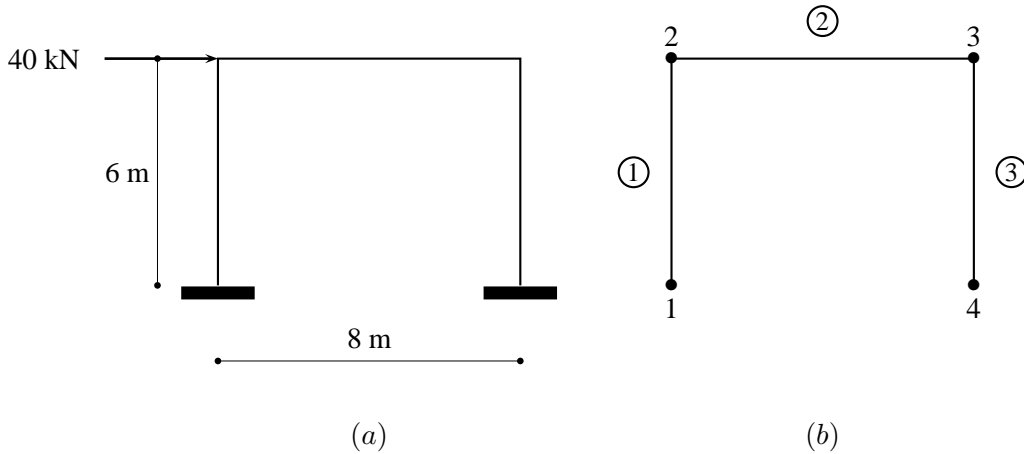


Figura 4.4: Pórtico sometido a una carga horizontal. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos.

4.2. Ejemplo 6

La figura 4.4 muestra un pórtico de acero sometido a una carga horizontal de 40 kN aplicada en la parte superior. El módulo de elasticidad del material es $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$. El área seccional de los elementos es $A = 0,0252 \text{ m}^2$ y el momento de inercia $I = 0,0014 \text{ m}^4$. Mostraremos a continuación todos los pasos necesarios para calcular con MATLAB los diagramas de fuerzas axiales y cortantes así como el de momento flector. Comenzamos por numerar los elementos y nodos, como muestra la figura, y definir las cantidades básicas:

```
E=2e8;
A=0.0252;
I=0.0014;
l_1=6;
l_2=8;
l_3=6;
```

Con base en esta información calculamos las matrices de rigidez en coordenadas locales:

```
k_1=zeros(6,6);
l=l_1;
k_1(1,:)=E*A*[ 1/l    0    0    -1/l    0    0];
k_1(2,:)=E*I*[ 0    12/l^3    6/l^2    0    -12/l^3    6/l^2];
k_1(3,:)=E*I*[ 0    6/l^2    4/l    0    -6/l^2    2/l];
```

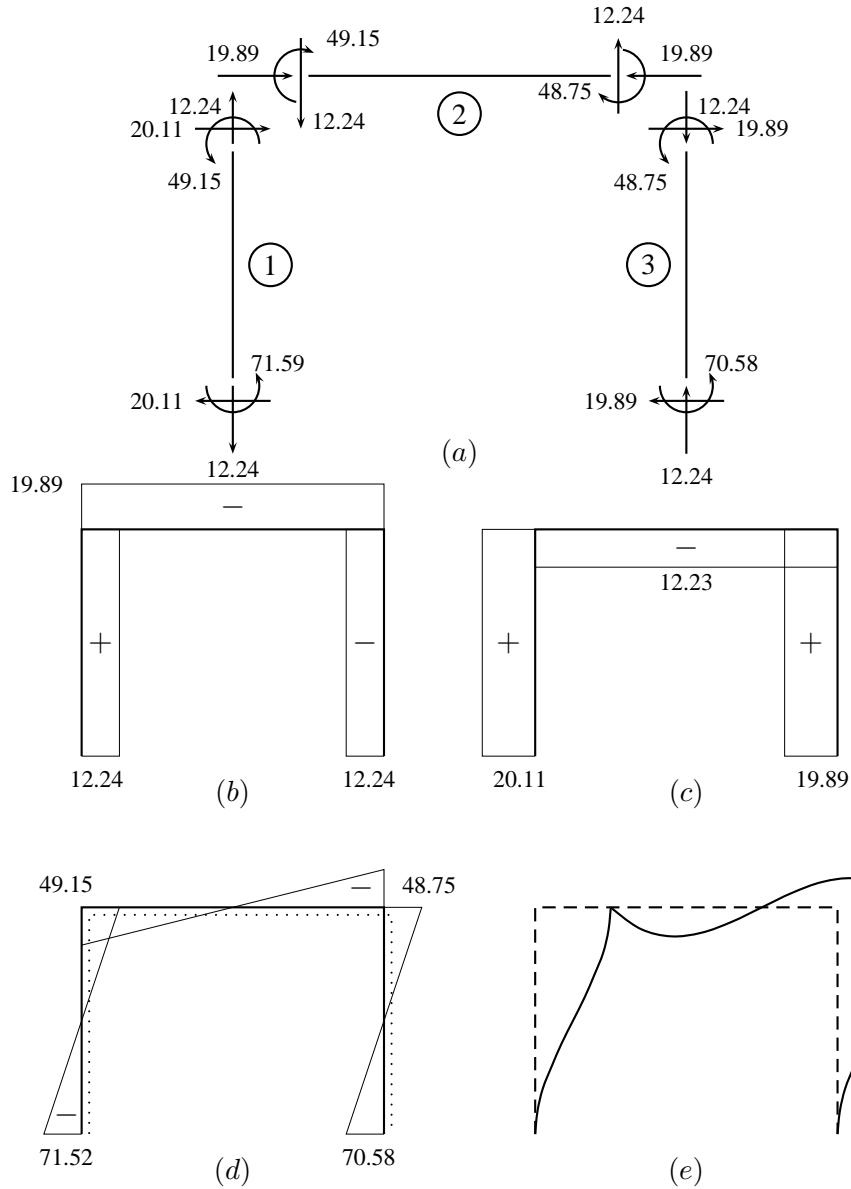



Figura 4.5: Diagramas de fuerzas internas del pórtico sometido a carga lateral. (a) Fuerzas internas de cada elemento. (b) Diagrama de fuerzas axiales. (c) Diagrama de cortantes. (d) Diagrama de momentos. (e) Elástica.

```
k_1(4,:) = E*A*[-1/1 0 0 1/1 0 0];
k_1(5,:) = E*I*[0 -12/1^3 -6/1^2 0 12/1^3 -6/1^2];
```

```

k_1(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2    2/l      0    -6/l^2    4/l];

k_2=zeros(6,6);
l=l_2;
k_2(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0    -1/l      0      0];
k_2(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3    6/l^2    0    -12/l^3    6/l^2];
k_2(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2    4/l      0    -6/l^2    2/l];
k_2(4,:)=E*A*[-1/l     0      0     1/l      0      0];
k_2(5,:)=E*I*[ 0     -12/l^3   -6/l^2    0     12/l^3   -6/l^2];
k_2(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2    2/l      0    -6/l^2    4/l];

k_3=zeros(6,6);
l=l_3;
k_3(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0    -1/l      0      0];
k_3(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3    6/l^2    0    -12/l^3    6/l^2];
k_3(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2    4/l      0    -6/l^2    2/l];
k_3(4,:)=E*A*[-1/l     0      0     1/l      0      0];
k_3(5,:)=E*I*[ 0     -12/l^3   -6/l^2    0     12/l^3   -6/l^2];
k_3(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2    2/l      0    -6/l^2    4/l];

```

La matriz de rigidez de la estructura se forma bajo la consideración de los grados de libertad de cada elemento en la numeración global mostrada en la figura 4.4:

```

K=zeros(12,12);

g_1=[1 2 3 4 5 6];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_1= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
       0 0 1 0 0 0;...
       0 0 0 eta mu 0;...
       0 0 0 -mu eta 0;...
       0 0 0 0 0 1];
K_1=T_1'*k_1*T_1;
DeltaK_1=zeros(12,12);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[4 5 6 7 8 9];
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_2= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
       0 0 1 0 0 0;...
       0 0 0 eta mu 0;...
       0 0 0 -mu eta 0;...
       0 0 0 0 0 1];
K_2=T_2'*k_2*T_2;
DeltaK_2=zeros(12,12);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

```

```

g_3=[7 8 9 10 11 12];
beta=-90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_3= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
       0 0 1 0 0 0;...
       0 0 0 eta mu 0;...
       0 0 0 -mu eta 0;...
       0 0 0 0 0 1];
K_3=T_3'*k_3*T_3;
DeltaK_3=zeros(12,12);
DeltaK_3(g_3,g_3)=K_3;
K=K+DeltaK_3;

```

Como de costumbre, la solución del problema de desplazamientos requiere la partición de las matrices según los grados de libertad fijos y móviles:

```

a=[1 2 3 10 11 12]'; b=[4 5 6 7 8 9]';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P=[0 0 0 40 0 0 0 0 0 0 0 0]';
P_b=P(b);
D_b=K_bb\b_P_b;
P_a=K_ab*D_b;

D=zeros(12,1);
D(b)=D_b;

```

El vector de desplazamientos resulta ser, en consecuencia,

```

D =
    0
    0
    0
    0.0020
    0.0000
   -0.0002
    0.0020
   -0.0000
   -0.0002
    0
    0
    0

```

El cálculo de las fuerzas axiales y cortantes y los momentos en las barras se realiza por medio de la ecuación (4.13):

$$D_1 = D(g_1);$$

$$p_1 = k_1 \cdot T_1 \cdot D_1;$$

$$D_2 = D(g_2);$$

$$p_2 = k_2 \cdot T_2 \cdot D_2;$$

$$D_3 = D(g_3);$$

$$p_3 = k_3 \cdot T_3 \cdot D_3;$$

$$p_1 =$$

$$\begin{array}{r} -12.2380 \\ 20.1116 \\ 71.5169 \\ 12.2380 \\ -20.1116 \\ 49.1527 \end{array}$$

$$p_2 =$$

$$\begin{array}{r} 19.8884 \\ -12.2380 \\ -49.1527 \\ -19.8884 \\ 12.2380 \\ -48.7509 \end{array}$$

$$p_3 =$$

$$\begin{array}{r} 12.2380 \\ 19.8884 \\ 48.7509 \\ -12.2380 \\ -19.8884 \\ 70.5794 \end{array}$$

Este resultado se muestra en la figura 4.5(a), en la que los signos de las cantidades son indicados por medio de las direcciones correspondientes. Obsérvese que para cada elemento los valores aparecen siempre en el orden indicado por la ecuación (4.4), es decir, $N_i, V_i, M_i, N_j, V_j, M_j$. Igualmente puede observarse que las leyes de equilibrio se cumplen perfectamente. Esto es, al volver a unir los elementos separados en la figura 4.5(a) todas las fuerzas se anulan mutuamente, excepto las fuerzas en el nodo 2, cuya suma es $20,11 + 19,89 = 4$, que es igual a la fuerza externa aplicada.

4.3. Elementos cargados en el interior

Si hay miembros con cargas en su interior, se debe usar la ecuación modificada

$$KD = P - R \quad (4.14)$$

donde la matriz \mathbf{R} reúne las fuerzas de empotramiento de todos los elementos en coordenadas generales. Como se explicó en el capítulo anterior, la contribución $\Delta \mathbf{R}_e$ del elemento e en coordenadas generales se obtiene aplicando el cuadro de correspondencias a las fuerzas de empotramiento del elemento. En el caso general de elementos inclinados, sin embargo, se debe realizar previamente la transformación de fuerzas indicada en la figura 4.3:

$$\mathbf{R}_e = \begin{pmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{Y}_i \\ \bar{Z}_i \\ \bar{X}_j \\ \bar{Y}_j \\ \bar{Z}_j \end{pmatrix} = \mathbf{T}_e^T \mathbf{r}_e \quad (4.15)$$

donde $\mathbf{r}_e = [\bar{N}_i \ \bar{V}_i \ \bar{M}_i \ \bar{N}_j \ \bar{V}_j \ \bar{M}_j]^T$ es el vector de fuerzas de empotramiento en la numeración local. La contribución $\Delta \mathbf{R}_e$ del elemento e en coordenadas generales se obtiene aplicando el cuadro de correspondencias a las fuerzas de empotramiento del elemento en coordenadas generales \mathbf{R}_e :

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^m \Delta \mathbf{R}_e \quad (4.16)$$

Una vez calculado el vector de desplazamientos generales \mathbf{D} por la manera ya conocida, se extraen de él los desplazamientos propios de cada elemento e (esto es, el vector \mathbf{D}_e) y se calculan las fuerzas internas, definidas en la ecuación (4.4), reuniendo las deducciones realizadas en los capítulos anteriores:

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e \mathbf{D}_e + \mathbf{r}_e \quad (4.17)$$

4.4. Ejemplo 7

Analizaremos ahora el mismo pórtico del ejemplo anterior, pero sometido esta vez a una carga distribuida en la viga, de valor 20 kN/m, como se muestra en la figura 4.6. El vector de fuerzas de empotramiento se calcula como sigue:

w=20;

```
r_2=[0;
      w*1_2/2;
      w*1_2^2/12;
      0;
      w*1_2/2;
      -w*1_2^2/12];
```

Como la viga está orientada según el eje horizontal, no es necesario realizar transformación de coordenadas para obtener el vector \mathbf{R} :

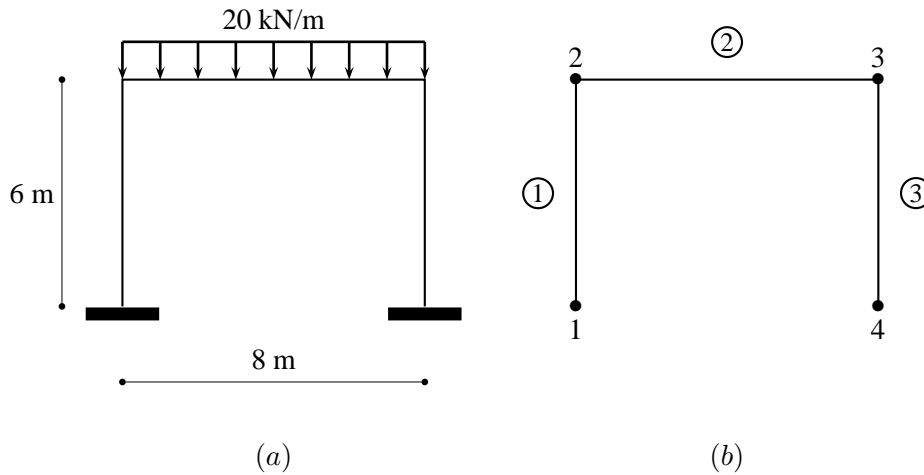


Figura 4.6: Pórtico sometido a una carga vertical distribuida uniformemente. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos.

```
R_2=r_2;
g_2=[4 5 6 7 8 9];
DeltaR_2=zeros(12,1);
DeltaR_2(g_2)=R_2;
R=DeltaR_2;
```

Una vez realizada la partición de las matrices, el problema de desplazamientos y reacciones en los apoyos se resuelve por medio de la ecuación (4.13):

```
D_b=K_bb\ (P_b-R_b);
D=zeros(12,1);
D(b)=D_b;
P_a=K_ab*D_b+R(a);
```

lo que da como resultado

```
D =
1.0e-003 *
0
```

```

0
0
0.0153
-0.0952
-0.4184
-0.0153
-0.0952
0.4184
0
0
0

```

P_a =

```

19.2857
80.0000
-38.3333
-19.2857
80.0000
38.3333

```

Finalmente, las fuerzas internas en los elementos se obtienen así:

```

D_1=D(g_1);
p_1=k_1*T_1*D_1;

```

```

D_2=D(g_2);
p_2=k_2*T_2*D_2+r_2;

```

```

D_3=D(g_3);
p_3=k_3*T_3*D_3;

```

p_1 =

```

80.0000
-19.2857
-38.3333
-80.0000
19.2857
-77.3810

```

p_2 =

```

19.2857
80.0000
77.3810
-19.2857
80.0000
-77.3810

```

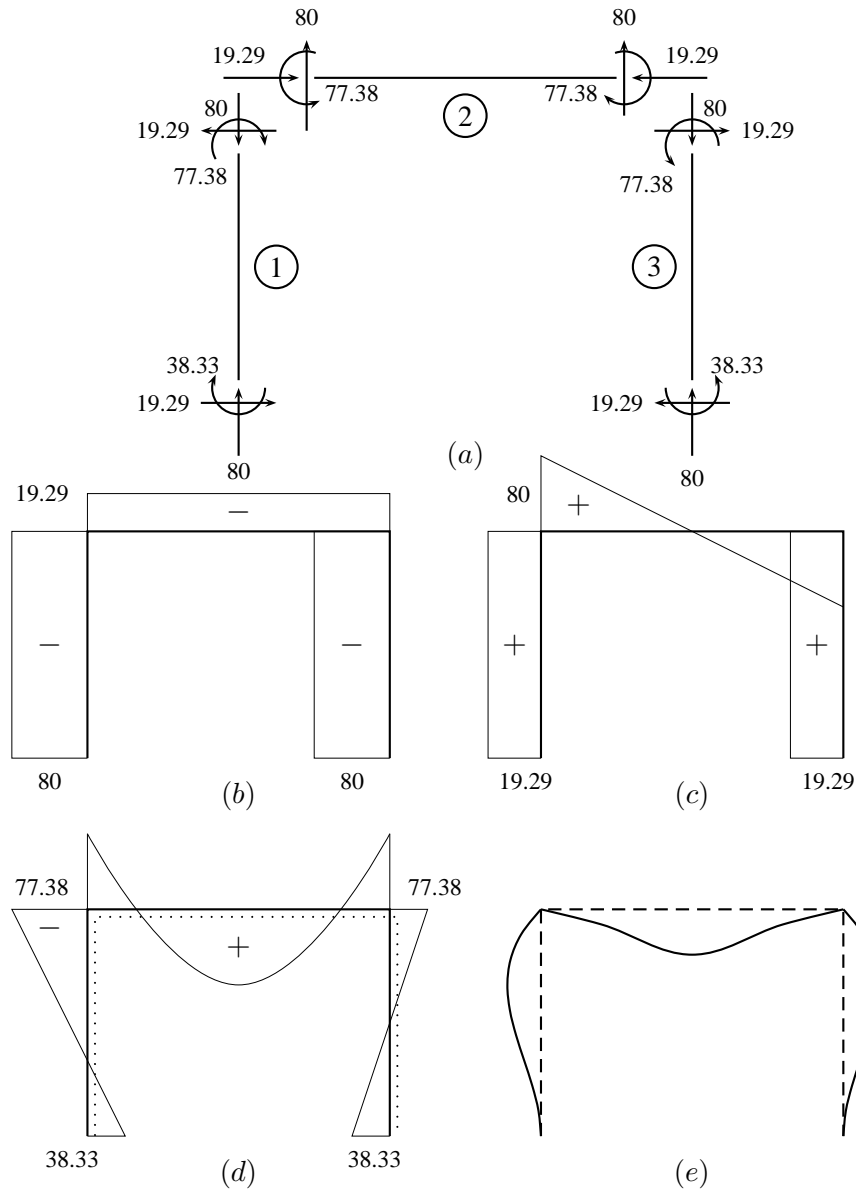


Figura 4.7: Diagramas de fuerzas internas del pórtico sometido a carga vertical distribuida uniformemente. (a) Fuerzas internas de cada elemento. (b) Diagrama de fuerzas axiales. (c) Diagrama de cortantes. (d) Diagrama de momentos. (e) Elástica.

p_3 =

```

80.0000
19.2857
77.3810
-80.0000
-19.2857
38.3333

```

Queda como ejercicio al lector comprobar estos resultados, comprobar el equilibrio en los niveles de nodos, elementos y estructural y generar los diagramas que aparecen en la figura 4.7.

