Violación de CP en oscilaciones de neutrinos en el vacío dentro de algunas extensiones del Modelo Estándar

Julián Steven Gutierrez Saavedra

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogotá, Colombia
2012

Violación de CP en oscilaciones de neutrinos en el vacío dentro de algunas extensiones del modelo estándar

Julian Steven Gutierrez Saavedra

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Física

Director(a):
Ph.D., Carlos Jose Quimbay Herrera

Línea de Investigación:
Física Teórica de Partículas
Grupo de Investigación:
Grupo de Campos y Partículas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogotá, Colombia
2012

Dedicatoria

A Dios, lo tangible de lo intangible, la esencia pura de lo que no podemos ver, la respuesta a todas mis dudas.

A mi hermanito que está en el cielo por ser quien han estado a mi lado en todo momento intercediendo por mi, para poder continuar luchando día tras día pese a los obstáculos presentados en el transcurso de mi vida.

A ti, insuperable, preciosa, bella y amorosa mamá, Luz Mireya Saavedra, por darme tu cariño, paciencia, apoyo, consejos y, por sobretodo, valor para seguir adelante. Que nunca me vayas a faltar!

A ti, único, perseverante, inteligente y fuerte Papá, Gilberto Gutierrez Guerrero le agradezco por sus duros y sabios consejos, partícipe de mis conocimientos y formación profesional, mi ejemplo a seguir como persona, este logro está dedicado especialmente a él,

A mis hermanas, Yenny Patricia Gutierrez y Andrea del Pilar Gutierrez, las cuales han estado a mi lado apoyándome y equilibrando mi vida, brindado no solo su compañía sino un gran amor incondicional, sin ellas no hubiese sido posible que llegara a ser la persona que soy y que espero seguir siendo.

Al más importante de todos, Christian Camilo, me has enseñado que aún en las peores condiciones existe una luz, una esperanza y tu constante esfuerzo por vivir no se compara a mis fuerzas para luchar. Me has hecho ser un hombre de carácter.

A mis Tíos Luz Marina Gutierrez, Pedro Martinez y Rosalba Riaño, sin ellos de seguro este sueño no se hubiera podido haber realizado, y sin duda alguna excelentes personas y muy buenos ejemplos a seguir.

Finalmente a mi más fiel amigo que esta en el cielo que estuvo gran parte de mi estudio desvelándose conmigo, acompañandome y brindarme su grandiosa, incondicional, calurosa y sincera amistad.

Agradecimientos

Al Profesor Carlos Quimbay, por su paciencia, confianza, apoyo y motivación, este titulo se lo debo a él principalmente, una excelente persona, un excelente físico, un gran ser humano, sin duda alguna mi gran ejemplo a seguir como investigador y profesional. Aunque tenga una deuda muy grande con él, que creo no poder pagarle, tengo fé de que podremos seguir trabajando y compartiendo muchas experiencias más en nuestras vidas.

A la Universidad Nacional de Colombia que me dió todo para empezar a cumplir mis metas, orgulloso de pertenecer a esta excelente comunidad académica.

A mis amigos y colegas Cristian Gutierrez, Oswaldo Sosa y Andres Castillo, excelentes compaéros de viaje y de estudio, de los cuales aun tengo mucho que aprender.

A mis mejores amigos de siempre Poncho, Juanito y Julian Molano, la cordura entre tanta locura, los grandes equilibrios en mi vida, para ellos y por ellos.

A mis otros mejores amigos Juan Pablo, Aleja y en especial a ustedes Vanessa, Yenny y Deissy.

Bogota DC, Jueves 8 Noviembre 2012

Por qué vivir si no tienes una razón?,- no estoy loco, Pepper. Es sólo que ya sé qué debo hacer y siento en el corazón que es lo correcto
-Ironman

Resumen

En este trabioajo de tesis se determina cual es el efecto sobre las oscilaciones de neutrinos que tiene la fase compleja de violación de CP presente en la matriz de masa y de mezcla del sector leptónico del modelo con dos dobletes de Higgs tipo III extendido con el modelo de Majorana y del modelo con simetría izquierda-derecha. Para realizar lo anterior, inicialmente se genera vía el mecanismo see-saw la matriz de masa de neutrinos en el sector leptónico tanto del modelo con dos dobletes de Higgs tipo III generalizado, como del modelo con simetría izquierda-derecha, observándose la presencia de una fase compleja de violación de CP en estas matrices. Posteriormente, las matrices de masas obtenidas se reparámetrizan en términos de las masas de los leptones cargados y de los neutrinos, que son funciones de los parámetros del potencial, con lo cual se calcula la matriz de mezcla de los neutrinos y se obtienen expresiones analíticas, explícitas y exactas, para los ángulos de mezcla y las fases de Majorana como función de las masas de los leptones cargados y de los neutrinos. Finalmente, para los dos modelos considerados, se determina cual es el papel que tienen las fases de violación de CP presentes en las matrices de mezcla en las probabilidades de transición que describen las oscilaciones de neutrinos en el vacío.

Palabras clave: Modelo con dos dobletes de Higgs, Modelo con simetría izquierda-derecha, Mecanísmo see-saw, Violación de CP.

Abstract

We determine what is the effect on neutrino oscillations which has the complex phase of CP violation that appears in the mass and mixing matrixes of the leptonic sector for the Two-Higgs-Doublet Model and for the Left-Right Symmetric Model. For this, initially generated by the see-saw mechanism mass matrix of the neutrino in the leptonic sector, for both model, and we observed the presence of a complex phase of CP violation in these matrices. Finally, for the two models considered, determine which is the role that the CP violation phases present in the mass and mixing matrixes of transition probabilities of neutrino in the oscillations in vacuum.

Keywords: Cp Violation, Two Higgs Doublet Model, left right symmetric model

Contenido

1. Introducción

Experimentos sobre neutrinos atmosféricos, neutrinos solares y neutrinos producidos en aceleradores [1, 2, 3, 4] son consistentes con la existencia del fenómeno de oscilación de neutrinos, el cual hace referencia a que los neutrinos cambian de sabor cuando se propagan de la fuente al detector [5]. Estas oscilaciones son posibles, desde el punto de vista teórico, si los neutrinos son considerados como partículas masivas y sus autoestados de masa son una mezcla de sabor leptónico de los tres estados de sabor de los neutrinos. Las evidencias experimentales sobre oscilaciones de neutrinos sugieren que los neutrinos deben tener masas físicas muy pequeñas, por debajo de 1 eV. Cabe destacar que el Modelo Estándar Electrodébil (MEE) no puede explicar las oscilaciones de neutrinos debido a que después de la ruptura espontánea de la simetría electrodébil no aparecen términos de masa para los neutrinos, lo cual se origina en el hecho de que los neutrinos del MEE (ν_e, ν_μ y ν_τ) solamente tienen quiralidad izquierda.

Las oscilaciones de neutrinos $\nu_\alpha - \nu_\beta$ como un fenómeno de interferencia puramente cuántico, que presenta características relativistas, puede considerarse análogo al que ocurre en un sistema cuántico de dos niveles, en el que debido a la existencia de una perturbación (que para el caso de neutrinos está relacionada con la mezcla en los términos de masa) los estados de sabor corresponden a estados no estacionarios, es decir, existe la probabilidad de que los neutrinos cambien de sabor al propagarse de la fuente al detector. Asimismo, las oscilaciones de neutrinos también son consecuencia de la existencia y pequeñez de las masas de los neutrinos. De esta manera, la evolución temporal del sistema describirá la probabilidad de transición entre los distintos estados de sabor.

Desde el punto de vista teórico, el fenómeno de las oscilaciones de neutrinos puede ser posible solamente si existe un mecanismo en el que la masa de los neutrinos pueda generarse de forma satisfactoria. Por lo anterior, resulta necesario implementar un mecanismo que permita explicar la generación de las masas de los neutrinos de quiralidad izquierda y el porqué de la pequeñez de estas masas [6]. Uno de los más atractivos y satisfactorios mecanismos de generación de masa de los neutrinos es el mecanismo de see-saw (MSS), propuesto por Gell-Mann et al. [7], Yanagida [8], Mohapatra y Senjanović [9]. Este mecanismo, que supone la existencia de neutrinos supermasivos (estériles) de quiralidad derecha, mediante una posible violación de la conservación del número leptónico puede generar las pequeñas masas de los neutrinos de quiralidad izquierda. Este mecanismo, en el que los neutrinos de quiralidad derecha son fermiones de Majorana, puede tener tres diferentes realizaciones conduciendo a los tres tipos posible de MSS. Una vez que el MSS ha sido implementado, se genera una matriz de masa y de mezcla en el sector leptónico que da cuenta de la pequeñez de la masa de los neutrinos de quiralidad izquierda y de la masa pesada de los neutrinos de quiralidad derecha. Cabe destacar la existencia de una teoría efectiva, que establece que los neutrinos de quiralidad izquierda deben poseer una masa pequeña, cuya equivalencia con el MSS ha sido comprobada. Esta teoría, descrita por S. Weinberg [10], se basa en el hecho de la supuesta violación del número leptónico a escalas de energía grandes.

Por otra parte, al igual que en el sector de quarks, la matriz de masa y de mezcla en el sector leptónico obtenida después de la implementación del MSS y conocida como matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagata-Sakata (PMNS) [11], posee una fase compleja que origina la violación de la simetría carga-paridad (CP) en el sector leptónico y que puede inducir violación de CP en las oscilaciones de neutrinos [12, 13]. Evidencias experimentales señalan que existe una diferencia entre la probabilidad de conversión $P(\nu_\alpha \to \nu_\beta)$ y la probabilidad $P(\bar{\nu}_\alpha \to \bar{\nu}_\beta)$ [12, 13, 14, 15, 16] para $\alpha \neq \beta$ que no ha sido explicada físicamente. La existencia de esta diferencia permitiría plantear que los neutrinos no son partículas de Majorana sino de Dirac. Otra posibilidad que se podría plantear es que los neutrinos tuvieran masas diferentes a las de los anti-neutrinos, lo cual contradeciría el teorema CPT. Considerando lo anterior, una motivación para el desarrollo del presente trabajo tesis es pensar que la diferencia experimental observada entre las probabilidades de conversión pueda ser una consecuencia de la violación de CP que se podría presentar en las oscilaciones de neutrinos. Así, sería posible explicar esta asimétria en las probabilidades de conversión (las cuales son sensibles a los parámetros de violación CP) a partir de las entradas imaginarias en la matriz de masa y de mezcla.

Teniendo en cuenta que el sector de Higgs del MEE sólamente contiene un doblete escalar $\Phi = (\phi^+, \phi^0)$ con el cual no es posible que los neutrinos adquieran masa mediante el mecanismo de Higgs y también teniendo en cuenta que las oscilaciones de neutrinos implican el requerimiento de que los neutrinos sean masivos, resulta necesario extender el sector de Higgs del MEE mínimal (refiriéndonos en este caso al MEE que contiene un único doblete escalar complejo en el sector de Higgs), para que mediante el MSS sea posible que los neutrinos adquieran una masa muy pequeña [17]. La extensión mínima del MEE que conduce a tener neutrinos de quiralidad izquierda con masa muy pequeña es el modelo de Majorana. En el modelo de Majorana se introduce un lagrangiano de interacción tipo Yukawa que incluye un singlete de fermiones de Majorana por cada sabor de neutrino (MSS tipo I)[5, 18], o también un triplete de fermiones de Majorana por cada sabor de neutrino (MSS tipo III)[19, 20, 21, 22].

Por otra parte, una extensión posible del MEE que incluye dos dobletes escalares es el llamado Modelo con Dos Dobletes de Higgs (M2DH), en el que se introduce un doblete extra de Higgs y tres nuevos acoplamientos de Yukawa en los sectores de quark y de leptones, el cual se caracteriza por la existencia de corrientes neutras que cambian sabor (CNCS) a nivel de árbol. Existen varias clases de M2DH: (i) El M2DH tipo I, en el cual un mismo doblete de Higgs provee simultáneamente las masas a los quarks up y down; el M2DH tipo II, en el que un doblete de Higgs genera las masas de los quarks up y otro doblete de Higgs genera las masas de los quarks down; (iii) ya que los dos tipos de modelos anteriores hacen uso de una simetría discreta para evitar la existencia de procesos con CNCS a nivel árbol [23], se plantea el M2DH tipo III al imponerse que esta simetría discreta no está presente para ambos dobletes [24, 25, 26]. Particularmente el M2DH tipo III se ha usado para estudiar posible física más allá del MEE, en donde es posible que existan procesos con CNCS a nivel árbol [27, 25]. En general, ambos dobletes adquieren un valor esperado en el vacío (VEV), pero se puede absorber uno de ellos rotando el campo de Higgs adecuadamente. En la literatura se ha estudiado el M2DH tipo III en dos casos diferentes. En el primer caso [28], los dos dobletes de Higgs adquieren VEV. En el segundo caso [28], un sólo doblete de Higgs adquiere VEV. En este segundo caso, el parámetro libre $\tan\beta$ se suprime de la teoría de tal forma que el análisis resulta más simple. Justamente en este trabajo de tesis se estudiarán las oscilaciones de neutrinos en el M2DH tipo III extendido con el modelo de Majorana para el segundo caso, es decir cuando se considera que sólamente un doblete de Higgs adquiere un VEV.

Una extensión posible del MEE incluyendo un bidoblete y dos tripletes de escalares es el llamado Modelo con Simetría Izquierda Derecha (MSID) [29, 30]. En el MSID se puede imponer una simetría global de CP sobre la densidad lagrangiana completa del modelo, con el fin de evitar fases complejas explícitas en los acoples de Yukawa y generarlas espontáneamente a través de los valores esperados en el vacío, que surgen del mecanismo de ruptura espontánea de la simetría [30, 31, 32]. Como consecuencia, aparecen dos fases de CP espontáneas α y θ, las cuales pueden ser ubicadas respectivamente en la matriz de CKM en el sector de quarks y en la matriz de $PMNS$ en el sector leptónico. En la literatura se han estudiado dos casos de escogencia de fase: I y II [33]. En el caso I, la única fuente de violación de CP es la fase α, la cual está relacionada con los valores esperados en el vacío del bidoblete escalar [34]. En el caso II, las fuentes de violación de CP son las fases α y θ, las cuales están relacionadas con los valores esperados en el vacío del bidoblete escalar y de los tripletes escalares, respectivamente [34]. Por lo anterior se observa que es posible la existencia de violación CP en el sector de leptones. Precisamente, en este trabajo de tesis también se estudiará las oscilaciones de neutrinos en el MSID en el caso II (MSID-II).

El principal objetivo de este trabajo de tesis es determinar cual es el efecto que tiene la fase compleja de violación de CP, presente en la matriz de masa y de mezcla del sector leptónico, sobre las oscilaciones de neutrinos dentro del contexto del M2DH tipo III (M2DH-III) extendido con el modelo de Majorana y del MSID considerando las dos fases de violación de CP (MSID-II). Para esto, inicialmente, se generan vía el mecanismo see-saw las matrices de masa y mezcla de neutrinos en el sector leptónico para los dos modelos y se determina la presencia de una fase compleja de violación de CP en estas matrices. Posteriormente, se estudia el papel que tienen estas fases de violación de CP, para los dos modelos considerados, en las probabilidades de transición que describen las oscilaciones de neutrinos en el vacío. Como un ejemplo de aplicación de las matrices de masa y mezcla de neutrinos en el sector leptónico obtenidas para los dos modelos, se estima el parámetro de asimetría CP, el cual puede ser interés en problemas como la generación de la asimetría bariónica del Universo vía leptogénesis.

Para el cumplimiento de los objetivos de este trabajo de tesis fue necesario realizar algunos cálculos que hasta donde conocemos no han sido reportados explícitamente en la literatura y que permitieron la obtención de los siguientes resultados: Obtención explícita del lagrangiano de Yukawa para el M2DH-III; implementación del MSS tipo I en el M2DH tipo I; implementación del MSS híbrido (tipo I+ tipo III) el M2DH tipo I; obtención explícita de las matrices de masa para el sector de quarks y bosónico en el MSID teniendo en cuenta las fases de violación CP; obtención de la matriz de masa de neutrinos en el M2DH-III, mediante una extensión del MEE bajo una simetría S3; obtención de la matriz de mezcla de neutrinos en el M2DH-III y en el MSID-II mediante una extension del MEE bajo una simetría S3 y custodia Z_2; obtención del invariante de Jarlskog para amplitudes de probabilidad de transición de neutrinos en el M2DH-III y MSID-II. Por otra parte se reprodujeron cálculos ya reportados en la literatura, que permitieron la obtención de los siguientes resultados: Obtención de las condiciones de minimización del potencial para la construcción de la matriz de masa en el M2DH-III; implementación del MSS tipo III para el M2DH-III mediante una simetría de custodia tipo Z_3; obtención de la matriz de masa y de mezcla en el MSID-II e implementación del MSS tipo I; estudio de las fases de la violación de CP presentes en las matrices de masa del sector de quarks y del sector leptónico en el MSID-II; obtención de de los diferentes lagrangianos de Yukawa para el M2DH-III mediante rotaciones de los campos y las constantes de acoplamiento de Yukawa.

El contenido del presente trabajo de tesis se estructura de la siguiente manera. En el capítulo 2 se estudia el M2DH-III, se obtiene el lagrangiano de Yukawa de este modelo y se estudian las condiciones de minimización del potencial escalar con el fin de obtener las matrices de masa de los sectores leptónico y bosónico de este modelo. En el capítulo 3 se estudia el MSID, se obtiene el lagrangiano de Yukawa de este modelo y se estudian las condiciones de minimización del potencial escalar con el fin de obtener las matrices de masa de los sectores fermiónico y bosónico de este modelo, las cuales son sensibles a las dos fases de violación de CP. En el capítulo 4, inicialmente se estudia el lagrangiano de Yukawa del MEE con el fin de mostrar expl(́i)citamente la ausencia de masa para los neutrinos de este modelo, a continuación se considera la extensión mínima del MEE, denominada Modelo de Majorana, que conduce al término de masa de Dirac-Majorana, posteriormente se implementa el MSS en el Modelo de Majorana con el fin de ilustrar la generación de masas pequeãas para los neutrinos de quiralidad izquierda, luego se implementa el MSS tipo I en el M2DH-III extendido y en el MSID-II, finalmente se considera el MSS tipo III e híbrido (mezcla tipo I y tipo III) en el M2DH-III. En el capítulo 5 se presenta el estudio de las oscilaciones de neutrinos en el marco de tres sabores para los dos modelos considerados, a partir de la amplitud de conversión dependiente del tiempo y de la matriz de mezcla leptónica. En el capítulo 6 se presentan algunas conclusiones y buena cantidad de detalles de los cálculos realizados se presenten en los anexos.

2. Modelo con dos dobletes de Higgs (M2DH)

2.1. Introducción

Los procesos con CNCS a nivel árbol están prohibidos en el MEE [35]. Sin embargo, pueden estar presentes a nivel de un loop como en el caso de $b \to s\gamma$ [36], $K^0 \to \mu^+\mu^-$ [37], $K^0 - \bar{K}^0$ [38] y $t \to c\gamma$ [39]. En general, muchas extensiones del MEE permiten la existencia de procesos con CNCS a nivel árbol. Las CNCS se generan a nivel árbol en el sector de Yukawa, agregando un segundo doblete al MEE [40]. Tales acoplamientos también aparecen en teorías supersimétricas (SUSY) sin R paridad [41]. Existen varios mecanismos para evitar los procesos con CNCS a nivel árbol. Glashow y Weinberg [23] propusieron una simetría discreta en el M2DH, el cual prohíbe los acoplamientos que generan tales decaimientos raros; de aquí en adelante ellos no aparecen a nivel árbol. Otra posibilidad está en considerar el cambio de los campos Higgs, escalar y pseudo-escalar [25] o por cancelación de grandes contribuciones con signo opuesto. Otro mecanismo fue propuesto por Cheng y Sher argumentando que un valor natural para los acoplamientos con cambio de sabor, entre diferentes familias, debería ser del orden del promedio geométrico de sus acoplamientos Yukawa [42].

Tomando esta consideración natural y ya que los acoplamientos de Yukawa en el MEE varían con la masa, es posible que lo mismo ocurra para los acoplamientos con cambio de sabor. En consecuencia, se espera que los procesos con CNCS que involucran la tercera generación sean mayores a los que involucran la primera generación [25][43]. Otra pista que sugiere mezclas entre la segunda y tercera generación en el sector leptónico cargado, son las mezclas entre la segunda y la tercera generación del sector leptónico neutro. Estas fueron predichas a partir de resultados obtenidos en experimentos con neutrinos atmosféricos [45].

El modelo estándar de partículas elementales (MEPE) se basa en el grupo de simetrías gauge $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. El grupo $SU(3)_C$ se utiliza para describir la interacción fuerte entre quarks y gluones, a través del intercambio de gluones (que juegan el papel de bosones intermediarios de la interacción fuerte). La teoría de campo gauge invariante bajo el grupo de simetría $SU(3)_C$ recibe el nombre de Cromodinámica Cuántica (QCD). El grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ describe la interacción electrodébil mediante el intercambio de los bosones intermediarios A^0, Z^0 y $W^\pm$. Mediante la ruptura espontánea de simetría (RES) electrodébil

$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \to U(1)_Q$, se obtiene el grupo $U(1)_Q$ de la electrodinámica cuántica (QED), el cual se utiliza para describir la interacción electromagnética, donde la partícula portadora de la interacción es el fotón (γ). La teoría de campo gauge invariante bajo el grupo de simetría electrodébil $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ y que presenta ruptura espontánea de la simetría electrodébil recibe el nombre de Modelo Estándar Electrodébil (MEE).

Aunque el MEE proporciona una descripción muy buena de los fenómenos observados en los experimentos de física de partículas elementales, todavía es una teoría incompleta. Algunos de los problemas del MEE se relacionan con el ajuste de los $\sim$ 20 parámetros libres que existen en este modelo, con el desconocimiento que se tiene aún sobre algunos aspectos del mecanismo que genera las masas de las partículas elementales y de los bosones electrodébiles y con la imposibilidad de predecir el espectro de masas de los fermiones y las mezclas entre ellos. Para solucionar estos problemas teóricos se ha propuesto la existencia de una partícula de naturaleza escalar, llamada bosón de Higgs, cuya existencia se espera sea confirmada experimentalmente. El campo del bosón de Higgs se supone que interactúa con los otros campos de materia y de radiación, de tal modo que las masas de partículas elementales y de los bosones intermediarios son generadas de manera adecuada. Tanto el origen del bosón de Higgs, su masa y el mecanismo con el cual se dota de masa a las partículas del MEE sigue siendo un tema de interés teórico y experimental en la actualidad.
Dado que no se tiene una información experimental confirmada del sector de Higgs del MEE es posible considerar extensiones más allá del MEE. La extensiones más simple del MEE es el llamado Modelo con Dos Dobletes de Higgs (M2DH), que consiste en adicionar un nuevo doblete escalar al sector de Higgs del MEE teniendo los mismos números cuánticos, el cual contiene un segundo campo físico neutro y cargado [46]. En este capítulo, se estudia el M2DH [47] y las implicaciones de este modelo son revisadas. También se consideran los principales aspectos relacionados con las nuevas fuentes de violación de CP presentes en este modelo y las simetrías de custodia CP y Z_2 son consideradas.

2.2. Motivación

El sector Higgs del MEE es mínimo en el sentido de que solamente existe un único doblete en el sector escalar que que permite generar los términos de masa de los bosones electrodébiles y de los fermiones de forma satisfactoria. Sin embargo, posibilidades más complejas que incluyan extensiones del sector escalar pueden ser consideradas a priori. Las motivaciones para considerar sectores de Higgs extendidos son muy variadas, pero en general se dividen en dos categorías no excluyentes. La primera relacionada con la existencia de simetrías gauge mas grandes que la del MEPE, lo cual implica la existencia de escalas de energía mayores, tales como las escalas de supersimetría o de gran unificación. La segunda motivada por argumentos fenomenológicos, tales como la posibilidad de nuevas fuentes de violación de CP necesarias para poder explicar la generación de la asimtería bariónica maximal del Universo.

El hecho de que hasta el momento no se haya observado experimentalmente una desviación significativa del MEE sugiere que los efectos de la nueva física deben estar en los alrededores de la escala de RES electrodébil, con el fin de que se preserve la estructura del MEE. Esto hace que el M2DH sea uno de los modelos mas populares de la física más allá del MEE.

2.3. Generalidades del M2DH

En el MEE mínimal existen varias restricciones al sector de Higgs, tales como:

1. Los procesos con CNCS están completamente suprimidos, limitando fuertemente la naturaleza de los acoplamientos entre el bosón de Higgs y los quarks en el lagrangiano de Yukawa, con lo cual los valores permitidos para la masa del bosón de Higgs están restringidos.

2. El número de bosones de Goldstone de la teoría debe ser igual a tres, lo cual quiere decir que existe un generador no roto y tres generadores rotos. Si el número de bosones de Goldstone fuera menor, alguno de los bosones electrodébiles Z^o y $W^\pm$ se quedaría sin masa, contradiciendo los experimentos. Por el contrario, si el número de bosones de Golstone fuera mayor entonces el fotón sería dotado de masa y esto implicaría una ligadura muy fuerte para tal masa ($M_\gamma < 3 \times 10^{-33}$ MeV).

Independientemente del modelo que se escoja, en general, es deseable que se cumplan las anteriores restricciones hasta donde sea posible (al menos a nivel árbol), independientemente del valor de los parámetros libres de la teoría. Otros criterios para la elección de extensiones del MEE son la simplicidad: se toman las extensiones mínimales que sean compatibles con las restricciones, por ejemplo, en un modelo con un doblete y un singlete, con un doblete y un triplete o en éste caso con dos dobletes.

Para el caso del M2DH, los dos dobletes de Higgs son denotados como

$$\Phi_k = \left(\begin{array}{c} \phi_k^+ \\ \phi_k^o \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \phi_k^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(h_k^o + v_k + i\eta_k^o \right) \end{array} \right), \tag{2-1}$$

donde $k = 1, 2$, representa los dos dobletes complejos del grupo $SU(2)_L$. En analogía al MEE, con el fin de inducir la RES electrodébil $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \to U(1)_Q$ planteamos el lagrangiano de Higgs del M2DH de la forma

$$\mathcal{L}_\Phi = \left(D_\mu \Phi_1\right)^\dagger \left(D^\mu \Phi_1\right) + \left(D_\mu \Phi_2\right)^\dagger \left(D^\mu \Phi_2\right) - V(\Phi_1, \Phi_2). \tag{2-2}$$

2.3.1. Potencial de Higgs en el M2DH

A diferencia del MEE, el potencial de Higgs no es único y cada potencial lleva a reglas de Feynman distintas. Se define una base de operadores hermíticos invariantes de gauge como

[28]

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \Phi_1^\dagger\Phi_1\\ \hat{B} &= \Phi_2^\dagger\Phi_2\\ \hat{C} &= \frac{1}{2}\left(\Phi_1^\dagger\Phi_2+\Phi_2^\dagger\Phi_1\right)\\ \hat{D} &= -\frac{i}{2}\left(\Phi_1^\dagger\Phi_2-\Phi_2^\dagger\Phi_1\right),\end{aligned} \tag{2-3}$$

y escribimos todas las posibles interacciones bilineales y cuárticas compatibles con invariancia de gauge, con lo cual el potencial de Higgs más general se escribe de la siguiente manera

$$\begin{aligned}V &= -\mu_1^2\hat{A}-\mu_2^2\hat{B}-\mu_3^2\hat{C}-\mu_4^2\hat{D}+\lambda_1\hat{A}^2+\lambda_2\hat{B}^2+\lambda_3\hat{C}^2\\ &+ \lambda_4\hat{D}^2+\lambda_5\hat{A}\hat{B}+\lambda_6\hat{A}\hat{C}+\lambda_7\hat{B}\hat{C}+\lambda_8\hat{A}\hat{D}+\lambda_9\hat{B}\hat{D}+\lambda_{10}\hat{C}\hat{D},\end{aligned} \tag{2-4}$$

donde es posible identificar cuatro nuevos bosones de Higgs. Debido que este potencial contiene catorce parámetros libres, resulta mucho más complicado deducir las consecuencias de este potencial respecto al caso del potencial del MEE que contiene sólamente dos parámetros libres μ y λ. Sin embargo, teniendo en cuenta posibles simetrías existentes en el modelo, es posible reducir el número de parámetros libres presentes en el potencial. Definiendo los VEV para los dos dobletes de Higgs de la siguiente manera

$$\langle\Phi_1\rangle_0=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v_1\end{pmatrix},\quad \langle\Phi_2\rangle_0=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v_2e^{i\alpha}\end{pmatrix}, \tag{2-5}$$

se obtienen las correspondientes condiciones de minimización a partir de (ver anexo A)

$$T_i=\left.\frac{\partial V}{\partial\phi_i}\right|_{\langle\phi_i\rangle}=0, \tag{2-6}$$

donde ϕ_i son las ocho componentes reales de cada doblete de Higgs. Las anteriores condiciones de minimización se expresan a través de tres ecuaciones independientes que relacionan los valores m_1^2, m_2^2 y m_4^2, los otros parámetros del potencial y los dos VEV expresados en términos de los parámetros $\nu_{1,}\nu_2$ y α

$$\begin{aligned}\frac{m_1^2}{\nu^2} &= \lambda_1c_\beta^2+\frac{(\lambda_3+\lambda_5)}{2}s_\beta^2\\ &\quad+\frac{t_\beta}{2c_\theta}\left[\lambda_6c_\beta^2\left(1+\frac{c_{2\theta}}{2}\right)+\frac{\lambda_7}{2}c_\beta^2s_{2\theta}+\frac{\lambda_8}{2}s_\beta^2+\lambda_{10}s_{2\beta}s_\theta-\frac{m_3^2}{v^2}\right],\end{aligned} \tag{2-7}$$

$$\begin{aligned}\frac{m_1^2}{\nu^2} &= \lambda_2s_\beta^2+\frac{(\lambda_3+\lambda_5)}{2}c_\beta^2\\ &\quad+\frac{1}{2t_\beta c_\theta}\left[\lambda_8s_\beta^2\left(1+\frac{c_{2\theta}}{2}\right)+\frac{\lambda_9}{2}s_\beta^2s_{2\theta}+\frac{\lambda_6}{2}c_\beta^2+\lambda_{10}c_{2\beta}s_\theta-\frac{m_3^2}{v^2}\right],\end{aligned} \tag{2-8}$$

$$\begin{aligned}\frac{m_1^2}{\nu^2} &= \frac{1}{2}\left[(\lambda_4-\lambda_3)s_\theta s_{2\beta}+\left(\frac{2m_3^2}{v^2}-\lambda_6s_\beta^2-\lambda_8c_\beta^2\right)t_\theta\right.\\ &\quad\left.\lambda_7c_\beta^2+\lambda_9s_\beta^2+\frac{\lambda_{10}}{2}\frac{c_{2\theta}s_{2\beta}}{c_\theta}\right],\end{aligned} \tag{2-9}$$

siendo $\tan\beta = \nu_2/nu_1$ y donde s_γ, c_γ y t_γ representan de forma abreviada a las funciones $\sin\gamma$, $\cos\gamma$ y $\tan\gamma$, respectivamente.