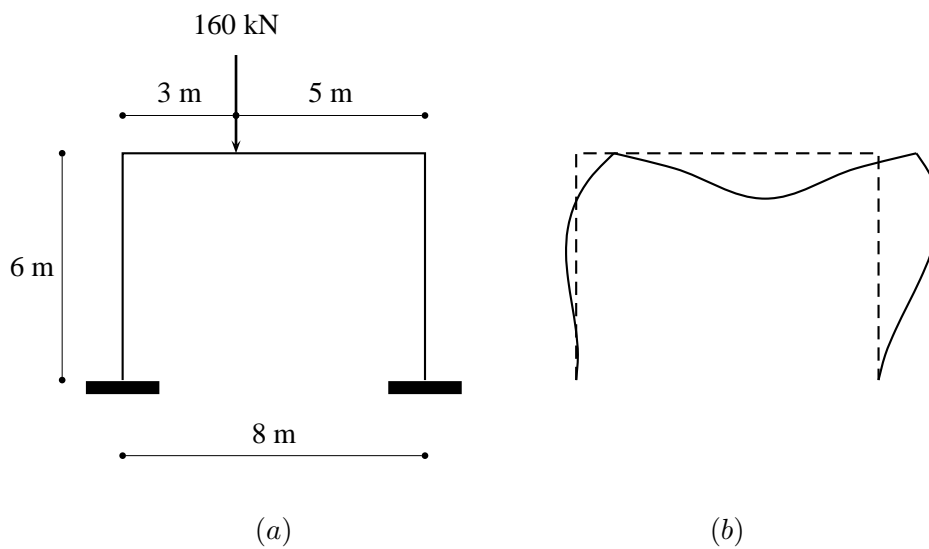


Figura 4.8: Pórtico bajo carga vertical concentrada y asimétrica. (a) Modelo estructural. (b) Elástica.

4.5. Ejemplo 8

La figura 4.8 muestra el mismo pórtico analizado en los ejemplos anteriores, esta vez sometido a la acción de una carga vertical asimétrica de 160 kN.

Según lo indicado en el capítulo anterior, las fuerzas de empotramiento SON

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \bar{N}_2 \\ \bar{V}_2 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{N}_3 \\ \bar{V}_3 \\ \bar{M}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{Qd^2(3c+d)}{l^3} \\ \frac{Qcd^2}{l^2} \\ 0 \\ \frac{Qc^2(3d+c)}{l^3} \\ -\frac{Qdc^2}{l^2} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

con $Q = 160, c = 3, d = 5$. El cálculo con MATLAB se realiza de la manera ya indicada:

```
Q=160;
c=3;
d=5;

r_2=[0;
      Q*d^2*(3*c+d)/l_2^3;
      Q*c*d^2/l_2^2;
      0;
      Q*c^2*(3*d+c)/l_2^3;
      -Q*d*c^2/l_2^2];

DeltaR_2=r_2;

R=zeros(12,1);
R(g_2)=DeltaR_2;

R =

      0
      0
      0
      0
    109.3750
    187.5000
      0
     50.6250
   -112.5000
      0
      0
      0
```

En adelante, el análisis de la estructura sigue los mismos pasos de los ejemplos anteriores. El vector de desplazamientos tiene por valor

D =

```

1.0e-003 *
      0
      0
      0
    0.4440
   -0.1210
   -0.7292
    0.4010
   -0.0695
    0.4475
      0
      0
      0

```

Obsérvese que hay desplazamientos hacia la derecha en los nodos 2 y 3, de valor 0.444 m en el primero y 0.401 en el segundo. La diferencia entre ellos obedece a las fuerzas de compresión a la que queda sometida la viga, de valor 27.12 kN. El desplazamiento hacia la derecha de la estructura obedece a la asimetría de la carga vertical, la cual, al estar más cerca del nodo 2 que del 3, produce en aquél un momento de empotramiento mayor que en éste. Esto a su vez implica que el vector de fuerzas $\mathbf{P} - \mathbf{R}$ presenta un momento de $-187,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ en el nodo 2 y uno de $112,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Como el primero tiende a mover la estructura hacia la derecha, mientras que el segundo al contrario, se impone la tendencia dominante en valor absoluto, que es la del momento del nodo 2.

Capítulo 5

Edificios

5.1. Configuración del edificio

La figura 5.1 muestra un edificio típico, compuesto por pórticos en direcciones x e y , los cuales se encuentra ensamblados en cada piso por una losa. La presencia de esta clase de elemento hace que el edificio tenga un comportamiento particular, diferente del que tendría un pórtico espacial formado por vigas y columnas. La diferencia reside en que en el edificio, las losas crean una fuerte dependencia mutua de los desplazamientos de los nodos, tanto mutuamente cercanos como lejanos, mientras que en los pórticos espaciales sin losas la dependencia entre nodos es muy débil, especialmente entre los que se encuentran muy distantes entre sí.

Las cargas son normalmente de dos clases:

1. **Cargas verticales**, que son debidas a la acción de la gravedad. Corresponden al peso de la construcción (*carga muerta*) y al uso que se le de (*carga viva*). Se modelan normalmente como cargas distribuidas en las losas y, por tanto, sus valores se dan en unidades de fuerza sobre unidad de área (kN/m^2 , por ejemplo).
2. **Cargas horizontales**, debidas a acciones naturales tales como sismos o vientos fuertes. Normalmente se modelan como cargas concentradas en el nivel de piso, tal como indica la figura 5.1, a las cuales se agregan momentos torsionales. Por ser fuerzas de inercia (es decir, resultantes del movimiento dinámico del edificio), el punto de aplicación de ambas clases de fuerzas es el centro de gravedad de la losa.

La presencia de la losa induce una coordinación de los desplazamientos horizontales de los diferentes pórticos, que debe ser considerada para calcular la estructura como un todo. Desde este punto de vista de movimientos horizontales la losa se denomina usualmente *diafragma*.

5.2. Noción de diafragma

La situación que se da típicamente en edificios es tal que la presencia de losas en cada nivel implica una estrecha relación entre ellos. en efecto, estos elementos, aunque flexibles en sentido ortogonal,

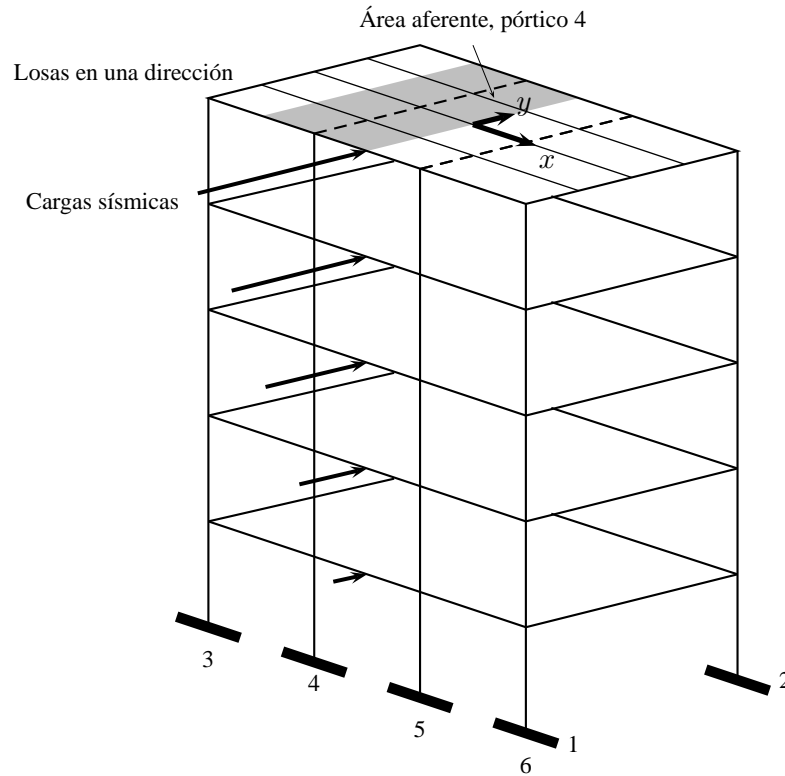


Figura 5.1: Configuración y cargas de un edificio típico.

exhiben en muchos casos una gran rigidez en su propio plano, lo cual hace que los movimientos horizontales de los nodos de los pórticos que los atraviesan estén coordinados. Esta situación se explica mejor con la ayuda de las figuras 5.2 y 5.3. En la primera aparece el conjunto losa – pórtico espacial sometido a un grupo de cargas verticales ortogonales al plano propio de la losa. En este sentido el diafragma puede considerarse como flexible. Sin embargo, en muchas situaciones dinámicas, tales como las pertinentes al empuje del viento o a la aceleración horizontal producidas por sismos, el interés recae sobre los movimientos horizontales de la estructura, que obviamente implican traslaciones horizontales de las losas. Desde este punto de vista, el diafragma puede ser rígido o flexible, como ilustra la figura 5.3, en dependencia de los materiales que lo constituyen, de la separación de las estructuras de soporte y de la dimensión del diafragma en el sentido paralelo a la acción horizontal. En el caso de un edificio, por ejemplo, se tienen típicamente diafragmas de concreto, soportados por estructuras verticales relativamente cercanas entre sí y con dimensiones comparables a tales separaciones. En contraste, los puentes se caracterizan por tener diafragmas de concreto apoyados en estructuras carac-

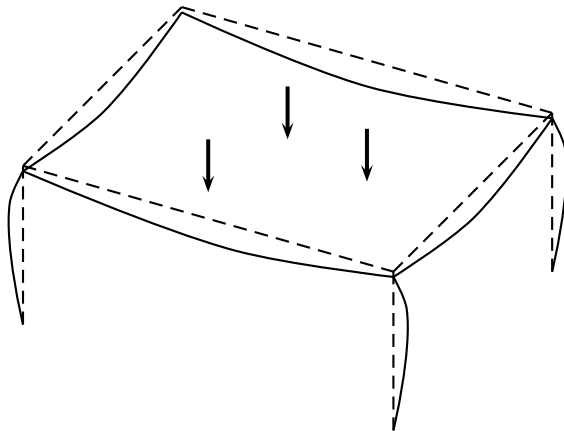


Figura 5.2: Diafragma flexible en un plano ortogonal.

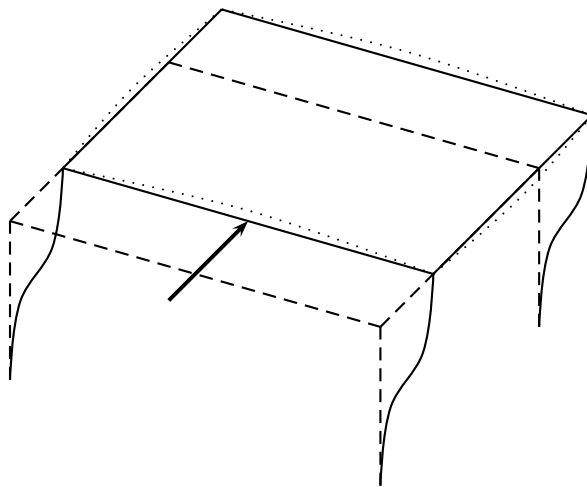


Figura 5.3: Diafragmas flexible (\cdots) y rígido (—) en su plano.

terizadas por un espaciamiento muy superior al de la dimensión transversal del puente. Por tanto, en

el caso de edificios es usual adoptar la hipótesis de diafragma rígido, mientras que en el análisis de puentes bajo carga dinámica transversal a su eje es conveniente adoptar la modelación de diafragma flexible. Sin embargo, si el diafragma de una estructura cualquiera es de madera, es dudoso que se pueda considerar como rígido, independientemente de sus dimensiones.

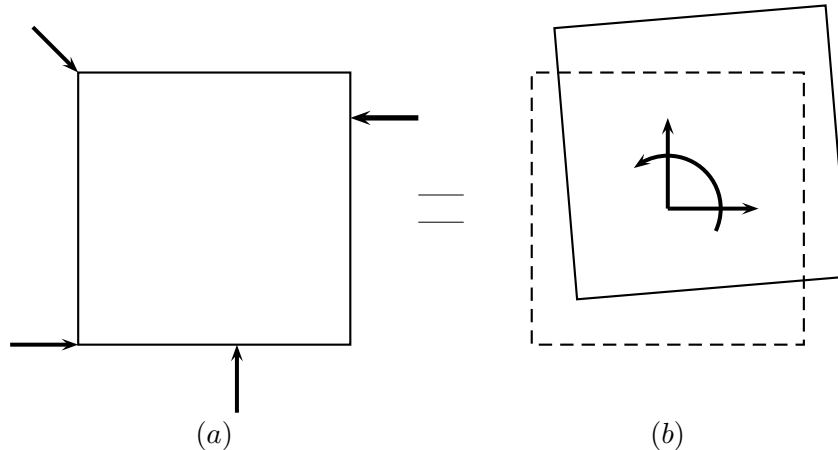


Figura 5.4: Equivalencia de fuerzas en un diafragma rígido en su plano.

Esta clasificación entre diafragmas rígidos y flexibles reviste gran importancia, ya que en la primera situación se puede hacer caso omiso de las deformaciones propias de la losa producidas por la carga horizontal, y considerarla como un cuerpo rígido en su propio plano. Esto permite, a su vez, hacer uso de una ley básica de la mecánica, según la cual en un cuerpo rígido las fuerzas coplanarias que actúan sobre él se pueden componer en una única resultante y un par alrededor de un eje ortogonal al plano (figura 5.4). En consecuencia, una estructura con diafragmas rígidos, sometida a fuerzas dinámicas horizontales, puede modelarse con tres grados de libertad en cada diafragma, tales como los mostrados en la figura 5.4b. En el caso de diafragmas flexibles, esta simplificación no es posible, dado que la deformación del diafragma impide aplicar la composición de fuerzas mencionada. Como consecuencia, tampoco resulta válida la aplicación de las consiguientes relaciones geométricas simples que se dan en un diafragma rígido sometido a traslación y rotación.

La modelación de estructuras con diafragma rígido permite, en consecuencia, condensar la información estructural de rigidez en términos de los tres grados de libertad por piso. Por el contrario, en el caso de diafragmas flexibles se hace necesario, o bien discretizar el diafragma por medio de elementos finitos, con lo cual el número de grados de libertad por nivel es muchísimo mayor, o bien adoptar algunas hipótesis auxiliares que permitan la reducción del problema. Por otra parte, los tres grados de libertad surgen como necesarios por la razón siguiente. Supóngase que en el diafragma de la figura 5.5 la rigidez k_1 es mayor que k_2 ; por tanto, la resultante de las fuerzas de restauración de esta estructura en sentido vertical pasa por el punto κ . Como la fuerza externa, por ejemplo de viento

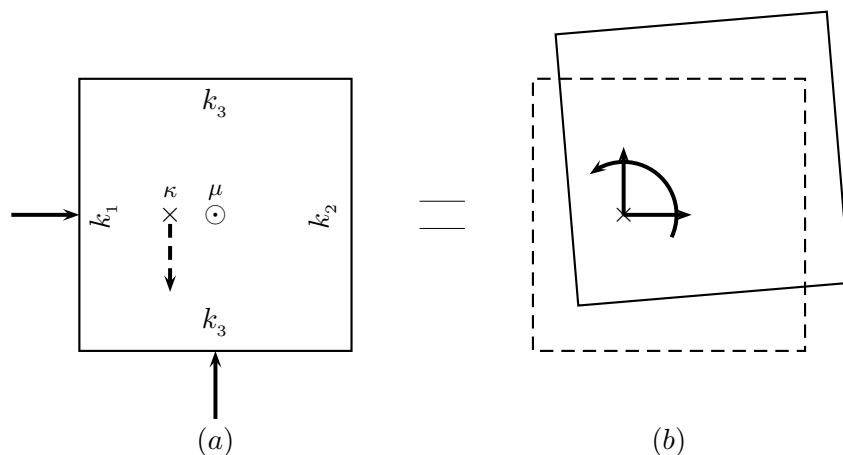


Figura 5.5: Sobre el grado de libertad torsional.

o de sismo, no necesariamente pasa por dicho punto (las de sismo se consideran aplicadas en el centro de masa μ , como en la figura, por ser fuerzas de inercia), se concluye que esta fuerza es equivalente al sistema de la figura 5.5b, en donde la fuerza externa ha sido trasladada al punto κ y se ha agregado un par torsional. Una situación similar puede darse en el sentido horizontal, si hay asimetría en dicho sentido, lo que no es del caso en la figura, en la cual sólo se ha introducido asimetría en el sentido vertical por simplicidad.

Como las cargas horizontales son generales para todo el edificio, se debe generar un problema de la forma

$$\mathbf{H} = \mathbf{S}\mathbf{U} \quad (5.1)$$

donde \mathbf{U} son los movimientos del centro de gravedad de la losa y \mathbf{H} las cargas aplicadas en esos puntos (ver la figura 5.1). Por tanto, \mathbf{S} debe ser una matriz de rigidez adecuada para este caso.

El análisis bajo cargas verticales puede, en principio, ser descompuesto en una serie de problemas de pórticos planos como los estudiados en el capítulo 4. En efecto, como muestra la figura 5.1, para el caso corriente en que las losas se encuentran armadas en una sola dirección, la cargas en los pórticos que las soportan (3, 4, 5, 6 en la figura) se determinan multiplicando la carga distribuida en la losa (viva o muerta) por el *ancho aferente*, obtenido como el promedio de las longitudes de los vanos a ambos lados de cada pórtico. Sin embargo, la posibilidad de movimientos *horizontales* causados por cargas *verticales* en condiciones de asimetría, tal como se mostró en el capítulo 4, hace necesaria en este caso la formulación de un problema similar al expresado por la ecuación (5.1). En efecto, como un pórtico asimétrico sometido a carga *vertical* tiende a desplazarse *horizontalmente*, este desplazamiento se traslada a la losa, la cual, a su vez, arrastra los pórticos restantes en la dirección de movimiento del

pórtico en cuestión. De esta manera, otros pórticos de configuración simétrica, terminarán sufriendo desplazamientos laterales. Por otra parte, las cargas horizontales son generales para todo el edificio y actúan directamente sobre la losa, de manera que los desplazamientos que causen son generales para todos los pórticos. Por tanto, es necesario estudiar el efecto de ensamblaje que opera la losa con relación a los desplazamientos horizontales.

Más adelante en este capítulo estudiaremos el método para el análisis de edificios que se basa en las ideas anteriores, es decir, en la descomposición, tanto para cargas verticales y horizontales, en problemas de pórticos planos, con los cuales se forma un único problema de la forma expresada, a partir del cual resulta posible retornar al plano de cada pórtico para hallar las fuerzas internas en cada uno de sus elementos.

En vista de la sencillez del procedimiento para obtener las cargas verticales en los pórticos que se acaba de explicar, abordaremos directamente su ilustración con un ejemplo de naturaleza simétrica, el cual no requiere la formulación del problema espacial (5.1).

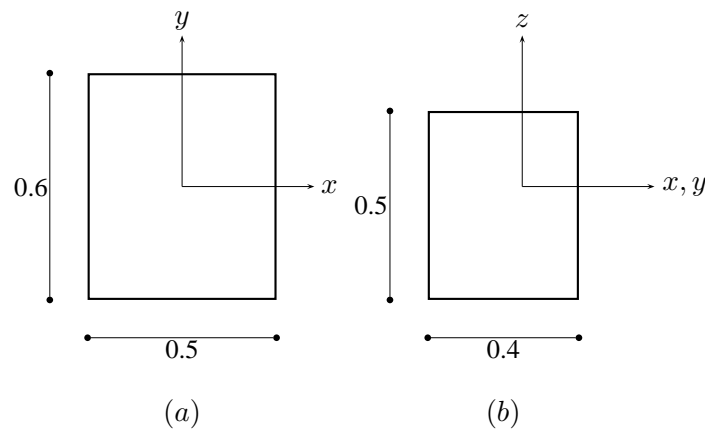


Figura 5.6: Secciones de las columnas (a) y las vigas (b).

5.3. Ejemplo

Consideremos el edificio mostrado en la figura 5.1. Las losas soportan una carga distribuida debida a su propio peso de 10 kN/m^2 . El material de los pórticos es concreto reforzado, con un módulo de elasticidad $E = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$. La dimensión de la sección de todas las columnas es de 0.5 m en sentido x y 0.6 m en sentido y , mientras que en las vigas la base es de 0.4 m y la altura 0.5 m. Las alturas entre piso son todas de 3 m.

Realizaremos el análisis del pórtico 4 bajo cargas verticales, bajo la consideración de que los vanos en el sentido x tienen todos una longitud de 5 m. En estas circunstancias, el ancho aferente del pórtico

es también de 5 m y, por tanto, la carga distribuida en cada piso es $w = 10 \times 5 = 50\text{kN/m}$. Por tanto, el pórtico resulta cargado como ilustra la figura 5.7. Con tres grados de libertad por nodo, el número total de grados es 36. Como todos los pórticos del edificio que soportan cargas gravitacionales son simétricos, y están cargados simétricamente, no se presentan desplazamientos horizontales en ellos, por lo cual cada uno puede ser analizado independientemente.

Comenzaremos por definir las propiedades básicas. Además del módulo de elasticidad

```
E=2e7;
```

para las columnas tenemos las cantidades

```
eta=0;
mu=1;
l=3;
A=0.5*0.6;
I=0.5*0.6^3/12;
```

mientras que para las vigas,

```
eta=1;
mu=0;
l=6;
A=0.4*0.5;
I=0.4*0.5^3/12;
```

Para todos los elementos la matriz de transformación es

```
T_e = [ eta mu 0 0 0 0;...
        -mu eta 0 0 0 0;...
        0 0 1 0 0 0;...
        0 0 0 eta mu 0;...
        0 0 0 -mu eta 0;...
        0 0 0 0 0 1];
```

Para generar la matriz de rigidez de la estructura inicialmente la hacemos nula:

```
K=zeros(36,36);
```

Ilustraremos el ensamblaje de la matriz de rigidez con un solo elemento, el No. 7. La matriz de rigidez elemental es

```
k_7=zeros(6,6);
k_7(1,:)=E*A*[ 1/l 0 0 -1/l 0 0];
k_7(2,:)=E*I*[ 0 12/l^3 6/l^2 0 -12/l^3 6/l^2];
k_7(3,:)=E*I*[ 0 6/l^2 4/l 0 -6/l^2 2/l];
k_7(4,:)=E*A*[-1/l 0 0 1/l 0 0];
k_7(5,:)=E*I*[ 0 -12/l^3 -6/l^2 0 12/l^3 -6/l^2];
k_7(6,:)=E*I*[ 0 6/l^2 2/l 0 -6/l^2 4/l];
```

mientras que su contribución a la global se calcula por el método ya conocido:

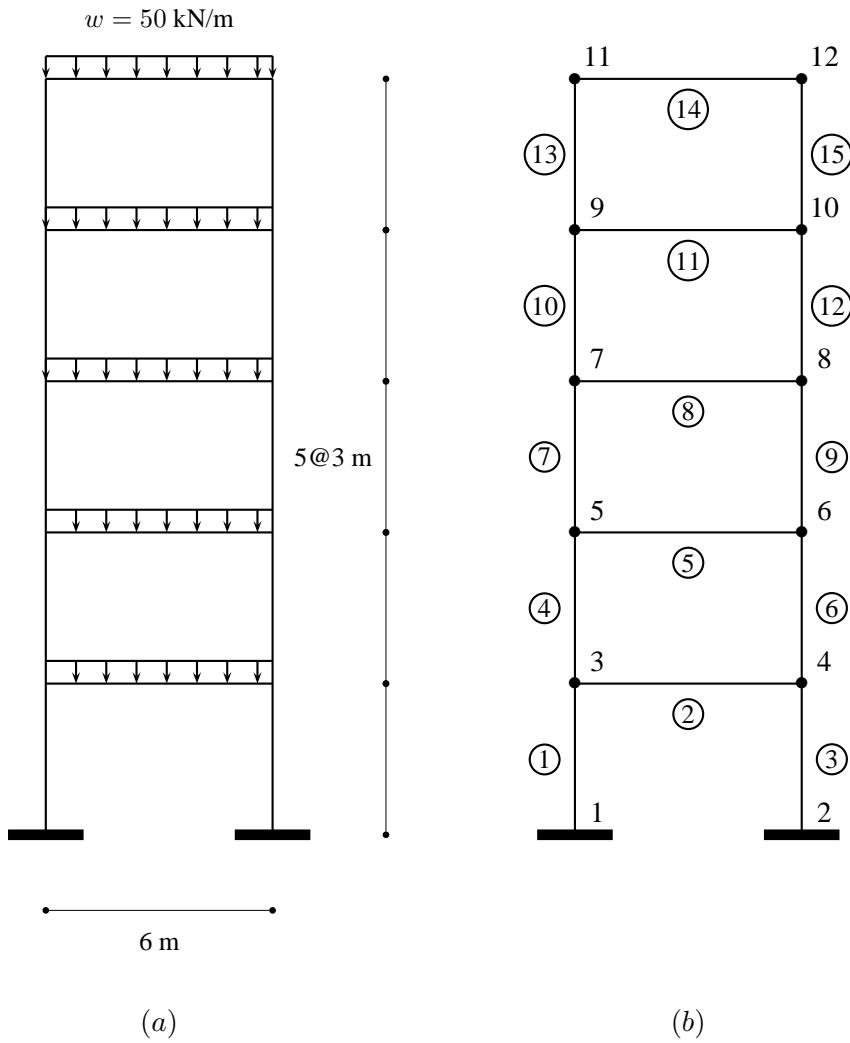


Figura 5.7: Pórtico de un vano y cinco pisos sometido a la acción de cargas verticales. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos.

```
g_7=[13 14 15 19 20 21];
```

```
K_7=T_7'*k_7*T_7;
```

```
DeltaK_7=zeros(36,36);
```

```
DeltaK_7(g_7,g_7)=K_7;
K=K+DeltaK_7;
```

Al proceder de manera semejante con todos los elementos obtenemos la matriz global \mathbf{K} . Ahora calcularemos el vector de fuerzas de empotramiento. Para la viga No. 8, por ejemplo,

```
w=10*5;
l=6;
r_8=[0;
     w*l/2;
     w*l^2/12;
     0;
     w*l/2;
     -w*l^2/12];
```

Para ensamblar el vector \mathbf{R} procedemos de manera semejante al caso de la matriz de rigidez:

```
R=zeros(36,1);
```

Ilustraremos el ensamblaje del vector global \mathbf{R} con el caso del elemento No. 8:

```
DeltaR_8=zeros(36,1);
g_8=[19 20 21 22 23 24]';
DeltaR_8(g_8)=r_8;
R(g_8)=R+DeltaR_8;
```

Para obtener la solución del problema clasificamos primero los grados de libertad en restringidos y móviles:

```
a=[1 2 3 4 5 6]'; b=(7:36)';
```

con ello hacemos la partición de las matrices y el cálculo de los desplazamientos de la manera usual:

```
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P=zeros(36,1);
P_b=P(b);
R_b=R(b);
D_b=K_bb\ (P_b-R_b);
P_a=K_ab*D_b+R(a);

D=zeros(36,1);
D(b)=D_b;
```

Para comprender mejor el resultado, presentaremos los desplazamientos con su número de orden y multiplicados por un factor de 10^3 :

```
[(1:36)' 10^3*D]
```

```
ans =
```

```

1.0000      0
2.0000      0
3.0000      0
4.0000      0
5.0000      0
6.0000      0
7.0000  -0.0151
8.0000  -0.3750
9.0000  -0.2511
10.0000  0.0151
11.0000  -0.3750
12.0000  0.2511
13.0000  0.0024
14.0000  -0.6750
15.0000  -0.1900
16.0000  -0.0024
17.0000  -0.6750
18.0000  0.1900
19.0000  0.0037
20.0000  -0.9000
21.0000  -0.2138
22.0000  -0.0037
23.0000  -0.9000
24.0000  0.2138
25.0000  -0.0228
26.0000  -1.0500
27.0000  -0.1302
28.0000  0.0228
29.0000  -1.0500
30.0000  0.1302
31.0000  0.0553
32.0000  -1.1250
33.0000  -0.5368
34.0000  -0.0553
35.0000  -1.1250
36.0000  0.5368

```

Finalmente, calculamos las fuerzas internas en los elementos. Ilustraremos este paso de nuevo con los elementos 7 y 8:

```
D_7=D(g_7);
p_7=k_7*T_7*D_7
```

```
p_7 =
```

```

450.0000
-48.3479
-71.0956
-450.0000

```

48.3479
-73.9480

$D_8 = D(g_8)$;
 $p_8 = k_8 * T_8 * D_8 + r_8$

$p_8 =$

4.9475
150.0000
144.0618
-4.9475
150.0000
-144.0618

5.4. Condensación de las matrices de rigidez de pórticos planos

Por las razones explicadas anteriormente, para el análisis de edificios resulta conveniente separar los efectos de los desplazamientos laterales de los correspondientes a rotaciones y movimientos verticales de los nodos. Para realizar esta separación se realiza el procedimiento llamado *condensación estática*, en el cual las fuerzas asociadas a los grados de libertad diferentes a los desplazamientos laterales se consideran nulas. Por otra parte, para ser consistente con la hipótesis de diafragma rígido, se debe suponer que las vigas no sufren deformación axial, ya que de otra manera se estaría permitiendo deformaciones del diafragma en su propio plano. Esto implica que solamente es necesario un grado de libertad horizontal por piso, puesto que los dos extremos de cada viga se desplazarán una cantidad igual, y, por tanto, la condensación estática ha de realizarse a partir de una matriz de rigidez del pórtico \mathbf{K} ensamblada según los grados de libertad que muestra la figura 5.8. El problema se puede simplificar aún más si se desprecian las deformaciones axiales de las columnas, lo cual implica considerar, como grados de libertad secundarios, solamente los giros en los nodos.

La formación de la matriz de rigidez con los grados de libertad mostrados en la figura 5.8 implica que, para las columnas, se han de considerar 3 grados de libertad por nodo, lo que implica usar como matriz del elemento en coordenadas locales la matriz convencional

$$k_e = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

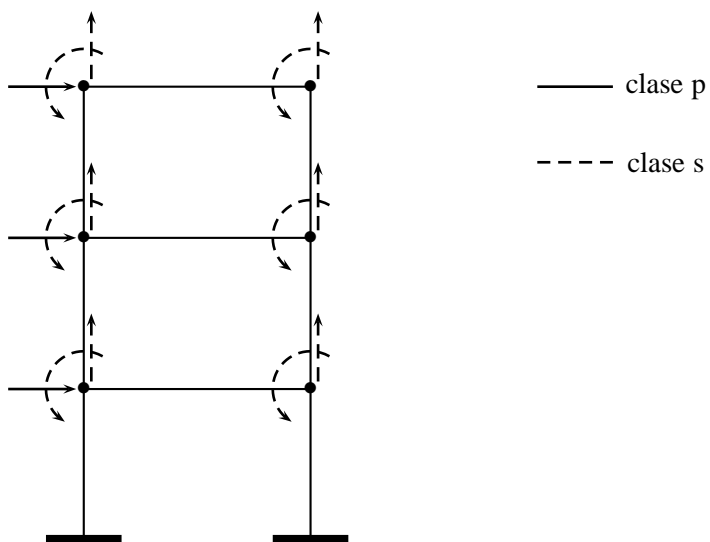


Figura 5.8: Grados de libertad móviles considerados en el cálculo de la matriz condensada.

En las vigas, al suprimir las deformaciones axiales, se debe usar la matriz más simple considerada en el capítulo 3:

$$k_e = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Para realizar el ensamblaje de \mathbf{K} simplemente se ha de tener presente que el grado de libertad horizontal en cada piso está asociado a la fuerza rige para *todas* las columnas que se llegan a él, sea en su extremo superior o inferior. Este ensamblaje se ilustrará más adelante con ejemplos. Una vez formada la matriz de rigidez \mathbf{K} , se puede descomponer en sus submatrices \mathbf{K}_{aa} , \mathbf{K}_{ab} , \mathbf{K}_{ba} y \mathbf{K}_{bb} de la manera usual.

Si en el vector de desplazamientos \mathbf{D}_b , que surge de resolver el problema

$$\mathbf{P}_b = \mathbf{K}_{bb}\mathbf{D}_b, \quad (5.4)$$

se hace una partición adicional según dos tipos de grados de libertad, principales (tipo p) secundarios (tipo s), la matriz de rigidez correspondiente, formulada según el conjunto completo de grados de libertad ($b = p \cup s$), puede condensarse para obtener una matriz menor, de tamaño $p \times p$. Para ello se hacen nulas las fuerzas asociadas a los grados de libertad secundarios en un problema estático:

$$\mathbf{P}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_p \\ \mathbf{P}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_p \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

En consecuencia, la matriz \mathbf{K}_{bb} se descompone en

$$\mathbf{K}_{bb} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{ps} \\ \mathbf{K}_{sp} & \mathbf{K}_{ss} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

y el problema planteado toma la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{ps} \\ \mathbf{K}_{sp} & \mathbf{K}_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_p \\ \mathbf{D}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_p \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

De aquí se deduce que

$$\mathbf{K}_{pp}\mathbf{D}_p + \mathbf{K}_{ps}\mathbf{D}_s = \mathbf{P}_p \quad (5.8)$$

$$\mathbf{K}_{sp}\mathbf{D}_p + \mathbf{K}_{ss}\mathbf{D}_s = \mathbf{0} \quad (5.9)$$

y, por tanto,

$$\mathbf{D}_s = -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sp}\mathbf{D}_p \quad (5.10)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (5.8), se llega finalmente a

$$\mathbf{P}_p = \mathbf{C}\mathbf{D}_p \quad (5.11)$$

donde \mathbf{C} es la matriz condensada según los grados de libertad principales, de valor

$$\mathbf{C} = \mathbf{K}_{pp} - \mathbf{K}_{ps}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sp} \quad (5.12)$$

Obsérvese que este cálculo requiere la inversión de la matriz \mathbf{K}_{ss} , la cual puede llegar a tener un gran tamaño en pórticos corrientes. Por tanto, los programas de computador profesionales aplican

métodos diferentes que requieren menos operaciones. Pero, salvo errores de redondeo, el resultado es equivalente al que da la ecuación (5.12).

Antes de ilustrar el cálculo de la matriz condensada con ejemplos, es importante explicar su interpretación física. La ecuación (5.12) puede escribirse en la forma

$$C = K_{pp} - \Delta K_{pp} \quad (5.13)$$

con $\Delta K_{pp} = K_{ps} K_{ss}^{-1} K_{sp}$. En esta forma, puede verse que la condensación implica un debilitamiento de la matriz K_{pp} . Esta última, a su vez, representa la interacción de los grados de libertad principales entre sí. Con referencia a la definición de la matriz de rigidez, el término $k_{ij} \equiv (K_{pp})_{ij}$ representa la fuerza en el piso i cuando en el piso j tiene lugar un desplazamiento unitario, manteniendo todos los demás desplazamientos y todos los giros iguales a cero. Esto indica que una matriz de rigidez igual a K_{pp} se obtendría con un modelo de edificio en el cual las vigas tuviesen rigidez infinita a flexión, puesto que así los giros en los nodos son también nulos (figura 5.9). Este modelo se denomina *viga de cortante*, por razones que explicaremos a continuación.

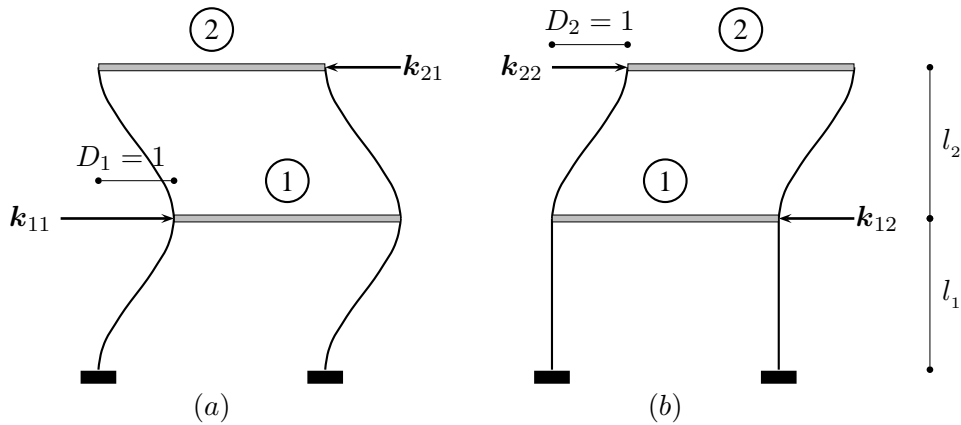


Figura 5.9: Viga de cortante.