Ahora, si se asume que el potencial de Higgs es invariante bajo conjugación de carga, el número de parámetros se reduce a diez[1] con lo cual

$$V = -\mu_1^2\hat{A} - \mu_2^2\hat{B} - \mu_3^2\hat{C} + \lambda_1\hat{A}^2 + \lambda_2\hat{B}^2 + \lambda_3\hat{C}^2 + \lambda_4\hat{D}^2 + \lambda_5\hat{A}\hat{B} + \lambda_6\hat{A}\hat{C} + \lambda_7\hat{B}\hat{C}, \quad (2\text{-}10)$$

Existen otros criterios que permiten analizar el resto de los parámetros libres del modelo, con λ_5 no nulo y real, puede aparecer violación de CP de valores no nulos de uno o más de los parámetros μ_3^2, λ_6 y λ_7. Si estos tres son reales, la violación de CP puede ocurrir espontáneamente [48] cuando $\lambda > 0$, debido a la fase relativa entre los valores esperados en el vácio. Si uno de los parámetros μ_3^2, λ_6 o λ_7, es complejo, hay violación explícita de CP en el lagrangiano. Si queremos evitar la violación espontánea de CP, hay dos maneras de imponer que el mínimo del potencial sea invariante CP [50]. La primera de ellas es exigir invariancia bajo una simetría Z_2 donde $\Phi_1 \to \Phi_1$ y $\Phi_2 \to -\Phi_2$, de tal forma que el potencial resultante es

$$V_A' = -\mu_1^2\hat{A} - \mu_2^2\hat{B} + \lambda_1\hat{A}^2 + \lambda_2\hat{B}^2 + \lambda_3\hat{C}^2 + \lambda_4\hat{D}^2 + \lambda_5\hat{A}\hat{B}, \quad (2\text{-}11)$$

Si permitimos un término de rompimiento suave, ocurre violación de CP [49]

$$V_A = V_A' - \mu_3^2\hat{C}. \quad (2\text{-}12)$$

El otro potencial sin violación espontánea de CP, resulta de imponer la simetría global $\Phi_2 \to e^{i\alpha}\Phi_2$

$$V_B' = -\mu_1^2\hat{A} - \mu_2^2\hat{B} + \lambda_1\hat{A}^2 + \lambda_2\hat{B}^2 + \lambda_3\left(\hat{C}^2 + \hat{D}^2\right) + \lambda_5\hat{A}\hat{B}. \quad (2\text{-}13)$$

Adicional a lo anterior es usual permitir un término de rompimiento suave en este lagrangiano

$$V_B = V_B' - \mu_3^2\hat{C}, \quad (2\text{-}14)$$

lo que implica que ninguno de los dos potenciales V_A' ni V_B' presentan violación espontánea de CP. Ambos potenciales contienen siete parámetros libres, pero conducen diferente fenomenología.

El potencial de Higgs más general que sea renormalizable e invariante ante $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ y que además obedezca la simetría discreta $\Phi_1 \to -\Phi_1$, $\Phi_2 \to \Phi_2$, con el fin de que los procesos

[1] La invariancia bajo conjugación de carga es equivalente a invariancia CP ya que todos los campos son escalares.

con CNCS estén bastante suprimidos, está dado por [51]

$$\begin{aligned} V(\Phi_1,\Phi_2) &= \lambda_1\left(\Phi_1^\dagger\Phi_1 - v_1^2\right)^2 + \lambda_2\left(\Phi_2^\dagger\Phi_2 - v_2^2\right)^2 \\ &+\lambda_3\left[\left(\Phi_1^\dagger\Phi_1 - v_1^2\right) + \left(\Phi_2^\dagger\Phi_2 - v_2^2\right)\right]^2 \\ &+\lambda_4\left[\left(\Phi_1^\dagger\Phi_1\right)\left(\Phi_2^\dagger\Phi_2\right) + \left(\Phi_1^\dagger\Phi_2\right)\left(\Phi_2^\dagger\Phi_1\right)\right] \\ &+\lambda_5\left[Re\left(\Phi_1^\dagger\Phi_2\right) - v_1 v_2\cos\alpha\right]^2 \\ &+\lambda_6\left[Im\left(\Phi_1^\dagger\Phi_2\right) - v_1 v_2\sin\alpha\right]^2, \end{aligned} \tag{2-15}$$

donde los λ_i son todos parámetros reales (por hermiticidad). El potencial anterior garantiza el patrón correcto de RES electrodébil sobre un amplio rango de parámetros, es decir si todas las λ_i son no negativas entonces el mínimo del potencial es

$$\langle\Phi_1\rangle_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad \langle\Phi_2\rangle_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v_2 e^{i\alpha} \end{pmatrix}, \tag{2-16}$$

el cual rompe la simetría según el esquema $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \to U(1)_Q$, como se desea. De hecho, el rango permitido de las λ_i, que conduce a este mínimo y que es un poco grande, corresponde a la región del espacio de los parámetros que conducen a masas al cuadrado positivas para los bosones de Higgs físicos, donde se cumple que $V(0,0) > 0$. Si $\sin\zeta \neq 0$ entonces hay violación CP en el sector de Higgs. Se puede observar, sin embargo, que si $\lambda_5 = \lambda_6$ entonces los dos últimos términos de la ecuación (2-15) pueden combinarse en un término proporcional a $\left|\Phi_1^\dagger\Phi_2 - v_1 v_2 e^{i\alpha}\right|^2$ y la fase α puede ser eliminada por medio de la redefinición de uno de los campos, sin afectar otros términos en el potencial. Ya que queremos originar las fases de violación CP espontáneamente, entonces se tomara $\alpha = 0$.

2.4. Sector cinético en el M2DH

El lagrangiano del sector cinético describe las interacciones de los bosones de gauge entre sí y las interacciones entre los bosones gauge y los bosones de Higgs. Este lagrangiano esta dado por

$$\mathcal{L}_{cin} = \left(D_\mu\Phi_1\right)^\dagger\left(D^\mu\Phi_1\right) + \left(D_\mu\Phi_2\right)^\dagger\left(D^\mu\Phi_2\right) \tag{2-17}$$

A diferencia del potencial, el lagrangiano del sector cinético es único. Es importante mencionar que no todas las interacciones entre bosones de Higgs y bosones vectoriales son posibles en este modelo, como se puede ver en la expansión del lagrangiano del sector cinético dada por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{cin} = \quad & i\frac{g}{c_W}\left(\frac{1}{2}-s_w^2\right)Z_\mu(G^+\partial_\mu G^- + H^+\partial_\mu H^-) + ieA_\mu(G^+\partial_\mu G^- + H^+\partial_\mu H^-) \\
& -i\frac{g}{2}W^{\mu-}\left[\cos(\beta-\alpha)\left(H^0\partial_\mu G^+ - G^+\partial_\mu H^0 + h^0\partial_\mu H^+ - H^+\partial_\mu h^0\right)\right] \\
& +\sin(\beta-\alpha)\left(h^0\partial_\mu G^+ - G^+\partial_\mu h^0 + H^0\partial_\mu H^+ - H^+\partial_\mu H^0\right) \\
& -\frac{g}{2}W^{\mu-}\left(G^0\partial_\mu G^+ - G^+\partial_\mu G^0 + A^0\partial_\mu H^+ - H^+\partial_\mu A^0\right) \\
& +e\frac{g}{2}A_\mu W^{\mu+}\left[(v_1\cos\beta + v_2\sin\beta)G^- + (v_2\cos\beta + v_1\sin\beta)H^-\right] \\
& -\frac{g^2 s_W^2}{2c_W}Z_\mu W^{\mu+}\left[(v_1\cos\beta + v_2\sin\beta)G^- + (v_2\cos\beta + v_1\sin\beta)H^-\right] \\
& +\frac{ge}{2}A_\mu W^{\mu+}\left[\cos(\beta-\alpha)\left(G^-H^0 + H^-h^0\right) + \sin(\beta-\alpha)\left(G^-h^0 - H^-H^0\right)\right] \\
& +\frac{ige}{2}A_\mu W^{\mu+}\left(G^-G^0 + H^-A^0\right) - \frac{ig^2 s_W^2}{2c_W}Z_\mu W^{\mu+}\left(G^-G^0 + H^-A^0\right) \\
& -\frac{g^2 s_W^2}{2c_W}Z_\mu W^{\mu+}\left[\cos(\beta-\alpha)\left(G^-H^0 + H^-h^0\right) + \sin(\beta-\alpha)\left(G^-h^0 - H^-H^0\right)\right] \\
& +i\frac{g}{2}W^{\mu+}\left[(v_1\cos\beta + v_2\sin\beta)\partial_\mu G^- + (v_2\cos\beta - v_1\sin\beta)\partial_\mu H^-\right] + h.c \\
& +\partial_\mu G^-\partial^\mu G^+ + \partial_\mu H^-\partial^\mu H^+ + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu H^0\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu h^0\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu G^0\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A^0\right)^2 \\
& +\frac{g^2}{4}\left(v_1^2+v_2^2\right)W_\mu^+W^{\mu-} + \frac{g^2}{8c_W^2}\left(v_1^2+v_2^2\right)Z_\mu^2 \\
& -\frac{g}{2c_W}Z_\mu\left[\cos(\beta-\alpha)\left(H^0\partial_\mu G^0 - G^0\partial_\mu H^0 + h^0\partial_\mu A^0 - A^0\partial_\mu h^0\right)\right. \\
& \left.\sin(\beta-\alpha)\left(h^0\partial_\mu G^0 - G^0\partial_\mu h^0 + H^0\partial_\mu A^0 + A^0\partial_\mu H^0\right)\right] \\
& +\frac{g^2}{4c_W^2}Z_\mu Z_\mu\left[(v_1\cos\alpha + v_2\sin\alpha)H^0 + (v_2\cos\alpha - v_1\sin\alpha)h^0\right] \\
& +\frac{g^2}{2}W_\mu^+W^{\mu+}\left[(v_1\cos\alpha + v_2\sin\alpha)H^0 + (v_2\cos\alpha - v_1\sin\alpha)h^0\right] \\
& +e^2A_\mu A^\mu\left(G^+G^- + H^+H^-\right) + \frac{2eg}{c_W}\left(\frac{1}{2}-s_W^2\right)A_\mu Z^\mu\left(G^+G^- + H^+H^-\right) \\
& +\frac{g^2}{2}W_\mu^+W^{\mu-}\left(G^+G^- + H^+H^-\right) + \frac{g^2}{4}W_\mu^+W^{\mu-}\left(H^{02} + h^{02} + G^{02} + A^{02}\right) \\
& -\frac{g}{2c_W}\partial_\mu Z^\mu\left[(v_1\cos\beta + v_2\sin\beta)G^0 + (v_2\cos\beta - v_1\sin\beta)A^0\right] \\
& +\frac{g^2}{c_W^2}\left(\frac{1}{2}-s_W^2\right)^2 Z_\mu Z^\mu\left(G^+G^- + H^+H^-\right) + \frac{g^2}{8c_W^2}Z_\mu^2\left(H^{02} + h^{02}\right) \\
& +\frac{g^2}{8c_W^2}Z_\mu^2\left(G^{02} + A^{02}\right).
\end{aligned}
$$

Por ejemplo, las interacciones $A^0W^+W^-$ y $A^0Z^0Z^0$ no se puede dar en este caso. Para entender un poco el origen de estas interacciones faltantes, recordemos que en el MEE las simetrías discretas C y P se conservan separadamente en ausencia de fermiones. Dependiendo de la manera como se dota de masa a las partículas, existen tres tipos de M2DH: En el modelo tipo I, únicamente un doblete de Higgs dota de masa al sector up y down, simultáneamente; en el modelo tipo II un doblete dota de masa a los quarks up y el otro a los quarks down; en el tipo III ambos dobletes se acoplan a los quarks up y down simultáneamente, dotando de masa a las partículas.

2.5. Lagrangiano de Yukawa del M2DH

El lagrangiano de Yukawa del M2DH tiene la forma

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y &= \overline{L^0_{Li}}\eta^E_{ij}\Phi_1 E^0_{Rj} + \overline{Q^0_{Li}}\eta^U_{ij}\widetilde{\Phi}_1 U^0_{Rj} + \overline{Q^0_{Li}}\eta^D_{ij}\Phi_1 D^0_{Rj} \\ &\quad + \overline{L^0_{Li}}\xi^E_{ij}\Phi_2 E^0_{Rj} + \overline{Q^0_{Li}}\xi^U_{ij}\widetilde{\Phi}_2 U^0_{Rj} + \overline{Q^0_{Li}}\xi^D_{ij}\Phi_2 D^0_{Rj} + h.c., \end{aligned} \tag{2-18}$$

donde Φ_k son los dos dobletes de Higgs. A cada doblete se le asocian tres matrices complejas adimensionales 3×3 no-diagonales $\eta^E_{ij}, \eta^U_{ij}, \eta^D_{ij}$ y $\xi^E_{ij}, \xi^U_{ij}, \eta^D_{ij}$, las cuales corresponden a las constantes de acoplamiento de Yukawa entre el campo fermiónico y los dos campos de Higgs. El superíndice ^{0} indica que los campos fermiónicos no son, todavía, auto estados de masa y el subrayado que se han hecho rotar las constantes de Yukawa y los dobletes de Higgs.

Los fermiones se representan mediante espinores de Dirac, de tal manera que cualquier espinor Ψ puede ser descompuesto como: $\Psi = \Psi_L + \Psi_R$, donde $\Psi_L = P_L\Psi$ y $\Psi_R = P_R\Psi$ definen las componentes quirales izquierda y derecha de Ψ, respectivamente. Estas componentes se han definido mediante los proyectores de quiralidad $P_L = (1-\gamma^5)/2$ y $P_R = (1+\gamma^5)/2$. Ya que experimentalmente se ha evidenciado la existencia de tres generaciones en el MEE, sin que este número este fijado a algún principio de simetría, tenemos que los leptones neutros y cargados son $\nu_i \equiv (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$ y $e_i \equiv (e, \mu, \tau)$; los quarks tipo up y down son $u_i \equiv (u, c, t)$ y $d_i \equiv (d, s, b)$, donde $i = 1, 2, 3$ es el índice de generación. La quiralidad izquierda de los leptones se representa por medio de un doblete $L_{Li} = \begin{pmatrix} \nu_i \\ e_i \end{pmatrix}_L$ y la quiralidad derecha por medio de un singlete $E_{Ri} = e_{iR}$. Debido a que en el MEE la masa de los neutrinos es igual a cero, entonces no existen componentes de quiralidad derecha para ellos. Mas adelante se implementará el MSS para considerar términos de mano derecha para los neutrinos.

En forma análoga, para los quarks la quiralidad izquierda se representa por medio de un doblete $Q_{Li} = \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L$ y la quiralidad derecha por medio de dos singletes $U_{Ri} = u_{iR}$ y $D_{Ri} = d_{iR}$, donde el subíndice i, que toma valores $i = 1, 2, 3..., n_g$, es el índice de la generación. Po ejemplo, para el MEE se tiene que $n_g = 3$ y el superíndice 0 indica que los campos no son, todavía, auto estados de masa sino estados de sabor.

En nuestro caso consideramos dos dobletes de Higgs denotados como

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_1^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(h_1^o + v_1 + i\eta_1^o\right) \end{pmatrix}, \tag{2-19}$$

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ \phi_2^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(h_2^o + v_2 + i\eta_2^o\right) \end{pmatrix}, \tag{2-20}$$

donde

$$\widetilde{\Phi}_1 = \begin{pmatrix} \phi_1^0 \\ -\phi_1^- \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\Phi}_2 = \begin{pmatrix} \phi_2^0 \\ -\phi_2^- \end{pmatrix}. \tag{2-21}$$

En el M2DH-III, el VEV para cada uno de los dos dobletes se toma como

$$\langle\Phi_1\rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \langle\Phi_2\rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 e^{i\theta}/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \tag{2-22}$$

y debido a que no estamos interesados en procesos de violación CP explicita, sino espontánea, entonces se toma la fase compleja de v_2 igual a cero. Tenemos las siguientes mezclas obtenidas de la construcción del potencial

$$\begin{pmatrix} G_W^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^\pm \\ \phi_2^\pm \end{pmatrix}, \tag{2-23}$$

$$\begin{pmatrix} G_z^o \\ A^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \tag{2-24}$$

$$\begin{pmatrix} H^o \\ h^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}. \tag{2-25}$$

Las rotaciones inversas de (2-23), (2-24) y (2-25) son

$$\begin{pmatrix} \phi_1^\pm \\ \phi_2^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_w^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_z^o \\ A^o \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H^o \\ h^o \end{pmatrix},$$

donde α y β son ángulos de mezcla, $G_{z(w)}$ son los bosones de Goldstone neutros y cargados para $Z(W)$, respectivamente, A^0 es el bosón de Higgs neutro impar-CP y $H^\pm$ son los bosones de Higgs físicos cargados. Realizando los productos

$$\begin{aligned}
\phi_1^{\pm} &= G_w^{\pm}\cos\beta - H^{\pm}\sin\beta, && \text{(2-26)}\\
\phi_2^{\pm} &= G_w^{\pm}\sin\beta + H^{\pm}\cos\beta, && \text{(2-27)}\\
\eta_1 &= G_Z^{0}\cos\beta - A^{0}\sin\beta, && \text{(2-28)}\\
\eta_2 &= G_Z^{0}\cos\beta + A^{0}\cos\beta, && \text{(2-29)}\\
h_1 &= H^{0}\cos\alpha - h^{0}\sin\alpha, && \text{(2-30)}\\
h_2 &= H^{0}\cos\alpha + h^{0}\cos\alpha, && \text{(2-31)}
\end{aligned}$$

y puesto que

$$\begin{aligned}
\phi_1^{o} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(h_1^{o} + v_1 + i\eta_1^{o}\right), && \text{(2-32)}\\
\phi_2^{o} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(h_2^{o} + v_2 + i\eta_2^{o}\right), && \text{(2-33)}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\phi_1^{0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[H^{0}\cos\alpha - h^{O}\sin\alpha + v_1 + iG_z^{o}\cos\beta - iA^{0}\sin\beta\right], && \text{(2-34)}\\
\phi_2^{0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[H^{0}\sin\alpha + h^{0}\cos\alpha + v_2 + iG_z^{0}\sin\beta + iA^{0}\cos\beta\right]. && \text{(2-35)}
\end{aligned}$$

Sustituyendo los términos correspondientes en el lagrangiano (2-18), obtenemos

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y &= \left(\overline{\nu_{iL}^{0}}\ \overline{e_{iL}^{0}}\right)\eta_{ij}^{E}\begin{pmatrix}\phi_1^{+}\\ \phi_1^{o}\end{pmatrix}e_{jR}^{0} + \left(\overline{\nu_{iL}^{0}}\ \overline{e_{iL}^{0}}\right)\xi_{ij}^{E}\begin{pmatrix}\phi_2^{+}\\ \phi_2^{o}\end{pmatrix}e_{jR}^{0}\\
&\quad + \left(\overline{u_{iL}^{0}}\ \overline{d_{iL}^{0}}\right)\eta_{ij}^{U}\begin{pmatrix}\phi_1^{0}\\ -\phi_1^{-}\end{pmatrix}u_{jR}^{0} + \left(\overline{u_{iL}^{0}}\ \overline{d_{iL}^{0}}\right)\xi_{ij}^{U}\begin{pmatrix}\phi_2^{0}\\ -\phi_2^{-}\end{pmatrix}u_{jR}^{0}\\
&\quad + \left(\overline{u_{iL}^{0}}\ \overline{d_{iL}^{0}}\right)\eta_{ij}^{D}\begin{pmatrix}\phi_1^{+}\\ \phi_1^{o}\end{pmatrix}d_{jR}^{0} + \left(\overline{u_{iL}^{0}}\ \overline{d_{iL}^{0}}\right)\xi_{ij}^{D}\begin{pmatrix}\phi_2^{+}\\ \phi_2^{o}\end{pmatrix}d_{jR}^{0} + h.c.
\end{aligned}$$

Realizando algunos productos, definiendo unas nuevas matrices y convirtiendo los campos del lagrangiano de Yukawa en estados propios de masa con ayuda de transformaciones unitarias que diagonalizan la matriz de masa, obtenemos (ver anexo B)

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y &= \frac{g}{\sqrt{2}M_W}\left(\overline{N_L}M_E^{diag}P_RE-\overline{U_R}M_U^{diag}VP_LD+\overline{U_L}VM_D^{diag}P_RD\right)G_w^+ \\
&+ \frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_W}\left(\overline{N_L}M_E^{diag}P_RE-\overline{U_R}M_U^{diag}VP_LD+\overline{U_L}VM_D^{diag}P_RD\right)H^+ \\
&- \frac{1}{\sin\beta}\left(\overline{N_L}\eta_EP_REH^+-\overline{U_R}\eta_UVP_LD+\overline{U_L}V\eta_DP_RD\right)H^++h.c \\
&+ +\overline{E_L}M_E^{diag}E_R+\overline{U_L}M_U^{diag}U_R+\overline{D_L}M_D^{diag}D_R \\
&+ +\frac{ig}{2M_W}\left(\overline{E}M_E^{diag}\gamma^5E-\overline{U}M_U^{diag}\gamma^5U+\overline{D}M_D^{diag}\gamma^5D\right)G_z^0 \\
&+ \frac{ig\cot\beta}{2M_W}\left(\overline{E}M_E^{diag}\gamma^5E-\overline{U}M_U^{diag}\gamma^5U+\overline{D}M_D^{diag}\gamma^5D\right)A^0 \\
&- \frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{E}\eta_E^{diag}\gamma^5E-\overline{U}\eta_U^{diag}\gamma^5U+\overline{D}\eta_D^{diag}\gamma^5D\right)A^0 \\
&+ \frac{g}{2M_W\sin\beta}\left(\overline{E}M_E^{diag}E+\overline{U}M_U^{diag}U+\overline{D}M_D^{diag}D\right)\left(H^0\sin\alpha+h^0\cos\alpha\right) \\
&- \frac{g}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{E}\eta_EE-\overline{U}\eta_UU+\overline{D}\eta_DD\right)\left[H^0\sin(\alpha-\beta)+h^0\cos(\alpha-\beta)\right],
\end{aligned}$$

Reescribiendo el lagrangiano en términos de los quarks tipo up y down, de los leptones y de los parámetros α y β, tenemos

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^U(\alpha,\beta) &= -\frac{g}{\sqrt{2}M_w}\overline{U}M_U^{diag}VP_LDG_w^+ \\
&-\frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_w}\overline{U}M_U^{diag}VP_LDH^++\frac{1}{\sin\beta}\overline{U}\xi_1^UVP_LDH^++h.c. \\
&+\overline{U}M_U^{diag}U-i\frac{g}{2M_w}\overline{U}\gamma^5M_U^{diag}UG_z^o \\
&-i\frac{g\cot\beta}{2M_w}\overline{U}\gamma^5M_U^{diag}UA^o+i\frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\overline{U}\gamma^5\xi_1^UUA^o \\
&+\frac{g}{2M_w\sin\beta}\overline{U}M_U^{diag}U\left[H^o\sin\alpha+h^o\cos\alpha\right] \\
&-\frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\overline{U}\xi_1^UU\left[H^o\sin(\alpha-\beta)+h^o\cos(\alpha-\beta)\right],
\end{aligned} \tag{2-36}$$

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^E(\alpha,\beta) &= \frac{g}{\sqrt{2}M_w}\overline{N}M_E^{diag}P_R E G_w^+ \\
&+\frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_w}\overline{N}M_E^{diag}P_R E H^+ - \frac{1}{\sin\beta}\overline{N}\xi_1^E P_R E H^+ + h.c. \\
&+\overline{E}M_E^{diag}E + i\frac{g}{2M_w}\overline{E}M_E^{diag}\gamma^5 E G_z^o \\
&+i\frac{g\cot\beta}{2M_w}\overline{E}M_E^{diag}\gamma^5 E A^o - i\frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\overline{E}\xi_1^E\gamma^5 E A^o \\
&+\frac{g}{2M_w\sin\beta}\overline{E}M_E^{diag}E\left[H^o\sin\alpha + h^o\cos\alpha\right] \\
&-\frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\overline{E}\xi^E E\left[H^o\sin(\alpha-\beta) + h^o\cos(\alpha-\beta)\right],
\end{aligned} \tag{2-37}$$

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^D(\alpha,\beta) &= \frac{g}{\sqrt{2}M_w}\overline{U}VM_D^{diag}P_R D G_w^+ \\
&+\frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_w}\overline{U}VM_D^{diag}P_R D H^+ - \frac{1}{\sin\beta}\overline{U}V\xi_1^D P_R D H^+ + h.c. \\
&+\overline{D}M_D^{diag}D + i\frac{g}{2M_w}\overline{D}M_D^{diag}\gamma^5 D G_z^o \\
&+i\frac{g\cot\beta}{2M_w}\overline{D}M_D^{diag}\gamma^5 D A^o - i\frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\overline{D}\xi_1^D\gamma^5 D A^o \\
&+\frac{g}{2M_w\sin\beta}\overline{D}M_D^{diag}D\left[H^o\sin\alpha + h^o\cos\alpha\right] \\
&-\frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\overline{D}\xi_1^D D\left[H^o\sin(\alpha-\beta) + h^o\cos(\alpha-\beta)\right].
\end{aligned} \tag{2-38}$$

A partir del lagrangiano del Yukawa del M2DH-III podemos hacer diferentes reparametrizaciones para obtener el MEE y los modelos tipo I y II con cambio de sabor a nivel árbol, denotados como $\mathcal{L}_Y^{Ics}$, $\mathcal{L}_Y^{IIcs}$, respectivamente. Igualmente, podemos obtener los modelos sin cambio de sabor $\mathcal{L}_Y^{I}$ y $\mathcal{L}_Y^{II}$. Con el fin de eliminar los términos de cambio de sabor hacemos uso de una simetría discreta: $\Phi_1 \to \Phi_1$ y $\Phi_2 \to -\Phi_2$. El lagrangiano de Yukawa para este caso es (ver anexo C)

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^{IIIcs} &= \frac{g}{\sqrt{2}M_w}\left(\overline{N}M_E^{diag}P_R E - \overline{U}M_U^{diag}VP_L D + \overline{U}VM_D^{diag}P_R D\right)G_w^+ \\
&+\left(\overline{N}\eta^E P_R E - \overline{U}\eta^U VP_L D + \overline{U}V\eta^D P_R D\right)H^+ + h.c. \\
&+\overline{E}M_E^{diag}E + \overline{U}M_U^{diag}U + \overline{D}M_D^{diag}D \\
&+i\frac{g}{2M_w}\left(\overline{E}M_E^{diag}\gamma^5 E - \overline{U}\gamma^5 M_U^{diag}U + \overline{D}M_D^{diag}\gamma^5 D\right)G_z^o \\
&+i\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{E}\xi_2^E\gamma^5 E - \overline{U}\gamma^5\xi_2^U U + \overline{D}\xi_2^D\gamma^5 D\right)A^o \\
&+\frac{g}{2M_w}\left(\overline{E}M_E^{diag}E + \overline{U}M_U^{diag}U + \overline{D}M_D^{diag}D\right)\left(H^o\cos\alpha - h^o\sin\alpha\right) \\
&+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{E}\eta^E E + \overline{U}\eta^U U + \overline{D}\eta^D D\right)\left(H^o\sin\alpha + h^o\cos\alpha\right).
\end{aligned} \tag{2-39}$$

2.6. Conclusiones

En el M2DH, que corresponde a una simple extensión del MEE, se introduce un doblete extra de Higgs y tres nuevos acoplamientos de Yukawa en los sectores quark y leptónico. Por conteo de grados de libertad después de la RES el espectro de partículas del sector de Higgs se extiende, permitiendo la aparición de cinco nuevos bosones de Higgs reales, tres bosones escalares neutros A^0, h^0, H^0 y dos bosones escalares cargados $H^{\pm}$ [47]. Dependiendo de la manera como se dote de masa a los fermiones, el M2DH se clasifica como de tipo I, tipo II y tipo III. En el M2DH tipo I, un doblete de Higgs proporciona masa a los quarks tipo up y tipo down simultáneamente. En el M2DH tipo II un doblete dota de masa a los quarks up y el otro a los quarks down. Para evitar la existencia de CNCS a nivel árbol se introduce en estos modelos una simetría discreta. No obstante, si no se tiene en cuenta esta simetría, ambos dobletes pueden generar las masas para los quarks up y down simultáneamente. A este modelo se le conoce como M2DH Tipo III (M2DH-III). Los términos de masa para los sectores tipo up o tipo down dependen de dos matrices o acoplamientos de Yukawa.

3. Modelo simétrico izquierda-derecha (MSID)

3.1. Introducción

Como se mostrará en el siguiente capítulo, para generar la masa de los neutrinos del MEE es necesario realizar una extensión poco natural de MEE, a través de la llamada extensión de Majorana, de tal forma que mediante la implementación del MSS es posible que los neutrinos de quiralidad izquierda adquieran masas pequeñas. Justamente esta es una de las razones que motivan el planteamiento del Modelo Simétrico Izquierda-Derecha (MSID), el cual presenta un lagrangiano de Yukawa totalmente real, evitando así fases complejas explícitas, y un sector de bosones escalares con interesantes e importantes propiedades, entre ellas la presencia de dos fases complejas espontáneas con origen en la RES y una amplia variedad de bosones escalares neutros, cargados, doblemente cargados, y la posibilidad de explicar el origen de las masas pequeñas de los neutrinos de quiralidad izquierda mediante la implementación natural del MSS. De igual manera, el modelo permite explicar también de forma natural no solo el origen de la violación de CP sino también el origen de la violación de paridad (P), y permite dar un significado fśico al número cuántico de hipercarga (Y), identificándolo con la diferencia entre número bariónico y número leptónico ($B-L$) [52].

El MSID que contiene al modelo con dos dobletes de Higgs, fue desarrollado buscando un origen natural para la violación de la paridad [53]. Introduciendo un nuevo grupo de simetría $SU(2)_R$, se puede tener una nueva interacción débil con la misma constante de acoplamiento de la interacción débil del MEE, pero actuando solo sobre las partículas de quiralidad derecha. El modelo introduce tres nuevos bosones gauge, asociados con la simetría $SU(2)_R$. Las restricciones experimentales sobre las masas de los tres nuevos bosones gauge (W_R, W_R, Z_R) establecen que sus masas deben ser mayores de 715 GeV, para los bosones cargados, y de 630 GeV, para el bosón neutro [54]. Si únicamente se tiene un bidoblete de bosones escalares, con el fin de implementar el mecanismo de Higgs en este tipo de modelos con partículas de quiralidad izquierda y derecha organizadas en dobletes, se obtienen las mismas masas para los bosones débiles izquierdos y derechos del modelo con igual carga eléctrica. La forma usual de evitar este problema es introduciendo nuevos bosones de Higgs en el modelo.

El método mas popular de hacer esto en el MSID es a través de dos tripletes de Higgs, cada uno actuando sobre un tipo de partículas dependiendo de su quiralidad. Con estos dos tripletes se puede explicar el valor tan pequeño para las masas de los neutrinos de quiralidad izquierad mediante el MSS, mientras se dan valores de masas muy pesadas a los neutrinos derechos [52]. Sin embargo, no todo es perfecto en el MSID. Debido a la presencia de un bidoblete de campos de Higgs, aparecen CNCS en el modelo, involucrando los bosones escalares neutros [55, 56, 57]. Las restricciones experimentales establecen que si existen CNCS, deben estar lo suficientemente suprimidas de tal manera que los experimentos no sean sensitivos a ellas [58]. El MEE no presenta CNCS porque sólo tiene un doblete de campos de Higgs. Una posible forma de evitar la existencia de CNCS en el MSID, sin hacer ningún ajuste fino sobre las constantes de acoplamiento, es tener masas realmente pesadas para los bosones escalares que median los CNCS [55, 59, 57]. Sin embargo esto no es posible y depende de los valores de los parámetros del potencial escalar así como de los valores que toman las fases de CP.

En este capítulo estudiaremos el sector de Higgs del MSID con violación de CP explícita en el potencial de Higgs, analizando si los mínimos existentes del potencial de Higgs son consistentes con los actuales límites experimentales.

3.2. Motivación

Existen varias razones por las cuales el MSID es interesante de estudiar. La primera de ellas es la que se refiere a la violación de la paridad que resulta de una RES. La segunda es la incorporación de la simetría quark-leptón de las interacciones débiles, de tal forma que ahora el generador del grupo $U(1)$ está relacionado con los números cuánticos $B-L$. La tercera es posible dar una explicación natural de la pequeñez de las masas de los neutrinos de quiralidad izquierda. Si embargo, la no observación de CNCS y a la pequeñez de la masa de los neutrinos de quiralidad izquierda, imponen limitaciones estrictas sobre el potencial de Higgs de este modelo.

3.3. Generalidades del MSID

El MSID está basado en el grupo de simetría $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-L} \otimes P$, donde la simetría discreta P conduce a la misma constante de acoplamiento g para los grupos $SU(2)_L$ y $SU(2)_R$. Debido a que la simetría CP discreta asegura que no hay violación explicita de CP, se hace necesario buscar un mecanismo para generarla de manera espontánea [55]. De acuerdo a la simetría izquierda-derecha, es posible asignar a los leptones y a los quarks dobletes de mano izquierda y derecha con los siguientes números cuánticos:

$$Q_{iL} = \begin{pmatrix} u_{iL} \\ d_{iL} \end{pmatrix} \equiv \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}\right), \qquad Q_{iR=} \begin{pmatrix} u_{iR} \\ d_{iR} \end{pmatrix} \equiv \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \tag{3-1}$$

$$\Psi_{iL} = \begin{pmatrix} \nu_{iL} \\ e_{iL} \end{pmatrix} \equiv \left(\frac{1}{2}, 0, -1\right), \qquad \Psi_{iR=} \begin{pmatrix} \nu_{iR} \\ e_{iR} \end{pmatrix} \equiv \left(0, \frac{1}{2}, -1\right), \tag{3-2}$$

donde el generador $U(1)$ corresponde a los números cuánticos $B-L$ del multiplete y el subíndice $i = 1, 2, 3$ es el numero de la generación. De esta forma la densidad lagrangiana se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& g_L \left[\overline{Q}_L \gamma_\mu \frac{\tau}{2} Q_L + \overline{\psi}_L \gamma_\mu \frac{\tau}{2} \psi_L\right] .W_L^\mu + g_R \left[\overline{Q}_R \gamma_\mu \frac{\tau}{2} Q_R + \overline{\psi}_R \gamma_\mu \frac{\tau}{2} \psi_R\right] .W_R^\mu \\ &+ g' \left[\frac{1}{6} \overline{Q}_L \gamma_\mu \frac{\tau}{2} Q_L + \frac{1}{6} \overline{Q}_R \gamma_\mu \frac{\tau}{2} Q_R - \frac{1}{6} \overline{\psi}_R \gamma_\mu \frac{\tau}{2} \psi_R - \frac{1}{6} \overline{\psi}_L \gamma_\mu \frac{\tau}{2} \psi_L\right].\end{aligned} \tag{3-3}$$

Asumiendo que el lagrangiano original es simétrico ante una transformación de CP, esta violación se logra esponáneamente al no ser el vácio simétrico ante dicha transformación, con lo cual

$$\begin{aligned} &Q_L \longleftrightarrow Q_R, \\ &\Psi_L \longleftrightarrow \Psi_R, \\ &W_L \longleftrightarrow W_R. \end{aligned} \tag{3-4}$$

y por lo tanto $g_L = g_R = g$. La derivada covariante que sale de reemplazar el momento normal por el momento canónico

$$D_\mu = \partial_\mu - ig' \frac{B-L}{2} B_\mu - ig \frac{\tau^i}{2} \left(W_{\mu L}^i + W_{\mu R}^i\right) - ig_s \frac{\lambda^\alpha}{2} G_\mu^\alpha, \tag{3-5}$$

contiene las interacciones descritas a través de los campos de gauge B_μ, $W_{\mu L}^i (i = 1, 2, 3)$, $W_{\mu R}^i (i = 1, 2, 3)$ y $G_\mu^\alpha (\alpha = 1, \ldots, 8)$ los cuales corresponden respectivamente a los grupos de simetría $U(1)_{B-L}$, $SU(2)_L$, $SU(2)_R$ y $SU(3)_C$. Se representa con τ^i y λ^α a las matrices de Pauli y sus análogas para el grupo $SU(3)$.

Después de expandirse la densidad lagrangiana de interacción de los campos de materia con los campos de gauge, del cual se definen los bosones de gauge físicos, se obtiene que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} =& \overline{u_L}\gamma^\mu u_L \left[\frac{g'}{6}b_\mu + \frac{g}{2}W^3_{\mu L}\right] + \overline{u_R}\gamma^\mu u_R \left[\frac{g'}{6}b_\mu + \frac{g}{2}W^3_{\mu L}\right] + \overline{d_L}\gamma^\mu d_L \left[\frac{g'}{6}b_\mu - \frac{g}{2}W^3_{\mu L}\right] \\
&+ \overline{d_R}\gamma^\mu d_R \left[\frac{g'}{6}b_\mu - \frac{g}{2}W^3_{\mu L}\right] - \frac{g}{\sqrt{2}}\overline{u_L}\gamma^\mu d_L W^+_{\mu L} - \frac{g}{\sqrt{2}}\overline{d_L}\gamma^\mu u_L W^-_{\mu L} \\
&- \frac{g}{\sqrt{2}}\overline{u_R}\gamma^\mu d_R W^+_{\mu R} - \frac{g}{\sqrt{2}}\overline{d_R}\gamma^\mu u_R W^-_{\mu R} + \overline{\nu_L}\gamma^\mu \nu_L \left[-\frac{g'}{2}B_\mu + \frac{g}{2}W^3_{\mu L}\right] \\
&+ \overline{\nu_R}\gamma^\mu \nu_R \left[-\frac{g'}{2}B_\mu + \frac{g}{2}W^3_{\mu R}\right] + \overline{e_L}\gamma^\mu e_L \left[-\frac{g'}{2}B_\mu - \frac{g}{2}W^3_{\mu L}\right] \\
&+ \overline{e_R}\gamma^\mu e_R \left[-\frac{g'}{2}B_\mu - \frac{g}{2}W^3_{\mu R}\right] - \frac{g}{\sqrt{2}}\overline{\nu_L}\gamma^\mu e_L W^+_{\mu L} - \frac{g}{\sqrt{2}}\overline{e_L}\gamma^\mu \nu_L W^-_{\mu L} \\
&- \frac{g}{\sqrt{2}}\overline{\nu_R}\gamma^\mu e_R W^+_{\mu R} - \frac{g}{\sqrt{2}}\overline{e_R}\gamma^\mu \nu_R W^-_{\mu R},
\end{aligned}
\tag{3-6}
$$

con

$$W^\pm_{\mu L} = -(W^1_{\mu L} \mp iW^2_{\mu L})/\sqrt{2}, \tag{3-7}$$

$$W^\pm_{\mu R} = -(W^1_{\mu R} \mp iW^2_{\mu R})/\sqrt{2}. \tag{3-8}$$

Seguidamente, se define el fotón teniendo en cuenta que éste no puede interactuar con los neutrinos. La forma de hacer esto es definiendo el fotón como una combinación lineal de los tres campos de gauge neutros: $A_\mu = aB_\mu + bW^3_{\mu L} + cW^3_{\mu R}$, de tal manera que los productos escalares $A_\mu \dot{(} - g'B_\mu W^3_{\mu L})$ y $A_\mu \dot{(} - g'B_\mu W^3_{\mu R})$ se hagan iguales a cero. De acuerdo con esto se obtiene

$$A_\mu = \frac{gB_\mu + g'(W^3_{\mu L} + W^3_{\mu R})}{\sqrt{g^2 + 2g'^2}}. \tag{3-9}$$

Definiendo el ángulo de mezcla de Weinberg θ_W como

$$\sin\theta_W = \frac{e}{g} = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + 2g'^2}} \tag{3-10}$$

$$\sqrt{\cos 2\theta_W} = \frac{e}{g} = \frac{g}{\sqrt{g^2 + 2g'^2}}, \tag{3-11}$$

se concluye que

$$A_\mu = \sqrt{\cos 2\theta_W} B_\mu + \sin\theta_W (W^3_{\mu L} + W^3_{\mu R}). \tag{3-12}$$

Ahora se pueden definir arbitrariamente un campo gauge neutro Z'_μ como aquel mediante el cual interactúan un par de neutrinos derechos

$$Z'_\mu = \frac{gW^3_{\mu R} + g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + 2g'^2}} = -\tan\theta_W B_\mu + \frac{\sqrt{\cos 2\theta_W}}{\cos\theta_W} W^3_{\mu R}. \tag{3-13}$$

Una vez se conocen las expresiones para A_μ y Z'_μ, se pueden definir el campo Z_μ exigiendo que los productos escalares $Z_\mu \cdot A_\mu$ y $Z_\mu \cdot Z'_\mu$ se anulen (ver anexo D). Este procedimiento permite encontrar que

$$Z_\mu = -\tan\theta_W B_\mu \sqrt{\cos 2\theta_W} B_\mu + \cos\theta_W W^3_{\mu L} - \sin\theta_W \tan\theta_W W^3_{\mu R}. \tag{3-14}$$

Estos resultados se pueden resumir en la siguiente matriz de mezcla

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ Z'_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \tan\theta_W & -\tan\theta_W \sqrt{\cos 2\theta_W} \\ 0 & \sqrt{\cos 2\theta_W}/\cos\theta_W & -\tan\theta_W \\ \sin\theta_W & \sin\theta_W & \sqrt{\cos 2\theta_W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^3_{\mu L} \\ W^3_{\mu R} \\ B_\mu \end{pmatrix}, \tag{3-15}$$

que puede ser usada para reescribir la densidad lagrangiana en términos de los campos A_μ, Z_μ y Z'_μ, es decir

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & \overline{u_L}\gamma^\mu u_L \left[\frac{2e}{3}A_\mu + \frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right) Z_\mu + \frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}\right. \\
& \left.\left(-\frac{1}{6}\sin^2\theta_W\right)\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta_W}} Z'_\mu\right] + \overline{u_R}\gamma^\mu u_R \left[\frac{2e}{3}A_\mu + \frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right) Z_\mu\right. \\
& \left.+\frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}\left(\frac{1}{2} - \frac{7}{6}\sin^2\theta_W\right)\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta_W}} Z'_\mu\right] + \overline{d_L}\gamma^\mu d_L \left[-\frac{e}{3}A_\mu\right. \\
& \left.+\frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right) Z_\mu + \frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}\left(-\frac{1}{6}\sin^2\theta_W\right)\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta_W}} Z'_\mu\right] \\
& +\overline{d_R}\gamma^\mu d_R \left[-\frac{e}{3}A_\mu + \frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}\left(\frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right) Z_\mu + \frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}\left(-\frac{1}{2}\right.\right. \\
& \left.\left.+\frac{5}{6}\sin^2\theta_W\right)\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta_W}} Z'_\mu\right] - \frac{g}{\sqrt{2}}\overline{u_L}\gamma^\mu d_L W^+_{\mu L} - \frac{g}{\sqrt{2}}\overline{d_L}\gamma^\mu u_L W^-_{\mu L} - \\
& -\frac{g}{\sqrt{2}}\overline{u_R}\gamma^\mu d_R W^+_{\mu R} - \frac{g}{\sqrt{2}}\overline{d_R}\gamma^\mu u_R W^-_{\mu u_R}.
\end{aligned} \tag{3-16}$$

3.3.1. Potencial de Higgs en el MSID

Para que la teoría resulte fenomenológicamente aceptable, el potencial de Higgs debe incluir términos cuárticos, no diagonales, en los escalares del modelo. Para romper la simetría y dotar de masa a los bosones y a los fermiones, es necesario introducir un bidoblete y dos tripletes escalares. EL bidoblete se define como

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1^0 & \phi_1^+ \\ \phi_2^- & \phi_2^0 \end{pmatrix} \equiv \left(\, \tfrac{1}{2}, \;\; \tfrac{1}{2}, \;\; 0 \,\right). \tag{3-17}$$

Sin embargo, este bidoblete conduce a las mismas masas para los bosones débiles de mano izquierda y de mano derecha con igual carga eléctrica. Para evitar este problema, se extiende el sector Higgs introduciendo dos tripletes en una representación conveniente de matrices 2×2

$$\triangle_L = \begin{pmatrix} \delta_L^+/\sqrt{2} & \delta_L^{++} \\ \delta_L^0 & -\delta_L^+/\sqrt{2} \end{pmatrix} \equiv \left(\, 1, \;\; 0, \;\; 2 \,\right), \tag{3-18}$$

$$\triangle_R = \begin{pmatrix} \delta_R^+/\sqrt{2} & \delta_R^{++} \\ \delta_R^0 & -\delta_R^+/\sqrt{2} \end{pmatrix} \equiv (\ 1,\ \ 0,\ \ 2\ )\,. \tag{3-19}$$

Con estos términos escalares, el potencial escalar más general que se puede escribir y que es invariante bajo la simetría manifiesta izquierda-derecha definida por $\Phi \longleftrightarrow \Phi^\dagger$ y $\triangle_L \longleftrightarrow \triangle_R$ es(ver anexo E)

$$V = V_\Phi + V_\triangle + V_{\Phi\triangle}, \tag{3-20}$$

con

$$\begin{aligned} V_\Phi = & -\mu_1^2 Tr(\Phi^\dagger\Phi) - \mu_2^2\left[Tr(\tilde{\Phi}\Phi^\dagger) + Tr(\tilde{\Phi}^\dagger\Phi)\right] - \lambda_1\left[Tr(\Phi\Phi^\dagger)\right]^2 \\ & + \lambda_2\left\{\left[Tr(\tilde{\Phi}\Phi^\dagger)\right]^2\left[Tr(\tilde{\Phi}^\dagger\Phi)^2\right]\right\} + \lambda_3\left[Tr(\tilde{\Phi}\Phi^\dagger)Tr(\tilde{\Phi}^\dagger\Phi)\right] \\ & + \lambda_4\left\{Tr(\tilde{\Phi}\Phi^\dagger)\left[Tr(\tilde{\Phi}\Phi^\dagger) + Tr(\tilde{\Phi}^\dagger\Phi)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{3-21}$$

$$\begin{aligned} V_\triangle = & -\mu_3^2\left[Tr(\triangle_L\triangle_L^\dagger) + Tr(\triangle_R\triangle_R^\dagger)\right] + \rho_1\left\{\left[Tr(\triangle_L\triangle_L^\dagger)\right]^2 + \left[Tr(\triangle_R\triangle_R^\dagger)\right]^2\right\} \\ & + \rho_2\left[Tr(\triangle_L\triangle_L)Tr(\triangle_L^\dagger\triangle_L^\dagger) + Tr(\triangle_R\triangle_R)Tr(\triangle_R^\dagger\triangle_R^\dagger)\right] \\ & + \rho_3\left[Tr(\triangle_L\triangle_L^\dagger)Tr(\triangle_R\triangle_R^\dagger)\right] \\ & + \rho_4\left[Tr(\triangle_L\triangle_L)Tr(\triangle_L^\dagger\triangle_L^\dagger) + Tr(\triangle_L^\dagger\triangle_L^\dagger)Tr(\triangle_R\triangle_R)\right], \end{aligned} \tag{3-22}$$

$$\begin{aligned} V_{\Phi\triangle} = & \,\alpha_1\left\{Tr(\Phi^\dagger\Phi)\left[Tr(\triangle_L\triangle_L^\dagger) + Tr(\triangle_R\triangle_R^\dagger)\right]\right\} + \alpha_2\left[Tr(\tilde{\Phi}^\dagger\Phi)Tr(\triangle_R\triangle_R^\dagger)\right. \\ & \left.+ Tr(\tilde{\Phi}^\dagger\Phi)Tr(\triangle_L\triangle_L^\dagger)\right] + \alpha_2^*\left[Tr(\tilde{\Phi}\Phi^\dagger)Tr(\triangle_R\triangle_R^\dagger) + Tr(\Phi^\dagger\tilde{\Phi})Tr(\triangle_L\triangle_L^\dagger)\right] \\ & + \alpha_3\left[Tr\left(\Phi\Phi^\dagger\triangle_L\triangle_L^\dagger\right) + Tr\left(\Phi^\dagger\Phi\triangle_R\triangle_R^\dagger\right)\right] + \beta_1\left[Tr\left(\Phi\triangle_R\Phi^\dagger\triangle_L^\dagger\right) + Tr\left(\Phi^\dagger\triangle_L\Phi\triangle_R^\dagger\right)\right] \\ & + \beta_2\left[Tr\left(\tilde{\Phi}\triangle_R\Phi^\dagger\triangle_L^\dagger\right) + Tr\left(\tilde{\Phi}^\dagger\triangle_L\Phi\triangle_R^\dagger\right)\right] + \beta_3\left[Tr\left(\Phi\triangle_R\tilde{\Phi}^\dagger\triangle_L^\dagger\right) + Tr\left(\Phi^\dagger\triangle_L\tilde{\Phi}\triangle_R^\dagger\right)\right], \end{aligned} \tag{3-23}$$

en donde se ha definido $\tilde{\Phi} = \tau_2\Phi^\star\tau_2$. Es conveniente anotar que todos los términos del potencial son auto conjugados, excepto por el término α_2. Para evitar violación espontánea de CP se toma α_2 real. Sólamente las componentes neutras de los campos escalares pueden adquirir valores esperados en el vacío sin violar la conservación de la carga eléctrica. Por lo tanto, el patrón de rompimiento de la simetría está determinado por

$$\langle\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_1 e^{i\alpha_1} & 0 \\ 0 & k_2 e^{i\alpha_2} \end{pmatrix}, \tag{3-24}$$

$$\langle \triangle_L \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vartheta_L e^{i\theta_L} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3-25}$$

$$\langle \triangle_R \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vartheta_R e^{i\theta_R} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3-26}$$

en donde $k_1, k_2, \vartheta_R, \vartheta_L, \alpha_1, \alpha_2, \theta_L$ y θ_R son números reales. Hay algunas restricciones sobre los valores esperados en el vacío.

Bajo transformaciones unitarias de los campos fermiónicos, los campos escalares transforman de acuerdo a las relaciones

$$\psi_L \to U_L \psi_L, \tag{3-27}$$
$$\psi_R \to U_R \psi_R, \tag{3-28}$$
$$\Phi \to U_L \Phi U_R^\dagger, \tag{3-29}$$
$$\tilde{\Phi} \to U_L \tilde{\Phi} U_R^\dagger, \tag{3-30}$$
$$\triangle_L \to U_L \Phi U_L^\dagger, \tag{3-31}$$
$$\triangle_R \to U_R \Phi U_R^\dagger, \tag{3-32}$$

en donde se pueden absorber algunas de las fases de los campos escalares definiendo

$$U_L = \begin{pmatrix} e^{i\gamma L} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma L} \end{pmatrix}, \qquad U_R = \begin{pmatrix} e^{i\gamma R} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma R} \end{pmatrix} \tag{3-33}$$

y

$$\gamma_L = \frac{\theta_L}{2}, \qquad \gamma_R = \gamma_L - \alpha_2. \tag{3-34}$$

Mediante estas definiciones, dos fases genuinas permanecen las cuales son notadas con α y θ

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} k_1 e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}, \qquad \langle \triangle_L \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vartheta_L & 0 \end{pmatrix}, \tag{3-35}$$

y

$$\langle \triangle_R \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vartheta_R e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3-36}$$

que son las únicas fuentes de violación de CP en el MSID, las cuales son obtenidas espontáneamente (ver anexo E).

3.4. Transformaciones unitarias

El campo neutro ϕ^0 está escrito en términos de componentes reales e imaginarias correctamente normalizados $\phi^0 = \left(1\sqrt{2}\right)\left(\phi^{0r} + i\phi^{0i}\right)$. Estos campos transforman de acuerdo a la relación

$$\begin{aligned}
L_L &\rightarrow U_L L_L, &(3\text{-}37)\\
L_R &\rightarrow U_R L_R, &(3\text{-}38)\\
\Phi &\rightarrow U_L \Phi U_R^\dagger, &(3\text{-}39)\\
\widetilde{\Phi} &\rightarrow U_L \widetilde{\Phi} U_R^\dagger, &(3\text{-}40)\\
\triangle_L &\rightarrow U_L \triangle_L U_L^\dagger, &(3\text{-}41)\\
\triangle_R &\rightarrow U_R \triangle_R U_R^\dagger, &(3\text{-}42)
\end{aligned}$$

donde $U_{L,R}$ son en general $SU(2)_L$ y $SU(2)_R$ transformaciones unitarias respectivamente y $\widetilde{\Phi} \equiv \tau_2 \Phi^* \tau_2$. El VEV v_R rompe la simetría y establece la escala de masa para los neutrinos de quiralidad derecha ν_R y para los bosones de gauge extra W_R y $Z^{'}$. Es posible absorber alguna de las fases de los campos escalares definiendo

$$U_L = \begin{pmatrix} e^{i\gamma_L} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_L} \end{pmatrix} \qquad U_R = \begin{pmatrix} e^{i\gamma_R} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_R} \end{pmatrix}, \tag{3-43}$$

con

$$\gamma_L = \frac{\theta_L}{2} \qquad \gamma_R = \gamma_L - \alpha_2, \tag{3-44}$$

$$\begin{aligned}
\triangle_L \rightarrow U_L \triangle_L U_L^\dagger &= \begin{pmatrix} e^{i\gamma_L} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_L e^{i\theta_L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma_L} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma_L} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{i\gamma_L} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_L e^{i\theta_L} e^{-i\gamma_L} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_L e^{i(\theta_L - i\gamma_L)} & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3-45}$$

$$\begin{aligned}
\triangle_R \rightarrow U_R \triangle_R U_R^\dagger &= \begin{pmatrix} e^{i\gamma_R} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_R e^{i\theta_R} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma_R} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma_R} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{i\gamma_R} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_L e^{i\theta_R} e^{-i\gamma_R} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_L e^{i(\theta_R - 2\gamma_R)} & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3-46}$$

$$\begin{aligned}\Phi \to U_L \Phi U_R^{\dagger} &= \begin{pmatrix} e^{i\gamma_L} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 e^{i\alpha_1} & 0 \\ 0 & k_2 e^{i\alpha_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma_R} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma_R} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\gamma_L} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 e^{i\alpha_1} e^{-i\gamma_R} & 0 \\ 0 & k_2 e^{i\alpha_2} e^{i\gamma_R} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k_1 e^{i(\alpha_1+\gamma_L-\gamma_R)} & 0 \\ 0 & k_2 e^{i(\alpha_2+\gamma_R-\gamma_L)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3-47}$$

Con estas definiciones permanecerán dos fases genuinas de violación CP espontaneas, que llamaremos α y θ

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} k_1 e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}, \quad \langle \triangle_L \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_L & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \triangle_R \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_R e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3-48}$$

3.5. Determinación de los auto-estados de masa en el MSID

El sector de Higgs contiene un bidoblete ϕ, el cual es una versión simétrica izquierda-derecha del doblete de Higgs del MEE y dos tripletes $\triangle_{L,R}$ con números cuánticos (3,1,2) y (1,3,2), respectivamente

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1^0 & \phi_2^+ \\ \phi_1^- & \phi_2^0 \end{pmatrix}, \quad \triangle_L = \begin{pmatrix} \delta_L^+/\sqrt{2} & \delta_L^{++} \\ \delta_L^0 & -\delta_L^+/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \triangle_R = \begin{pmatrix} \delta_R^+/\sqrt{2} & \delta_R^{++} \\ \delta_R^0 & -\delta_R^+/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{3-49}$$

La densidad lagrangiana para los acoplamientos de los campos de gauge escalares $\Phi, \triangle_L$ y $\triangle_R$ esta dada por

$$\mathcal{L}_D = Tr\left(D_\mu \triangle_L\right)^{\dagger}\left(D^\mu \triangle_L\right) + Tr\left(D_\mu \triangle_R\right)^{\dagger}\left(D^\mu \triangle_R\right) + Tr\left(D_\mu \Phi\right)^{\dagger}\left(D^\mu \Phi\right) - V, \tag{3-50}$$

con

$$D_\mu \triangle_L = \partial_\mu \triangle_L - i\frac{g}{2}\left[\overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{W_{\mu L}} \triangle_L - \triangle_L \overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{W_{\mu L}}\right] - ig' B_\mu \triangle_L, \tag{3-51}$$

$$D_\mu \triangle_R = \partial_\mu \triangle_R - i\frac{g}{2}\left[\overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{W_{\mu R}} \triangle_R - \triangle_R \overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{W_{\mu R}}\right] - ig' B_\mu \triangle_R, \tag{3-52}$$