La fuerza necesaria para causar una traslación unitaria de una columna de longitud l y rigidez de curvatura EI es $12EI/l^3$. En consecuencia, para el pórtico deformado de la figura 5.9a, la rigidez k_{11} es la necesaria para causar un desplazamiento unitario de las dos columnas del piso 1 y las dos del piso 2. Si las columnas de cada piso son iguales entre sí, tenemos

$$k_{11} = 2 \times \frac{12EI_1}{l_1^3} + 2 \times \frac{12EI_2}{l_2^3} = \frac{24EI_1}{l_1^3} + \frac{24EI_2}{l_2^3} \quad (5.14)$$

Por otra parte, la rigidez k_{21} es la fuerza que se debe aplicar en el piso 2 para evitar su desplazamiento, dado que ha ocurrido una traslación unitaria en el piso 1. En consecuencia,

$$\mathbf{k}_{21} = -\frac{24EI_2}{l_2^3} \quad (5.15)$$

Análogamente, cuando se impone a la estructura un desplazamiento unitario en el piso 2, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{12} &= -\frac{24EI_2}{l_2^3} \\ \mathbf{k}_{22} &= \frac{24EI_2}{l_2^3} \end{aligned} \quad (5.16)$$

de acuerdo con la figura 5.9b. Como resultado, la matriz de rigidez del pórtico completo es

$$\mathbf{k} = 24E \begin{pmatrix} \frac{I_1}{l_1^3} + \frac{I_2}{l_2^3} & -\frac{I_2}{l_2^3} \\ -\frac{I_2}{l_2^3} & \frac{I_2}{l_2^3} \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

La generalización para una viga de cortante de n pisos con r_i columnas en cada nivel i es inmediata:

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \kappa_1 + \kappa_2 & -\kappa_2 & \dots & 0 \\ -\kappa_2 & \kappa_2 + \kappa_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \kappa_{n-1} + \kappa_n & -\kappa_n \\ 0 & \dots & -\kappa_n & \kappa_n \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

En esta ecuación

$$\kappa_i = \sum_{j=1}^{r_i} \frac{12EI_j}{l_i^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Este modelo se denomina de cortante por la razón siguiente: Si consideramos un problema estático con $n = 2$, por simplicidad, tendremos dos fuerzas aplicadas H_1 y H_2 , tales que

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 + \kappa_2 & -\kappa_2 \\ -\kappa_2 & \kappa_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Las fuerzas cortantes acumuladas desde el segundo nivel valen

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 + H_2 \\ H_2 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Si llamamos *deriva del piso i* , d_i , al desplazamiento relativo de un piso i con respecto al anterior ($i - 1$) se puede concluir fácilmente que

$$\begin{aligned} d_1 &= D_1 = \frac{V_1}{\kappa_1} \\ d_2 &= D_2 - D_1 = \frac{V_2}{\kappa_2} \end{aligned} \quad (5.21)$$

lo cual indica que para este tipo de sistemas, en cada piso la deriva es igual a la fuerza cortante dividida por la rigidez, lo cual explica su denominación. Obsérvese, de paso, la semejanza existente entre la ecuación

$$d_i = \frac{V_i}{\kappa_i}$$

y la que vincula la distorsión angular γ a la tensión cortante τ en resistencia de materiales:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

donde G es el módulo de rigidez. El paralelo entre ambas expresiones no es casual, ya que en vigas de cortante la distorsión angular de un nivel cualquiera i estaría dada por la relación entre la deriva del piso y su altura con respecto al nivel inmediatamente inferior.

La matriz k así obtenida es equivalente a la submatriz K_{pp} de un pórtico convencional. Esto demuestra lo enunciado anteriormente, a saber que la matriz condensada C de un pórtico se puede interpretar como un debilitamiento de la matriz de rigidez de una viga de cortante $k = K_{pp}$, debido a la posibilidad de giros en los nodos, la cual no tiene lugar en ella pero sí en el pórtico.

5.5. Ejemplo

En este ejemplo calcularemos la matriz de rigidez del pórtico simple mostrado en la figura 5.10a y la correspondiente matriz condensada, según los tres grados de libertad que aparecen allí solamente. Para simplificar el análisis, prescindiremos de las rigideces a fuerzas axiales tanto en las vigas como en las columnas. Esto tiene dos implicaciones. La primera, es que la matriz de rigidez elemental de todos los elementos es la propia de vigas, dada por la ecuación (5.3). La segunda es que, al no considerar deformación axial de la viga, sólo se requiere un grado de libertad horizontal D_1 , puesto que los dos extremos de la misma se desplazaran una cantidad igual, como ya ha quedado dicho.

Bajo estas consideraciones, la primera columna de la matriz se obtiene de la manera indicada en la figura 5.10b, haciendo $D_1 = 1$ y manteniendo $D_2 = D_3 = 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{12EI}{h^3} + \frac{12EI}{h^3} = \frac{24EI}{h^3} \\ k_{21} &= \frac{6EI}{h^2} \\ k_{31} &= \frac{6EI}{h^2} \end{aligned}$$

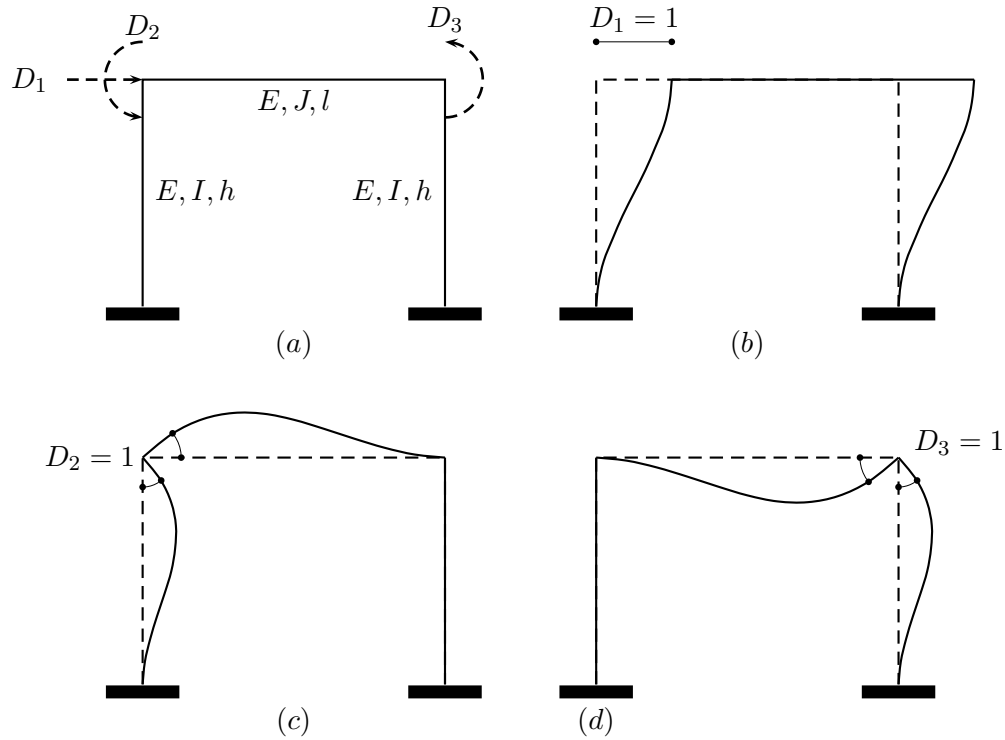


Figura 5.10: Construcción de la matriz de rigidez de un pórtico - Método directo.

en donde la rigidez k_{11} expresa la fuerza total necesaria para causar el desplazamiento unitario indicado, lo que implica a las dos columnas, mientras que las fuerzas k_{21} y k_{31} son fuerzas meramente reactivas necesarias para impedir los giros en los grados de libertad 2 y 3. Análogamente, la segunda columna corresponde a la situación ilustrada por la figura 5.10b, es decir, $D_2 = 1, D_1 = 0, D_3 = 0$. Por tanto,

$$k_{22} = \frac{4EI}{h} + \frac{4EJ}{l}$$

$$k_{12} = \frac{6EI}{h^2}$$

$$k_{32} = \frac{2EJ}{l}$$

De manera similar se obtienen los elementos de la tercera columna:

$$k_{33} = \frac{4EI}{h} + \frac{4EJ}{l}$$

$$k_{13} = \frac{6EI}{h^2}$$

$$k_{23} = \frac{2EJ}{l}$$

En consecuencia, la matriz de rigidez, según los grados de libertad de tipo estático, es

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{24EI}{h^3} & \frac{6EI}{h^2} & \frac{6EI}{h^2} \\ \frac{6EI}{h^2} & \frac{4EI}{h} + \frac{4EJ}{l} & \frac{2EJ}{l} \\ \frac{6EI}{h^2} & \frac{2EJ}{l} & \frac{4EI}{h} + \frac{4EJ}{l} \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Para el pórtico simple usado como ejemplo en el capítulo 4, la matriz de rigidez fue formada según las simplificaciones mencionadas anteriormente. En este caso, $p = 1$, $s = 2$ y, por tanto, las submatrices implicadas valen

$$\mathbf{K}_{pp} = \left(\frac{24EI}{h^3} \right)$$

$$\mathbf{K}_{ps} = \left(\frac{6EI}{h^2} \quad \frac{6EI}{h^2} \right)$$

$$\mathbf{K}_{ss} = \left(\begin{array}{cc} \frac{4EI}{h} + \frac{4EJ}{l} & \frac{2EJ}{l} \\ \frac{2EJ}{l} & \frac{4EI}{h} + \frac{4EJ}{l} \end{array} \right)$$

mientras que $\mathbf{K}_{sp} = \mathbf{K}_{ps}^T$

5.6. Ejemplo

Consideremos el pórtico mostrado en la figura 5.11. Todas las barras tienen un módulo de elasticidad $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, área 0.2 m^2 y momento de inercia 0.004 m^4 . Se pretende calcular la matriz de rigidez condensada de acuerdo con los grados de libertad mostrados en la figura 5.12: los principales son $p = [2 \ 3]$ mientras que los secundarios son $s = [7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13]$.

Comenzaremos por definir las cantidades básicas:

% Módulo de elasticidad:

E=2e8;

% Áreas, inercias y longitudes:

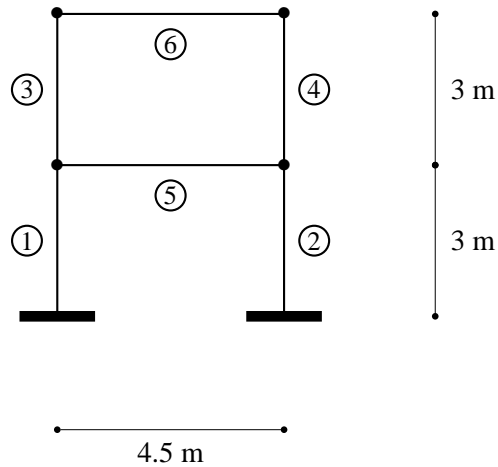


Figura 5.11: Ejemplo de cálculo de la matriz condensada.

```
A=0.2;
I=0.004;
l_1=3;
l_2=4.5;
```

Pasamos ahora a calcular las matrices de rigidez de los elementos en coordenadas locales. Para las columnas (elementos 1 a 4), según la ecuación (5.2), tenemos:

```
k_1=zeros(6,6);
l=l_1;
k_1(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_1(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_1(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_1(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_1(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_1(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

k_2=k_1;
k_3=k_1;
k_4=k_1;
```

Para las vigas, según la ecuación (5.3),

```
k_5=zeros(4,4);
l=l_2;
k_5(1,:)=E*I*[ 12/l^3    6/l^2   -12/l^3    6/l^2];
k_5(2,:)=E*I*[  6/l^2    4/l     -6/l^2    2/l];
k_5(3,:)=E*I*[ -12/l^3   -6/l^2    12/l^3   -6/l^2];
k_5(4,:)=E*I*[  6/l^2    2/l     -6/l^2    4/l];

k_6=k_5;
```

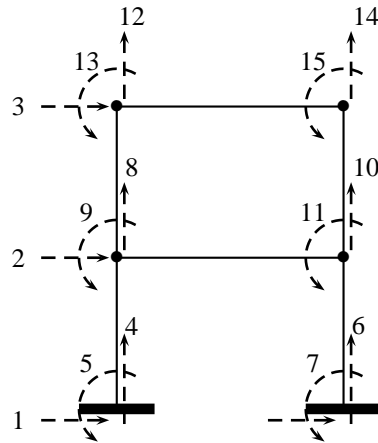


Figura 5.12: Grados de libertad considerados en el cálculo de la matriz condensada.

Procedemos ahora al ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura de acuerdo con lo explicado anteriormente. Obsérvense los grados de libertad en la numeración global en la figura 5.11. Así, para el elemento 1 (columna), se deben establecer las correspondencias entre los grados de libertad locales, [1 2 3 4 5 6], con los globales [1 4 5 2 8 9]. Para el elemento 2, la correspondencia debe ser con los grados de libertad [1 6 7 2 10 11], para el 3 con [2 8 9 3 12 13] y para el 4 con

[2 10 11 3 14 15]. Por otra parte, los cuatro grados de libertad de la viga 5 en coordenadas locales, [1 2 3 4], se deben poner en correspondencia con [8 9 10 11], mientras que para la viga 6 con [12 13 14 15]. El proceso completo de cálculo es el siguiente:

```

K=zeros(15,15);

g_1=[1 4 5 2 8 9];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_1= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
      0 0 1 0 0 0;...
      0 0 0 eta mu 0;...
      0 0 0 -mu eta 0;...
      0 0 0 0 0 1];
K_1=T_1'*k_1*T_1;
DeltaK_1=zeros(15,15);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[1 6 7 2 10 11];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_2= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
      0 0 1 0 0 0;...
      0 0 0 eta mu 0;...
      0 0 0 -mu eta 0;...
      0 0 0 0 0 1];
K_2=T_2'*k_2*T_2;
DeltaK_2=zeros(15,15);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

g_3=[2 8 9 3 12 13];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_3= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
      0 0 1 0 0 0;...
      0 0 0 eta mu 0;...
      0 0 0 -mu eta 0;...
      0 0 0 0 0 1];
K_3=T_3'*k_3*T_3;
DeltaK_3=zeros(15,15);
DeltaK_3(g_3,g_3)=K_3;
K=K+DeltaK_3;

g_4=[2 10 11 3 14 15];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_4= [ eta mu 0 0 0 0;...

```

```

    -mu eta 0 0 0 0;...
    0 0 1 0 0 0;...
    0 0 0 eta mu 0;...
    0 0 0 -mu eta 0;...
    0 0 0 0 0 1];
K_4=T_4'*k_4*T_4;
DeltaK_4=zeros(15,15);
DeltaK_4(g_4,g_4)=K_4;
K=K+DeltaK_4;

g_5=[8 9 10 11];
beta=0;
eta=cosd(beta);
T_5= [eta 0 0 0 ;...
       0 1 0 0 ;...
       0 0 eta 0 ;...
       0 0 0 1];
K_5=T_5'*k_5*T_5;
DeltaK_5=zeros(15,15);
DeltaK_5(g_5,g_5)=K_5;
K=K+DeltaK_5;

g_6=[12 13 14 15];
beta=0;
eta=cosd(beta);
T_6= [eta 0 0 0 ;...
       0 1 0 0 ;...
       0 0 eta 0 ;...
       0 0 0 1];
K_6=T_6'*k_6*T_6;
DeltaK_6=zeros(15,15);
DeltaK_6(g_6,g_6)=K_6;
K=K+DeltaK_6;

```

La partición de la matriz de rigidez según los grados de libertad restringidos y móviles se hace de la manera usual:

```

a=[1 4:7]'; b=[2 3 8:15]';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);

```

Este paso, sin embargo, no es necesario para obtener la matriz condensada, ya que podemos realiar directamente la partición requerida para ese fin:

```

p=[2 3]'; s=(8:15)';
K_pp=K(p,p);
K_ps=K(p,s);

```

$$K_{sp}=K(s,p);$$

$$K_{ss}=K(s,s);$$

$$C=K_{pp}-K_{ps}*(K_{ss}\backslash K_{sp});$$

con el resultado

C =

1.0e+006 *

| | |
|---------|---------|
| 1.0992 | -0.4463 |
| -0.4463 | 0.2998 |

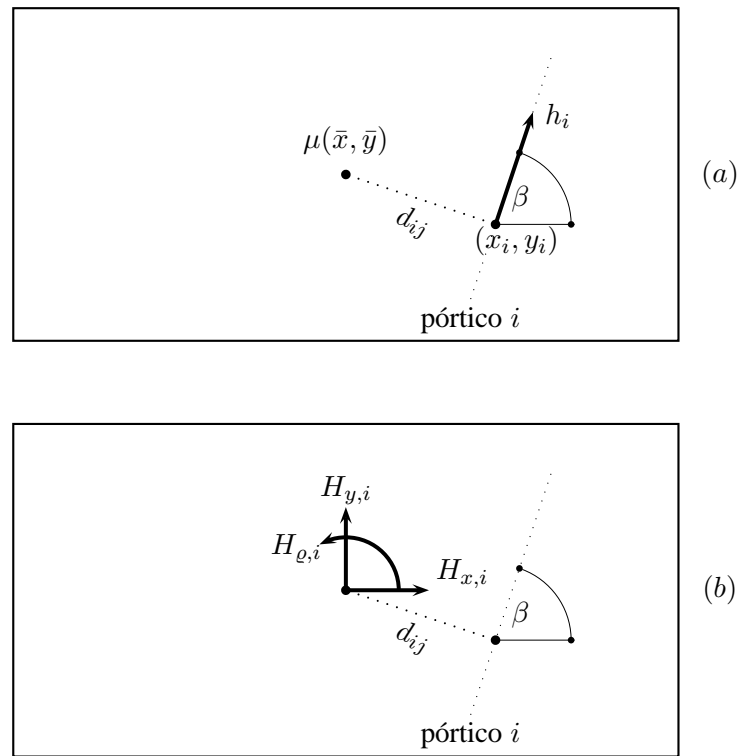


Figura 5.13: Equivalencia de fuerzas en un diafragma rígido. (a): Fuerza en el sistema local. (b): Fuerzas equivalentes en el sistema global.

5.7. Matriz de rigidez del edificio

La formación de la matriz de rigidez de la estructura completa, sobre la base de tres grados de libertad por piso, se hace de la misma manera que la correspondiente a la matriz global de rigidez de una estructura plana a partir de la matriz de rigidez de sus elementos, es decir, transfiriendo la información del sistema local al global, que normalmente tiene como origen el centro de masa μ , de coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) , ya que es el sitio de aplicación de la resultante de las fuerzas inerciales. Consideremos la figura 5.13, en la que sobre el plano del diafragma aparece una línea que representa al pórtico i cuya matriz de rigidez condensada según los desplazamientos laterales es C_i . La dimensión de esta matriz es, por tanto, igual al número de diafragmas de la estructura, que en este caso es igual a uno. Como sólo se consideran en el sistema local los grados de libertad de desplazamiento lateral, el vector de fuerzas desarrolladas por el pórtico a lo alto del edificio es h_i , que en este caso se puede presentar como una simple fuerza h_i . En el sistema global estas fuerzas equivalen a

$$\begin{aligned} H_{x,i} &= h_i \cos \beta \\ H_{y,i} &= h_i \sin \beta \\ H_{\rho,i} &= h_i[(\bar{y} - y_i) \cos \beta - (\bar{x} - x_i) \sin \beta] \end{aligned} \quad (5.23)$$

lo cual se puede representar en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_\rho \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \\ (\bar{y} - y) \cos \beta - (\bar{x} - x) \sin \beta \end{pmatrix}_i h_i \quad (5.24)$$

lo cual se puede presentar en la forma

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{A}_i^T h_i \quad (5.25)$$

donde \mathbf{A}_i es la matriz de transformación de la fuerza del pórtico i al centro de gravedad. Para un edificio de m pisos se tiene, en consecuencia,

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{A}_i^T h_i \quad (5.26)$$

con la matriz de transformación definida ahora por

$$\mathbf{A}_i^T = \begin{pmatrix} \cos \beta_i & 0 & \dots & 0 \\ \sin \beta_i & 0 & \dots & 0 \\ d_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \cos \beta_i \\ 0 & \dots & 0 & \sin \beta_i \\ 0 & \dots & 0 & d_{im} \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

donde d_{ij} es la distancia del pórtico i al centro de gravedad del piso j :

$$d_{ij} = [(\bar{y} - y) \cos \beta - (\bar{x} - x) \sin \beta]_{ij} \quad (5.28)$$

Ahora bien, la aplicación de la ley del contragradiente indica que la contribución del pórtico i a la matriz de rigidez global, de tamaño $3m \times 3m$ es

$$\Delta C_i = A_i^T C_i A_i \quad (5.29)$$

donde C_i es la matriz de rigidez condensada del pórtico i , ya que ella relaciona las fuerzas h_i con los desplazamientos correspondientes, según la ecuación (5.11). De esta suerte, la matriz de rigidez del edificio se obtiene por la superposición de las contribuciones de todos los pórticos:

$$S = \sum_i \Delta C_i \quad (5.30)$$

Esta matriz relaciona los vectores de desplazamientos y fuerzas del edificio según los 3 grados de libertad por piso mostrados en la figura 5.13:

$$H = SU \quad (5.31)$$

Una vez calculado el vector U , la aplicación de la ley del contragradiente indica que los desplazamientos horizontales de cada pórtico se pueden obtener por medio de la ecuación

$$D_p = AU, \quad (5.32)$$

con lo cual los movimientos de los grados de libertad secundarios D_s pueden ser obtenidos por medio de la ecuación (5.10). Con esto queda completamente resuelto el problema de calcular los efectos del sistema de cargas global H en todos los pórticos del edificio. Para cada pórtico, dado el vector $D = (D_p \ D_s)^T$, la obtención de las reacciones y de fuerzas internas resultantes de la carga horizontal del edificio se realiza según lo descrito en el capítulo 4.