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi - i\frac{g}{2}\left[\overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{W_{\mu R}} \Phi - \Phi \overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{W_{\mu R}}\right]. \tag{3-53}$$

Si definimos

$$\begin{aligned}\triangle_L \tau_i \cdot W^{i\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_R e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & W^{1\mu} \\ W^{1\mu} & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_R e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -iW^{2\mu} \\ -iW^{2\mu} & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_R e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} & 0 \\ 0 & -W^{3\mu} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W^{1\mu} v_R e^{i\theta} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -iW^{2\mu} v_R e^{i\theta} \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ W^{3\mu} v_R e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ W^{3\mu} v_R e^{i\theta} & \left(W^{1\mu} - iW^{2\mu}\right) v_R e^{i\theta} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3-54}$$

reemplazando

$$\begin{aligned}
(D^{\mu}\triangle_R) &= -\frac{ig}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ W_R^{1\mu}v_Re^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ W_R^{2\mu}v_Re^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}\right.\\
&+ \left.\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ W_R^{3\mu}v_Re^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -W^{3\mu}v_Re^{i\theta} & \left(W^{1\mu}-iW^{2\mu}\right)v_Re^{i\theta} \end{pmatrix}\right]\\
&- ig'\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{\mu}v_Re^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}\\
&= -\frac{ig}{2\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} W_R^{1\mu}v_Re^{i\theta}-iW_R^{2\mu}v_Re^{i\theta} & 0 \\ W_R^{3\mu}v_Re^{i\theta}+W^{3\mu}v_Re^{i\theta} & -\left(W^{1\mu}-iW^{2\mu}\right)v_Re^{i\theta} \end{pmatrix}\right]-ig'\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{\mu}v_Re^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Definiendo la derivada covariante en función de los campos de gauge cargados

$$W_{\mu}^{\pm}=-\frac{\left(W_{\mu}^{1}\mp iW_{\mu}^{2}\right)}{\sqrt{2}}, \tag{3-55}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
(D^{\mu}\triangle_R) &= \frac{ig}{2\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} W_R^{+\mu}\sqrt{2}v_Re^{i\theta} & 0 \\ -2W_R^{3\mu}v_Re^{i\theta} & -W^{+\mu}\sqrt{2}v_Re^{i\theta} \end{pmatrix}\right]-ig'\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{\mu}v_Re^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}\\
&= =\begin{bmatrix} \frac{ig}{2}W_R^{+\mu}v_Re^{i\theta} & 0 \\ -i\left(\frac{g}{\sqrt{2}}W_R^{3\mu}+g'B_{\mu}\right)v_Re^{i\theta} & -\frac{ig}{2}W^{+\mu}v_Re^{i\theta} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3-56}$$

Análogamente para la parte de la densidad lagrangiana Higgs-Bosón, se tiene

$$D^{\mu}\Phi=\frac{ig}{4}\begin{bmatrix} k_1(W_L^{0\mu}-W_R^{0\mu})e^{i\alpha} & \sqrt{2}k_2W_L^{\mu+}-\sqrt{2}k_1e^{i\alpha}W_R^{\mu+} \\ \sqrt{2}k_1W_L^{\mu-}e^{i\alpha}-\sqrt{2}k_2W_R^{\mu-} & -k_1(W_L^{0\mu}-W_R^{0\mu}) \end{bmatrix}. \tag{3-57}$$

En este modelo aparecen siete bosones de gauge: cuatro cargados $W_1^{\pm}$, $W_2^{\pm}$ y tres neutros Z_1, Z_2, A. Cuando los multipletes adquieren VEV, se generan las masas de los bosones a través de las interacciones Higgs-Bosón. Por lo tanto, este último lagrangiano conduce a

$$\begin{aligned}
Tr\left(D_{\mu}\triangle_L\right)^{\dagger}\left(D^{\mu}\triangle_L\right) &= 0,\\
Tr\left(D_{\mu}\triangle_R\right)^{\dagger}\left(D^{\mu}\triangle_R\right) &= \frac{g^2}{2}v^2W_R^{+\mu}W_{\mu R}^{-}+\frac{v^2}{2}\left(gW_{\mu R}^{3}-g'B_{\mu}\right)^2,\\
Tr\left(D_{\mu}\Phi\right)^{\dagger}\left(D^{\mu}\Phi\right) &= \frac{g2}{8}\left[(k_1+k_2)^2(W_{\mu L}^{3}-W_{\mu R}^{3})^2+2\left[(k_1+k_2)^2W_{\mu L}^{+}W_L^{\mu-}\right.\right.\\
&- \left.\left.2k_1k_2W_R^{\mu+}W_{\mu R}^{-}e^{-i\alpha}-2k_1k_2W_{\mu R}^{+}W_R^{\mu-}e^{i\alpha}+(k_1+k_2)^2W_{\mu R}^{-}W_R^{\mu+}\right]\right],
\end{aligned} \tag{3-58}$$

de la cual se deducen las contribuciones a la matriz de masa de la interacción. Para los bosones de gauge neutros se tiene

$$\mathcal{L}_{masa}^{Boson-N}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} W_{\mu L}^{0} & W_{\mu R}^{0} & B_{\mu} \end{pmatrix}M^{Neutros}\begin{pmatrix} W_{\mu L}^{0} \\ W_{\mu R}^{0} \\ B_{\mu} \end{pmatrix}, \tag{3-59}$$

donde la matriz de masa a diagonalizar es

$$M^{Neutros} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} g^2(4v_L^2+k_1^2+k_2^2) & -g(k_1^2+k_2^2) & -4gg'v_L^2 \\ -g(k_1^2+k_2^2) & g^2(4v_L^2+k_1^2+k_2^2) & -4gg'v_R^2 \\ -4gg'v_L^2 & -4gg'v_R^2 & 4g'(v_L^2+v_R^2) \end{pmatrix}. \tag{3-60}$$

Las masas de los bosones de gauge físicos son

$$M_A^2 = 0, \tag{3-61}$$
$$M_{z_{1,2}}^2 = C \mp \sqrt{C^2-4D}, \tag{3-62}$$
$$M_{W_{1,2}}^2 = \frac{g}{4}\left(k_1^2+k_2^2+v_L^2+v_R^2 \mp \sqrt{\left(v_R^2-v_L^2\right)^2+4k_1^2k_2^2}\right), \tag{3-63}$$

con

$$C = \frac{1}{2}\left[(g^2+g^{'2})(v_L^2+v_R^2)+g(k_1^2+k_2^2)/2\right], \tag{3-64}$$
$$D = \frac{1}{16}\left[g^2(g^2+2g^{'2})\left[(k_1^2+k_2^2)(v_L^2+v_R^2)+4v_R^2v_L^2\right]\right]. \tag{3-65}$$

Análogamente las matrices de masa para los bosones de gauge cargados son

$$\mathcal{L}_{masa}^{Boson-C} = \begin{pmatrix} W_L^+ & W_R^+ \end{pmatrix} M^{Cargados}\begin{pmatrix} W_L^- \\ W_R^+ \end{pmatrix}, \tag{3-66}$$

con

$$M^{Cargados} = \frac{g^2}{4}\begin{pmatrix} 2v_L^2+k_1^1+k_2^2 & -2k_1k_2e^{-i\alpha} \\ -2k_1k_2e^{i\alpha} & 2v_R^2+k_1^2+k_2^2 \end{pmatrix}. \tag{3-67}$$

Debido a la presencia de fases en la matriz de masa, se hace necesario diagonalizar la matriz mediante

$$\begin{aligned} M^{Cargados} &= Y^\dagger M_{Cargados}^{diag} Y \\ &= M_{Cargados}^{diag} = \begin{pmatrix} M_{W_1}^2 & 0 \\ 0 & M_{W_1}^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3-68}$$

con

$$Y = \begin{pmatrix} \cos\chi & -\sin\chi e^{i\omega} \\ \sin\chi e^{-i\omega} & \cos\chi \end{pmatrix}, \tag{3-69}$$

obteniéndose las expresiones para los bosones de gauge físicos cargados en función de $W_{L,R}^{\mu\pm}$

$$W_1 = \cos\chi W_L + e^{-i\alpha}\sin\chi W_R, \tag{3-70}$$
$$W_1 = -e^{i\alpha}\sin\chi W_L + \cos\chi W_R, \tag{3-71}$$

con

$$\tan 2\chi = \frac{2k_1k_2}{v_L^2 + v_R^2}. \tag{3-72}$$

Gracias a que k_1 y k_1 son del orden de 246 GeV y v_R es del orden de $2,7\times 10^7$ GeV, entonces $W_1 \approx W_L$ y $W_2 \approx W_R$ con muy buena aproximación. Dadas las desigualdades $v_R \gg k_1, k_2, v_L$ que surgen a través de las restricciones experimentales de la física de neutrinos, se obtiene

$$M_{W_1}^2 \approx \frac{g^2}{4}(k_1^2 + k_2^2 + v_L^2), \tag{3-73}$$

$$M_{W_2}^2 \approx \frac{g^2}{2}v_R^2, \tag{3-74}$$

$$M_{Z_1}^2 \approx \frac{g^2(g^2 + 2g'^2)}{4(g^2 + g'^2)}(k_1^2 + k_2^2), \tag{3-75}$$

$$M_{Z_2}^2 \approx (g^2 + g'^2)v_R^2, \tag{3-76}$$

que evidencia dos escalas de energía, cumpliéndose también la relación experimental del MEE

$$\frac{M_{W_1}^2}{M_{Z_1}^2} \approx \frac{(g^2 + g'^2)}{(g^2 + 2g'^2)}\frac{(k_1^2 + k_2^2 + v_L^2)}{(k_1^2 + k_2^2)} = \cos^2\theta_W \left(1 + \frac{v_L^2}{k_1^2 + k_2^2}\right), \tag{3-77}$$

la cual da lugar a una ligadura sobre los valores de k_1 y k_2, los cuales deben ser mucho más pequeños que v_L, con el fin de reproducir los resultados experimentales.

3.6. Matrices de masa para los bosones escalares del MSID

Las matrices de masa para las partículas escalares neutras, una vez cargadas y dos veces cargadas, mostradas a continuación, resultan de derivar el potencial respecto a cada una de las componentes de los campos (ver anexo F) $\left\{\phi_1^r, \phi_2^r, \phi_1^r, \delta_R^r, \delta_L^r, \phi_1^i, \phi_2^i, \delta_R^i, \delta_L^i, \phi_1^+, \phi_2^+, \delta_R^+, \delta_L^+, \delta_R^{++}, \delta_L^{++}\right\}$. Teniendo en cuenta la estructura de los campos

$$\phi_1^0 = \left(\phi_1^{0r} + i\phi_1^{0i} + k_1\right) e^{i\alpha}/\sqrt{2}, \tag{3-78}$$

$$\phi_2^0 = \left(\phi_2^{0r} + i\phi_2^{0i} + k_2\right) /\sqrt{2}, \tag{3-79}$$

$$\delta_L^0 = \left(\delta_L^{0r} + i\delta_L^{0i} + v_1\right) /\sqrt{2}, \tag{3-80}$$

$$\delta_R^0 = \left(\delta_R^{0r} + i\delta_R^{0i} + v_1\right) e^{i\theta_R}/\sqrt{2}, \tag{3-81}$$

y el VEV para las componentes neutras del campo de Higgs y de los tripletes escalares, se calcula la matriz de masa como sigue

$$M_{ij}^2 = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\right|_{\langle\phi_1^0\rangle=k_1e^{i\alpha}/\sqrt{2};\langle\phi_2^0\rangle=k_2/\sqrt{2};\langle\delta_R^0\rangle=v_Re^{i\theta};\langle\delta_L^0\rangle=v_L} = 0, \tag{3-82}$$

3.7. Lagrangiano del sector de quarks del MSID

El lagrangiano de interacción para el sector de quarks está dado por

$$-\mathcal{L}^{q}_{Yukawa} = \overline{Q_{iL}}\left(\eta^{q}_{ij}\Phi + \widetilde{\eta^{q}_{ij}}\widetilde{\Phi}\right)Q_{jR} + h.c., \tag{3-83}$$

donde i, j marcan las diferentes generaciones $\widetilde{\Phi} = \tau_2\Phi^*\tau_2$, y donde los auto estados de sabor están dados por

$$Q_{iL,R} = \begin{pmatrix} u_{iL,R} \\ d_{iL,R} \end{pmatrix}. \tag{3-84}$$

La hermíticidad de η ayuda a asegurar la simetría izquierda-derecha de la densidad lagrangiana. Introduciendo los VEV (3-48) dentro de los términos de la densidad lagrangiana de Yukawa, se puede obtener la forma de las matrices de masa para los quarks up y down. Para esto definimos

$$\widetilde{\Phi} = \tau_2\Phi^*\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1^{0*} & \phi_1^{+} \\ \phi_2^{+} & \phi_2^{0*} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_2^{0*} & -\phi_2^{+} \\ -\phi_1^{-} & \phi_1^{0*} \end{pmatrix},$$

realizando los productos

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = \eta^{q}_{ij}\begin{pmatrix} \overline{u_{iL}} & \overline{d_{iL}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1^{0}u_{jR} + \phi_1^{+}d_{jR} \\ \phi_2^{-}u_{jR} + \phi_2^{0}d_{jR} \end{pmatrix} + \widetilde{\eta^{q}_{ij}}\begin{pmatrix} \overline{u_{iL}} & \overline{d_{iL}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_2^{0*}u_{jR} - \phi_2^{+}d_{jR} \\ -\phi_1^{-}u_{jR} + \phi_1^{0*}d_{jR} \end{pmatrix},$$

expandiendo los campos complejos, se encuentra que el lagrangiano de Yukawa se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Yukawa} &= \eta^{q}_{ij}\overline{u_{iL}}\phi_1^{0}u_{jR} + \eta^{q}_{ij}\overline{u_{iL}}\phi_1^{+}d_{jR} + \eta^{q}_{ij}\overline{d_{iL}}\phi_2^{-}u_{jR} + \eta^{q}_{ij}\overline{d_{iL}}\phi_2^{0}d_{jR} \\
&+ \widetilde{\eta^{q}_{ij}}\overline{u_{iL}}\phi_2^{0*}u_{jR} - \widetilde{\eta^{q}_{ij}}\overline{u_{iL}} - \phi_2^{+}d_{jR} - \widetilde{\eta^{q}_{ij}}\overline{d_{iL}}\phi_1^{-}u_{jR} + \widetilde{\eta^{q}_{ij}}\overline{d_{iL}}\phi_1^{0*}d_{jR} \\
&= \eta^{q}_{ij}\overline{u_{iL}}\frac{(\phi_1^{0r} + i\phi_1^{oi} + k_1)}{\sqrt{2}}e^{i\alpha}u_{jR} + \eta^{q}_{ij}\overline{u_{iL}}\phi_1^{+}d_{jR} + \eta^{q}_{ij}\overline{d_{iL}}\phi_2^{-}u_{jR} \\
&+ \eta^{q}_{ij}\overline{d_{iL}}\frac{(\phi_2^{0r} + i\phi_2^{oi} + k_2)}{\sqrt{2}}d_{jR} + \widetilde{\eta^{q}_{ij}}\overline{u_{iL}}\frac{(\phi_2^{*0r} - i\phi_2^{*oi} + k_2)}{\sqrt{2}}u_{jR} - \widetilde{\eta^{q}_{ij}}\overline{u_{iL}}\phi_2^{+}d_{jR} \\
&- \widetilde{\eta^{q}_{ij}}\overline{d_{iL}}\phi_1^{-}u_{jR} + \widetilde{\eta^{q}_{ij}}\overline{d_{iL}}\frac{(\phi_1^{0r} - i\phi_1^{oi} + k_1)\,e^{-i\alpha}}{\sqrt{2}}d_{jR}.
\end{aligned} \tag{3-85}$$

Esta lagrangiano da información acerca de las matrices de masa para los quarks

$$M^{u}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[k_1\eta^{q}_{ij}e^{i\alpha} + k_2\widetilde{\eta^{q}_{ij}}\right], \tag{3-86}$$

$$M^{d}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[k_2\eta^{q}_{ij} + k_1\widetilde{\eta^{q}_{ij}}e^{-i\alpha}\right]. \tag{3-87}$$

Para diagonalizar las matrices de masa, se tiene que rotar los auto estados de sabor en los auto estados de masa los cuales se llamaran Q', es decir

$$\begin{aligned} Q_L^u &= U_L Q_L'^u, \qquad & Q_R^u &= U_R Q_R'^u, \\ Q_L^d &= V_L Q_L'^d, \qquad & Q_R^d &= V_R Q_R'^d, \end{aligned} \tag{3-88}$$

de tal forma que se pueden escribir las matrices de masa no diagonales en términos de las diagonales como

$$M^u = U_L M^u_{diag} U_R^\dagger \qquad M^d = V_L M^u_{diag} V_R^\dagger. \tag{3-89}$$

Ahora se invierten las ecuaciones (3-86)-(3-87) y se expresan las constantes de acoplamiento de Yukawa en términos de las matrices diagonales para los quarks up y down de la siguiente manera

$$M^u_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[k_1 \eta^q_{ij} e^{i\alpha} + k_2 \widetilde{\eta^q_{ij}}\right] = U_L M^u_{diag} U_R^\dagger, \tag{3-90}$$

$$M^d_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[k_2 \eta^q_{ij} + k_1 \widetilde{\eta^q_{ij}} e^{-i\alpha}\right] = V_L M^d_{diag} V_R^\dagger. \tag{3-91}$$

Multiplicando (3-90) por$e^{-i\alpha}\frac{k_1}{k_2}$ y restóndola de (3-91), se tiene que

$$U_L M^u_{diag} U_R^\dagger e^{-i\alpha}\frac{k_1}{k_2} - V_L M^d_{diag} V_R^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\eta^q_{ij}\frac{k_1^2}{k_2} - \eta^q_{ij} k_2\right) = \frac{\eta^q_{ij}}{\sqrt{2}}\left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_2}\right). \tag{3-92}$$

Resumiendo

$$\eta^q_{ij} = \frac{\sqrt{2}}{k_-^2}\left[U_L M^u_{diag} U_R^\dagger e^{-i\alpha} k_1 - k_2 V_L M^d_{diag} V_R^\dagger\right], \tag{3-93}$$

$$\widetilde{\eta^q_{ij}} = \frac{\sqrt{2}}{k_-^2}\left[-k_2 U_L M^u_{diag} U_R^\dagger - k_1 e^{i\alpha} V_L M^d_{diag} V_R^\dagger\right], \tag{3-94}$$

con lo cual, se pueden definir las matrices de CKM para el MSID como

$$K_L = U_L^\dagger V_L, \qquad K_R = U_R^\dagger V_R, \tag{3-95}$$

con $K = K_L = K_R^*$, el término de interacción general para los auto estados de masa de quarks con los campos neutros de Higgs del tipo ϕ

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{Yukawa} &= \frac{\sqrt{2}}{k_-^2}\left[-k_2 U_L M^u_{diag} U_R^\dagger - k_1 e^{i\alpha} V_L M^d_{diag} V_R^\dagger\right]\begin{pmatrix} \overline{u'_L} & \overline{d'_L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1^0 & \phi_1^+ \\ \phi_1^- & \phi_2^0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'_R \\ d'_R\end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{k_-^2}\left[-k_2 U_L M^u_{diag} U_R^\dagger - k_1 e^{i\alpha} V_L M^d_{diag} V_R^\dagger\right]\begin{pmatrix} \overline{u'_L} & \overline{d'_L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1^0 u'_R & \\ & \phi_2^0 d'_R\end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{k_-^2}\left[-k_2 U_L M^u_{diag} U_R^\dagger - k_1 e^{i\alpha} V_L M^d_{diag} V_R^\dagger\right]\left[\overline{u'_L}\phi_1^0 u'_R + \overline{d'_L}\phi_2^0 d'_R\right]. \end{aligned} \tag{3-96}$$

Se puede realizar un procedimiento similar para la segunda parte del lagrangiano, obteniendo finalmente que

$$\frac{\sqrt{2}}{k_-^2}\overline{u'_L}\left[M^u_{diag}\left(k_1e^{-i\alpha}\phi_1^0 - k_2\phi_2^{0*}\right) + K_L M^d_{diag}K_R^\dagger\left(-k_2\phi_1^0 + k_1e^{i\alpha}\phi_2^{0*}\right)\right]u'_R,$$
$$\frac{\sqrt{2}}{k_-^2}\overline{d'_L}\left[M^u_{diag}\left(k_1e^{i\alpha}\phi_1^{0*} - k_2\phi_2^0\right) + K_L^\dagger M^u_{diag}K_R\left(-k_2\phi_1^{0*} + k_1e^{-i\alpha}\phi_2^0\right)\right]d'_R. \tag{3-97}$$

Ahora definimos los nuevos campos ortogonales [60, 61]

$$\phi_+^0 = \frac{1}{|k_+|}\left(-k_2\phi_1^0 + k_1e^{i\alpha}\phi_2^{0*}\right), \tag{3-98}$$
$$\phi_-^0 = \frac{1}{|k_+|}\left(k_1e^{-i\alpha}\phi_1^0 + k_2\phi_2^{0*}\right), \tag{3-99}$$

y las transformaciones inversas

$$\phi_1^0 = \frac{1}{|k_+|}\left(-k_2\phi_+^0 + k_1e^{i\alpha}\phi_-^0\right), \tag{3-100}$$
$$\phi_-^0 = \frac{1}{|k_+|}\left(k_1e^{i\alpha}\phi_+^{0*} + k_2\phi_-^{0*}\right). \tag{3-101}$$

con lo cual escribimos el término de interacción general como

$$\frac{\sqrt{2}}{k_-^2}\overline{u'_L}\left[\phi_-^0\frac{k_-^2}{|k_+|}M^u_{diag} + \phi_+^0\left(-2\frac{k_1e^{-i\alpha}k_2}{|k_+|}\right)M^u_{diag} + |k_+|K_L M^d_{diag}K_R^\dagger\right]u'_R,$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{k_-^2}\overline{d'}\left[\phi_-^{0*}\frac{k_-^2}{|k_+|}M^d_{diag} + \phi_+^{0*}\left(-2\frac{k_1e^{i\alpha}k_2}{|k_+|}\right)M^d_{diag} + |k_+|K_L^\dagger M^d_{diag}K_R\right]d'_R. \tag{3-102}$$

3.8. Fases de CP espontáneas en el MSID

3.8.1. Violación de CP máxima en el sector de quarks y leptones

Para el caso en el cual $\alpha = \pi/2$ y $\theta = \pi/2$, el efecto de las fases presentes en la violación CP será máximo tanto en el sector de quarks como en el sector leptónico. Las ligaduras o mínimos del potencial resultan de derivar el potencial respecto a los parámetros que están presentes y que definen el mínimo, tales como $\{k_1, k_2, v_L, v_R, \theta, \alpha\}$, dejando seis condiciones de minimización, las cuales dependiendo de la escogencía de las fases podrían reducirse a cinco o cuatro. Con lo anterior

$$\frac{\partial V}{\partial k_1} = \frac{\partial V}{\partial k_2} = \frac{\partial V}{\partial v_L} = \frac{\partial V}{\partial v_R} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0, \tag{3-103}$$

para este caso las condiciones existente son

$$
\begin{aligned}
\beta_2 =&\beta_3\frac{k_2^2}{k_1^2},\\
\rho_1 =&\frac{\rho_3}{2}+\beta_1\frac{k_1k_2}{2v_Lv_R},\\
\lambda_2 =&\frac{\lambda_3}{2}-\alpha_3\frac{v_L^2+v_R^2}{8(k_2^2-k_1^2)}+\beta_1\frac{v_Lv_R}{8k_1k_2},
\end{aligned}
\tag{3-104}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_1^2 =&-2(2\lambda_2-\lambda_3)k_2^2+\frac{1}{2}\alpha_1(v_L^2+v_R^2)+\lambda_1(k_1^2+k_2^2)+\beta_1\frac{k_2}{2k_1}v_Lv_R,\\
\mu_2^2 =&\frac{\lambda_4}{2}(k_1^2+k_2^2)+\frac{1}{2}\alpha_2(v_L^2+v_R^2)+\beta_2\frac{k_1}{2k_2}v_Lv_R,\\
\mu_3^2 =&\frac{1}{2}\alpha_1(k_1^2+k_2^2)+\frac{\alpha_3}{2}k_2^2+\rho_1(v_L^2+v_R^2).
\end{aligned}
$$

Introduciendo estas condiciones de minimización dentro de las matrices de masa para los bosones escalares neutros y cargados, y rotando los campos a auto estados físicos en la base $\left\{\phi_-^r,\phi_+^r,\delta_R^r,\delta_L^r,\phi_-^i,\phi_+^i,\delta_R^i,\delta_L^i\right\}$ a través de la matriz de rotación general

$$
R=\frac{1}{|k_+|}\begin{pmatrix}
k_1\cos\alpha & k_2 & 0 & 0 & k_1\sin\alpha & 0 & 0 & 0\\
-k_2 & k_1\cos\alpha & 0 & 0 & 0 & k_1\sin\alpha & 0 & 0\\
0 & 0 & |k_+| & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & |k_+| & 0 & 0 & 0 & 0\\
-k_1\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & k_1\cos\alpha & -k_2 & 0 & 0\\
0 & k_1\sin\alpha & 0 & 0 & -k_2 & -k_1\cos\alpha & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |k_+| & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |k_+|
\end{pmatrix},
\tag{3-105}
$$

se encuentra la siguiente matriz de masa para los bosones escalares neutros, en donde se han puesto los términos dominantes representados por símbolos genéricos, y se ha usado el hecho que $v_Lv_R\approx k^2$

$$
M^2=\begin{pmatrix}
\alpha v_R^2 & (\lambda+\beta)k^2 & 0 & \beta kv_R & \beta k^2 & \alpha v_R^2 & \alpha kv_R & 0\\
(\lambda+\beta)k^2 & \alpha v_R^2 & 0 & \beta kv_R & \beta k^2 & \beta k^2 & \alpha kv_R & \beta kv_R\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta k^2\\
\beta kv_R & \beta kv_R & 0 & \beta v_R^2 & 0 & \beta kv_R & (\rho_3+\beta)k^2 & 0\\
\beta k^2 & \beta k^2 & 0 & 0 & \beta k^2 & \beta k^2 & 0 & \beta kv_R\\
\alpha v_R^2 & \beta k^2 & 0 & \beta kv_R & \beta k^2 & \alpha v_R^2 & \alpha kv_R & \beta kv_R\\
\alpha kv_R & \alpha kv_R & 0 & (\rho_3+\beta)k^2 & 0 & \alpha kv_R & (\rho_3+\beta)v_R^2 & 0\\
0 & \beta kv_R & \beta k^2 & 0 & \beta kv_R & \beta kv_R & 0 & \beta v_R^2
\end{pmatrix}
\tag{3-106}
$$

Trabajando en la base de los campos físicos ortogonales

$$\phi_+^+ \;=\; \frac{1}{|k_+|}\left(-k_2\phi_1^+ + k_1\phi_2^+\right), \tag{3-107}$$

$$\phi_-^+ = \frac{1}{|k_+|}\left(k_1\phi_1^+ + k_2\phi_2^+\right), \tag{3-108}$$

y su correspondiente matriz de rotación R_+

$$R_+ = \frac{1}{|k_+|}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |k_+| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |k_+| \end{pmatrix}, \tag{3-109}$$

se puede llegar a las matrices de masa para los bosones una vez y dos veces cargados en la base $\left\{\phi_-^+, \phi_+^+, \delta_R^+, \delta_L^+\right\}$ y $\left\{\delta_R^{++}, \delta_L^{++}\right\}$

$$M^{2+} = \begin{pmatrix} \alpha v_R^2 & (1-i)\alpha v_R^2 & (1+i)\alpha k v_R & (1-i)\beta k v_R \\ (1+i)\alpha k v_R & \alpha v_R & (1-i)\alpha k v_R & (1-i)\beta k v_R \\ (1-i)\alpha k v_R & (1+i)\alpha k v_R & \alpha k^2 & (1+i)\beta k^2 \\ (1+i)\beta k v_R & (1+i)\beta k v_R & (1-i)\beta k^2 & \beta k^2 \end{pmatrix}, \tag{3-110}$$

$$M^{2++} = \begin{pmatrix} \rho v_R^2 & [(1+i)\beta + i\rho]k^2 \\ [(1-i)\beta - i\rho]k^2 & \beta v_R^2 \end{pmatrix}. \tag{3-111}$$

habiendo tomado una magnitud para v_R de 10 GeV, lo cual está de acuerdo con las restricciones experimentales provenientes de los neutrinos, y un valor de 0,7 para los parámetros libres adimensionales del potencial. Lo que se encontró es que, en este modelo con violación de CP máxima tanto en el sector de quarks como en el sector de leptones, el bosón escalar neutro ϕ_F^0 que contiene una significante mezcla de ϕ_+^i es lo suficientemente ligero para permitir la existencia de grandes $CNCS$. Por lo tanto, este tipo de modelo es experimentalmente inaceptable.

3.8.2. Violación de CP máxima en el sector de quarks

Para el caso en el cual $\alpha = \pi/2$ y $\theta = 0$, el efecto de las fases presentes en la violación CP será máximo en el sector de quarks y nula para el sector leptónico. Para este caso las ligaduras del potencial se reduce en uno ya que α toma el valor de cero, y entonces el potencial no dependerá de este parámetro. Por lo anterior

$$\begin{aligned} \beta_2 =& \frac{1}{k_1^2}\left[\beta_3 k_2^2 - (2\rho_1 - \rho_3)v_L v_R\right], \\ \lambda_2 =& \frac{\lambda_3}{2} - \frac{1}{4(k_2^2 - k_1^2)}\left[\frac{\alpha_3}{2}(v_L^2 + v_R^2) + (\beta_2 + \beta_3)v_L v_R\right], \\ \mu_1^2 =& -2(2\lambda_2 - \lambda_3)k_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_1(v_L^2 + v_R^2) + \lambda_1(k_1^2 + k_2^2) + \beta_2 v_L v_R, \end{aligned}$$

$$\mu_2^2 = \frac{\lambda_4}{2}(k_1^2 + k_2^2) + \frac{1}{2}\alpha_2(v_L^2 + v_R^2) + \frac{\beta_1}{4}v_L v_R,$$
$$\mu_3^2 = \frac{1}{2}\alpha_1(k_1^2 + k_2^2) + \frac{\alpha_3}{2}k_2^2 + \rho_1(v_L^2 + v_R^2).$$

Introduciendo estas condiciones de minimización en las matriz de masa para los escalares neutros y trabajando en las bases $\left\{\phi_-^r, \phi_+^r, \delta_R^r, \delta_L^r, \phi_-^i, \phi_+^i, \delta_R^i, \delta_L^i\right\}$ y $\left\{\phi_-^+, \phi_+^+, \delta_R^+, \delta_L^+\right\}$, a través de las matrices de rotación R y R_+ respectivamente, se encuentra las siguientes matrices de masa para los bosones escalares neutros, una vez cargados y dos veces cargados

$$M^2 = \begin{pmatrix} M_{B11}^2 & M_{B12}^2 \\ {M_{B12}^2}^T & M_{B22}^2 \end{pmatrix}, \tag{3-112}$$

$$M_{B11}^2 = \begin{pmatrix} \alpha v_R^2 & (\lambda+\beta)k^2 & \alpha k v_R & (2\rho_1 - \rho_3)k v_R \\ (\lambda+\beta)k^2 & \alpha v_R & \alpha k v_R & \beta k v_R \\ (1-i)\alpha k v_R & (1+i)\alpha k v_R & \alpha k^2 & (2\rho_1+\rho_3)k^2/2 \\ (2\rho_1-\rho_3)k v_R & \beta k v_R & (2\rho_1+\rho_2)k^2/2 & (\rho_3 - 2\rho_1)v_R^2/2 \end{pmatrix}, \tag{3-113}$$

$$M_{B12}^2 = \begin{pmatrix} \beta k^2 & \alpha v_R^2 & 0 & \beta k v_R \\ (\lambda+\beta)k^2 & \alpha v_R & \alpha k v_R & [\beta+\rho_3-2\rho_1]k v_R \\ 0 & \alpha k v_R & 0 & \beta k^2 \\ \beta k v_R & [\beta+\rho_3-2\rho_1]k v_R & \beta k^2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3-114}$$

$$M^{2+} = \begin{pmatrix} M_{B11}^{2+} & M_{B12}^{2+} \\ {M_{B12}^{2+}}^T & M_{B22}^{2+} \end{pmatrix}, \tag{3-115}$$

$$M_{B11}^{2+} = \begin{pmatrix} \alpha v_R^2 & -i\alpha v_R^2 \\ i\alpha v_R^2 & \alpha v_R^2 \end{pmatrix}, \tag{3-116}$$

$$M_{B12}^{+} = \begin{pmatrix} (1-i)\alpha k v_R & i[\left((\rho_3 - 2\rho_1/\sqrt{2})\right) - (1-i)\beta]k v_R \\ (1+i)\alpha k v_R & [(1+i)\beta - i\left((\rho_3 - 2\rho_1/\sqrt{2})\right)]k v_R \end{pmatrix}, \tag{3-117}$$

$$M_{B22}^{+} = \begin{pmatrix} \alpha k^2 & [i\left((2\rho_1 - \rho_3/2)\right) + (1-i)\beta]k^2 \\ [-i\left((2\rho_1 - \rho_3/2)\right) + (1-i)\beta]k^2 & 2(\rho_3 - 2\rho_1)v_R^2 \end{pmatrix}. \tag{3-118}$$

Al realizar un análisis numérico se encuentra un bosón escalar neutro ϕ_F^0 conteniendo una significante mezcla de ϕ_+^i , lo cual quiere decir que este modelo es también inaceptable. Por lo anterior, se puede concluir que, independientemente de los valores que la fase de CP espontánea θ tome, no es posible obtener un MSID experimentalmente consistente si el monto de la violación de CP en el sector de quarks es máximo.

3.8.3. Violación de CP máxima en el sector leptónico

Para el caso en el cual $\alpha = 0$ y $\theta = \pi/2$, el efecto de las fases presentes en la violación de CP es máximo en el sector de quarks y nula para el sector leptónico. Para este caso las ligaduras del potencial se reduce en uno, ya que θ en este caso toma el valor de cero, y el potencial no dependería de este parámetro. Por lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
\rho_1 =& \frac{\rho_3}{2},\\
\beta_2 =& -\frac{1}{k_1^2}(\beta_1 k_1 k_2 + \beta_3 k_2^2),\\
\mu_1^2 =& \lambda_1(k_1^2 + k_2^2) + 2\lambda_4 k_1 k_2 + \frac{\alpha_1(k_1^2 - k_2^2) - \alpha_3 k_2^2}{2(k_1^2 - k_2^2)}(v_L^2 + v_R^2),\\
\mu_2^2 =& (2\lambda_2 + \lambda_3)k_1 k_2 + \frac{\lambda_4}{2}(k_1^2 + k_2^2) + \frac{2\alpha_2(k_1^2 - k_2^2) + \alpha_3 k_2^2}{4(k_1^2 - k_2^2)}(v_L^2 + v_R^2),\\
\mu_3^2 =& \frac{1}{2}\left[\alpha_1(k_1^2 + k_2^2) + 4\alpha_2 k_1 k_2 + \frac{\alpha_3}{2}k_2^2 + \rho_1(v_L^2 + v_R^2)\right].
\end{aligned}$$

Las matrices de masa para los bosones escalares neutros una vez cargados y dos veces cargados en las nuevas bases son

$$M^2 = \begin{pmatrix}
\lambda k^2 & \lambda k^2 & 0 & 0 & \beta k^2 & \beta k^2 & \alpha k v_R & 0\\
\lambda k^2 & \alpha v_R^2 & 0 & 0 & \beta k^2 & \beta k^2 & \alpha k v_R & \beta k v_R\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta k v_R & \rho_3 k^2 & 0\\
\beta k^2 & \beta k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\beta k^2 & \beta k^2 & 0 & \beta k^2 & 0 & \alpha v_R^2 & 0 & 0\\
\alpha k v_R & \alpha k v_R & 0 & \rho_3 k^2 & 0 & 0 & \rho_3 v_R^2 & 0\\
0 & \beta k v_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}, \tag{3-119}$$

$$M^{2+} = \begin{pmatrix}
\alpha v_R^2 & 0 & i\alpha k v_R & i\beta k v_R\\
0 & 0 & 0 & 0\\
-i\alpha k v_R & 0 & \alpha k^2 & \beta k^2\\
-i\beta k v_R & 0 & \beta k^2 & \alpha k^2
\end{pmatrix}, \tag{3-120}$$

$$M^{2++} = \begin{pmatrix}
\rho v_R^2 & (\beta + i\rho)\, k^2\\
(\beta - i\rho)\, k^2 & \alpha k^2
\end{pmatrix}. \tag{3-121}$$

3.8.4. Violación de CP nula

Para el caso en el cual $\alpha = 0$ y $\theta = 0$, el efecto de las fases presentes en la violación CP se anula, por lo tanto el potencial toma la forma

$$\begin{aligned}
V_\Phi =& -\frac{\mu_1^2}{2}(k_1^2 + k_2^2) - 2\mu_2^2\,[k_1 k_2] + \frac{\lambda_1}{4}\left(k_1^4 + 2k_1^2 k_2^2 + k_1^4\right)\\
&+ 2\lambda_2 k_1^2 k_2^2 + \lambda_3 k_1^2 k_2^2 + \lambda_4 (k_1^2 + k_2^2)\,[k_1 k_2]\,,
\end{aligned} \tag{3-122}$$

$$V_{\triangle} = -\frac{\mu^3}{2}\left(v_L^2 + v_R^2\right) + \frac{\rho_1}{4}(v_L^4 + v_R^4) + \frac{\rho_3}{4}v_L^2 v_R^2, \tag{3-123}$$

$$\begin{aligned} V_{\Phi\triangle} =& \frac{\alpha_1}{4}\left[(k_1^2 + k_2^2)\left(v_L^2 + v_R^2\right)\right] + \alpha_2 k_1 k_2 \left(v_L^2 + v_R^2\right) \\ &+ \frac{\alpha_3}{4}k_2^2\left(v_L^2 + v_R^2\right) + \frac{\beta_1}{2}k_1 k_2 v_R v_L + \frac{\beta_2}{2}k_1^2 v_L v_R + \frac{\beta_3}{2}k_2^2 v_L v_R, \end{aligned} \tag{3-124}$$

con lo cual el número de ligaduras del potencial se reduce en dos y toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial k_1} =& -\mu_1^2 k_1 - 2\mu_2^2 k_2 + \lambda_1(k_1^3 + k_2^2 k_1) + 4\lambda_2 k_1 k_2^2 + 2\lambda_3 k_1 k_2^2 + \lambda_4(3k_1^2 k_2 + k_2^3) \\ &+ \frac{\alpha_1}{2}k_1\left(v_L^2 + v_R^2\right) + \alpha_2 k_2\left(v_L^2 + v_R^2\right) + \frac{\beta_1}{2}k_2 v_L v_R + \beta_2 k_1 v_L v_R = 0, \end{aligned} \tag{3-125}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial k_2} =& -\mu_1^2 k_2 - 2\mu_2^2 k_1 + \lambda_1(k_2^3 + k_1^2 k_2) + 4\lambda_2 k_2 k_1^2 + 2\lambda_3 k_2 k_1^2 + \lambda_4(3k_2^2 k_1 + k_1^3) \\ &+ \frac{\alpha_1}{2}k_2\left(v_L^2 + v_R^2\right) + \alpha_2 k_1\left(v_L^2 + v_R^2\right) + \frac{\alpha_3}{2}k_2\left(v_L^2 + v_R^2\right) + \frac{\beta_1}{2}k_1 v_L v_R + \beta_3 k_2 v_L v_R = 0. \end{aligned} \tag{3-126}$$

Multiplicando (3-125) por $-k_2$ y a (3-126) por k_1 y sumándolas tenemos

$$\begin{aligned} \mu_2^2 =& (2\lambda_2 - \lambda_3)k_1 k_2 + \frac{\lambda_4}{2}(k_1^2 + k_2^2) \\ &+ \frac{1}{4(k_1^2 - k_2^2)}\left[\left(\beta_1(k_1^2 - k_2^2\right) - 2k_1 k_2(\beta_2 - \beta_3)\right] v_L v_R \\ &+ \left[2\alpha_2(k_1^2 - k_2^2) + \alpha_3 k_1 k_2\right](v_L^2 + v_R^2). \end{aligned} \tag{3-127}$$

Ahora sumando (3-125) con (3-126), tenemos

$$\begin{aligned} \mu_1^2 =& \lambda_1(k_1^2 + k_2^2) + 2\lambda_4 k_1 k_2 \\ &+ \frac{1}{4(k_1^2 - k_2^2)}\left[2\left(\beta_2 k_1^2 - \beta_3 k_2^2\right) v_L v_R + \left[\alpha_1(k_1^2 - k_2^2) - \alpha_3 k_2^2\right](v_R^2 + v_L^2)\right]. \end{aligned} \tag{3-128}$$

Para los demás parámetros

$$\begin{aligned} \beta_2 =& \frac{1}{k_1^2}\left(-\beta_1 k_1 k_2 - \beta_3 k_2^2 + (2\rho_1 - \rho_3)v_L v_R\right), \\ \mu_3^2 =& \frac{1}{2}\left[\alpha_1(k_1^2 + k_2^2) + 4\alpha_2 k_1 k_2 + \alpha_3 k_2^2 + 2\rho_1(v_L^2 + v_R^2)\right], \end{aligned}$$

Las matrices de masa para los bosones escalares neutros una vez cargados y dos veces cargados son

$$M^2 = \begin{pmatrix} M_{B11}^2 & 0 \\ 0 & M_{B22}^2 \end{pmatrix}, \tag{3-129}$$

$$M_{B11}^2 = \begin{pmatrix} \lambda k^2 & \lambda k^2 & \alpha k v_R & (2\rho_1 - \rho_3) k v_R \\ \lambda k^2 & \alpha k v_R^2 & \alpha k v_R & \beta k v_R \\ \alpha k v_R & \alpha k v_R & 2\rho_1 v_R^2 & (2\rho_1 + \rho_3) k^2/2 \\ (2\rho_1 - \rho_3) k^2 v_R & \beta k v_R & (2\rho_1 + \rho_3) k^2/2 & (\rho_3 - 2\rho_1) v_R^2/2 \end{pmatrix}, \tag{3-130}$$

$$M_{B22}^2 = \begin{pmatrix} 2(\rho_3 - 2\rho_1) k^2 & [\beta - 2(\rho_3 - 2\rho_1)]\, k^2 & 0 & (\rho_3 - 2\rho_1) k v_R \\ [\beta - 2(\rho_3 - 2\rho_1)]\, k^2 & \alpha v_R^2 & 0 & [\beta - 2(\rho_3 - 2\rho_1)]\, k v_R \\ 0 & 0 & 0 & (2\rho_1 - \rho_3) v_R^2/2 \\ (\rho_3 - 2\rho_1) k v_R & [\beta - 2(\rho_3 - 2\rho_1)]\, k^2 v_R & (2\rho_1 - \rho_3) k^2/2 & (\rho_3 - 2\rho_1) v_R^2/2 \end{pmatrix}, \tag{3-131}$$

$$M^{2+} = \begin{pmatrix} \alpha v_R^2 & \beta k^2 & \alpha v_R & \beta k v_R \\ \beta k^2 & (\rho_3 - 2\rho_1) k^2 & 0 & \left[(\rho_3 - 2\rho_1/\sqrt{2})\right] k v_R \\ \alpha k v_R & 0 & \alpha k^2 & [\beta + (\rho_3 - 2\rho_1)/4)]\, k^2 \\ (\rho_3 - 2\rho_1) k v_R & [\beta - 2(\rho_3 - 2\rho_1)]\, k^2 v_R & (2\rho_1 - \rho_3) k^2/2 & (\rho_3 - 2\rho_1) v_R^2/2 \end{pmatrix}, \tag{3-132}$$

$$M^{2++} = \begin{pmatrix} \rho v_R^2 & (\beta + \rho - \rho_3 + 2\rho_1)\, k^2 \\ (\beta + \rho - \rho_3 + 2\rho_1)\, k^2 & [(\rho_3 - 2\rho_1)/2]\, v_R^2 \end{pmatrix}$$

Para este último caso, el análisis numérico conduce a las mismas conclusiones ya obtenidas por Deshpande et. al. [61]. En este modelo se encuentra que todos los bosones escalares que no tienen contrapartida en el MEE tienen una masa del orden de v_R, evitando así grandes CNCS. Este modelo es exactamente igual al MEE en el límite en el cual v_R tiende al infinito. Si se comparan el espectro de masas, para los escalares de los casos III y IV, se encuentra que el valor que θ toma sólamente afecta el orden de las masas de las partículas escalares y no el monto de las CNCS. Así se puede concluir de los dos últimos casos que, independientemente del valor que la fase de CP espontánea θ tome, se tendrá un MSID experimentalmente consistente si no hay violación de CP en el sector de quarks. Para evitar un origen explícito de la violación de CP en el sector de quarks, se tiene que ajustar α de tal manera que sea lo suficientemente pequeño como para que no cambie las principales propiedades y resultados encontrados, y que conduzca al valor experimental correcto para la fase de la matriz de CKM del MEE.

3.9. Conclusiones

El MSID permite dar una explicación natural al origen de la violación de la simetría de paridad (P) y también al origen de la violación de la simetría carga-paridad (CP). Este modelo no presenta grandes CNCS que entren en conflicto con los datos experimentales y ofrece un rico mundo en fenomenología, de violación de CP en el sector de leptones y nuevos bosones de Higgs neutros, una vez cargados y dos veces cargados en la escala electrodébil.

Se ha presentado un análisis numérico detallado de la relación existente entre las CNCS y las dos fases de CP espontáneas presentes en el MSID. Cada fase de CP espontánea está relacionada con uno de los sectores de materia: el de quarks o el de leptones. Diferentes combinaciones de valores nulos o máximos entre las dos fases de CP espontáneas conducen a cuatro casos diferentes correspondientes a violación de CP máxima o nula en el sector de quarks y en el de leptones.

El resultado principal de este capítulo es haber establecido que la única manera de suprimir las CNCS es ajustar cerca a cero la fase de CP espontánea asociada con el sector de quarks, como en los casos III y IV. Entonces, el monto de violación de CP en el sector de leptones no depende de las restricciones teóricas estudiadas en este capítulo.

4. Generación de masa de neutrinos

4.1. Introducción

El mecanismo see saw (MSS) permite explicar el origen de las masas de los neutrinos de un modo natural gracias a la introducción de singletes pesados (o tripletes) de $SU(2)_L$, a escalas de energía mucho mayores que la electrodébil [62, 63, 64, 65]. Dicho mecanismo puede contribuir, a su vez, a proporcionar una posible explicacíon a la asimetría materia-antimateria a través del mecanismo de leptogenésis. A través del MSS es posible general las matrices de masa y de mezcla de neutrinos, de tal forma que el fenḿeno de oscilaciones de neutrinos puede ser entendido de forma satisfactoria. Para esto, resulta indispensable tener en cuenta que los experimentos de oscilaciones de neutrinos han tenido un destacado desarrollo en cuanto a la obtención de medidas precisas sobre las diferencias de masa de los neutrinos, sobre las fases de violacióon de CP y sobre los ángulos de mezcla del sector leptónico. La escala absoluta de las masas de los neutrinos, así como su naturaleza de Dirac o de Majorana, son aspectos que actualmente también están siendo investigados experimentalmente.

Una consecuencia que surge del MSS, ya sea de tipo I o tipo III (que son los casos que se consideran en este trabajo de tesis), es que los neutrinos de quiralidad izquierda se pueden mezclar con fermiones pesados de Majorana. En realidad, incluso si sólamente los leptones cargados se mezclaran con nuevos fermiones también aparecerían este tipo de efectos, surgiendo matrices de mezcla (unitarias) de dimensión mayor que 3, pero con una submatriz no necesariamente unitaria para los campos ligeros. Por tanto, la observación de desviaciones de unitariedad podría implicar la existencia de nueva física a altas energías.

En este capítulo inicialmente se estudia el lagrangiano de Yukawa del MEE con el fin de mostrar expl(́i)citamente la ausencia de masa para los neutrinos de este modelo. A continuación se considera la extensión mínima del MEE, denominada Modelo de Majorana, que conduce al término de masa de Dirac-Majorana. Posteriormente se implementa el MSS en el Modelo de Majorana con el fin de ilustrar la generación de masas pequeãas para los neutrinos de quiralidad izquierda. A continuación se implementa el MSS tipo I en el M2DH-III extendido y en el MSID-II. Finalmente se considera el MSS tipo III e híbrido (mezcla tipo I y tipo III) en el M2DH-III.

4.2. Motivación

Considerando que el MSS se implementa en el MEE a través de una extensión poco natural del mismo, denominada extensión de Majorana, resulta interesante y motivante implementar el MSS de forma simple y elegante en algunos modelos más allá del MEE. Precisamente en este capítulo se estudia la implementación del MSS en el M2DH-III y en el MSID-II. Primero, respecto al M2DH-III se debe tener en cuenta que la fenomenología de este modelo en relación a los fermiones y a los bosones de gauge es la misma que la del MEE. La física nueva se encuentra en que el espectro de bosones de Higgs se amplia de uno en el MEE a cinco en el M2DH. Por esta razón es necesario extender el M2DH mediante la extensión de Majorana con el fin de implementar el MSS y dotar con masa muy pequeña a los neutrinos de quiralidad izquierda. Al igual que en el caso del MEE, el MSS en el M2DH resulta poco natural.

Por otra parte, puesto que el lagrangiano de Yukawa del MSID es totalmente real, entonces en el MSID no se tienen fases complejas explícitas. En el MSID debido a la inclusión de un bidoblete y dos tripletes de campos escalares, el sector escalar del MSID resulta muy interesante y presenta propiedades destacables. Entre ellas, podemos mencionar la presencia de dos fases complejas espontáneas con origen en la RES, la existencia de una amplia variedad de bosones escalares neutros, cargados, doblemente cargados, y la posibilidad de explicar el origen de la masa tan pequeña de los neutrinos de quiralidad izquierda de una forma satisfactoria mediante la implementación del MSS. La implementación del MSS en el MSID es bastante natural debido a que no es necesario meter a mano nuevos términos en el lagrangiano de Yukawa. Adicionalmente, el MSID permite explicar de una forma natural no solo el origen de la violación de CP sino también el origen de la violación de paridad (P), además de dar un significado físico al número cuántico de hipercarga (Y), identificándolo con la diferencia entre número bariónico y número leptónico ($B - L$) [52].

4.3. Lagrangiano de Yukawa en el MEE

El lagrangiano de Yukawa en el MEE está dado por

$$-\mathcal{L}_Y = \overline{L^0_{Li}}\eta^E_{ij}\Phi E^0_{Rj} + \overline{Q^0_{Li}}\eta^U_{ij}\widetilde{\Phi}U^0_{Rj} + \overline{Q^0_{Li}}\eta^D_{ij}\Phi D^0_{Rj} + h.c., \tag{4-1}$$

donde $\widetilde{\Phi} = i\tau_2\Phi^*$. A cada doblete se le asocian tres matrices η^X $(X = E, U, D)$ que corresponden a las constantes de acoplamiento de Yukawa entre el campo fermiónico y el campo de Higgs, las cuales son matrices adimensionales complejas 3×3 no-diagonales. El superíndice ^{0} indica que los campos no son, todavía, auto-estados de masa y los subíndices $i, j = 1, 2, 3$ son los índices de generación.

El lagrangiano corresponde a fermiones sin masa, no obstante, las masas aparecen cuando se rompe espntáneamente la simetría electrodébil, es decir cuando el VEV del campo de Higgs es diferente de cero. Sustituyendo los términos correspondientes obtenemos

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y &= \overline{e^0_{iL}}M^E_{ij}e^0_{jR} + \overline{u^0_{iL}}M^U_{ij}u^0_{jR} + \overline{d^0_{iL}}M^D_{ij}d^0_{jR} \\
&+ \frac{1}{v}\left[\overline{e^0_{iL}}M^E_{ij}e^0_{jR} + \overline{u^0_{iL}}M^U_{ij}u^0_{jR} + \overline{d^0_{iL}}M^D_{ij}d^0_{jR}\right](h^o + i\eta^o) \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{v}\left[\overline{\nu^0_{iL}}M^E_{ij}\phi^+e^0_{jR} - \overline{d^0_{iL}}M^U_{ij}\phi^-u^0_{jR} + \overline{u^0_{iL}}M^D_{ij}\phi^+d^0_{jR}\right] + h.c., \qquad (4\text{-}2)
\end{aligned}$$

donde se ha definido los elementos de la matriz de masa como $M^X_{ij} = \eta^X_{ij}v/\sqrt{2}$. Con lo anterior, es posible escribir el lagrangiano de Yukawa en forma matricial

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y &= \overline{E^0_L}M^E E^0_R + \overline{U^0_L}M^U U^0_R + \overline{D^0_L}M^D D^0_R \\
&+ \left[\overline{E^0_L}M^E E^0_R + \overline{D^0_L}M^D D^0_R\right]\frac{(h^o + i\eta^o)}{v} + \overline{U^0_L}M^U U^0_R\frac{(h^o - i\eta^o)}{v} \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{v}\left[\overline{N^0_L}M^E E^0_R\phi^+ + \overline{U^0_L}M^D D^0_R\phi^+ - \overline{D^0_L}M^U U^0_R\phi^-\right] + h.c. \qquad (4\text{-}3)
\end{aligned}$$

Ahora es posible convertir los campos del lagrangiano de Yukawa en auto-estados de masa a través de transformaciones unitarias definidas por las matrices unitarias S_L, $T_{L(R)}$, $V_{L(R)}$ y $W_{L(R)}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
N_L = S_L N^0_L, \qquad & E_L = T_L E^0_L, \qquad U_L = V_L U^0_L, \qquad D_L = W_L D^0_L, \\
& E_R = T_R E^0_R, \qquad U_R = V_R U^0_R, \qquad D_R = W_R D^0_R. \qquad (4\text{-}4)
\end{aligned}$$

Estas transformaciones unitarias también diagonalizan las matrices de masa, es decir

$$M^{diag}_E = T_L M^E T^\dagger_R, \quad M^{diag}_U = V_L M^U V^\dagger_R, \quad M^{diag}_D = W_L M^D W^\dagger_R. \qquad (4\text{-}5)$$

Definiendo las matrices $I = S_L T^\dagger_L$ y $V = V_L W^\dagger_L$ (llamada matriz de mezcla de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa o matriz CKM). Los elementos de estas matrices se han medido experimentalmente. Nótese que no existe mezcla en el sector leptónico debido que el acoplamiento de Yukawa entre el Higgs y los leptones es el mismo y la mezcla en el sector de quarks implica que los acoplamientos de Yukawa no actúan de manera igual sobre los quarks sino que se combinan entre ellos. Sustituyendo las matrices I y V, se encuentra que el lagrangiano de Yukawa tiene la forma explícita

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y &= m_{e_i}\overline{e_i}e_i + m_{u_i}\overline{u_i}u_i + m_{d_i}\overline{d_i}d_i \\
&+ \frac{g}{2M_w}\left(m_{e_i}\overline{e_i}e_i + m_{u_i}\overline{u_i}u_i + m_{d_i}\overline{d_i}d_i\right)h^o \\
&+ \frac{ig}{2M_w}\left(m_{e_i}\overline{e_i}\gamma^5 e_i - m_{u_i}\overline{u_i}\gamma^5 u_i + m_{d_i}\overline{d_i}\gamma^5 d_i\right)\eta^o \\
&+ \frac{gm_{e_1}}{\sqrt{2}M_w}\overline{\nu_i}P_R e_i\phi^+ + \frac{g}{\sqrt{2}M_w}\overline{u_i}\left[m_{d_j}P_R - m_{u_i}P_L\right]V_{ij}d_j\phi^+ \\
&+ \frac{gm_{e_1}}{\sqrt{2}M_w}\overline{e_i}P_L\nu_i\phi^- + \frac{g}{\sqrt{2}M_w}\overline{d_i}\left[m_{d_j}P_L - m_{u_i}P_R\right]V^*_{ij}u_j\phi^-, \qquad (4\text{-}6)
\end{aligned}$$

donde $M_W = gv/2$. Se puede observar que todos lo fermiones eléctricamente cargados adquieren masa, mientras que los neutrinos del MEE (de quiralidad izquierda) no adquieren masa. La razón por la cual los neutrinos del MEE no adquieren masa después de la RES electrodébil, es porque los neutrinos solamente tiene quiralidad izquierda (es decir no existen neutrinos de quiralidad derecha en el MEE).

4.4. Extensión de Majorana y término de masa de Dirac-Majorana

Consideramos el MEE extendido con la inclusión de la componente quiral derecha ν_R para el neutrino[1]. Tal componente derecha sería un singlete bajo todas las interacciones de $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, es decir, no presentaría interacciones electrodébiles sino únicamente de tipo gravitacional, por lo cual se denomina neutrino estéril. Esta inclusión implica que la densidad lagrangiana de Yukawa puede contener también un término de masa de Majorana para este campo estéril [18, 66]. Los términos de masa siempre mezclan campos con proyecciones de quiralidad opuestas. Si se tienen los campos v_L y N_R con quiralidades izquierda y derecha respectivamente, entonces los términos de de masa en el lagrangiano son

$$\mathcal{L}_Y^{MR} = \frac{1}{2} m_R \xi_R \nu_R^T \hat{C}^\dagger \nu_R + h.c., \tag{4-7}$$

siendo $\xi_R \equiv e^{i\delta_R}$ una fase propia del campo de quiralidad derecha. Por otro lado, ya que existe una componente de quiralidad derecha entonces el MEE permite la existencia de un término de masa de Dirac, que se generaría mediante la RES electrodébil, correspondiente a [18, 66]

$$\mathcal{L}_Y^D = -m_D \overline{\nu_R} \nu_L + h.c. \tag{4-8}$$

Por lo anterior, en general, es posible tener un término de Yukawa para el neutrino que involucre los términos de masa de Majorana para el campo quiral derecho e izquierdo y el término de masa de Dirac [18, 66]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^{M+D} &= \mathcal{L}_Y^{ML} + \mathcal{L}_Y^{MR} \mathcal{L}_Y^D \\ &= \frac{1}{2} m_L e^{i\delta_L} \nu_L^T \hat{C}^\dagger \nu_L + \frac{1}{2} m_R e^{i\delta_R} \nu_R^T \hat{C}^\dagger \nu_R - m_D \overline{\nu_R} \nu_L + h.c. \end{aligned} \tag{4-9}$$

Este término de masa se denomina término de masa de Dirac-Majorana. Es importante ver que, a diferencia de todos los demás fermiones del MEE (quarks y leptones cargados), el neutrino es el único campo que puede poseer términos de masa de Majorana. Además, es de notarse que al incluir el término de Majorana se está suponiendo la violación del número

[1] adición de un nuevo término (acople) en el lagrangiano de Yukawa

leptónico [67]. Nótese que en el término de masa de Majorana del neutrino ν_R, se puede eliminar la fase que aparece en el término (4-7) [18]

$$\nu_R \rightarrow e^{-i\frac{\delta_R}{2}}\nu_R, \tag{4-10}$$

no obstante, esta transformación altera el término de Dirac $(4-8)$, por lo que es necesario realizar una transformación del campo $\nu_R \rightarrow e^{-i\frac{\delta_R}{2}}\nu_R$ con el fin de que la masa de Dirac sea real y positiva. Sin embargo, la transformación de ν_R afecta el término de Majorana asociado a tal campo, por lo que es evidente que la masa m_L está multiplicada por una fase. Además, ya que tal fase no puede eliminarse sin alterar las otras partes del término de masas, se evidencia que m_L es compleja [18]. No obstante, a diferencia del estudio de las oscilaciones, es posible considerar aquí que la masa m_L en general pertenece a los complejos, ya que los campos quirales no son observables físicamente y no corresponden a los estados con masa definida. Sin embargo, por simplicidad en el tratamiento, se considerará m_L real [18].