5.8. Ejemplo

Consideremos la figura 5.14 en la que aparece un edificio de un piso sostenido por cuatro pórticos. Por tener un solo piso, cada pórtico tiene una matriz de rigidez condensada C_i de tamaño 1×1 , es decir, un escalar.

Supongamos inicialmente que el edificio es simétrico en rigidez, con $C_1 = C_3 = k_1$ y $C_2 = C_4 = k_2$. El centro de gravedad de la losa se encuentra en el punto de coordenadas $\mu(a/2, b/2)$. Evidentemente, los ángulos con el eje horizontal son $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = \beta_4 = 90$. La aplicación de las ecuaciones (5.27) y (5.28) da como resultado

$$A_1^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{b}{2} \end{pmatrix}, \quad A_2^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}, \quad A_3^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{b}{2} \end{pmatrix}, \quad A_4^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

En consecuencia, de las ecuaciones (5.29) y (5.30) se obtiene finalmente que la matriz de rigidez del edificio para los tres grados de libertad mostrados en la figura 5.14 es

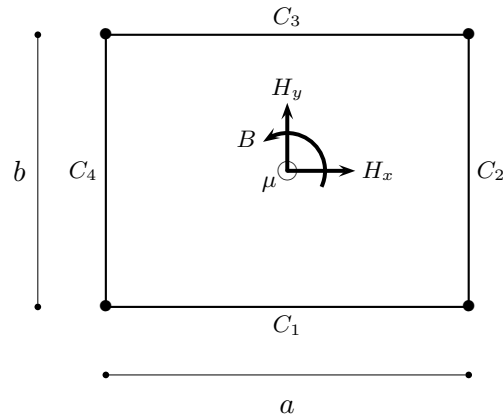


Figura 5.14: Ejemplo de cálculo de la matriz de rigidez de un edificio.

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2k_2 & 0 \\ 0 & 0 & (k_1b^2 + k_2a^2)/2 \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

Ahora supongamos que el edificio presenta una asimetría en rigidez, determinada por el hecho de que $2C_1 = C_3 = 2k_1$ y $2C_2 = C_4 = 2k_2$, lo cual implica que el centro de rigidez κ se aleja del centro de gravedad μ y se acerca a la esquina superior izquierda del diafragma. Para este caso, el resultado es

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 3k_1 & 0 & -k_1b/2 \\ 0 & 3k_2 & -k_2a/2 \\ -k_1b/2 & -k_2a/2 & 3(k_1b^2 + k_2a^2)/4 \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

Comparemos las dos soluciones. Nótese que en la ecuación (5.33) la matriz resultante es diagonal mientras que en la (5.34) hay términos diferentes de cero en la tercera columna (y, por tanto, en la tercera fila, por ser la matriz de rigidez simétrica). Con referencia a la definición de la matriz de rigidez, los términos (1,3) y (2,3) corresponden a las fuerzas que se desarrollan en los pórticos horizontales y verticales, respectivamente, al tener lugar un giro unitario en el centro de masa. Por otra parte, el cero en (1,2) refleja la falta de acoplamiento de los grados de libertad horizontal y vertical, pues el movimiento en una dirección es resistido exclusivamente por los pórticos orientados en ella. Este término y su simétrico (2,1) serían diferentes de cero si hubiese al menos un pórtico que no fuese paralelo a ninguno de los dos ejes x e y .

5.9. Cargas sísmicas

En esta sección describiremos los pasos necesarios para calcular las fuerzas y pares de torsión derivados de la acción de los sismos por el método simplificado que permite la Norma NSR-10, conocido con el nombre de *Método de la fuerza horizontal equivalente*. En vista de que el conocimiento de todo lo relativo a los efectos de los sismos en los edificios requiere un curso completo de dinámica de estructuras, sólo nos es posible en este capítulo una descripción somera de las variables implicadas en el cálculo de las cargas por el método simplificado.

5.9.1. Fuerzas

En primer lugar se determina una aproximación del *periodo de la estructura*, definido como el tiempo necesario para que el edificio realice un ciclo completo en vibración libre:

$$T = CZ^\alpha \quad (5.35)$$

donde Z es la altura total del edificio y C, α son valores empíricos que dependen del tipo de estructura. Así, $C = 0,047, \alpha = 0,9$ para edificios de pórticos de concreto, $C = 0,072, \alpha = 0,8$ para edificios aporticados de acero y $C = 0,073, \alpha = 0,75$ para edificios de acero con pórticos arriostrados.

A continuación se estima la *aceleración espectral de respuesta del edificio* S_a , definida como la máxima aceleración de una estructura equivalente de un grado de libertad bajo la acción del sismo de diseño. Éste, a su vez, se define como el evento que tiene una probabilidad de 0.1 de ser excedido en el tiempo esperado de vida útil de la construcción (50 años).

$$S_a = \begin{cases} \frac{2,5A_a F_a I}{R} & \text{si } T < T_C \\ \frac{1,2A_v F_v I}{RT} & \text{si } T_C \leq T < T_L \\ \frac{1,2A_v F_v T_L I}{RT^2} & \text{si } T \geq T_L \end{cases} \quad (5.36)$$

con

$$T_C = 0,48 \frac{A_v F_v}{A_a F_a}; \quad T_L = 2,4F_v \quad (5.37)$$

El significado de los parámetros es el siguiente:

1. Los parámetros A_a, A_v definen la aceleración máxima, como fracción de la aceleración de la gravedad, esperada en la región en un lapso de 475 años, lo que, en un enfoque probabilista, corresponde a una probabilidad de 0.1 de ser excedida en un lapso de 50 años. En otras palabras, si se acepta que la vida media de las estructuras es igual a este último valor, en dicho tiempo cabe esperar un sismo de aceleración máxima alrededor de A_a, A_v , con una probabilidad moderada (0.1) de que ocurra un sismo de mayor intensidad. Los valores de este parámetro para las diferentes regiones del país se pueden consultar en la norma.

2. Los parámetros F_a, F_v definen el tipo de suelo bajo la estructura en particular. Los valores respectivos deben identificarse cuidadosamente a partir de las pautas dadas en la norma. En general, puede decirse que los valores dependen de la flexibilidad del conjunto de estratos del terreno, la cual a su vez está determinada por la naturaleza misma del suelo y por altura de cada estrato. Así, los valores menores corresponden a rocas o suelos duros de poco espesor, mientras que los mayores a suelos blandos de gran espesor.
3. El parámetro I define la importancia de la edificación desde el punto de vista de los desastres sísmicos. En este sentido hay edificaciones claramente indispensables para la atención de la emergencia sísmica, tales como hospitales, centrales telefónicas, etc. ($I = 1,5$); edificaciones para atención de la población, tales como estaciones de policía, bomberos, etc. ($I = 1,25$); estructuras de alta ocupación, tales como teatros, universidades, estadios, etc. ($I = 1,1$); para las estructuras restantes $I = 1$.
4. El parámetro R es denominado *coeficiente de capacidad de disipación de energía* y se aplica para reducir las fuerzas de diseño y permitir así la disipación de energía en el campo inelástico en el sismo de diseño.

Finalmente se estiman las fuerzas en cada piso por medio de la fórmula siguiente:

$$H_j = \frac{m_j z_j^k}{\sum_i m_i z_i^k} M S_a g \quad (5.38)$$

donde g es la aceleración de la gravedad, m_j es la masa del piso j , M es la masa total del edificio,

$$M = \sum_i m_i, \quad (5.39)$$

z_j es la altura del piso j medida desde la base del edificio y k es un exponente que le da cierta forma parabólica a la distribución vertical de las fuerzas:

$$k = \begin{cases} 1 & \text{si } T < 0,5 \\ 0,75 + 0,5T & \text{si } 0,5 \leq T < 2,5 \\ 2 & \text{si } T \geq 2,5 \end{cases} \quad (5.40)$$

5.9.2. Pares de torsión

Además de aplicar las fuerzas H , la norma también requiere que se apliquen pares de torsión accidental dados en cada piso por

$$B = H e \quad (5.41)$$

donde e es la excentricidad accidental que surge de posibles asimetrías en la distribución de la masa, la resistencia o la rigidez que resultan como consecuencia de la incertidumbre asociada a estos parámetros. El valor de e es igual al 5 por ciento de la longitud del piso j en la dirección perpendicular a

H . La torsión que generan estos pares se agrega a la que produce la asimetría de la rigidez explicada anteriormente, H_ρ , que es tenida en cuenta de manera implícita en la generación de la matriz de rigidez del edificio S (ecuación 5.30). En otras palabras, el par torsional es B , si las fuerzas se consideran aplicadas en el centro de masa, pero sería $B + H_\rho$ si las fuerzas se trasladaran al centro de rigidez. En consecuencia, cuando la matriz de rigidez S se genera con matrices de transformación A al centro de masa, de la manera descrita anteriormente, el cálculo de H_ρ no resulta necesario.

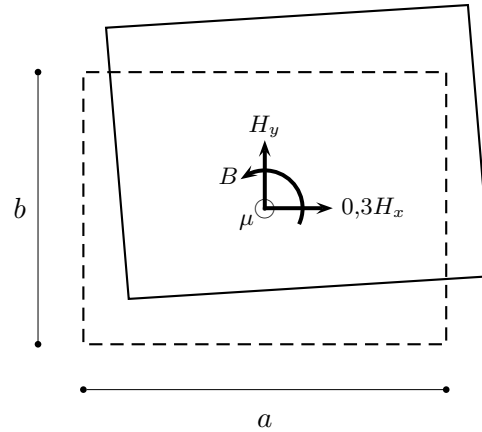


Figura 5.15: Acción sísmica bireccional y torsión accidental.

5.9.3. Acción bidireccional

En vista de que la acción sísmica se desarrolla en dirección aleatoria en cada instante de tiempo, la fuerza en cada piso se descompone en dos fuerzas ortogonales de valor cambiante. Como es poco probable que las dos fuerzas H_x y H_y alcancen su valor máximo de manera simultánea (dado por la ecuación 5.38), la norma específica que se debe combinar el 100 % de la fuerza en una dirección con el 30 % en la perpendicular. Además, como el movimiento sísmico es vibratorio, se debe contemplar la posibilidad de que las fuerzas H_j cambien de signo, es decir $\pm H_j$. De esta manera, para contemplar las diversas situaciones se establecen las combinaciones

$$\begin{aligned} \pm H_x \pm 0,3H_y \\ \pm 0,3H_x \pm H_y \end{aligned} \quad (5.42)$$

cuyo número total es ocho. En consecuencia, los pares de torsión correspondientes son los siguientes:

$$\begin{aligned} \pm H_x e_y \pm 0,3 H_y e_x \\ \pm 0,3 H_x e_y \pm H_y e_x \end{aligned} \quad (5.43)$$

donde, con referencia a la figura 5.15, $e_y = 0,05a$ y $e_x = 0,05b$.

5.10. Resumen del análisis de edificios bajo cargas sísmicas

Presentamos a continuación un resumen del procedimiento para realizar el análisis de desplazamientos y fuerzas internas en un edificio:

- Para cada pódico i del edificio, calcular:

- Matriz de rigidez:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{pmatrix}$$

- Matriz de rigidez condensada:

$$\mathbf{K}_{bb} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{ps} \\ \mathbf{K}_{sp} & \mathbf{K}_{ss} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{K}_{pp} - \mathbf{K}_{ps} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sp}$$

- Ensamblar la matriz de rigidez del edificio:

$$\mathbf{S} = \sum_i \mathbf{A}_i^T \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i$$

- Resolver el problema de desplazamientos del edificio y cada combinación de cargas $j = 1, 2, \dots, 8$:

$$\mathbf{U}_j = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{H}_j$$

Obsérvese que este problema se puede resolver con una sola multiplicación matricial de la manera siguiente:

$$\mathbf{U} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{H}$$

donde $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_1 \ \mathbf{U}_2 \ \dots \ \mathbf{U}_8]$ y $\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1 \ \mathbf{H}_2 \ \dots \ \mathbf{H}_8]$.

- Para cada pódico i y cada combinación de cargas $j = 1, 2, \dots, 8$:

- Calcular los desplazamientos principales (horizontales):

$$\mathbf{D}_p = \mathbf{A} \mathbf{U}$$

- Calcular los desplazamientos secundarios:

$$D_s = -K_{ss}^{-1} K_{sp} D_p$$

- Ensamblar el vector de desplazamientos:

$$D_b = \begin{pmatrix} D_p \\ D_s \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} D_a \\ D_b \end{pmatrix}$$

con $D_a = 0$.

- Calcular las reacciones en los apoyos:

$$P_a = K_{ab} D_b$$

- Para cada elemento e del pórtico:

- Calcular las fuerzas internas:

$$p_e = k_e T_e D_e$$

- Trazar los diagramas de axiales, cortantes y momentos flectores.

Las fuerzas internas así obtenidas se han de combinar con las causadas por fuerzas gravitatorias de acuerdo con las normas de diseño de los materiales.

5.11. Ejemplo

Consideremos ahora el mismo edificio de los ejemplos anteriores. El análisis corresponde ahora a la acción de fuerzas sísmicas. Nos limitaremos a la combinación $0,3H_x + H_y$ a la que se suma los momentos torsionales B que causan estas fuerzas, tal como indica la figura 5.16.

Tomaremos los valores $A_a = A_v = 0,25$, $F_a = F_v = 1,5$, $I = 1$, $R = 7$. Consideraremos solamente la combinación de fuerzas

$$0,3H_x + H_y$$

y sus correspondientes pares torsionales.

5.11.1. Fuerzas sísmicas

Calcularemos inicialmente el periodo de la estructura, según la ecuación (5.35):

$$Z=15;$$

$$T=0.047 \cdot Z^{0.9}$$

$$T =$$

$$0.5377$$

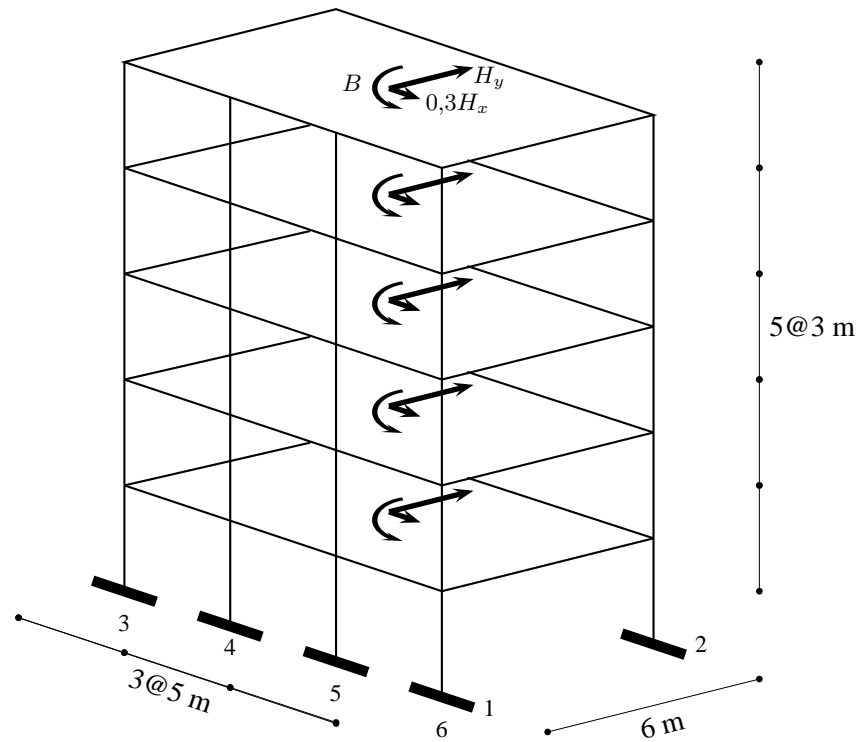


Figura 5.16: Edificio sometido a fuerzas sísmicas.

Por su parte, teniendo en cuenta que la losa pesa 10kN/m^2 , el vector de masa de los pisos es

$$m=10*15*6*\text{ones}(5,1)/9.8;$$

de suerte que la masa total M tiene por valor

$$M=\text{sum}(m)$$

$$M =$$

$$459.1837$$

Para el cálculo de las fuerzas se necesita el vector de alturas:

$$z=[3 \ 6 \ 9 \ 12 \ 15]';$$

así como la aceleración espectral. Como el periodo es superior a $T_C = 0,48$ e inferior a $T_L = 3,6$, tomaremos la segunda de las ecuaciones (5.36):

$$S_a = 1.2 \cdot A_v \cdot F_v \cdot I / (R \cdot T)$$

$$S_a =$$

$$0.1195$$

Además, el factor k vale

$$k = 0.75 + 0.5 \cdot T$$

$$k =$$

$$1.0189$$

De acuerdo con esto, el procedimiento para aplicar las ecuaciones (5.38), es el siguiente:

$$g = 9.8;$$

$$m_z = m \cdot (z \cdot k);$$

$$H_y = m_z \cdot S_a \cdot g \cdot M / \sum(m_z);$$

$$H_x = m_z \cdot S_a \cdot g \cdot M / \sum(m_z)$$

$$H_x =$$

$$35.0472$$

$$71.0176$$

$$107.3447$$

$$143.9056$$

$$180.6412$$

Para el cálculo del par torsional necesitamos las excentricidades en todos los pisos, cuyos valores son

$$e_y = 0.3 \cdot \text{ones}(5, 1);$$

$$e_x = 0.75 \cdot \text{ones}(5, 1);$$

lo que da como resultado

$$B = 0.3 \cdot H_x \cdot e_y + H_y \cdot e_x$$

$$B =$$

$$29.4397$$

$$59.6548$$

$$90.1696$$

$$120.8807$$

$$151.7386$$

Si en cada piso damos el primer número al grado de libertad en sentido x , el segundo al del sentido y y el tercero a la torsión, los vectores de grados correspondientes son

```
g_x=[1 4 7 10 13];
g_y=[2 5 8 11 14];
g_b=[3 6 9 12 15];
```

con lo cual el vector de fuerzas sísmicas se construye de la manera siguiente

```
H=zeros(15,1);
H(g_x)=0.3*H_x;
H(g_y)=H_y;
H(g_b)=B
```

H =

```
10.5142
35.0472
29.4397
21.3053
71.0176
59.6548
32.2034
107.3447
90.1696
43.1717
143.9056
120.8807
54.1924
180.6412
151.7386
```

5.11.2. Matrices de rigidez

Ahora debemos calcular la matrices de rigidez de los pórticos y del edificio por medio de las ecuaciones (5.29) y (5.30). En primer lugar, como hay dos tipos de pórticos, uno en la dirección x , con tres vanos de 5 m, que aparece en los ejes 1 y 2, y otro en la dirección y , con un vano de 6 m, en los ejes 3 a 6, calcularemos dos matrices condensadas C_x y C_y . Con referencia a la figura 5.6, nótese que, para los pórticos orientados en la dirección x el momento de inercia de las columnas vale $0,6 \times 0,5^3/12$, mientras que para los orientados en la dirección y el valor es $0,5 \times 0,6^3/12$. Para las vigas en ambos casos el momento de inercia es $0,4 \times 0,5^3/12$. Con estos datos, las matrices condensadas son

$C_x =$

```
1.0e+005 *
1.8755  -1.1084  0.3325  -0.0650  0.0098
-1.1084  1.5680  -1.0455  0.3128  -0.0470
0.3325  -1.0455  1.5484  -1.0061  0.2347
-0.0650  0.3128  -1.0061  1.3636  -0.6178
0.0098  -0.0470  0.2347  -0.6178  0.4222
```

C_y =

```
1.0e+005 *
  2.6363  -1.5938   0.5345  -0.1155   0.0184
 -1.5938   2.1510  -1.4815   0.4929  -0.0784
  0.5345  -1.4815   2.1093  -1.3982   0.3498
 -0.1155   0.4929  -1.3982   1.7598  -0.7636
  0.0184  -0.0784   0.3498  -0.7636   0.4778
```

Ahora debemos generar las matrices de transformación A_i , de acuerdo con la ecuación (5.27). Como ilustración, las de los pórticos 2 y 3 son

```
A_2=[1 0 -3 zeros(1,12);
     zeros(1,3) 1 0 -3 zeros(1,9);
     zeros(1,6) 1 0 -3 zeros(1,6);
     zeros(1,9) 1 0 -3 zeros(1,3);
     zeros(1,12) 1 0 -3];

A_3=[0 1 -7.5 zeros(1,12);
     zeros(1,3) 0 1 -7.5 zeros(1,9);
     zeros(1,6) 0 1 -7.5 zeros(1,6);
     zeros(1,9) 0 1 -7.5 zeros(1,3);
     zeros(1,12) 0 1 -7.5];
```

De esta manera, la matriz de rigidez del edificio, para los tres grados de libertad por piso mostrados en la figura 5.16, se obtiene por medio de la instrucción siguiente:

```
S=A_1'*C_x*A_1 + A_2'*C_x*A_2 + A_3'*C_y*A_3 + ...
  A_4'*C_y*A_4 + A_5'*C_y*A_5 + A_6'*C_y*A_6;
```

La solución del problema global (ecuación 5.31) $H = SU$ es

U =

```
0.0020
0.0031
0.0001
0.0054
0.0087
0.0002
0.0086
0.0143
0.0003
0.0111
0.0189
0.0004
0.0127
0.0219
0.0005
```

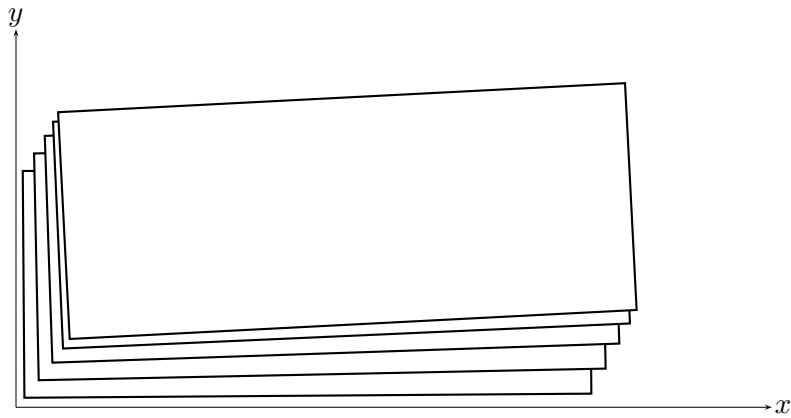


Figura 5.17: Desplazamientos de los pisos.

Los desplazamientos horizontales de los pórticos se obtienen por medio de la ecuación (5.32):

$$D_{p1}=A_1*U;$$

$$D_{p2}=A_2*U;$$

$$D_{p3}=A_3*U;$$

$$D_{p4}=A_4*U;$$

$$D_{p5}=A_5*U;$$

$$D_{p6}=A_6*U;$$

```
[D_p1 D_p2 D_p3 D_p4 D_p5 D_p6]
```

```
ans =
```

| | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0022 | 0.0018 | 0.0025 | 0.0029 | 0.0032 | 0.0036 |
| 0.0060 | 0.0048 | 0.0072 | 0.0082 | 0.0092 | 0.0102 |
| 0.0096 | 0.0076 | 0.0118 | 0.0135 | 0.0152 | 0.0168 |
| 0.0124 | 0.0098 | 0.0155 | 0.0178 | 0.0200 | 0.0222 |
| 0.0142 | 0.0111 | 0.0181 | 0.0206 | 0.0232 | 0.0257 |

```
>>
```

Estos desplazamientos aparecen magnificados con un factor de 100 en la figura 5.17. Finalmente, los giros en los nodos de cada pórtico se obtienen por medio de la ecuación (5.10). Por ejemplo, para el pórtico 4,

$$D_{s4}=-K_{ss_y} \backslash (K_{ps_y}' * D_{p4});$$

```
D_s4 =
```


-0.0014
 -0.0014
 -0.0017
 -0.0017
 -0.0015
 -0.0015
 -0.0011
 -0.0011
 -0.0007
 -0.0007

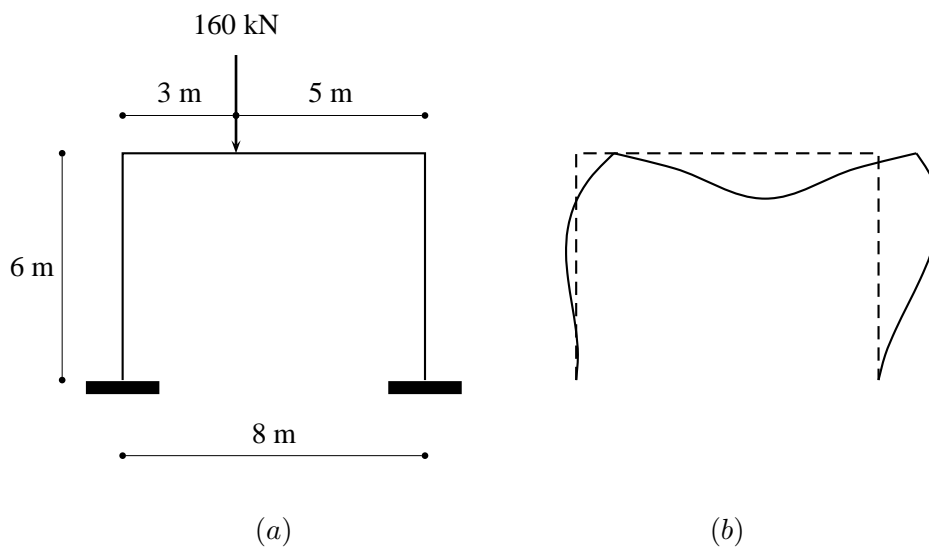


Figura 5.18: Pórtico bajo carga vertical concentrada y asimétrica. (a) Modelo estructural. (b) Elástica.

5.12. Consideración de los movimientos horizontales bajo cargas verticales

Tal como quedó dicho más arriba, la presencia del diafragma hace que los pórticos que, por sus condiciones de asimetría topológica o de carga, tiendan a desplazarse horizontalmente, induzcan desplazamientos horizontales en otros que, simétricos, no los tendrían. Por este motivo, y con el fin de

calcular las fuerzas internas en los elementos debidas a toda clase de acciones, se hace necesario que el análisis de edificios bajo cargas verticales contemple estos movimientos en forma similar a lo hecho para cargas horizontales.

5.12.1. Descomposición de los movimientos

Consideremos de nuevo el pórtico simple bajo carga vertical asimétrica mostrado en la figura 5.18, que fue analizado en el capítulo 4. El análisis puede descomponerse en dos fases, como muestra la figura 5.19:

1. En la primera fase se analiza el pórtico con todas sus cargas verticales y con una restricción adicional en el grado de libertad horizontal de la viga. Llamaremos D_r al vector de desplazamientos así obtenido. Esta restricción genera una reacción de valor h .
2. En la segunda fase analizamos el pórtico bajo la única acción de la fuerza h , con sentido invertido, la cual causa el desplazamiento horizontal. El vector completo resultante de este cálculo es D_h .
3. El vector de desplazamientos totales es $D = D_r + D_h$.

Es evidente que, al considerar conjuntamente las cargas externas, la fuerza h desaparece y que, al sumar los vectores de desplazamiento de ambos casos, se obtiene la elástica mostrada en la figura 5.18. En efecto, con los datos del problema dados en el capítulo 4, y bajo la numeración de nodos dada allí, los vectores de los números de grados de libertad restringidos y móviles para la primera fase del análisis son

$$a=[1 \ 2 \ 3 \ 7 \ 10 \ 11 \ 12]'; \quad b=[4 \ 5 \ 6 \ 8 \ 9]';$$

donde el grado de libertad 7 corresponde al movimiento horizontal de la viga en el nodo 3. Con esta partición se obtiene como vector de desplazamientos el siguiente:

$$D_r =$$

$$1.0e-003 * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0493 \\ -0.1239 \\ -0.6825 \\ 0 \\ -0.0666 \\ 0.4953 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

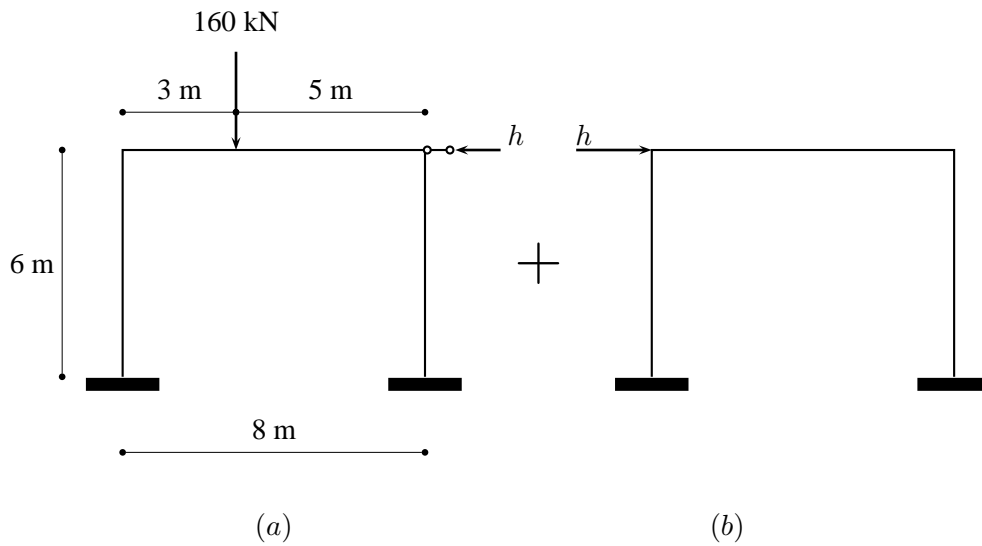


Figura 5.19: Superposición de análisis para considerar movimientos horizontales producidos por cargas verticales. (a) Modelo estructural con restricción lateral. (b) Aplicación de la reacción lateral.

Nótese que en la posición No. 7 se tiene un valor nulo. Las reacciones en esta fase se calculan de la manera usual:

$$P_{ar} = K_{ab} \cdot D_r(b) + R(a);$$

La reacción buscada h se encuentra en la cuarta posición de este vector (puesto que el No. 7 se encuentra en la cuarta posición del vector a). Así,

$$h = P_{ar}(4)$$

$$h =$$

$$-7.9727$$

Ahora bien, los vectores de números de grados de libertad restringidos y móviles para la segunda fase del análisis son

$$a = [1 \ 2 \ 3 \ 10 \ 11 \ 12]'; \quad b = [4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9]';$$

Obsérvese que el grado de libertad No. 7 ha pasado a ser móvil. Este pórtico se analiza solamente con el siguiente vector de cargas:

```
P=[0 0 0 0 0 0 -h 0 0 0 0 0]';
```

Nótese que se ha introducido un signo negativo delante de la carga h con el fin de producir su anulación en la superposición indicada en la figura 5.19. Con estos datos, el vector de desplazamientos dorrespondiente a la segunda fase es

D_h =

```
1.0e-003 *
    0
    0
    0
    0.3947
    0.0029
   -0.0466
    0.4010
   -0.0029
   -0.0478
    0
    0
    0
```

La superposición de las dos fases da como resultado

D=D1+D2

D =

```
1.0e-003 *
    0
    0
    0
    0.4440
   -0.1210
   -0.7292
    0.4010
   -0.0695
    0.4475
    0
    0
    0
```

Este vector coincide con el obtenido en el análisis directo ealizado en el capítulo 4.

5.12.2. Análisis

Con base en lo así expuesto, el procedimiento para realizar el análisis de edificios bajo cargas verticales es en esencia el mismo expuesto anteriormente bajo cargas horizontales (sección 10 de este capítulo), con las diferencias siguientes.

5.12. CONSIDERACIÓN DE LOS MOVIMIENTOS HORIZONTALES BAJO CARGAS VERTICALES 133

- Para cada pórtico se debe calcular el vector de desplazamientos D_r y el vector de fuerzas h resultantes del análisis del pórtico con todas las cargas verticales aplicadas pero restringido ante movimientos laterales.
- El vector de fuerzas horizontales del edificio se obtiene a partir de la ecuación (5.26):

$$\mathbf{H} = \sum_i \mathbf{A}_i^T \mathbf{h}_i \quad (5.44)$$

donde la suma se realiza sobre el número de pórticos.

- Una vez obtenido el vector de desplazamientos del edificio con tres grados de libertad por piso, $\mathbf{U} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{H}$, se obtiene el vector de desplazamientos de cada pórtico por medio del siguiente proceso:

- $D_p = \mathbf{A} \mathbf{U}$
- $D_s = -\mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sp} D_p$
- $D_b = \begin{pmatrix} D_p \\ D_s \end{pmatrix}$
- $D_h = \begin{pmatrix} D_a \\ D_b \end{pmatrix}, D_a = \mathbf{0}$
- $D = D_r + D_h$

Apéndice A

Nociones de MATLAB

Este apéndice está dedicado a una breve exposición de los elementos esenciales del lenguaje MATLAB, con el propósito de facilitar la creación de variables usuales en Análisis de Estructuras y ejecutar algunos de los programas expuestos en este texto, así como las rutinas incorporadas en el lenguaje.

A.1. Características de MATLAB

MATLAB es tanto un lenguaje de programación como un entorno de trabajo. Por esta razón se puede trabajar en él tanto en el modo *consola* (es decir, en el que se hacen cálculos cuyo resultado se obtiene inmediatamente por medio de los comandos adecuados, que se dan en línea) como en el modo *rutina* (esto es, programas cuyos comandos están codificados). Ambos modos pueden ponerse en relación entre sí. Por ejemplo, una rutina (cuya denotación general es un archivo M, * .m) puede pedir datos de la consola, a través del comando `input`; igualmente, una estructura típica de un programa, como es un bucle `for - end` se puede pulsar en la consola directamente sin necesidad de hacer un programa tipo M.

Las características más importantes de MATLAB son su manejo directo de vectores, matrices y cadenas de caracteres como objetos; su posibilidad de trabajar con números reales o complejos indistintamente; la no exigencia de declarar variables y arreglos para reserva de memoria; y la posibilidad de combinar matemática simbólica con numérica, entre otras. Todo esto, aunado a la disponibilidad de múltiples funciones matemáticas ya programadas y librerías especializadas (los famosos *toolboxes*) hacen que los programas escritos en MATLAB sean altamente compactos en comparación con los equivalentes en FORTRAN, C, PASCAL, etc. Esto reporta grandes ventajas para la textos de carácter didáctico, debido a que se facilita el estudio de un programa complejo de ciencias o de ingeniería, al ocupar todos los comandos unas pocas líneas. Esto es especialmente cierto cuando se manejan vectores y matrices como bloques enteros, es decir, cuando no es necesario trabajar con sus elementos individuales. En el caso del análisis de estructuras el manejo de bloques enteros es posible salvo cuando se requiere ensamblar matrices de rigidez, por ejemplo.

Estudiaremos en primer lugar las comandos básicos para creación variables, funciones, vectores y matrices. Luego estudiaremos la creación de archivos M.

A.2. Operaciones fundamentales

Una variable se crea en MATLAB asignándole un valor:

```
x=3
```

```
x =
```

```
3
```

Un punto y coma (;) al final de cada instrucción inhibe la aparición de un resultado:

```
x=3;
```

```
y=2;
```

Las siguientes son las operaciones aritméticas básicas:

```
x+y
```

```
ans =
```

```
5
```

```
x-y
```

```
ans =
```

```
1
```

```
x*y
```

```
ans =
```

```
6
```

```
x/y
```

```
ans =
```

```
1.5000
```

```
x^y
```

```
ans =
```

```
9
```

Las siguientes son algunas funciones de uso corriente:

```
sqrt(3)
```



```
ans =  
    1.7321  
  
cos(pi/4)  
  
ans =  
    0.7071  
  
sin(pi/6)  
  
ans =  
    0.5000  
  
exp(1)  
  
ans =  
    2.7183  
  
log(exp(1))  
  
ans =  
    1  
  
log10(10)  
  
ans =  
    1
```

Las funciones trigonométricas `sin`, `cos`, etc están definidas en radianes. Sus homólogos en grados son `sind`, `cosd`, etc.:

```
cosd(60)  
  
ans =  
    0.5000
```

A.3. Vectores y matrices

1. Creación de un vector con elementos dados:

Un vector fila se crea en la forma

```
a=[1 2 3 4];
```

Si se trata de un vector columna, se puede crear como

```
a=[1; 2; 3; 4];
```

o bien como

```
a=[1 2 3 4]';
```

El símbolo ' denota transposición matricial. La multiplicación de todos los elementos de un vector por un escalar es simple:

```
a=[1 2 3 4]';b=2*a
```

b =

```
2
4
6
8
```

2. Creación de un vector con intervalos regulares.

El comando

```
t=linspace(1,10,5)
```

t =

```
1.0000    3.2500    5.5000    7.7500   10.0000
```

crea un vector fila de 5 elementos regularmente espaciados entre 1 y 10. Esta instrucción se utiliza corrientemente para crear un vector de abscisas en las cuales se ha de evaluar una función determinada.