Por otro lado, aunque el término de masa de Majorana para ν_L no está permitido por las simetrías del MEE, como ya fue mencionado, el término de masa de Majorana de ν_R si lo está, por lo que si en el término de Dirac-Majorana se tuviera $m_L = 0$, entonces el término de masa de Majorana de ν_R estaría permitido en el marco del MEE extendido con el singlete con quiralidad derecha ν_R. Ahora bien, sin tener en cuenta la permisividad o no del término de Dirac-Majorana en el MEE, es necesario estudiar las consecuencias del mismo en las propiedades del neutrino. Para tal fin, se reescribirá el término $(4-9)$ de la siguiente manera [18, 66]

$$\mathcal{L}_Y^{M+D} = \frac{1}{2}N_L^T\hat{C}^\dagger M N_L + h.c., \tag{4-11}$$

con [18, 66]

$$N_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \hat{C}\overline{\nu_R}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix}, \qquad M_\nu = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}, \tag{4-12}$$

donde $\nu_R^c \equiv (\nu_R)^c$. Es evidente aquí que los campos ν_L y ν_R no poseen masas bien definidas debido a la existencia del término de Dirac. Por tanto, es necesario diagonalizar la matriz M_ν, lo cual se se llevará a cabo mediante la transformación unitaria [18][66]

$$N_l = U n_L, \tag{4-13}$$

siendo

$$n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix}, \tag{4-14}$$

los campos con masas bien definidas. La matriz U debe ser tal que

$$U^T M_\nu U = diag(m_1, m_2), \tag{4-15}$$

con $m_\alpha \geq 0$. La transformación anterior permite escribir la densidad $(4-11)$ como

$$\mathcal{L}_Y^{M+D} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1,2} m_\alpha \nu_{\alpha L}^T \hat{C}^\dagger \nu_{\alpha L} + h.c., \tag{4-16}$$

en donde es evidente que la diagonalización del término de Dirac-Majorana implica que los campos con masas bien definidas son fermiones del tipo Majorana. Por otro lado, es necesario no confundir la anterior diagonalización con el estudio que se presentará en el siguiente capítulo sobre las oscilaciones de neutrinos de Majorana. En el estudio de la diagonalización se partirá del hecho de que deben existir al menos dos campos de sabor con el fin de que haya oscilaciones, mientras que aquí se posee un único campo de sabor ν_L , por tanto no es posible que haya oscilaciones de sabor. Sin embargo, como se verá más adelante, existe la posibilidad de que haya oscilaciones entre estados activos (de sabor) y estériles.

Para encontrar los valores de las masas m_α se tomará la siguiente matriz de mezcla [18, 5]

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix}, \tag{4-17}$$

con el ángulo de mezcla θ entre los campos activos y estériles definidos por

$$\tan 2\theta = \frac{2m_D}{m_R - m_L}, \tag{4-18}$$

y φ_α definido para que las masas sean positivas. Las masas de los estados masivos están dadas por [18, 66]

$$m_{1,2} = \frac{1}{2}\left[m_L + m_R \pm \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D} - (m_L + m_R)\right]\varphi_{2,1}^2. \tag{4-19}$$

Ya que $m_2 > 0$, en todos los casos, se puede elegir $\varphi_2 = 1$, mientras que para m_1 existe la posibilidad de que sea negativo si $m_L m_R < m_D^2$, por tanto es necesario que [18, 5]

$$\varphi_1 = i, \tag{4-20}$$

por lo cual

$$m_1 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D} - (m_L + m_R)\right], \tag{4-21}$$

de esta manera, se obtiene la matriz de mezcla dada por [18, 5]

$$U = \begin{pmatrix} i\cos\theta & \sin\theta \\ -i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{4-22}$$

Por otro lado, si $m_L m_R > m_D^2$ se tiene que $\varphi = 1$, por lo que la matriz de mezcla estará dada por [18, 5, 66]

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{4-23}$$

Adicionalmente, es importante tener en cuenta el significado de los campos quirales ν_L y ν_R^c, y los campos masivos ν_{1L} y ν_{2L}. Los campos ν_L y ν_R^c son campos activos y estériles respecto a las interacciones débiles, como ya se había mencionado, mientras que el término de masa de Dirac implica la posibilidad de que se presenten oscilaciones entre neutrinos estériles y activos. Así, si un neutrino se crea en un proceso de interacción débil, la densidad lagrangiana de tal proceso de corriente cargada está dada por [18]

$$\mathcal{L}^{cc} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=1,2} (U_{1\alpha}^{\star} \overline{\nu_{\alpha L}} \gamma^{\mu} \alpha_L W_{\mu}) + h.c., \tag{4-24}$$

por lo que en un proceso dado, se tiene la superposición de los dos neutrinos masivos. De esta manera, al evolucionar en el espacio-tiempo, y debido a que las fases de estos poseen distintas evoluciones, existe una probabilidad oscilatoria de la componente activa. Evidentemente, la componente estéril no se puede detectar, pero su efecto se percibe en la desaparición del neutríno activo [18].

A continuación, se estudiarán cuatro distintos escenarios para los posibles valores de las masas m_l, m_R, m_D [18].

4.4.1. Mezcla máxima

Para este caso se supone que

$$m_L = m_R, \tag{4-25}$$

así los valores de las masas de los campos con masas definidas serán

$$m_{1,2} = m_L \pm m_D, \tag{4-26}$$

si $m_D < m_L$ y por tanto, $\varphi_1 = 1$ y el ángulo de mezcla $\theta = \frac{\pi}{4}$. Ahora, si $m_D > m_L$, $\varphi_1 = i$ y el ángulo de mezcla será de nuevo $\theta = \frac{\pi}{4}$, dando como resultado

$$\nu_{1L} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\nu_L - \nu_R^c), \tag{4-27}$$

$$\nu_{2L} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_L - \nu_R^c), \tag{4-28}$$

4.4.2. Límite de Dirac

Para este caso se tiene que

$$m_L = m_R = 0, \tag{4-29}$$

por lo tanto los neutrinos son partículas masivas de Dirac implicando que

$$m_1 = m_D \Longrightarrow \varphi_1 = i, \tag{4-30}$$

$$m_2 = m_D \Longrightarrow \varphi_2 = 1, \tag{4-31}$$

con lo cual es evidente que los dos neutrinos masivos poseen la misma masa y paridades de CP opuestas. Es este caso se puede definir el campo de Dirac

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\nu_1 + \nu_2) = \nu_L + \nu_R, \tag{4-32}$$

así puede decir que un campo de Dirac neutro es equivalente a dos campos de Majorana con masas degeneradas y paridades de CP opuestas.

4.4.3. Neutrinos pseudo-Dirac

Otro caso interesante es aquel en el que

$$m_L, m_R \ll m_D, \tag{4-33}$$

por lo que se tiene que

$$m_{1,2} \approx \left(\frac{m_L + m_R}{2} \pm m_D\right)\varphi_{2,1}^2. \tag{4-34}$$

En este caso se observa que $m_1 < 0$, por lo que se debe definir $\varphi_1 = i$, con lo cual

$$m_{1,2} \approx m_D \pm \frac{m_L + m_R}{2}, \tag{4-35}$$

así los dos estados masivos de neutrino tienen paridades CP opuestas y son casi degenerados en masas, por eso se les denomina neutrinos pseudo-Dirac, ya que resulta muy difícil de distinguirlos de los neutrinos de Dirac obtenidos en la anterior sección. La única manera de revelar que son neutrinos tipo pseudo-Dirac, es a través de las oscilaciones neutrino activo-estéril.

4.5. Mecanismo see saw (MSS)

4.5.1. MSS para el caso de una generación

El escenario más interesante e importante que se presenta en el término de Dirac-Majorana es aquel en el que [18, 5, 66]

$$m_D \ll m_R, m_L = 0. \tag{4-36}$$

La última suposición es natural e implica que el término de Dirac-Majorana respeta las simetrías del MEE, como ya había sido mencionado. Además, las masas de las partículas con masas definidas toman la forma [18, 66]

$$m_1 \approx -\frac{m_D^2}{m_R}\varphi_1^2, \tag{4-37}$$

$$m_2 \approx m_R. \tag{4-38}$$

Como es posible observar, en este caso se tiene que ν_2 es muy pesado y ν_1 es muy ligero, ya que su masa está suprimida por la razón $\frac{m_D}{m_R}$, respecto a m_D. Ahora bien, se tiene que el ángulo de mezcla es muy pequeño [18, 5]

$$\tan 2\theta = \frac{m_D}{m_R} \ll 1, \tag{4-39}$$

lo cual implica que

$$\theta \approx \frac{m_D}{m_R} \ll 1, \tag{4-40}$$

luego los campos tendrán la expansión [18, 5]

$$\nu_{1L} = -i\cos\theta\nu_L + \sin\theta\nu_R^c \approx -i\nu_L, \tag{4-41}$$

$$\nu_{2L} = i\sin\theta\nu_L + \cos\theta\nu_R^c \approx \nu_R^c, \tag{4-42}$$

con lo cual el campo activo ν_L está mayormente compuesto por el campo con masa pequeña ν_{1L}, mientras que el campo estéril está compuesto por el campo ν_{2L} supermasivo. Este es el conocido mecanismo see saw (balancín, en español), ya que cuanto mayor sea m_R, m_L será más pequeño, por lo cual, el MSS da una muy satisfactoria explicación de la pequeñez de la masa del neutrino activo comparada con la masa de los demás fermiones del MEE. Esto se hace evidente si se tiene en cuenta que la masa de Dirac m_D debe ser del orden de los 10^2 GeV, es decir del orden de la escala de RES electrodébil, ya que el término de masa de Dirac está protegido por las simetrías del MEE.

Por otro lado, ya que el término de masa de Majorana de ν_R no está protegido por el MEE, este debe tener el orden de magnitud del rompimiento de simetría de la teoría unificada a altas energías. Por ende, el neutrino ligero está suprimido por una razón muy pequeña $\frac{m_D}{m_R} \sim 10^{-14} - 10^{-12}$ respecto a la masa del leptón cargado y del quark tipo *up* de la misma familia [18].

4.5.2. Término de Dirac-Majorana para n generaciones

Hasta ahora la discusión de la generación de masa para los neutrinos fue realizada para el caso en el cual se consideraba una única generación. Aunque se sabe que existen tres generaciones de fermiones a partir de los distintos datos experimentales [68], en la presente sección se desarrollará el estudio del término de masa de Dirac-Majorana para el caso en el que existan n-generaciones para dar un tratamiento lo más general posible.Por tanto, existirán n-campos activos $\nu_{\alpha iL}$ (α_n sabores correspondientes) y se incluirán al MEE n-campos estériles ν_{sR}. De esta manera, se tendrá que el término de masa de Dirac-Majorana es ahora

$$\mathcal{L}_Y^{M+D} = \mathcal{L}_Y^{ML} + \mathcal{L}_Y^{MR} + \mathcal{L}_Y^{D}, \tag{4-43}$$

siendo

$$\mathcal{L}_Y^{ML} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \nu_{\alpha iL}^T \hat{C}^\dagger M_L^{\alpha_i\alpha_j} \nu_{\alpha_j L} + h.c., \tag{4-44}$$

$$\mathcal{L}_Y^{MR} = \frac{1}{2}\sum_{s,s'=1}^{n} \nu_{sR}^T \hat{C}^\dagger M_R^{ss'} \nu_{s'R} + h.c., \tag{4-45}$$

$$\mathcal{L}_Y^{D} = -\sum_j \sum_s \overline{\nu_{sR}} M_D^{s\alpha_j} \nu_{\alpha_j L} + h.c. \tag{4-46}$$

Las matrices M_L, M_R y M_D son matrices $n \times n$ y se tomarán como complejas, además las matrices de Majorana M_L y M_R corresponden a matrices simétricas. De manera similar al caso de una generación, se definirán los vectores

$$N_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \hat{C}\overline{\nu_R}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix}, \tag{4-47}$$

con

$$\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{\alpha_1 L} \\ \vdots \\ \nu_{\alpha_n L} \end{pmatrix}, \qquad \nu_R^c = \begin{pmatrix} \nu_{s_1 R}^c \\ \vdots \\ \nu_{s_n R}^c \end{pmatrix} \tag{4-48}$$

y la matriz simetríca de $2n \times 2n$

$$M_\nu^{M+D} = \begin{pmatrix} M_L & (M_D)^T \\ M_D & M_R \end{pmatrix}. \tag{4-49}$$

Por tanto, el término de masa de Dirac-Majorana puede escribirse como

$$\mathcal{L}_Y^{M+D} = \frac{1}{2} N_L^T \hat{C}^\dagger M_\nu^{M+D} N_L + h.c. \tag{4-50}$$

De nuevo, los campos de neutrinos con masas definidas se escribirán mediante el uso de la matriz unitaria V_L^ν

$$N_L = V_L^\nu n_L \qquad con\ n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \vdots \\ \nu_{2nL} \end{pmatrix}, \tag{4-51}$$

de esta manera es evidente que por cada n-generaciones de neutrinos existirán $2n$-campos con masas definidas, ya que se ha supuesto la existencia de un neutrino estéril por cada generación. Este supuesto se ha tomado por simplicidad, ya que no existe ninguna restricción sobre el número de campos estériles en la teoría. Ahora bien, la matriz unitaria $V_L^\nu n_L$ se escoge para diagonalizar la matriz M_ν^{M+D}

$$(V_L^\nu)^T M_\nu^{M+D} V_L^\nu = M_\nu, \qquad con\ (M_\nu)_{ab} = m_a \delta_{ab} \quad (a, b = 1, \dots, 2n), \tag{4-52}$$

por tanto, los campos con masas definidas serán fermiones de Majorana ya que

$$\mathcal{L}_Y^{M+D} = \frac{1}{2} n_L \hat{C}^\dagger M_\nu n_L + h.c. = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{2n} \nu_{aL}^T \hat{C}^\dagger \nu_{aL} + h.c. \tag{4-53}$$

4.5.3. MSS para el caso de n generaciones

En el caso de n-generaciones, la diagonalización de la matriz M_ν^{M+D} no es trivial, por lo cual es necesario tomar algún tipo de aproximación. La aproximación más adecuada es considerar el escenario de see saw, similar al caso de una generación, por lo cual se elegirá $M_L = 0$. Así, la matriz M_ν^{M+D} toma la forma

$$M_\nu^{M+D} = \begin{pmatrix} 0 & (M_D)^T \\ M_D & M_R \end{pmatrix}. \tag{4-54}$$

Adicionalmente, se supone que los elementos de la matriz M_R son mucho más grandes que los elementos de M_D

$$(M_D)_{kj} \ll (M_R)_{kj}. \tag{4-55}$$

La justificación física de estas consideraciones es la misma que en el caso de una generación, M_L está prohibida por las simetrías del MEE, mientras que M_R se genera por la física de altas energías. Si se cumple que los valores propios de M_R son mucho más grandes que los valores propios de M_D, la matriz $(4-54)$ puede diagonalizarse por bloques, hasta términos de orden $(M_R)^{-1} M_D$

$$(W_L^\nu)^T M_\nu^{M+D} W_L^\nu = \begin{pmatrix} M_{Lig} & 0 \\ 0 & M_{Pes} \end{pmatrix}, \tag{4-56}$$

con

$$W_L^\nu = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} M_D^\dagger (M_R M_R^\dagger)^{-1} M_D & M_D^\dagger (M_R^\dagger)^{-1} \\ -M_R^{-1} M_D & 1 - \frac{1}{2} M_R^{-1} M_D M_D^\dagger M_R^{\dagger -1} \end{pmatrix}. \tag{4-57}$$

La matriz de nxn de neutrinos ligeros activos M_{Lig} y la matriz de campos estériles supermasivos M_{Pes} están dadas por

$$M_{Lig} \approx -M_D^T M_R^{-1} M_D, \qquad M_{Pes} \approx M_{R.}, \tag{4-58}$$

de esta manera, el MSS se implementa por supresión de las masas de los neutrinos livianos respecto a los elementos de la matriz de masa de Dirac por el factor $M_D^T M_R^{-1}$, mientras que las masas de los neutrinos pesados están dadas por los valores propios de la matriz M_R. Sin embargo, los valores de las masas livianas pueden variar dependiendo de los valores específicos de los elementos de M_D y M_R.

4.6. MSS tipo I en el MSID

El lagrangiano de interacción para el sector leptónico del MSID estd́ado por

$$-\mathcal{L}_{Yukawa} = \overline{L_{iL}} \left(\eta_{ij}\Phi + \xi_{ij}\widetilde{\Phi} \right) L_{jR} + \frac{i}{2}\zeta_{ij} \left(L_{iL}^T C\tau_2 \triangle_L L_{jL} + L_{iR}^T C\tau_2 \triangle_R L_{jR} \right) + h.c., \tag{4-59}$$

donde las constantes de acoplamiento de Yukawa son matrices 3×3 no diagonales, que son consistentes con el gauge. Las simetrías de paridad se representan por ξ, η y ζ, mientras que $C = i\gamma^2\gamma^0$ es la matriz de conjugación de carga. Después de la RES, las componentes neutras del campo de Higgs toman VEV $(3-48)$. Los cuatro campos complejos pueden ser expandidos en términos de ocho campos reales como sigue

$$\begin{aligned}
\phi_1^0 &= \left(\phi_1^{0r} + i\phi_1^{0i} + k_1 \right) e^{i\alpha}/\sqrt{2}, && (4\text{-}60)\\
\phi_2^0 &= \left(\phi_2^{0r} + i\phi_2^{0i} + k_2 \right) /\sqrt{2}, && (4\text{-}61)\\
\delta_L^0 &= \left(\delta_L^{0r} + i\delta_L^{0i} + v_1 \right) /\sqrt{2}, && (4\text{-}62)\\
\delta_R^0 &= \left(\delta_R^{0r} + i\delta_R^{0i} + v_1 \right) e^{i\theta_R}/\sqrt{2}, && (4\text{-}63)
\end{aligned}$$

donde i, j denotan las diferentes generaciones. Realizando la expansión se tiene que

$$\begin{aligned}
L_{Yuk} = \quad & \widetilde{\eta}^l \begin{pmatrix} \overline{\nu_L} & \overline{e_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 e^{i\alpha_1} & 0 \\ 0 & k_2 e^{i\alpha_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_R \\ e_R \end{pmatrix} + \widetilde{\xi}^l \begin{pmatrix} \overline{\nu_L} & \overline{e_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2 e^{-i\alpha_2} & 0 \\ 0 & k_1 e^{-i\alpha_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_R \\ e_R \end{pmatrix} \\
& + i\zeta \left[\begin{pmatrix} \overline{\nu_L^T} & \overline{e_L^T} \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_L e^{i\theta_L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \right. \\
& \left. + \begin{pmatrix} \overline{\nu_R^T} & \overline{e_R^T} \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_R e^{i\theta_R} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_R \\ e_R \end{pmatrix} \right],
\end{aligned} \tag{4-64}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Yukawa} = \quad & \widetilde{\eta}^l \overline{\nu_L} k_1 e^{i\alpha_1} \nu_R + \widetilde{\eta}^l \overline{e_L} k_2 e^{i\alpha_1} e_R + \widetilde{\eta}^l \overline{e_L} k_2 e^{-i\alpha_2} \nu_R + \widetilde{\eta}^l \overline{e_L} k_1 e^{-i\alpha_1} e_R \\
& + i\zeta \left[-i\nu_L^T C v_L e^{i\theta_L} \nu_L + \nu_R^T C v_R e^{i\theta_R} \nu_R \right] + h.c.
\end{aligned} \tag{4-65}$$

Para el sector leptónico se tiene que

$$(M_e)_{ij} = \overline{e_L} \left[\widetilde{\eta_{ij}^l} k_2 e^{i\alpha_2} + \widetilde{\eta_{ij}^l} k_1 e^{-i\alpha_1} \right] e_R. \tag{4-66}$$

La matriz de masa de Dirac de los neutrinos se supone que es similar a la matriz de masa de los leptones cargados, es decir

$$(M_\nu)_{ij} = \overline{\nu_{Li}}\left[\left(\widetilde{\eta^l}\right)_{ij} k_1 e^{i\alpha_1} + \left(\widetilde{\eta^l}\right)_{ij} k_2 e^{-i\alpha_2}\right]\nu_{Rj} + i\zeta_{ij}\left[-i\nu^T_{Li} C v_L e^{i\theta_L}\nu_{Lj} + \nu^T_{Ri} C v_R e^{i\theta_R}\nu_{Rj}\right] + h.c. \tag{4-67}$$

La matriz de acople de Majorana-Yukawa ζ_{ij} puede ser diagonalizada por una transformación ortogonal sobre los campos ν_R. Debido a que en general esta matriz es simétrica y real, entonces se tiene que

$$N_R = \mathcal{O}^T_R \nu_R, \qquad \nu_R = \mathcal{O}_R N_R, \qquad \nu^T_R = N^T_R \mathcal{O}^T_R. \tag{4-68}$$

Trabajando en esta base, tenemos que

$$\mathcal{O}^T_R \zeta \mathcal{O}_R = \zeta_{diag} = \zeta_d, \tag{4-69}$$

y la matriz de masa de neutrinos es

$$(M_\nu)_{ij} = \overline{\nu_{Li}}\left[\eta^l_{ij} k_1 e^{i\alpha_1} + \eta^l_{ij} k_2 e^{-i\alpha_2}\right] N_{Rj} + i\zeta_{ij}\left[-i\nu^T_{Li} C v_L e^{i\theta_L}\nu_{Lj} + N^T_{Ri} C N_R e^{i\theta_R}\nu_{Rj}\right] + h.c. \tag{4-70}$$

Equivalentemente, en forma matricial se tiene

$$\begin{pmatrix} \nu^T_L & N^T_{Ri} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{ij} v_L e^{i\theta_L} & k_1 \eta^l_{ij} e^{i\alpha_1} + k_2 \eta^l_{ij} e^{-i\alpha_2} \\ k_1 e^{i\alpha_1} \eta^{lT}_{ij} + k_2 \eta^{lT}_{ij} e^{-i\alpha_2} & \left(\zeta_{ij}\right)_{diag} v_R e^{i\theta_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_{Rj} \end{pmatrix}. \tag{4-71}$$

Reescribiendo la matriz de masa de neutrinos se obtiene

$$M_\nu = \begin{pmatrix} M^L & \left(M^D\right)^T \\ M^D & M^L \end{pmatrix}. \tag{4-72}$$

Diagonalizando la matriz de masa de neutrinos 6×6, es posible encontrar que la matriz de masa de neutrinos ligeros tiene la forma

$$\mathbf{M_{lig}} \approx \mathbf{M^L} - \mathbf{M^T_D M^{-1}_R M_D}, \tag{4-73}$$

$$\mathbf{M_{Pes}} \approx \mathbf{M_R} + \frac{1}{2}\left[\mathbf{M^T_D M^\dagger_D M^{-1*}_R} + \mathbf{M^{-1*}_R M^*_D M^\dagger_D}\right]. \tag{4-74}$$

Dejando

$$\begin{aligned} m_\nu = \quad & \zeta v_L e^{i\theta} - \frac{k_1^2}{v_R}\left(\eta\zeta_d^{-1}\eta^T\right)e^{i(2\alpha_1-\theta_R)} - \frac{k_2^2}{v_R}(\xi\zeta^{-1}\xi^T)e^{i(2\alpha_2-\theta_R)} \\ & - \frac{k_1 k_2}{v_R}(\eta\zeta_d^{-1}\xi^T)e^{i(\alpha_1+\alpha_2-\theta_R)} - \frac{k_1 k_2}{v_R}(\xi\zeta_d^{-1}\eta^T)e^{i(\alpha_1+\alpha_2-\theta_R)}. \end{aligned} \tag{4-75}$$

A partir de las transformaciones unitarias (3-48), en general con $\gamma_R = \theta_R/2$, se tiene

$$
\begin{aligned}
m_\nu = \quad & \zeta v_L e^{i(\theta_L - 2\gamma_L)} - \frac{k_1^2}{v_R}\left(\eta\zeta_d^{-1}\eta^T\right)e^{i(2\alpha_1+2\gamma_L-\theta_R)} - \frac{k_2^2}{v_R}(\xi\zeta^{-1}\xi^T)e^{i(2\alpha_2-2\gamma_L)} \\
& -\frac{k_1k_2}{v_R}(\eta\zeta_d^{-1}\xi^T)e^{i(\alpha_1+\alpha_2-\theta_R)} - \frac{k_1k_2}{v_R}(\xi\zeta_d^{-1}\eta^T)e^{i(\alpha_1+\alpha_2-\theta_R)},
\end{aligned} \tag{4-76}
$$

y con $\gamma_L = \theta_L/2$

$$
\begin{aligned}
m_\nu = \quad & \zeta v_L - \frac{k_1^2}{v_R}\left(\eta\zeta_d^{-1}\eta^T\right)e^{i(2\alpha_1+\gamma_L-\theta_R)} - \frac{k_2^2}{v_R}(\xi\zeta^{-1}\xi^T)e^{i(2\alpha_2-\theta_L)} \\
& -\frac{k_1k_2}{v_R}(\eta\zeta_d^{-1}\xi^T)e^{i(\alpha_1+\alpha_2-\theta_R)} - \frac{k_1k_2}{v_R}(\xi\zeta_d^{-1}\eta^T)e^{i(\alpha_1+\alpha_2-\theta_R)}.
\end{aligned} \tag{4-77}
$$

Ya que el lagrangiano de Yukawa es invariante bajo las transformaciones unitarias de los campos fermiónicos y los campos escalares, es decir considerando las relaciones (3-45), (3-46) y (3-47) podemos reescribir la expresión (4-67)

$$
\begin{aligned}
(M_\nu)_{ij} \quad & = \overline{\nu_{iL}}\left[k_1 e^{i(\alpha_1+\gamma_L-\gamma_R)}\eta^l_{ij} + k_2 e^{-i(\alpha_2+\gamma_R-\gamma_L)}\xi^l_{ij}\right]N_{jR} \\
& +\zeta_{ij}\left[v_L e^{i(\theta_L-2\gamma_L)}\nu^T_{iL}C\nu_{jL} + v_R e^{i(\theta_R-2\gamma_R)}N^T_{iR}CN_{jR}\right],
\end{aligned} \tag{4-78}
$$

que en forma matricial adquiere la forma

$$
(M_\nu)_{ij} = \begin{pmatrix} \zeta v_L e^{i(\theta_L-2\gamma_L)} & k_1 e^{i(\alpha_1+\gamma_L-\gamma_R)}\eta^l_{ij} + k_2 e^{-i(\alpha_2+\gamma_R-\gamma_L)}\xi^l_{ij} \\ k_1 e^{i(\alpha_1+\gamma_L-\gamma_R)}(\eta^l_{ij})^T + k_2 e^{-i(\alpha_2+\gamma_R-\gamma_L)}(\xi^l_{ij})^T & \zeta v_L e^{i(\theta_L-2\gamma_L)} \end{pmatrix} \tag{4-79}
$$

Diagonalizando esta matriz de masa de neutrinos, se obtiene la matriz de masa de neutrinos ligeros [33]

$$
\begin{aligned}
m_\nu = \quad & \zeta v_L e^{i(\theta_L - 2\gamma_L)} - \frac{k_1^2}{v_R}\left(\eta\zeta_d^{-1}\eta^T\right)e^{i2(\alpha_1+\gamma_L-\gamma_R)} - \frac{k_2^2}{v_R}(\xi\zeta^{-1}\xi^T)e^{-i2(\alpha_2+\gamma_R-\gamma_L)} \\
& -\frac{k_1k_2}{v_R}(\eta\zeta_d^{-1}\xi^T)e^{i(\alpha_1-\alpha_2+2\gamma_L-2\gamma_R)} - \frac{k_1k_2}{v_R}(\xi\zeta_d^{-1}\eta^T)e^{i(\alpha_1-\alpha_2+2\gamma_L-2\gamma_R)}.
\end{aligned} \tag{4-80}
$$

Reescribiendo (4-80) se encuentra que

$$
\begin{aligned}
m_\nu = \quad & \zeta v_L e^{i(\theta_L - 2\gamma_L)} - \frac{k_1^2}{v_R}\left(\eta\zeta_d^{-1}\eta^T\right)e^{i2(\alpha_1+\gamma)} - \frac{k_2^2}{v_R}(\xi\zeta^{-1}\xi^T)e^{-i2(\alpha_2+\gamma)} \\
& -\frac{k_1k_2}{v_R}(\eta\zeta_d^{-1}\xi^T)e^{i\beta} - \frac{k_1k_2}{v_R}(\xi\zeta_d^{-1}\eta^T)e^{i\beta},
\end{aligned} \tag{4-81}
$$

con

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \gamma_L - \gamma_R, \\
\beta &= \alpha_1 - \alpha_2 + 2\gamma_L - 2\gamma_R.
\end{aligned} \tag{4-82}
$$

Esta expresión corresponde con la matriz de masa de neutrinos ligeros mas general posible en el MSID. Hasta donde conocemos, es una expresión no reportada en la literatura.