3. Suma de dos vectores:

```
a=[1 2 3 4]';
```

```
b=[4 3 2 1]';
```

```
c=a+b
```

c =

```
5
5
5
5
```

4. Producto escalar de dos vectores.

Con los datos anteriores, en que tanto el vector a como el b tienen dimensión 4×1 , el producto escalar $d = a \cdot b \equiv a^T b = \sum_{i=1}^4 a(i) \times b(i)$ implica transponer el vector a para que la multiplicación matricial tenga sentido. Por tanto,

```
d=a' *b
```

```
ans =
```

```
20
```

Por el contrario, la instrucción

```
e=a .*b
```

```
e =
```

```
4
6
6
4
```

corresponde al producto de a y b elemento por elemento. Notése que la instrucción

```
sum(e)
```

```
ans =
```

```
20
```

da como resultado el producto escalar de los dos vectores, ya obtenido por otra vía. De manera similar se obtiene la división de dos vectores elemento por elemento:

```
v1=[2 4 6];
```

```
v2=[2 2 2];
```

```
v1 ./v2
```

```
ans =
```

```
1 2 3
```

Finalmente, algunas operaciones importantes sobre vectores son las siguientes: el máximo elemento ($\max(a)$); el mínimo ($\min(a)$), las elementos que sean mayores o iguales que un cierto escalar x ($i=a \geq x$), o iguales a él ($i=a == x$), etc. Por ejemplo,

```
a=[4 9 5 4];i=a==4
```

```
i =
```

```
1     0     0     1
```

5. Creación de una matriz.

Las matrices se crean de manera similar a los vectores:

```
m1=[1 2 3; 6 5 4;3 1 3]
```

```
m1 =
```

```
1     2     3
6     5     4
3     1     3
```

Un elemento de una matriz se extrae de acuerdo a la notación usual en matemáticas:

```
m1(2,3)
```

```
ans =
```

```
4
```

El símbolo `:` se utiliza para denotar todos los elementos de una fila o de una columna. Por tanto, la instrucción `m1(2, :)` entrega la segunda fila de la matriz `m1`, mientras que `m1(:, 3)` hace lo propio con la tercera columna:

```
m1(2, :)
```

```
ans =
```

```
6     5     4
```

```
m1(:, 3)
```

```
ans =
```

```
3
4
3
```

Algunas matrices especiales de uso frecuente son la de ceros, la de unos y la idéntica:

```
zeros(3,3)
```

```
ans =
```

```

0     0     0
0     0     0
0     0     0

```

```
ones(3,3)
```

```
ans =
```

```

1     1     1
1     1     1
1     1     1

```

```
eye(3)
```

```
ans =
```

```

1     0     0
0     1     0
0     0     1

```

6. Direccionamiento indirecto.

Una de las posibilidades de MATLAB de mayor importancia para el análisis matricial de estructuras es el direccionamiento indirecto. Consideremos el vector

```
v=[6 9 8 4 5 3];
```

Supongamos que queremos poner en otro vector w los elementos 2 y 3 de v . Para ello creamos el vector

```
a=[2 3];
```

y escribimos

```
w=v(a);
```

con el resultado esperado

```
w =
```

```

9     8

```

El mismo procedimiento se utiliza para extraer submatrices de una matriz. Por ejemplo, de la matriz

```
m=[1 2 3 4 5; 6 5 4 2 1;3 1 3 8 7; 9 2 6 4 3]
```

```
m =
```

```

     1     2     3     4     5
     6     5     4     2     1
     3     1     3     8     7
     9     2     6     4     3

```

deseamos extraer los elementos 1, 3 y 5 de las filas 2 y 3 y ponerlos en la matrix n. Para ello efectuamos el procedimiento siguiente:

```
a=[2 3]
```

```
a =
```

```

     2     3

```

```
b=[1 3 5]
```

```
b =
```

```

     1     3     5

```

```
n=m(a,b)
```

```
n =
```

```

     6     4     1
     3     3     7

```

7. Suma y producto de dos matrices.

```
m1=[1 2 3; 6 5 4;3 1 3]
```

```
m1 =
```

```

     1     2     3
     6     5     4
     3     1     3

```

```
m2=rand(3,3)
```

```
m2 =
```

```

    0.2190    0.6793    0.5194
    0.0470    0.9347    0.8310
    0.6789    0.3835    0.0346

```

```

m3=m1+m2

m3 =

    1.2190    2.6793    3.5194
    6.0470    5.9347    4.8310
    3.6789    1.3835    3.0346

```

```

m4=m1*m2

m4 =

    2.3496    3.6992    2.2851
    4.2644   10.2833    7.4096
    2.7405    4.1231    2.4929

```

En este ejemplo $m2 = \text{rand}(3, 3)$ es una matriz de números aleatorios con distribución uniforme entre 0 y 1. Es necesario recordar que el producto de dos matrices de dimensiones (m, n) y (p, q) debe respetar la norma $n = p$. De lo contrario el producto no es factible:

```

m6=[2 2; 2 2]

m6 =

     2     2
     2     2

m1*m6 ??? Error using ==> * Inner matrix dimensions must agree.

```

8. Inversa de una matriz.

```

m5=inv(m1)

m5 =

   -0.3929    0.1071    0.2500
    0.2143    0.2143   -0.5000
    0.3214   -0.1786    0.2500

```

9. Creación de una matriz diagonal:

```

m7=diag([3 3 2])

m7 =

     3     0     0
     0     3     0
     0     0     2

```

10. Solución de ecuaciones simultáneas.

El problema usual $Ax = b$, donde A es una matriz de coeficientes de las incógnitas x y b es un vector de términos independientes, se resuelve, o bien de la manera clásica $x = \text{inv}(A) * b$, o bien por medio de la operación

```
x=A\b
```

que calcula la llamada descomposición LU de la matriz A y luego obtiene el vector de incógnitas x . La descomposición LU está definida como la obtención de dos matrices, una triangular inferior L (por *lower*, en inglés) y otra superior U (*upper*), cuyo producto es igual a A . Esta técnica es preferible para resolver grandes sistemas de ecuaciones simultáneas que el método de la matriz inversa.

11. Autovalores y autovectores de una matriz.

Para una matriz simétrica, los autovalores (λ) y los autovectores (ϕ) se obtienen de la manera siguiente:

```
m8=[1 2 3; 2 4 5; 3 5 6]

m8 =

     1     2     3
     2     4     5
     3     5     6

[phi,lambda]=eig(m8)

phi =

     0.5910    -0.7370     0.3280
    -0.7370    -0.3280     0.5910
     0.3280     0.5910     0.7370

lambda =

     0.1709         0         0
         0    -0.5157         0
         0         0    11.3448
```

Si la matriz no es simétrica los autovalores y autovectores son complejos:

```
m9=[1 2 3; 6 4 5; 7 9 6]

m9 =

     1     2     3
     6     4     5
     7     9     6
```



```
[phi,lambda]=eig(m9)

phi =

-0.2610          0.2075 + 0.5245i    0.2075 - 0.5245i
-0.5389          0.3908 - 0.3290i    0.3908 + 0.3290i
-0.8009          -0.6244 - 0.1762i    -0.6244 + 0.1762i

lambda =

14.3366          0          0
0          -1.6683 + 1.0262i    0
0          0          -1.6683 - 1.0262i
```

A.4. Funciones

Las funciones en MATLAB se pueden tratar directamente como vectores o matrices, lo cual implica grandes ahorros de líneas de codificación. Por ejemplo, si un vector de tiempo es

```
t=linspace(0,0.5,5)

t =

0    0.1250    0.2500    0.3750    0.5000
```

y una frecuencia angular ω es igual a 2π ($w=2*\pi$), la función $r = \cos(\omega t)$ es el vector

```
r=cos(w*t)

r =

1.0000    0.7071    0.0000   -0.7071   -1.0000
```

De manera semejante se calculan otras funciones, sin importar si la variable dependiente es un vector o una matriz:

```
m1

m1 =

1    2    3
6    5    4
3    1    3

exp(m1)

ans =
```

```

2.7183    7.3891    20.0855
403.4288  148.4132    54.5982
20.0855    2.7183    20.0855

```

A.5. Bucles y decisiones condicionales

El bucle `for - end` es la estructura de MATLAB adecuada para hacer cálculos vinculados a índices en general. Por ejemplo, el cálculo del factorial de un número (en este caso, 10) se hace de la siguiente forma:

```

nfact=1;
n=10;
for i=1:n;
    nfact=nfact*i;
end;

nfact

nfact =

    3628800

```

La estructura de condicionamiento lógico es `if - elseif - else - end`, que se explica aquí con respecto a la definición de la función de signo:

$$y = \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

```

if x < 0;
    y = -1;
elseif x==0;
    y=0;
else;
    y=1;
end

```

Por ejemplo, si se asigna el valor `x=3` antes de la ejecución de esta secuencia, después de ella el valor de `y` es

```

y

y =

    1

```

Se puede suspender la ejecución de un bucle `for - end` por medio de la instrucción `break`. Por ejemplo, la secuencia de instrucciones

```

nfact=1;
n=10;
for i=1:n;
    if i==5;
        break;
    end;
    nfact=nfact*i;
end;

nfact

nfact =

    24

```

calcula esta fórmula recurrente sólo hasta cuatro.

A.6. Programas

Un programa en MATLAB se constituye como un archivo tipo M (* .m). Su creación se hace en un editor de texto cualquiera en ASCII. La edición puede comenzar directamente con una serie de líneas de código, caso en el cual el programa siempre dará los mismos resultados, o bien comenzando con una instrucción del tipo

```
function [resultados]=nombre(datos)
```

En esta descripción, [resultados] es un grupo de resultados que se espera del programa y que quedan disponibles para el uso por consola, cuyos nombres están separados por comas: [a,b,c], donde a,b,c pueden ser escalares, vectores, matrices o cadenas alfanuméricas. De la misma manera se da al programa el conjunto [datos]. El nombre del programa debe coincidir con el del archivo.

Como ejemplo, el siguiente programa crea un vector f cuyos elementos son los factoriales de sus números ordinales de posición; es decir, $f = [1!, 2!, \dots, n!]$

```

function [f]=fact(n)
%
%-----
% [f]=fact(n)
%-----
%
% Calcula un vector cuyos elementos son los
% factoriales desde 1 hasta n
%
%-----
%
%
nfact=1;
for i=1:n;
    nfact=nfact*i;
    f(i)=nfact;
end;

```

```

end;
%
%
%----- fin

```

El programa se activa con la orden `[f]=fact(n)`:

```

[f]=fact(4)

f =

     1     2     6    24

```

Si escribimos en la consola `help fact` obtenemos

```

-----
[f]=fact(n)
-----

Calcula un vector cuyos elementos son los
factoriales desde 1 hasta n

-----

```

que son las líneas que aparecen entre el encabezado del programa y la primera línea de comandos, comentadas con el signo de porcentaje. En general, el comando `help` da esta información para cualquier programa tipo M escrito, bien por la casa matriz de MATLAB, o bien por un usuario cualquiera.

A.7. Archivos de datos y resultados

Un archivo de datos en ASCII se puede importar al programa por medio de la instrucción `load`:

```
load datos.dat;
```

Por su parte un archivo de cálculos se puede guardar con la instrucción `save`:

```
save resul.res;
```

Las diversas posibilidades de esos dos comandos se pueden consultar por medio de `help`.

Apéndice B

Códigos de los ejemplos

En todos los ejemplos el ensamblaje de las matrices y demás partes del procedimiento se realizan elemento por elemento. Sin embargo, en el ejemplo 3 se ilustra la manera de abreviar este proceso haciendo uso de bucles. Adicionalmente, los ejemplos 2 y 3 incluyen las secuencias de comandos necesarias para dibujar la estructura en sus posiciones original y deformada.

B.1. Ejemplo 1

```
% Cadena de elementos

% Modulo de elasticidad:

E=2e8;

% Areas:

A_1=0.5*0.5;
A_2=0.4*0.4;
A_3=0.3*0.3;

% Matrices de rigidez en coordenadas locales:

k_1=E*A_1*[1 -1; -1 1];
k_2=E*A_2*[1 -1; -1 1];
k_3=E*A_3*[1 -1; -1 1];

% Matriz de rigidez de la estructura:

K=zeros(4,4);
g_1=[1 2];
K_1=zeros(4,4);
K_1(g_1,g_1)=k_1;
K=K+K_1;
g_2=[2 3];
K_2=zeros(4,4);
```

```

K_2(g_2,g_2)=k_2;
K=K+K_2;
g_3=[3 4];
K_3=zeros(4,4);
K_3(g_3,g_3)=k_3;
K=K+K_3;

% Calculo de desplazamientos y reacciones:

a=1; b=[2 3 4]';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P=[0 0 0 -1200]';
P_b=P(b);
D_b=K_bb\P_b;
P_a=K_ab*D_b;

D=zeros(4,1);
D(b)=D_b;

% Tensiones en las barras:

d_1=D(g_1);
p_1=k_1*d_1;
d_2=D(g_2);
p_2=k_2*d_2;
d_3=D(g_3);
p_3=k_3*d_3;

```

B.2. Ejemplo 2

```

% Armadura plana

% Modulo de elasticidad:

E=2e8;

% Areas y longitudes:

A=0.005;
l_1=4;
l_2=sqrt(4^2+3^2);
l_3=3;
l_4=4;
l_5=sqrt(4^2+3^2);
l_6=4;
l_7=3;
l_8=4;

```

```

l_9=sqrt(4^2+3^2);

% Matrices de rigidez en coordenadas locales:

k_1=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_1;
k_2=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_2;
k_3=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_3;
k_4=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_4;
k_5=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_5;
k_6=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_6;
k_7=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_7;
k_8=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_8;
k_9=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_9;

% Matrices de rigidez en coordenadas globales:

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_1= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_1=T_1'*k_1*T_1;

beta=36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_2= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_2=T_2'*k_2*T_2;

beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_3= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_3=T_3'*k_3*T_3;

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_4= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_4=T_4'*k_4*T_4;

beta=-36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_5= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_5=T_5'*k_5*T_5;

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_6= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_6=T_6'*k_6*T_6;

beta=90;

```

```

eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_7= [ eta mu 0      0; -mu  eta 0  0;
      0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_7=T_7'*k_7*T_7;

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_8= [ eta mu 0      0; -mu  eta 0  0;
      0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_8=T_8'*k_8*T_8;

beta=-36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_9= [ eta mu 0      0; -mu  eta 0  0;
      0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_9=T_9'*k_9*T_9;

% Ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura:

K=zeros(12,12);

g_1=[1 2 3 4];
DeltaK_1=zeros(12,12);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[1 2 5 6];
DeltaK_2=zeros(12,12);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

g_3=[3 4 5 6];
DeltaK_3=zeros(12,12);
DeltaK_3(g_3,g_3)=K_3;
K=K+DeltaK_3;

g_4=[3 4 7 8];
DeltaK_4=zeros(12,12);
DeltaK_4(g_4,g_4)=K_4;
K=K+DeltaK_4;

g_5=[5 6 7 8];
DeltaK_5=zeros(12,12);
DeltaK_5(g_5,g_5)=K_5;
K=K+DeltaK_5;

g_6=[5 6 9 10];
DeltaK_6=zeros(12,12);
DeltaK_6(g_6,g_6)=K_6;
K=K+DeltaK_6;

g_7=[7 8 9 10];

```



```

DeltaK_7=zeros(12,12);
DeltaK_7(g_7,g_7)=K_7;
K=K+DeltaK_7;

g_8=[7 8 11 12];
DeltaK_8=zeros(12,12);
DeltaK_8(g_8,g_8)=K_8;
K=K+DeltaK_8;

g_9=[9 10 11 12];
DeltaK_9=zeros(12,12);
DeltaK_9(g_9,g_9)=K_9;
K=K+DeltaK_9;

display(K)

% Calculo de desplazamientos y reacciones:

a=[1 2 11 12]'; b=[3 4 5 6 7 8 9 10]';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P=[0 0 0 0 4 -20 0 0 0 -20 0 0]';
P_b=P(b);
D_b=K_bb\P_b;
P_a=K_ab*D_b;

D=zeros(12,1);
D(b)=D_b;

display(D)

% Tensiones en las barras:

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_1=D(g_1);
sigma_1=E*[-eta -mu eta mu]*D_1/l_1;

beta=36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_2=D(g_2);
sigma_2=E*[-eta -mu eta mu]*D_2/l_2;

beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_3=D(g_3);
sigma_3=E*[-eta -mu eta mu]*D_3/l_3;

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_4=D(g_4);

```

```

sigma_4=E*[-eta -mu eta mu]*D_4/l_4;

beta=-36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_5=D(g_5);
sigma_5=E*[-eta -mu eta mu]*D_5/l_5;

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_6=D(g_6);
sigma_6=E*[-eta -mu eta mu]*D_6/l_6;

beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_7=D(g_7);
sigma_7=E*[-eta -mu eta mu]*D_7/l_7;

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_8=D(g_8);
sigma_8=E*[-eta -mu eta mu]*D_8/l_8;

beta=-36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_9=D(g_9);
sigma_9=E*[-eta -mu eta mu]*D_9/l_9;

% Dibujo de la armadura y su posicion deformada

XY=zeros(6,2);
XY(1,:)=[0 0];
XY(2,:)=[4 0];
XY(3,:)=[4 3];
XY(4,:)=[8 0];
XY(5,:)=[8 3];
XY(6,:)=[12 0];

XYdef=zeros(size(XY));
fac=500;
c=0;
for i=1:6
    c=c+1;
    XYdef(i,1)=XY(i,1)+fac*D(c);
    c=c+1;
    XYdef(i,2)=XY(i,2)+fac*D(c);
end

IJ=zeros(9,2);
IJ(1,:)=[1 2];
IJ(2,:)=[1 3];

```

```

IJ(3,:)= [2 3];
IJ(4,:)= [2 4];
IJ(5,:)= [3 4];
IJ(6,:)= [3 5];
IJ(7,:)= [4 5];
IJ(8,:)= [4 6];
IJ(9,:)= [5 6];

figure
for e=1:9
    Q=[XY(IJ(e,1),1) XY(IJ(e,1),2);...
        XY(IJ(e,2),1) XY(IJ(e,2),2)];
    Qdef=[XYdef(IJ(e,1),1) XYdef(IJ(e,1),2);...
        XYdef(IJ(e,2),1) XYdef(IJ(e,2),2)];
    plot(Q(:,1),Q(:,2),'--b',Qdef(:,1),Qdef(:,2),'-r')
    hold on
end
xlabel('x')
ylabel('y')
axis equal

```

B.3. Ejemplo 3

```

% Armadura espacial

% Modulo de elasticidad:
E=205.8*1e6;

% Area:
A=100/1e6;

% Coordenadas de los nodos:
XYZ=[0 0 821.6; -2500 0 621.6; -1250 -2165 621.6; 1250 -2165 621.6; ...
    2500 0 621.6; 1250 2165 621.6; -1250 2165 621.6; -4330 -2500 0; 0 -5000 0; 4330 -2500 0;...
    4330 2500 0; 0 5000 0; -4330 2500 0]/1e3;

x=XYZ(:,1);
y=XYZ(:,2);
z=XYZ(:,3);

% Topologia:
IJ=[1 2; 1 3; 1 4; 1 5; 1 6; 1 7; 2 3; 3 4; 4 5; 5 6; 6 7; 7 2; ...
    2 8; 8 3; 3 9; 9 4; 4 10; 10 5; 5 11; 11 6; 6 12; 12 7; 7 13; 13 2];

% Dibujo de la estructura:

figure