Escogencía de fases

Tipo I En este tipo de fase escogemos

$$\begin{aligned}\gamma_R &= \frac{\theta_R}{2},\\ \gamma_L &= \gamma_R - \alpha_1,\end{aligned} \tag{4-83}$$

que al aplicarla en (4-81), obtenemos

$$\begin{aligned}m_\nu &= \zeta v_L e^{i\theta} - \frac{k_1^2}{v_R}\left(\eta\zeta_d^{-1}\eta^T\right) - \frac{k_2^2}{v_R}(\xi\zeta_d^{-1}\xi^T)e^{-i\alpha}\\ &- \frac{k_1k_2}{v_R}(\eta\zeta_d^{-1}\xi^T)e^{i\alpha} - \frac{k_1k_2}{v_R}(\xi\zeta_d^{-1}\eta^T)e^{-i\alpha},\end{aligned} \tag{4-84}$$

en donde $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ y $\theta = \theta_L - \theta_R + 2\alpha_1$, es decir la fuente de violación de CP proviene de dos fases.

Tipo II En este tipo de fase escogemos

$$\begin{aligned}\gamma_L &= \frac{\theta_L}{2},\\ \gamma_R &= \gamma_L - \alpha_2,\end{aligned} \tag{4-85}$$

que al aplicarla en (4-81), obtenemos

$$\begin{aligned}m_\nu &= \zeta v_L e^{i\theta} - \frac{k_1^2}{v_R}\left(\eta\zeta_d^{-1}\eta^T\right)e^{i2\alpha} - \frac{k_2^2}{v_R}(\xi\zeta_d^{-1}\xi^T)\\ &- \frac{k_1k_2}{v_R}(\eta\zeta_d^{-1}\xi^T)e^{i\alpha} - \frac{k_1k_2}{v_R}(\xi\zeta_d^{-1}\eta^T)e^{-i\alpha},\end{aligned} \tag{4-86}$$

con $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. En esta expresión se encuentra que en el primer y el tercer término la única fuente de violación de CP es la fase α, la cual está relacionada con las fases del bidoblete escalar α_1 y α_2.

Caso particular $k_2 \ll k_1$

Un caso particular de estudio se tiene cuando $k_1/k_2 \sim m_t/m_b$ [61, 69]. En el MSS se asume que la matriz de masa de Dirac de los neutrinos es similar a la matriz de masa de leptones cargados y asumiendo que $\eta^l \sim \xi^l$ en el lagrangiano de Yukawa, la matriz de masa de Dirac. Así omitiendo términos de k_2, la matriz de masas de las tres generaciones de neutrinos está dada por

$$(M_\nu)_{ij} = \overline{\nu_{iL}}k_1 e^{i\alpha_1}(\widetilde{\eta})_{ij}\nu_{Rj} + \zeta_{ij}\left[v_L e^{i\theta_L}\nu_{iL}^T C\nu_{jL} + v_R e^{i\theta_R}v_{iR}^T C v_{jR}\right] + h.c. \tag{4-87}$$

La matriz de acoplamiento de Yukawa-Majorana ζ_{ij} es real y simétrica, de tal forma que puede ser diagonalizada por la transformación ortogonal dada sobre los campos ν_R. En la base transformada es posible obtener la matriz de masa para neutrinos, la cual se puede escribir como [70]

$$(M_\nu)_{ij} = \begin{pmatrix} \zeta v_L e^{i\theta} & k_1 e^{i\alpha}\eta^l_{ij} \\ k_1 e^{i\alpha_1}(\eta^l_{ij})^T & \zeta_d v_R e^{i\theta_R} \end{pmatrix}. \tag{4-88}$$

Diagonalizando la matriz de masa de neutrinos, se encuentra la matriz de masa de neutrinos ligeros está dada por

$$m_\nu = \zeta v_L e^{i\theta} - \frac{k_1^2}{v_R}\left(\eta\zeta_d^{-1}\eta^T\right)e^{i(2\alpha_1-\theta_R)}. \tag{4-89}$$

4.7. MSS tipo I en el M2DH-III extendido

El sector leptónico se encuentra a partir de

$$-\mathcal{L}^l_Y = \mathcal{L}^{III-l}_Y + \mathcal{L}^{Ext-l}_Y, \tag{4-90}$$

donde $\mathcal{L}^l_Y$ representa el lagrangiano de Yukawa del sector leptónico (más la inclusión del término de masa para los neutrinos de Dirac), $\mathcal{L}^{III-l}_Y$ representa el lagrangiano del M2DH-III, sin quiralidad derecha para los neutrinos y $\mathcal{L}^{Ext-l}_Y$ representa una extensión del lagrangiano, donde hemos asumido que $N_{Rj} = \nu_{jR}$. Por lo anterior

$$-\mathcal{L}^{Ext-l}_Y = \overline{L^0_{Li}}\eta^E_{ij}\Phi_1 E^0_{Rj} + \overline{L^0_{Li}}\xi^E_{ij}\Phi_2 E^0_{Rj} + \overline{L^0_{Li}}\eta^N_{ij}\widetilde{\Phi_1}N^0_{Rj} + \overline{L^0_{Li}}\xi^E_{ij}\widetilde{\Phi_2}N^0_{Rj} + h.c. \tag{4-91}$$

Reescribiendo este lagrangiano, se tiene que

$$-\mathcal{L}^{Ext-l}_Y = \overline{L^0_{Li}}\begin{pmatrix} \eta^E_{ij} & \xi^E_{ij} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{\Phi_1} \\ \widetilde{\Phi_2} \end{pmatrix} N^0_{Rj} + \overline{L^0_{Li}}\begin{pmatrix} \eta^E_{ij} & \xi^E_{ij} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} E^0_{Rj} + h.c. \tag{4-92}$$

Basados en las definiciones de los campos y los dobletes, y reemplazando en el lagrangiano de Yukawa obtenemos en forma matricial que

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}^{Ext-l}_Y &= \begin{pmatrix} \overline{\nu^0_{Li}} & \overline{e^0_{Li}} \end{pmatrix}\eta^E_{ij}\begin{pmatrix} \phi^+_1 \\ \phi^0_1 \end{pmatrix} e^0_{Rj} + \begin{pmatrix} \overline{\nu^0_{Li}} & \overline{e^0_{Li}} \end{pmatrix}\xi^E_{ij}\begin{pmatrix} \phi^+_2 \\ \phi^0_2 \end{pmatrix} e^0_{Rj} \\ &+ \begin{pmatrix} \overline{\nu^0_{Li}} & \overline{e^0_{Li}} \end{pmatrix}\eta^N_{ij}\begin{pmatrix} \phi^0_1 \\ -\phi^-_1 \end{pmatrix} \nu^0_{Rj} + \begin{pmatrix} \overline{\nu^0_{Li}} & \overline{e^0_{Li}} \end{pmatrix}\xi^N_{ij}\begin{pmatrix} \phi^0_2 \\ -\phi^-_2 \end{pmatrix} \nu^0_{Rj} + h.c. \end{aligned} \tag{4-93}$$

Realizando los productos

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}^{Ext-l}_Y &= \overline{\nu^0_{iL}}\eta^E_{ij}\phi^+_1 e^0_{jR} + \overline{e^0_{iL}}\eta^E_{ij}\phi^0_1 e^0_{jR} + \overline{\nu^0_{iL}}\xi^E_{ij}\phi^+_2 e^0_{jR} + \overline{e^0_{iL}}\xi^E_{ij}\phi^0_2 e^0_{jR} \\ &+\overline{\nu^0_{iL}}\eta^N_{ij}\phi^+_1\nu^0_{jR} - \overline{e^0_{iL}}\eta^E_{ij}\phi^-_1\nu^0_{jR} + \overline{\nu^0_{iL}}\xi^N_{ij}\phi^0_2\nu^0_{jR} - \overline{e^0_{iL}}\xi^E_{ij}\phi^-_2\nu^0_{jR} + h.c., \end{aligned} \tag{4-94}$$

después de factorizar se encuentra que

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}^{Ext-l}_Y &= \overline{\nu^0_{iL}}(\eta^E_{ij}\phi^+_1 + \xi^E_{ij}\phi^+_2)e^0_{jR} + \overline{e^0_{iL}}(\eta^E_{ij}\phi^0_1 + \xi^E_{ij}\phi^0_2)e^0_{jR} \\ &+\overline{\nu^0_{iL}}(\eta^N_{ij}\phi^0_1 + \xi^N_{ij}\phi^0_2)\nu^0_{jR} - \overline{e^0_{iL}}(\eta^N_{ij}\phi^-_1 + \xi^N_{ij}\phi^-_2)\nu^0_{jR} + h.c. \end{aligned} \tag{4-95}$$

Definiendo las matrices

$$N = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \tag{4-96}$$

el lagrangiano de Yukawa en forma matricial se escribe como

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^{Ext-l} &= \overline{N_{iL}^0}(\eta^E\phi_1^+ + \xi^E\phi_2^+)E_{jR}^0 + \overline{E_{iL}^0}(\eta^E\phi_1^0 + \xi^E\phi_2^0)E_{jR}^0 \\ &+ \overline{N_{iL}^0}(\eta^N\phi_1^0 + \xi^N\phi_2^0)N_{jR}^0 + \overline{E_{iL}^0}(\eta^N\phi_1^- + \xi^N\phi_2^-)N_{jR}^0 + h.c. \end{aligned} \tag{4-97}$$

Los términos dentro de los paréntesis se pueden reescribir como

$$\eta\phi_1^\pm + \xi\phi_2^\pm = \frac{g}{\sqrt{2}M_W}MG_w^\pm + \frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_W}MH^\pm - \frac{\eta}{\sin\beta}H^\pm, \tag{4-98}$$

$$\begin{aligned} \eta\phi_1^0 + \xi\phi_2^0 &= M + \frac{ig}{2M_W}MG_Z^0 - \frac{ig\cot\beta}{2M_W}MA^0 - \frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\eta A^0 \\ &+ \frac{g}{2M_W\sin\beta}M(\sin\alpha H^0 + \cos\alpha h^0) \\ &- \frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\eta\left[\sin(\alpha-\beta)H^0 + \cos(\alpha-\beta)h^0\right], \end{aligned} \tag{4-99}$$

con lo cual, el lagrangiano de Yukawa ahora se escribe como

$$-\mathcal{L}_Y^l = L_Y^{III-l} + \overline{N_{iL}^0}(\eta^N\phi_1^0 + \xi^N\phi_2^0)N_{jR}^0 + \overline{E_{iL}^0}(\eta^N\phi_1^- + \xi^N\phi_2^-)N_{jR}^0 + h.c, \tag{4-100}$$

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^l &= \mathcal{L}_Y^{III-l} + \overline{E_L^0}\left(\frac{g}{\sqrt{2}M_W}M^NG_w^\pm + \frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_W}M^NH^\pm - \frac{\eta}{\sin\beta}H^\pm\right)N_R^0 \\ &+ \overline{N_L^0}\left(M^N + \frac{ig}{2M_W}M^NG_Z^0 - \frac{ig\cot\beta}{2M_W}M^NA^0 - \frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\eta^NA^0\right)N_R^0 \\ &+ \overline{N_L^0}\left(\frac{g}{2M_W\sin\beta}M^N(\sin\alpha H^0 + \cos\alpha h^0)\right)N_R^0 \\ &- \overline{N_L^0}\left(\frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\eta^N\left[\sin(\alpha-\beta)H^0 + \cos(\alpha-\beta)h^0\right]\right)N_R^0, \end{aligned} \tag{4-101}$$

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^l \;\; = \;\; & \frac{g}{\sqrt{2}M_w}\left(\overline{N_L^0}M^E E_R^0 G_w^+ - \overline{D_L^0}M^U U_R^0 G_w^- + \overline{U_L^0}M^D D_R^0 G_w^+ - \overline{E_L^0}M^N N_R^0 G_w^-\right) \\
& + \frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_w}\left(\overline{N_L^0}M^E E_R^0 H^+ - \overline{D_L^0}M^U H^- U_R^0 + \overline{U_L^0}M^D H^+ D_R^0 - \overline{E_L^0}M^N N_R^0 H^-\right) \\
& - \frac{1}{\sin\beta}\left(\overline{N_L^0}\eta^E E_R^0 H^+ - \overline{D_L^0}\eta^U U_R^0 H^- + \overline{U_L^0}\eta^D D_R^0 H^+ - \overline{E_L^0}M^N N_R^0 H^-\right) + h.c \\
& + \overline{E_L^0}M^E E_R^0 + \overline{U_L^0}M^U U_R^0 + \overline{D_L^0}M^D D_R^0 + \overline{N_L^0}M^N N_R^0 \\
& + \frac{ig}{2M_w}\left(\overline{E_L^0}M^E E_R^0 + \overline{U_L^0}M^U U_R^0 + \overline{D_L^0}M^D D_R^0 + \overline{N_L^0}M^N N_R^0\right) G_z^o \\
& + \frac{ig\cot\beta}{2M_w}\left(\overline{E_L^0}M^E E_R^0 + \overline{U_L^0}M^U U_R^0 + \overline{D_L^0}M^D D_R^0 + \overline{N_L^0}M^N N_R^0\right) A^o \\
& - \frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{E_L^0}\eta^E E_R^0 + \overline{U_L^0}\eta^U U_R^0 + \overline{D_L^0}\eta^D D_R^0 + \overline{N_L^0}M^N N_R^0\right) A^o \\
& \frac{g}{2M_w\sin\beta}\left(\overline{E_L^0}M^E E_R^0 + \overline{U_L^0}M^U U_R^0 + \overline{D_L^0}M^D D_R^0 + +\overline{N_L^0}M^N N_R^0\right)\left[H^o\sin\alpha + h^o\cos\alpha\right] \\
& - \frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{E_L^0}\eta^E E_R^0 + \overline{U_L^0}\eta^U U_R^0 + \overline{D_L^0}\eta^D D_R^0 + \overline{N_L^0}M^N N_R^0\right) \\
& \left[H^o\sin(\alpha-\beta) + h^o\cos(\alpha-\beta)\right] + h.c.
\end{aligned}
$$

Como en la sección anterior, convertimos estos campos del lagrangiano de Yukawa en auto estados de masa con las transformaciones unitarias

$$
\begin{aligned}
N_L = S_L N_L^0, \quad & E_L = T_L E_L^0, \quad U_L = V_L U_L^0, \quad D_L = W_L D_L^0, \\
& E_R = T_R E_R^0, \quad U_R = V_R U_R^0, \quad D_R = W_R D_R^0.
\end{aligned}
$$

El adjunto conjugado es

$$
\begin{aligned}
\overline{N_L} = \overline{N_L^0}S_L^\dagger, \quad & \overline{E_L} = \overline{E_L^0}T_L^\dagger, \quad \overline{U_L} = \overline{U_L^0}V_L^\dagger \quad \overline{D_L} = \overline{D_L^0}W_L^\dagger, \\
& \overline{E_R} = \overline{E_R^0}T_R^\dagger, \quad \overline{U_R} = \overline{U_R^0}V_R^\dagger, \quad \overline{D_R} = \overline{D_R^0}W_R^\dagger.
\end{aligned}
$$

Con lo anterior, es posible encontrar que

$$
N_R = S_R N_R^0, \qquad \overline{N_R} = \overline{N_R^0}S_R^\dagger.
$$

Las transformaciones unitarias permiten obtener los estados propios de masa diagonalizados $M_N^{diag} = S_L M^N S_R^\dagger$, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
-L_Y^l \;=\; & L_Y^{III-l} + \frac{g}{\sqrt{2}M_w}\left(-\overline{E_L^0}T_L^\dagger T_L S_L^\dagger S_L M^N S_R^\dagger S_R N_R^0 G_w^-\right) \\
& + \frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_w}\left(-\overline{E_L^0}T_L^\dagger T_L S_L^\dagger S_L M^N S_R^\dagger S_R N_R^0 H^-\right) \\
& - \frac{1}{\sin\beta}\left(-\overline{E_L^0}T_L^\dagger T_L S_L^\dagger S_L \eta^N S_R^\dagger S_R N_R^0 H^-\right) \\
& + \overline{N_L^0} S_L^\dagger S_L M^N S_R^\dagger S_R N_R^0 \\
& + \frac{ig}{2M_w}\left(\overline{N_L^0} S_L^\dagger S_L M^N S_R^\dagger S_R N_R^0\right) G_z^o \\
& + \frac{ig\cot\beta}{2M_w}\left(\overline{N_L^0} S_L^\dagger S_L M^N S_R^\dagger S_R N_R^0\right) A^o \\
& - \frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{N_L^0} S_L^\dagger S_L \eta^N S_R^\dagger S_R N_R^0\right) A^o \\
& + \frac{g}{2M_w\sin\beta}\left(\overline{N_L^0} S_L^\dagger S_L M^N S_R^\dagger S_R N_R^0\right)\left[H^o\sin\alpha + h^o\cos\alpha\right] \\
& - \frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{N_L^0} S_L^\dagger S_L \eta^N S_R^\dagger S_R N_R^0\right)\left[H^o\sin(\alpha-\beta) + h^o\cos(\alpha-\beta)\right] + h.c,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-L_Y^l \;=\; & L_Y^{III-l} + \frac{g}{\sqrt{2}M_w}\left(-\overline{E_L}T_L S_L^\dagger M_N^{diag} N_R G_w^-\right) \\
& + \frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_w}\left(-\overline{E_L}T_L S_L^\dagger M_N^{diag} N_R H^-\right) \\
& - \frac{1}{\sin\beta}\left(-\overline{E_L}T_L S_L^\dagger \eta_N^{diag} N_R H^-\right) \\
& + \overline{N_L} M_N^{diag} N_R \\
& + \frac{ig}{2M_w}\left(\overline{N_L} M_N^{diag} N_R\right) G_z^o \\
& + \frac{ig\cot\beta}{2M_w}\left(\overline{N_L} M_N^{diag} N_R\right) A^o \\
& - \frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{N_L} \eta_N^{diag} N_R\right) A^o \\
& + \frac{g}{2M_w\sin\beta}\left(\overline{N_L} M_N^{diag} N_R\right)\left[H^o\sin\alpha + h^o\cos\alpha\right] \\
& - \frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{N_L} \eta_N^{diag} N_R\right)\left[H^o\sin(\alpha-\beta) + h^o\cos(\alpha-\beta)\right] + h.c.,
\end{aligned}
$$

con las matriz $I = S_L T_L^\dagger$ (no existe mezcla para el sector leptónico)

$$\begin{aligned}
-L_Y^l &= L_Y^{III-l} + \frac{g}{\sqrt{2}M_w}\left(-\overline{E_L}M_N^{diag}N_R G_w^-\right) \\
&+\frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_w}\left(-\overline{E_L}M_N^{diag}N_R H^-\right) \\
&-\frac{1}{\sin\beta}\left(-\overline{E_L}\eta_N^{diag}N_R H^-\right) \\
&+\overline{N_L}M_N^{diag}N_R \\
&+\frac{ig}{2M_w}\left(\overline{N_L}M_N^{diag}N_R\right)G_z^o \\
&+\frac{ig\cot\beta}{2M_w}\left(\overline{N_L}M_N^{diag}N_R\right)A^o \\
&-\frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{N_L}\eta_N^{diag}N_R\right)A^o \\
&+\frac{g}{2M_w\sin\beta}\left(\overline{N_L}M_N^{diag}N_R\right)\left[H^o\sin\alpha + h^o\cos\alpha\right] \\
&-\frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{N_L}\eta_N^{diag}N_R\right)\left[H^o\sin(\alpha-\beta) + h^o\cos(\alpha-\beta)\right] + h.c.
\end{aligned}$$

Tomando el hermítico conjugado del segundo término dentro del paréntesis $(\overline{E_L}M_N^{diag}N_R Y^-)^\dagger = (E_L^\dagger\gamma^0 M_N^{diag}N_R Y^-)^\dagger = (N_R^\dagger\gamma^{0\dagger}M_N^{diag\dagger}E_L Y^+) = N_R^\dagger\gamma^{0\dagger}M_U^{diag}D_L Y^+ = \overline{N_R}M_N^{diag\dagger}E_L Y^+$, entonces

$$\begin{aligned}
-L_Y^l &= L_Y^{III-l} + \frac{g}{\sqrt{2}M_w}\left(-\overline{N_R}M_N^{diag}E_L G_w^+\right) \\
&+\frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_w}\left(-\overline{N_R}M_N^{diag}E_L H^+\right) \\
&-\frac{1}{\sin\beta}\left(-\overline{N_R}M_N^{diag}E_L H^+\right) \\
&+\overline{N_L}M_N^{diag}N_R \\
&+\frac{ig}{2M_w}\left(\overline{N_R}M_N^{diag}N_L\right)G_z^o \\
&+\frac{ig\cot\beta}{2M_w}\left(\overline{N_R}M_N^{diag}N_L\right)A^o \\
&-\frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{N_R}\eta_N^{diag}N_L\right)A^o \\
&+\frac{g}{2M_w\sin\beta}\left(\overline{N_R}M_N^{diag}N_L\right)\left[H^o\sin\alpha + h^o\cos\alpha\right] \\
&-\frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{N_R}\eta_N^{diag}N_L\right)\left[H^o\sin(\alpha-\beta) + h^o\cos(\alpha-\beta)\right] + h.c.
\end{aligned}$$

Podemos notar que si

$$\overline{N_L}MN_R = N_L^\dagger\gamma^0MP_RN = N^\dagger P_L\gamma^0MP_RN = N^\dagger\gamma^0P_RMP_RN = N^\dagger\gamma^0MP_RP_RN = \overline{N}MN_R,$$
$$\overline{N_R}MN_L = N_R^\dagger\gamma^0MP_LN = N^\dagger P_R\gamma^0MP_LN = N^\dagger\gamma^0P_LMP_LE = N^\dagger\gamma^0MP_LP_LN = \overline{N}MN_L,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\overline{N_L}MN_R + \overline{N_R}MN_L &= \overline{N}MN_R + \overline{N}MN_L = \overline{N}M(N_R+N_L) = \overline{N}MN,\\
\overline{N_L}MN_R - \overline{N_R}MN_L &= \overline{N}MN_R + \overline{N}MN_L = \overline{N}M(N_R-N_L) = \overline{N}M\gamma^5N.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\overline{N_R}M_N^{diag}E_L = N^\dagger P_R\gamma^0M_N^{diag}P_LE = \overline{N}M_E^{diag}P_LE,$$

sumándole el hermítico conjugado, se encuentra que

$$\begin{aligned}
-L_Y^l = \ & \mathcal{L}_Y^{III-l} + \frac{g}{\sqrt{2}M_w}\left(-\overline{N}M_N^{diag}P_LEG_w^+\right)\\
& + \frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_w}\left(-\overline{N}M_N^{diag}P_LEH^+\right)\\
& - \frac{1}{\sin\beta}\left(-\overline{N}M_N^{diag}P_LEH^+\right) + h.c,\\
& + \overline{N}M_N^{diag}N\\
& + \frac{ig}{2M_w}\left(\overline{N}(P_L-P_R)M_N^{diag}N\right)G_z^o\\
& + \frac{ig\cot\beta}{2M_w}\left(\overline{N}(P_L-P_R)M_N^{diag}N\right)A^o\\
& - \frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{N}(P_L-P_R)M_N^{diag}N\right)A^o\\
& + \frac{g}{2M_w\sin\beta}\left(\overline{N}(P_L+P_R)M_N^{diag}N\right)\left[H^o\sin\alpha + h^o\cos\alpha\right]\\
& - \frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{N}(P_L+P_R)M_N^{diag}N\right)\left[H^o\sin{(\alpha-\beta)} + h^o\cos{(\alpha-\beta)}\right] + h.c.
\end{aligned}$$

Para los campos neutros, al sumarle el hermítico conjugado, en los coeficientes reales aparece el término $P_R + P_L = \gamma^5$ o $P_R - P_L = -\gamma^5$

$$
\begin{aligned}
-L_Y^l \;=\;& \mathcal{L}_Y^{III-l} + \frac{g}{\sqrt{2}M_w}\left(-\overline{N}M_N^{diag}P_L E G_w^+\right)\\
&+\frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_w}\left(-\overline{N}M_N^{diag}P_L E H^+\right)\\
&-\frac{1}{\sin\beta}\left(-\overline{N}M_N^{diag}P_L E H^+\right) + h.c,\\
&+\overline{N}M_N^{diag}N\\
&+\frac{ig}{2M_w}\left(-\overline{N}\gamma^5 M_N^{diag}N\right)G_z^o\\
&+\frac{ig\cot\beta}{2M_w}\left(-\overline{N}\gamma^5 M_N^{diag}N\right)A^o\\
&-\frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{N}\gamma^5 M_N^{diag}N\right)A^o\\
&+\frac{g}{2M_w\sin\beta}\left(\overline{N}\gamma^5 M_N^{diag}N\right)[H^o\sin\alpha + h^o\cos\alpha]\\
&-\frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{N}\gamma^5 M_N^{diag}N\right)[H^o\sin(\alpha-\beta) + h^o\cos(\alpha-\beta)] + h.c.,
\end{aligned}
$$

entonces el lagrangiano de Yukawa extendido toma la forma

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y \;=\;& \frac{g}{\sqrt{2}M_W}\left(\overline{N_L}M_E^{diag}P_R E - \overline{U_R}M_U^{diag}VP_L D + \overline{U_L}VM_D^{diag}P_R D - \overline{N}M_N^{diag}P_L E\right)G_w^+\\
+\;& \frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_W}\left(\overline{N_L}M_E^{diag}P_R E - \overline{U_R}M_U^{diag}VP_L D + \overline{U_L}VM_D^{diag}P_R D - \overline{N}M_N^{diag}P_L E\right)H^+\\
-\;& \frac{1}{\sin\beta}\left(\overline{N_L}\eta_E P_R E H^+ - \overline{U_R}\eta_U VP_L D + \overline{U_L}V\eta_D P_R D - \overline{N}\eta_N^{diag}P_L E\right)H^+ + h.c\\
+\;& \overline{E}M_E^{diag}E + \overline{U}M_U^{diag}U + \overline{D}M_D^{diag}D + \overline{N}M_N^{diag}N\\
+\;& \frac{ig}{2M_W}\left(\overline{E}M_E^{diag}\gamma^5 E - \overline{U}M_U^{diag}\gamma^5 U + \overline{D}M_D^{diag}\gamma^5 D - \overline{N}\gamma^5 M_N^{diag}N\right)G_z^0\\
+\;& \frac{ig\cot\beta}{2M_W}\left(\overline{E}M_E^{diag}\gamma^5 E - \overline{U}M_U^{diag}\gamma^5 U + \overline{D}M_D^{diag}\gamma^5 D - \overline{N}\gamma^5 M_N^{diag}N\right)A^0\\
-\;& \frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{E}\eta_E^{diag}\gamma^5 E - \overline{U}\eta_U^{diag}\gamma^5 U + \overline{D}\eta_D^{diag}\gamma^5 D - \overline{N}\gamma^5 M_N^{diag}N\right)A^0\\
+\;& \frac{g}{2M_W\sin\beta}\left(\overline{E}M_E^{diag}E - \overline{U}M_U^{diag}U + \overline{D}M_D^{diag}D + \overline{N}\gamma^5 M_N^{diag}N\right)(H^0\sin\alpha + h^0\cos\alpha)\\
-\;& \frac{g}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{E}\eta_E E - \overline{U}\eta_U U + \overline{D}\eta_D D + \overline{N}\gamma^5 M_N^{diag}N\right)\\
& \left[H^0\sin(\alpha-\beta) + h^0\cos(\alpha-\beta)\right].
\end{aligned}
$$