```

```

for e=1:24
    Q=[XYZ(IJ(e,1),1) XYZ(IJ(e,1),2) XYZ(IJ(e,1),3);...
        XYZ(IJ(e,2),1) XYZ(IJ(e,2),2) XYZ(IJ(e,2),3)];
    plot3(Q(:,1),Q(:,2),Q(:,3),'-b')
    hold on
end
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
axis equal

% Longitudes de las barras

l=zeros(24,1);

for e=1:24
    l(e)=sqrt((x(IJ(e,2))-x(IJ(e,1)))^2 +(y(IJ(e,2))-y(IJ(e,1)))^2+(z(IJ(e,2))-z(IJ(e,1)))^2);
end

% Matriz de rigidez:

K=zeros(39,39);

for e=1:24
    eta=(x(IJ(e,2))-x(IJ(e,1)))/l(e);
    mu=(y(IJ(e,2))-y(IJ(e,1)))/l(e);
    nu=(z(IJ(e,2))-z(IJ(e,1)))/l(e);
    K_e= E*A/l(e)*[eta^2      eta*mu   eta*nu   -eta^2   -eta*mu   -eta*nu;...
        eta*mu   mu^2      mu*nu   -eta*mu   -mu^2     -mu*nu;...
        eta*nu   mu*nu     nu^2    -eta*nu   -mu*nu    -nu^2;...
        -eta^2   -eta*mu   -eta*nu   eta^2    eta*mu    eta*nu;...
        -eta*mu   -mu^2     -mu*nu   eta*mu   mu^2     mu*nu;...
        -eta*nu   -mu*nu    -nu^2    eta*nu   mu*nu    nu^2];
    g_e=[3*IJ(e,1)-2  3*IJ(e,1)-1  3*IJ(e,1)  3*IJ(e,2)-2  3*IJ(e,2)-1  3*IJ(e,2)];
    DeltaK_e=zeros(39,39);
    DeltaK_e(g_e,g_e)=K_e;
    K=K+DeltaK_e;
end

% Calculo de desplazamientos y reacciones:

a=(22:39)'; b=(1:21)';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P=zeros(39,1);
P(3)=-6;
P(6)=-3;
P(9)=-3;
P(12)=-3;
P(15)=-3;
P(18)=-3;

```

```

P(21)=-3;
P_b=P(b);
D_b=K_bb\P_b;
P_a=K_ab*D_b;

D=zeros(39,1);
D(b)=D_b;

display(D)

% Tensiones en las barras:

sigma=zeros(24,1);
for e=1:24
    eta=(x(IJ(e,2))-x(IJ(e,1)))/l(e);
    mu=(y(IJ(e,2))-y(IJ(e,1)))/l(e);
    nu=(z(IJ(e,2))-z(IJ(e,1)))/l(e);
    g_e=[3*IJ(e,1)-2  3*IJ(e,1)-1  3*IJ(e,1)  3*IJ(e,2)-2  3*IJ(e,2)-1  3*IJ(e,2)];
    D_e=D(g_e);
    sigma(e)=E*A*[-eta -mu -nu eta mu nu]*D_e/l(e);
end

% Dibujo de la armadura y su posicion deformada

XYZdef=zeros(size(XYZ));
fac=10;
k=0;
for e=1:13
    k=k+1;
    XYZdef(e,1)=XYZ(e,1)+fac*D(k);
    k=k+1;
    XYZdef(e,2)=XYZ(e,2)+fac*D(k);
    k=k+1;
    XYZdef(e,3)=XYZ(e,3)+fac*D(k);
end

figure
for e=1:24
    Q=[XYZ(IJ(e,1),1) XYZ(IJ(e,1),2) XYZ(IJ(e,1),3);...
        XYZ(IJ(e,2),1) XYZ(IJ(e,2),2) XYZ(IJ(e,2),3)];
    Qdef=[XYZdef(IJ(e,1),1) XYZdef(IJ(e,1),2) XYZdef(IJ(e,1),3);...
        XYZdef(IJ(e,2),1) XYZdef(IJ(e,2),2) XYZdef(IJ(e,2),3)];
    plot3(Q(:,1),Q(:,2),Q(:,3),'b',Qdef(:,1),Qdef(:,2),Qdef(:,3),'-r')
    hold on
end
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
axis equal

```

B.4. Ejemplo 4

```

% Viga de un vano

% Modulo de elasticidad:

E=2e7;

% Inercias y longitudes:

b=0.4;
h=1;
I=b*h^3/12;
l_1=6;
l_2=6;

% Matrices de rigidez en coordenadas locales:

k_1=zeros(4,4);
k_1(1,:)=E*I*[12/l_1^3    6/l_1^2 -12/l_1^3    6/l_1^2];
k_1(2,:)=E*I*[6/l_1^2    4/l_1  -6/l_1^2    2/l_1];
k_1(3,:)=E*I*[-12/l_1^3 -6/l_1^2  12/l_1^3   -6/l_1^2];
k_1(4,:)=E*I*[6/l_1^2    2/l_1  -6/l_1^2    4/l_1];

display(k_1)

k_2=zeros(4,4);
k_2(1,:)=E*I*[12/l_2^3    6/l_2^2 -12/l_2^3    6/l_2^2];
k_2(2,:)=E*I*[6/l_2^2    4/l_2  -6/l_2^2    2/l_2];
k_2(3,:)=E*I*[-12/l_2^3 -6/l_2^2  12/l_2^3   -6/l_2^2];
k_2(4,:)=E*I*[6/l_2^2    2/l_2  -6/l_2^2    4/l_2];

display(k_2)

% Matriz de rigidez de la estructura:

K=zeros(6,6);

g_1=[1 2 3 4];
K_1=k_1;
DeltaK_1=zeros(6,6);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[3 4 5 6];
K_2=k_2;
DeltaK_2=zeros(6,6);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

display(K)

% Calculo de desplazamientos y reacciones:

```

```

a=[1 2 5 6]'; b=[3 4]';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P=[0 0 -100 0 0 0]';
P_b=P(b);
D_b=K_bb\P_b;
P_a=K_ab*D_b;

D=zeros(6,1);
D(b)=D_b;

display(D)

% Cortantes y momentos en los elementos:

D_1=D(g_1);
p_1=k_1*D_1;

D_2=D(g_2);
p_2=k_2*D_2;

```

B.5. Ejemplo 5

```

% Viga de dos vanos

% Modulo de elasticidad:

E=2e7;

% Inercias y longitudes:

I_1=0.1;
I_2=0.1;
l_1=7;
l_2=5;

% Matrices de rigidez en coordenadas locales:

k_1=zeros(4,4);
k_1(1,:)=E*I_1*[12/l_1^3 6/l_1^2 -12/l_1^3 6/l_1^2];
k_1(2,:)=E*I_1*[6/l_1^2 4/l_1 -6/l_1^2 2/l_1];
k_1(3,:)=E*I_1*[-12/l_1^3 -6/l_1^2 12/l_1^3 -6/l_1^2];
k_1(4,:)=E*I_1*[6/l_1^2 2/l_1 -6/l_1^2 4/l_1];

display(k_1)

k_2=zeros(4,4);
k_2(1,:)=E*I_2*[12/l_2^3 6/l_2^2 -12/l_2^3 6/l_2^2];

```

```

k_2(2,:)=E*I_2*[6/l_2^2    4/l_2    -6/l_2^2    2/l_2];
k_2(3,:)=E*I_2*[-12/l_2^3  -6/l_2^2    12/l_2^3   -6/l_2^2];
k_2(4,:)=E*I_2*[6/l_2^2    2/l_2    -6/l_2^2    4/l_2];

display(k_2)

% Matriz de rigidez de la estructura:

K=zeros(6,6);

g_1=[1 2 3 4]';
DeltaK_1=zeros(6,6);
DeltaK_1(g_1,g_1)=k_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[3 4 5 6]';
DeltaK_2=zeros(6,6);
DeltaK_2(g_2,g_2)=k_2;
K=K+DeltaK_2;

display(K)

% Vector de fuerzas de empotramiento:

w=20;

r_1=[w*l_1/2;
     w*l_1^2/12;
     w*l_1/2;
     -w*l_1^2/12];

Q=40; c=3; d=l_2-c;

r_2=[Q*d^2*(3*c+d)/l_2^3;
     Q*c*d^2/l_2^2;
     Q*c^2*(3*d+c)/l_2^3;
     -Q*d*c^2/l_2^2];

R=zeros(6,1);
DeltaR_1=zeros(6,1);
DeltaR_2=zeros(6,1);

DeltaR_1(g_1)=r_1;
R=R+DeltaR_1;

DeltaR_2(g_2)=r_2;
R=R+DeltaR_2;

% Calculo de desplazamientos y reacciones:

P=zeros(6,1);

a=[1 2 3 5 6]'; b=4;

```



```

K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P_b=P(b);
R_b=R(b);
D_b=K_bb\(P_b-R_b);
P_a=K_ab*D_b+R(a);

```

```

D=zeros(6,1);
D(b)=D_b;

```

```

display(D)

```

```

% Cortantes y momentos en los elementos:

```

```

D_1=D(g_1);
p_1=k_1*D_1+r_1;

```

```

D_2=D(g_2);
p_2=k_2*D_2+r_2;

```

```

display(P_a)
display(p_1)
display(p_2)

```

B.6. Ejemplo 6

```

% Portico con carga horizontal

```

```

% Modulo de elasticidad:

```

```

E=2e8;

```

```

% Areas, inercias y longitudes:

```

```

A=0.0252;
I=0.0014;
l_1=6;
l_2=8;
l_3=6;

```

```

% Matrices de rigidez en coordenadas locales:

```

```

k_1=zeros(6,6);
l=l_1;
k_1(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0     -1/l      0      0];
k_1(2,:)=E*I*[ 0     12/l^3     6/l^2     0    -12/l^3     6/l^2];
k_1(3,:)=E*I*[ 0     6/l^2     4/l     0    -6/l^2     2/l];
k_1(4,:)=E*A*[-1/l     0      0     1/l      0      0];
k_1(5,:)=E*I*[ 0    -12/l^3    -6/l^2     0     12/l^3    -6/l^2];

```

```

k_1(6,:)=E*I*[ 0      6/1^2    2/1      0    -6/1^2    4/1];

display(k_1)

k_2=zeros(6,6);
l=l_2;
k_2(1,:)=E*A*[ 1/1      0      0    -1/1      0      0];
k_2(2,:)=E*I*[ 0      12/1^3    6/1^2    0    -12/1^3    6/1^2];
k_2(3,:)=E*I*[ 0      6/1^2    4/1      0    -6/1^2    2/1];
k_2(4,:)=E*A*[-1/1     0      0     1/1      0      0];
k_2(5,:)=E*I*[ 0     -12/1^3   -6/1^2    0     12/1^3   -6/1^2];
k_2(6,:)=E*I*[ 0      6/1^2    2/1      0    -6/1^2    4/1];

display(k_2)

k_3=zeros(6,6);
l=l_3;
k_3(1,:)=E*A*[ 1/1      0      0    -1/1      0      0];
k_3(2,:)=E*I*[ 0      12/1^3    6/1^2    0    -12/1^3    6/1^2];
k_3(3,:)=E*I*[ 0      6/1^2    4/1      0    -6/1^2    2/1];
k_3(4,:)=E*A*[-1/1     0      0     1/1      0      0];
k_3(5,:)=E*I*[ 0     -12/1^3   -6/1^2    0     12/1^3   -6/1^2];
k_3(6,:)=E*I*[ 0      6/1^2    2/1      0    -6/1^2    4/1];

display(k_3)

% Matriz de rigidez de la estructura:

K=zeros(12,12);

g_1=[1 2 3 4 5 6];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_1= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
        0 0 1 0 0 0;...
        0 0 0 eta mu 0;...
        0 0 0 -mu eta 0;...
        0 0 0 0 0 1];
K_1=T_1'*k_1*T_1;
DeltaK_1=zeros(12,12);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[4 5 6 7 8 9];
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_2= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
        0 0 1 0 0 0;...
        0 0 0 eta mu 0;...
        0 0 0 -mu eta 0;...
        0 0 0 0 0 1];

```

```

K_2=T_2'*k_2*T_2;
DeltaK_2=zeros(12,12);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

g_3=[7 8 9 10 11 12];
beta=-90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_3= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
        0 0 1 0 0 0;...
        0 0 0 eta mu 0;...
        0 0 0 -mu eta 0;...
        0 0 0 0 0 1];
K_3=T_3'*k_3*T_3;
DeltaK_3=zeros(12,12);
DeltaK_3(g_3,g_3)=K_3;
K=K+DeltaK_3;

display(K)

% Calculo de desplazamientos y reacciones:

a=[1 2 3 10 11 12]'; b=[4 5 6 7 8 9]';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P=[0 0 0 40 0 0 0 0 0 0 0 0]';
P_b=P(b);
D_b=K_bb\P_b;
P_a=K_ab*D_b;

D=zeros(12,1);
D(b)=D_b;

display(D)

% Axiales, cortantes y momentos en los elementos:

D_1=D(g_1);
p_1=k_1*T_1*D_1;

D_2=D(g_2);
p_2=k_2*T_2*D_2;

D_3=D(g_3);
p_3=k_3*T_3*D_3;

display(p_1)
display(p_2)
display(p_3)

```

B.7. Ejemplo 7

```

% Portico con carga distribuida

% Modulo de elasticidad:

E=2e8;

% Areas, inercias y longitudes:

A=0.0252;
I=0.0014;
l_1=6;
l_2=8;
l_3=6;

% Matrices de rigidez en coordenadas locales:

k_1=zeros(6,6);
l=l_1;
k_1(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_1(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_1(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_1(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_1(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_1(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

display(k_1)

k_2=zeros(6,6);
l=l_2;
k_2(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_2(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_2(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_2(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_2(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_2(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

display(k_2)

k_3=zeros(6,6);
l=l_3;
k_3(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_3(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_3(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_3(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_3(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_3(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

```

```

display(k_3)

% Matriz de rigidez de la estructura:

K=zeros(12,12);

g_1=[1 2 3 4 5 6];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_1= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
      0 0 1 0 0 0;...
      0 0 0 eta mu 0;...
      0 0 0 -mu eta 0;...
      0 0 0 0 0 1];
K_1=T_1'*k_1*T_1;
DeltaK_1=zeros(12,12);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[4 5 6 7 8 9];
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_2= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
      0 0 1 0 0 0;...
      0 0 0 eta mu 0;...
      0 0 0 -mu eta 0;...
      0 0 0 0 0 1];
K_2=T_2'*k_2*T_2;
DeltaK_2=zeros(12,12);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

g_3=[7 8 9 10 11 12];
beta=-90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_3= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
      0 0 1 0 0 0;...
      0 0 0 eta mu 0;...
      0 0 0 -mu eta 0;...
      0 0 0 0 0 1];
K_3=T_3'*k_3*T_3;
DeltaK_3=zeros(12,12);
DeltaK_3(g_3,g_3)=K_3;
K=K+DeltaK_3;

display(K)

% Vector de fuerzas de empotramiento:

w=20;

```

```

r_2=[0;
      w*l_2/2;
      w*l_2^2/12;
      0;
      w*l_2/2;
      -w*l_2^2/12];

R_2=r_2;

display(R_2)

DeltaR_2=zeros(12,1);
DeltaR_2(g_2)=R_2;

R=DeltaR_2;

% Calculo de desplazamientos y reacciones:

a=[1 2 3 10 11 12]'; b=[4 5 6 7 8 9]';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P=zeros(12,1);
P_b=P(b);
R_b=R(b);
D_b=K_bb\ (P_b-R_b);
P_a=K_ab*D_b+R(a);

D=zeros(12,1);
D(b)=D_b;

display(D)

% Axiales, cortantes y momentos en los elementos:

D_1=D(g_1);
p_1=k_1*T_1*D_1;

D_2=D(g_2);
p_2=k_2*T_2*D_2+r_2;

D_3=D(g_3);
p_3=k_3*T_3*D_3;

display(p_1)
display(p_2)
display(p_3)

```

B.8. Ejemplo 8

```

% Portico con carga vertical asimetrica

% Modulo de elasticidad:

E=2e8;

% Areas, inercias y longitudes:

A=0.0252;
I=0.0014;
l_1=6;
l_2=8;
l_3=6;

% Matrices de rigidez en coordenadas locales:

k_1=zeros(6,6);
l=l_1;
k_1(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_1(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_1(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_1(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_1(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_1(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

display(k_1)

k_2=zeros(6,6);
l=l_2;
k_2(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_2(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_2(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_2(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_2(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_2(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

display(k_2)

k_3=zeros(6,6);
l=l_3;
k_3(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_3(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_3(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_3(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_3(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_3(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

display(k_3)

% Matriz de rigidez de la estructura:

```

```

K=zeros(12,12);

g_1=[1 2 3 4 5 6];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_1= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
       0 0 1 0 0 0;...
       0 0 0 eta mu 0;...
       0 0 0 -mu eta 0;...
       0 0 0 0 0 1];
K_1=T_1'*k_1*T_1;
DeltaK_1=zeros(12,12);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[4 5 6 7 8 9];
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_2= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
       0 0 1 0 0 0;...
       0 0 0 eta mu 0;...
       0 0 0 -mu eta 0;...
       0 0 0 0 0 1];
K_2=T_2'*k_2*T_2;
DeltaK_2=zeros(12,12);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

g_3=[7 8 9 10 11 12];
beta=-90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_3= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
       0 0 1 0 0 0;...
       0 0 0 eta mu 0;...
       0 0 0 -mu eta 0;...
       0 0 0 0 0 1];
K_3=T_3'*k_3*T_3;
DeltaK_3=zeros(12,12);
DeltaK_3(g_3,g_3)=K_3;
K=K+DeltaK_3;

display(K)

% Vector de fuerzas de empotramiento:

Q=160;
c=3;
d=5;

r_2=[0;

```



```

    Q*d^2*(3*c+d)/l_2^3;
    Q*c*d^2/l_2^2;
    0;
    Q*c^2*(3*d+c)/l_2^3;
    -Q*d*c^2/l_2^2];

R_2=r_2;

display(R_2)

DeltaR_2=zeros(12,1);
DeltaR_2(g_2)=R_2;

R=DeltaR_2;

% Calculo de desplazamientos y reacciones:

a=[1 2 3 10 11 12]'; b=[4 5 6 7 8 9]';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P=zeros(12,1);
P_b=P(b);
R_b=R(b);
D_b=K_bb\ (P_b-R_b);
P_a=K_ab*D_b+R(a);

D=zeros(12,1);
D(b)=D_b;

display(D)

% Axiales, cortantes y momentos en los elementos:

D_1=D(g_1);
p_1=k_1*T_1*D_1;

D_2=D(g_2);
p_2=k_2*T_2*D_2+r_2;

D_3=D(g_3);
p_3=k_3*T_3*D_3;

display(p_1)
display(p_2)
display(p_3)

```