El sector leptónico del M2DH extendido antes de la RES queda determinado por

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^l &= \overline{L_{Li}^0}\eta_{ij}^E\Phi_1 E_{Rj}^0 + \overline{L_{Li}^0}\xi_{ij}^E\Phi_2 E_{Rj}^0 \\
&+ \overline{L_{Li}^0}\eta_{ij}^N\widetilde{\Phi_1}N_{Rj}^0 + \overline{L_{Li}^0}\xi_{ij}^E\widetilde{\Phi_2}N_{Rj}^0 \\
&+ \frac{1}{2}m_{ijR}(N_{jR}^0)^C N_{jR}^0 + h.c.,
\end{aligned} \tag{4-102}$$

donde M_R^ν es la matriz de masa de Majorana. Después de la RES $\langle\Phi_i\rangle_0 = \frac{\nu_i}{\sqrt{2}}$, se encuentra que

$$-\mathcal{L}_Y^l = \mathcal{L}_Y^{III-l} + \mathcal{L}_Y^{Ext-l} = \mathcal{L}_m^Y + \mathcal{L}_I^Y, \tag{4-103}$$

con $\mathcal{L}_I^Y$ correspondiente al lagrangiano de interacción y $\mathcal{L}_m^Y$ al lagrangiano responsable de las masas. Ya que es posible escribir tres tipos de términos de masas para los neutrinos

$$\mathcal{L}_m^\nu = -\left[\overline{\nu_R}m_D\nu_L + \overline{\nu_L}m_D^\dagger\nu_R\right] - \frac{1}{2}\left[\nu_R\widetilde{C}m_R\overline{\nu_R}^T + \nu_R^T\widetilde{C}m_R^\dagger\nu_R\right] - \frac{1}{2}\left[\nu_L^T\widetilde{C}m_L^\dagger\nu_L + \nu_L\widetilde{C}m_L\overline{\nu_L}^T\right],$$

el lagrangiano de masas que toma la forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y^m &= -\overline{E_L^0}M^E E_R^0 + \overline{N_L^0}M^N N_R^0 - \frac{1}{2}\left[N_R^0\widetilde{C}m_R\overline{N_R^0}^T + N_R^{0T}\widetilde{C}m_R^\dagger N_R^0\right] \\
&- \frac{1}{2}\left[N_L^{0T}\widetilde{C}m_L^\dagger N_L^0 + N_L^0\widetilde{C}m_L\overline{N_L^0}^T\right],
\end{aligned} \tag{4-104}$$

con

$$M^l = \frac{\eta^E v_1 + \xi^E v_2}{\sqrt{2}} \qquad M^N = \frac{\eta^N v_1 + \xi^N v_2}{\sqrt{2}}. \tag{4-105}$$

Adicionalmente, si $\overline{\nu_R}\nu_L = -\nu_L^T\overline{\nu_R}^T = \nu_L^T\hat{C}\hat{C}\overline{\nu_R}^T = \overline{\nu_L^c}\nu_R^c$, entonces

$$\overline{\nu_R}\nu_L = \frac{1}{2}\left[\overline{\nu_R}\nu_L + \overline{\nu_L^c}\nu_R^c\right]. \tag{4-106}$$

El lagrangiano $\mathcal{L}_m^\nu$ puede escribirse como

$$\mathcal{L}_m^\nu = -\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} \overline{\nu_L^c} & \overline{\nu_R} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_L & M_D^T \\ m_D & M_R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix}\right] + h.c. \tag{4-107}$$

Para el caso de 3 generaciones de neutrinos, los seis auto estados de masas denotados por m_i son los autovalores de la matriz

$$M_\nu = \begin{pmatrix} m_L & m_D^T \\ m_D & m_R \end{pmatrix}. \tag{4-108}$$

Primera diagonalización

La expresión (4-104) puede ser escrita como

$$-\mathcal{L}_Y^m = \overline{E_L^0} M^E E_R^0 + \frac{1}{2} N_L^{0T} C^\dagger M_\nu N_L^0 + h.c., \tag{4-109}$$

con

$$N_L^0 = \begin{pmatrix} \nu_L \\ C\overline{\nu_R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^C \end{pmatrix} \qquad N_R^0 = \begin{pmatrix} C\overline{\nu_L} \\ \nu_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L^C \\ \nu_R \end{pmatrix}, \tag{4-110}$$

siendo $N_L^0 = U_L N_L$ y los campos con masa definida

$$N_L = \begin{pmatrix} N_{1L} \\ N_{2L} \end{pmatrix}, \tag{4-111}$$

diagonalizan la matriz de masa

$$M_\nu = \begin{pmatrix} m_L & m_D^T \\ m_D & m_R \end{pmatrix}, \tag{4-112}$$

mediante una transformación biunitaria

$$U^T M_\nu U = diag(m_1, m_2, m_3). \tag{4-113}$$

Convertimos todos los campos del lagrangiano de Yukawa en estados propios de masa con las transformaciones unitarias, rotando los campos a través de

$$\begin{array}{ccc} N_L = S_L N_L^0 & E_L = T_L E_L^0 & \nu_{jR}^C = U_R (\nu_{jR}^0)^C \\ N_R = S_R N_R^0 & E_R = T_R E_R^0 & U_R = S_R^*. \end{array},$$

Por lo anterior, el conjugado adjunto es

$$\begin{array}{ll} \overline{N_L} = \overline{N_L^0} S_L^\dagger, & \overline{E_L} = \overline{E_L^0} T_L^\dagger, \\ \overline{N_R} = \overline{N_R^0} S_R^\dagger, & \overline{E_R} = \overline{E_R^0} T_R^\dagger. \end{array}$$

Las transformaciones unitarias además de que permiten obtener los estados propios de masa, también diagonalizan la matriz, es decir

$$\begin{aligned} M_E^{diag} &= T_L M^E T_R^\dagger = diag(m_e, m_\mu, m_\tau), \\ M^{Ndiag} &= S_L M^N S_R^\dagger = diag(m_{11}^\nu, m_{22}^\nu, m_{33}^\nu), \\ M_R^{Ndiag} &= U_R M^N U_R^\dagger = diag(m_{R11}^\nu, m_{R22}^\nu, m_{R33}^\nu). \end{aligned} \tag{4-114}$$

Es útil considerar el ejemplo sencillo, pero físicamente interesante, de una única familia de neutrino. Imaginemos $m_L = 0$ y $m_R \gg m_D$, en este caso la matriz 2×2 se escribe como

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & m_D^T \\ m_D & m_R \end{pmatrix}. \tag{4-115}$$

Para el caso de interés físico 3×3, de nuevo si la matriz m_L es despreciable (auto valores pequeños), la matriz de masa para los neutrinos M_ν toma la forma (para el caso de 3 generaciones)

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & m_D^T \\ m_D & m_R \end{pmatrix}. \tag{4-116}$$

Si los auto valores de m_R son grandes comparados con los de m_D, entonces de nuevo obtengo un espectro de neutrinos, separados en dos sectores, uno ligero y otro pesado. La matriz anterior puede diagonalizarse por bloques

$$(\mathbf{U_L^\nu})^T \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{m_D^T} \\ \mathbf{m_D^T} & \mathbf{M_R} \end{pmatrix} \mathbf{U_L^\nu} = \begin{pmatrix} \mathbf{M_{lig}} & 0 \\ 0 & \mathbf{M_{pes}} \end{pmatrix}, \tag{4-117}$$

$$U_L = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - BB^\dagger} & B \\ -B^\dagger & \sqrt{1 - B^\dagger B} \end{pmatrix}, \tag{4-118}$$

$$(\mathbf{U_L^\nu})^T \mathbf{M_v} \mathbf{U_L^\nu} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{1 - B^* B^T}} & \mathbf{-B^*} \\ \mathbf{B^*} & \sqrt{\mathbf{1 - B^T B^*}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{M_D^T} \\ \mathbf{M_D^T} & \mathbf{M_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{1 - B B^\dagger}} & \mathbf{B} \\ \mathbf{-B^\dagger} & \sqrt{\mathbf{1 - B^\dagger B}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M_{Lig}} = -\mathbf{B^* M_D} \sqrt{\mathbf{1 - BB^\dagger}} - \sqrt{\mathbf{1 - B^* B^T}} \mathbf{M_D^T B^\dagger} + \mathbf{B^* M_R B^\dagger}, \tag{4-119}$$

$$\mathbf{M_{Pes}} = \sqrt{\mathbf{1 - B^T B^*}} \mathbf{M_D^T B} + \mathbf{B^T M_D^T} \sqrt{\mathbf{1 - B^\dagger B}} + \sqrt{\mathbf{1 - B^T B^*}} \mathbf{M_R^T} \sqrt{\mathbf{1 - B^\dagger B}}, \tag{4-120}$$

$$0 = -\mathbf{B^T M_D^T B^\dagger} + \sqrt{\mathbf{1 - B^T B^*}} \mathbf{M_D} \sqrt{\mathbf{1 - B^\dagger B}} - \sqrt{\mathbf{1 - B^T B^*}} \mathbf{M_R B^\dagger} \quad . \tag{4-121}$$

A primer orden la ecuación, se reduce a

$$\mathbf{M_D} - \mathbf{M_R B_1^\dagger} = 0, \tag{4-122}$$

resolviendo para B_1

$$\mathbf{B_1} = \mathbf{M_D^\dagger M_R^{-1\dagger}}, \tag{4-123}$$

dejando

$$\mathbf{M_{lig}} \approx -\mathbf{M_D^T M_R^{-1} M_D}, \tag{4-124}$$

$$\mathbf{M_{Pes}} \approx \mathbf{M_R}, \tag{4-125}$$

ya que m_R es un parámetro invariante $SU(2) \times U(1)$, no hay ninguna ligadura sobre él. Por otro lado, tanto m_D como m_L, pueden originarse únicamente después de la RES. La interacción de Yukawa de ν_R con un doblete de quiralidad izquierda $L_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$ vía un doblete de Higgs $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^- \end{pmatrix}$,

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -\Gamma \overline{\nu_R} \Phi L_L + h.c., \tag{4-126}$$

da lugar a un término de masa de Dirac

$$m_D = \Gamma \left\langle \phi^0 \right\rangle . \tag{4-127}$$

Puesto que $\langle \phi^0 \rangle$ está fijado por la escala de ruptura $SU(2) \times U(1)$

$$\left\langle \phi^0 \right\rangle = \frac{1}{\left(\sqrt{2} G_F\right)^{1/2}} \sim 180 GeV. \tag{4-128}$$

Conseguir que m_D tenga un valor en el rango de eV requiere que $\Gamma \sim 10^{-11}$.

Además de la obtención mediante el singlete de Majorana, existe otra forma de encontrar a nivel árbol el operador de Weinberg, al incluir por cada generación un triplete de fermiones con quiralidad derecha, que permite obtener un término Dirac-Majorana similar al del singlete en el MSS tipo I.

4.8. MSS tipo III en el M2DH-III extendido

Generalidades

Si se incluye, por cada generación, un triplete de fermiones con quiralidad derecha, entonces este triplete permite obtener un término de Dirac-Majorana similar al del singlete en el escenario del MSS. Sin embargo, la adición del triplete conduce a una fenomenología mucho más rica [71, **?**, 72] e implicaciones únicas en la física más allá del MEE [60,58,65]. Por lo anterior, en esta sección se considera el M2DH extendido con la introducción del triplete. Tal triplete poseerá hipercarga débil nula e isoespín débil igual a uno. Denotaremos el triplete por $\overrightarrow{\sum}_R$, donde el carácter vectorial se refiere a sus tres componentes. Si $\Sigma_R^0 = \Sigma_R^{'}$ y ya que los campos Σ_1, Σ_2 complejos, no son auto estados propios del operador de carga eléctrica, estos fermiones pesados adicionales pertenecerán a la representación adjunta del grupo $SU(2)$. Dado que estos tienen interacciones de gauge, esto hace que sea más fácil su producción en los experimentos con colisionadores.

En el usual MSS tipo III con un doblete de Higgs, se tenía que

$$m_\nu = -\frac{v^2}{2} \eta_\Sigma^T M_\Sigma^{-1} \eta_\Sigma, \tag{4-129}$$

donde v es el VEV, M_Σ la matriz de masa del triplete de fermiones en la representación adjunta del grupo $SU(2)$ y η_Σ la matriz de acoplamiento de Yukawa de los fermiones con los leptones y el Higgs del MEE. Se considera la masa del neutrino para ser del orden $m_\nu \approx O{,}1$ eV y la masa del triplete entre $300 - 800$ GeV.

Acoplamientos de Yukawa: masa y mezcla de leptones

Para cualquier campo que aun no es auto-estado de masa, denotamos en coordenadas cartesianas (ver anexo G) como

$$\vec{\Sigma}'_{Ri} = \left(\Sigma'^{1}_{R}, \Sigma'^{2}_{R}, \Sigma'^{3}_{R}\right) \tag{4-130}$$

$$\vec{\Sigma^{C}}'_{Ri} = \left(\Sigma'^{1c}_{R}, \Sigma'^{2c}_{R}, \Sigma'^{3c}_{R}\right), \tag{4-131}$$

donde $i = 1, 2, 3$. En la notación 2×2 compacta, el triplete toma la forma

$$\Sigma'_{Ri} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j} \vec{\sigma}'^{j}_{i} \cdot \vec{\Sigma}_{Rj}, \tag{4-132}$$

donde σ_j son las matrices de Pauli. La componente derecha de este multiplete en notación 2×2 esta dado por

$$\begin{aligned} \Sigma'_{Ri} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 0 & \Sigma'^{1}_{Ri} \\ \Sigma'^{1}_{Ri} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\Sigma'^{2}_{Ri} \\ i\Sigma'^{2}_{Ri} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma'^{3}_{Ri} & 0 \\ 0 & \Sigma'^{3}_{Ri} \end{pmatrix} \right] & (4\text{-}133) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Sigma'^{3}_{Ri} & \Sigma'^{1}_{Ri} - i\Sigma'^{2}_{Ri} \\ \Sigma'^{1}_{Ri} + i\Sigma'^{2}_{Ri} & -\Sigma'^{3}_{Ri} \end{pmatrix}, & (4\text{-}134) \end{aligned}$$

con lo cual se determina el adjunto el conjugado

$$\overline{\Sigma}'_{Ri} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \overline{\Sigma'^{3}_{Ri}} & \overline{\Sigma'^{1}_{Ri}} - i\overline{\Sigma'^{2}_{Ri}} \\ \overline{\Sigma'^{1}_{Ri} + i\Sigma'^{2}_{Ri}} & -\overline{\Sigma'^{3}_{Ri}} \end{pmatrix}, \tag{4-135}$$

$$\Sigma^{iC}_{Ri} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Sigma'^{3c}_{Ri} & \Sigma'^{1c}_{Ri} - i\Sigma^{i2c}_{Ri} \\ \Sigma'^{1c}_{Ri} + i\Sigma'^{2c}_{Ri} & -\Sigma'^{3c}_{Ri} \end{pmatrix}. \tag{4-136}$$

Si las componentes del triplete en la base del operador de carga son

$$\Sigma'^{\pm}_{Ri} = \frac{\Sigma'^{1}_{Ri} \mp \Sigma'^{i2}_{Ri}}{\sqrt{2}}, \qquad \Sigma'^{i0}_{Ri} = \Sigma'^{i3}_{Ri}, \tag{4-137}$$

el correspondiente conjugado de carga multiplete puede ser escrito como

$$\Sigma'_{Ri} = \begin{pmatrix} \Sigma'^{0}_{Ri} & \Sigma'^{+}_{Ri}/\sqrt{2} \\ \Sigma'^{-}_{Ri}/\sqrt{2} & \Sigma'^{0}_{Ri} \end{pmatrix}. \tag{4-138}$$

Dado que es necesario utilizar los campos con cargas definidas $\Sigma^{\pm}_{Ri}$ en las anteriores matrices, se determinan los campos adjuntos y conjugados de los mismos, así

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma'^{\pm}_{Ri}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{\left(\Sigma'^{1}_{Ri} \mp i\Sigma'^{2}_{Ri}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{\Sigma'^{1}_{Ri}} \mp i\overline{\Sigma'^{2}_{Ri}}\right) \quad \overline{\Sigma'^{0}_{Ri}} = \overline{\Sigma'^{3}_{Ri}}, & (4\text{-}139) \\ \Sigma'^{\pm c}_{Ri} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{C} \overline{\left(\Sigma'^{1}_{Ri} \mp i\Sigma'^{2}_{Ri}\right)}^{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{C}\overline{\Sigma'^{1}_{Ri}}^{T} \mp i\hat{C}\overline{\Sigma'^{2}_{Ri}}^{T}\right), & \\ \Sigma'^{\pm c}_{Ri} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Sigma'^{1c}_{Ri} \pm i\Sigma'^{2c}_{Ri}\right) \quad \Sigma'^{0c}_{Ri} = \Sigma'^{3c}_{Ri}, & (4\text{-}140) \end{aligned}$$

por lo cual, se tiene que las matrices asociadas corresponden a

$$\overline{\Sigma}'_R = \begin{pmatrix} \overline{\Sigma'_R}/\sqrt{2} & \overline{\Sigma'^-_R} \\ \overline{\Sigma'^+_R} & -\overline{\Sigma'_R}/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \Sigma'^C_R = \begin{pmatrix} \Sigma'^c_R/\sqrt{2} & \Sigma'^{-c}_R \\ \Sigma'^{+c}_R & -\Sigma'^c_R/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \tag{4-141}$$

tal que $\Sigma'_{0i} = \Sigma'_{Ri} + \Sigma'^C_{Ri}$. Al incluir en nuestro modelo un nuevo doblete escalar bajo $SU(2)$, Φ_2, al ya usual Φ_1 del MEE, este nuevo doblete se acopla únicamente al triplete de fermiones introducidos anteriormente. Debido a que se ha impuesto una simetría Z_2

$$\begin{aligned} \Sigma'_R \to -\Sigma'_R, &\qquad \Phi_2 \to -\Phi_2, \\ Q'_L \to Q'_L, \quad L'_L \;\to\; L'_L, &\quad \Phi_1 \to \Phi_1. \end{aligned}$$

La parte del lagrangiano responsable de la masa de los leptones puede ser escrita como

$$-\mathcal{L}_Y = \left[\eta^E_{ij}\overline{E'_{Ri}}\Phi^\dagger_1 L'_{Lj} + \sqrt{2}\Phi^{C\dagger}_2\overline{\Sigma'_{Ri}}\eta^\Sigma_{ij}L'_{Lj} + h.c\right] + \frac{1}{2}M^\Sigma_{ij}\left[\overline{\Sigma_{Ri}}\Sigma^C_{Rj} + h.c\right], \tag{4-142}$$

donde E_R y L_L son las usuales componentes de quiralidad derecha e izquierda para los leptones, respectivamente, y $\eta^\Sigma_{ij}, \eta^E_{ij}$ son las matrices 3×3 de constantes de acoplamiento de Yukawa. Después de la RES electrodébil, para el caso de una generación y analizando únicamente la parte en la que se genera el término de masa, se tiene que

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y &= \eta^E_{ij}\overline{e'_{Ri}}\begin{pmatrix} 0 & v_1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_{L'j} \\ e'_{Lj}\end{pmatrix} + \sqrt{2}\eta^\Sigma_{ij}\begin{pmatrix} v_2/ & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\Sigma'^0_{Ri}}/\sqrt{2} & \overline{\Sigma'^-_{Ri}} \\ \overline{\Sigma'^+_{Ri}} & -\overline{\Sigma'^0_{Ri}}/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu'_{Lj} \\ e'_{Lj}\end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2}M^\Sigma_{ij}Tr\left[\begin{pmatrix} \overline{\Sigma'^0_{Ri}}/\sqrt{2} & \overline{\Sigma'^-_{Ri}} \\ \overline{\Sigma'^+_{Ri}} & -\overline{\Sigma'^0_{Ri}}/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Sigma'^{0c}_{Rj}/\sqrt{2} & \Sigma'^{-c}_{Rj} \\ \Sigma'^{+c}_{Rj} & -\Sigma'^{0c}_{Rj}/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right] + h.c, \\ &= \frac{\eta^E_{ij}v_1}{\sqrt{2}}\overline{e'_{Ri}}e'_{Lj} + \sqrt{2}\eta^\Sigma_{ij}\begin{pmatrix} v_2/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\Sigma'^0_{Ri}}/\sqrt{2} & \overline{\Sigma'^-_{Ri}} \\ \overline{\Sigma'^+_{Ri}} & -\overline{\Sigma'^0_{Ri}}/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu'_{Lj} \\ e'_{Lj}\end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2}M^\Sigma_{ij}Tr\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\overline{\Sigma'^0_{Ri}}\Sigma'^{0c}_{Rj}\right) + \overline{\Sigma'^-_{Ri}}\Sigma'^{+c}_{Rj} & \\ & \overline{\Sigma'^+_{Ri}}\Sigma'^{-c}_{Rj} + \frac{1}{2}\left(\overline{\Sigma'^0_{Ri}}\Sigma'^{0c}_{Rj}\right)\end{pmatrix} + h.c. \end{aligned} \tag{4-143}$$

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y &= \frac{\eta^E_{ij}v_1}{\sqrt{2}}\overline{e'_{Ri}}e'_{Lj} + \eta^\Sigma_{ij}v_2\left(\frac{\overline{\Sigma'^0_{Ri}}\nu'_{Lj}}{\sqrt{2}} + \overline{\Sigma'^-_{Ri}}e'_{Lj}\right) \\ &+ \frac{1}{2}M^\Sigma_{ij}Tr\left[\frac{1}{2}\left(\overline{\Sigma'^0_{Ri}}\Sigma'^{0c}_{Rj}\right) + \overline{\Sigma'^-_{Ri}}\Sigma'^{+c}_{Rj} + \overline{\Sigma'^+_{Ri}}\Sigma'^{-c}_{Rj} + \frac{1}{2}\left(\overline{\Sigma'^0_{Ri}}\Sigma'^{0c}_{Rj}\right)\right] + h.c, \\ &= \frac{\eta^E_{ji}v_1}{\sqrt{2}}\overline{e'_{Ri}}e'_{Lj} + \frac{\eta^\Sigma_{ij}v_2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\overline{\Sigma'^0_{Ri}}\nu'_{Lj}}{\sqrt{2}} + \overline{\Sigma'^-_{Ri}}e'_{Lj}\right) \\ &+ \frac{1}{2}M^\Sigma_{ij}Tr\left[\overline{\Sigma'^-_{Ri}}\Sigma'^{+c}_{Rj} + \overline{\Sigma'^+_{Ri}}\Sigma'^{-c}_{Rj} + \overline{\Sigma'^0_{Ri}}\Sigma'^{0c}_{Rj}\right] + h.c. \end{aligned} \tag{4-144}$$

Ya que se debe tener en cuenta el campo de Dirac Ψ, se estudiará el término de masa para los campos cargados del triplete $\Sigma_R^{\pm}$ de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_Y^{\Sigma^{\pm}} = \frac{1}{2} M_{ij}^{\Sigma} Tr\left[\overline{\Sigma_{Ri}^{\prime -}} \Sigma_{Rj}^{\prime +c} + \overline{\Sigma_{Ri}^{\prime +}} \Sigma_{Rj}^{\prime -c} + \overline{\Sigma_{Ri}^{\prime 0}} \Sigma_{jR}^{\prime 0c}\right]. \tag{4-145}$$

Haciendo uso de $\overline{\nu_R}\nu_L = -\nu_L^T \overline{\nu_R}^T = \nu_L^T \hat{C}\hat{C}\overline{\nu_R}^T = \overline{\nu_L^c}\nu_R^c$, se utilizaran las siguientes relaciones[2]

$$\begin{aligned}
\overline{\Sigma_R^-}\Sigma_R^{+c} &= -\Sigma_R^{+c}\overline{\Sigma_R^-} \\
&= -\Sigma_R^{+cT}\overline{\Sigma_R^-}^T = -\hat{C}\left(\overline{\Sigma_R^+}^T\right)^T \overline{\Sigma_R^-}^T \\
&= -\overline{\Sigma_R^+}\hat{C}^T\overline{\Sigma_R^-}^T = \overline{\Sigma_R^+}\hat{C}\overline{\Sigma_R^-}^T \\
&= \overline{\Sigma_R^+}\Sigma_R^{-c},
\end{aligned} \tag{4-146}$$

además

$$\overline{\Sigma_R^{+c}}\Sigma_R^- = -\Sigma_R^{+T}\hat{C}^\dagger\Sigma_R^- = \Sigma_R^{-T}\left(\hat{C}^\dagger\right)^T\Sigma_R^+ = -\Sigma_R^{-T}\left(\hat{C}^\dagger\right)\Sigma_R^+ = \overline{\Sigma_R^{-c}}\Sigma_R^+, \tag{4-147}$$

con lo cual, de esta forma es posible obtener

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y^{\Sigma_Y^{\pm}} &= M_{ij}^{\Sigma}\left[\overline{\Sigma_{Ri}^{\prime -}}\Sigma_{Rj}^{\prime +c} + \overline{\Sigma_{Ri}^{\prime +c}}\Sigma_{Rj}^{\prime -}\right] \\
&= M_{ij}^{\Sigma}\left[\overline{\Psi'}_{Ri}\Psi'_{Lj} + \overline{\Psi'_{Li}}\Psi'_{Rj}\right] = M_{ij}^{\Sigma}\overline{\Psi}'_{Ri}\Psi_{Lj} + h.c.
\end{aligned} \tag{4-148}$$

Luego, el lagrangiano de Yukawa después de la RES corresponde a

$$-\mathcal{L}_Y = \frac{\eta_{ji}^E v_1}{\sqrt{2}}\overline{e'_{Ri}}e'_{Lj} + \frac{\eta_{ij}^{\Sigma}v_2}{\sqrt{2}}\overline{\Sigma_{Ri}^{\prime 0}}\nu'_{Lj} + \eta_{ij}^{\Sigma}v_2\overline{\Sigma_{Ri}^{\prime -}}e'_{Lj} + M_{ij}^{\Sigma}\overline{\Psi'}_{Ri}\Psi'_{Lj} + \frac{M_{ij}^{\Sigma}}{2}\overline{\Sigma_{Ri}^{\prime 0}}\Sigma_{Rj}^{\prime 0} + h.c. \tag{4-149}$$

Las matrices de masa de los neutrinos pesados y livianos son obtenidas mediante diagonalización por bloques. Al imponer la simetría Z_2, entonces la masa del neutrino depende únicamente de uno de los VEV V_2, mientras en el caso de la matriz de masa para los leptones cargados, ambos dobletes se acoplan para dotar de masa a los leptones del MEE. El valor de v_2 esta determinado por la escala de masa del neutrino y es independiente de la escala de masa de los demás fermiones, por lo tanto, los valores de la matriz de masa del neutrino puede ser pequeña, sin reducir el valor de las constantes de acoplamiento de Yukawa. Así, las matrices que conforman la diagonal, a primer orden, están dadas por

$$\begin{aligned}
\mathbf{M_L^{Diag}} &= \sqrt{\mathbf{1 - B_R B_R^\dagger}}\mathbf{M_L}\sqrt{\mathbf{1 - B_L B_L^\dagger}} - \mathbf{B_R M_{DT}}\sqrt{\mathbf{1 - B_L B_L^\dagger}} + \mathbf{B_R M_\Sigma B_L^\dagger} \\
&\approx \mathbf{M_L - B_R^1 M_{DT} + B_R^1 M_\Sigma B_L^{1\dagger}} \\
&= \mathbf{M_L - M_L M_{DT}^\dagger M_\Sigma^{-1} M_{DT} + M_L M_{DT}^\dagger M_\Sigma^{-1\dagger} M_\Sigma^{-1} M_{DT}} \\
&= \frac{v_1}{\sqrt{2}}\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{E}},
\end{aligned} \tag{4-150}$$

[2]El signo menos en el segundo término viene de la estadística de Fermi, de la antisimétria de la función de onda para los fermiones en el formalismo de la segunda cuantización

$$\begin{aligned}
\mathbf{M_{\Sigma}^{Diag}} &= \mathbf{B_R^{\dagger}M_LB_L} + \sqrt{\mathbf{1-B_RB_R^{\dagger}}}\mathbf{M_{DT}B_L} + \sqrt{\mathbf{1-B_RB_R^{\dagger}}}\mathbf{M_{\Sigma}}\sqrt{\mathbf{1-B_LB_L^{\dagger}}} \\
&\approx \mathbf{B_R^{1\dagger}M_LB_L^1} - \mathbf{M_{DT}B_L^1} + \mathbf{M_{\Sigma}} \\
&\approx \mathbf{M_{\Sigma}} - \mathbf{M_{DT}M_{\Sigma}^{-1}M_{DT}}. \qquad (4\text{-}151)
\end{aligned}$$

Ya que $(\mathbf{m_D})_{kj} \ll (\mathbf{M^{\Sigma}})_{kj}$, a primer orden en la expanción, entonces

$$\mathbf{M_{\Sigma}^{Diag}} = \mathbf{M_{\Sigma}}. \qquad (4\text{-}152)$$

4.9. MSS híbrido en el M2DH-III extendido

El término de Yukawa para el sector leptónico antes de la RES, para el caso de una generación, está dado por (ver anexo H)

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^l &= \overline{L_{Li}^0}\eta_{ij}^N\widetilde{\Phi_1}N_{Rj}^0 + \overline{L_{Li}^0}\xi_{ij}^E\widetilde{\Phi_2}N_{Rj}^0 \\
&+ \left[\eta_{ij}^E\overline{E'_{Ri}}\Phi_1^{\dagger}L'_{Lj} + \sqrt{2}\Phi_2^{C\dagger}\overline{\Sigma'_{Ri}}\eta_{ij}^{\Sigma}L'_{Lj} + h.c\right] + \frac{1}{2}M_{ij}^{\Sigma}\left[\overline{\Sigma_{Ri}}\Sigma_{Rj}^C + h.c\right] + h.c.
\end{aligned}$$

Después de la RES, el término anterior toma la forma

$$\mathcal{L}_Y^l = \mathcal{L}_Y^{LC} + \mathcal{L}_Y^{LN}, \qquad (4\text{-}153)$$

donde las densidades lagrangianas de los campos cargados y neutros están dadas por

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^{LC} &= \left(\frac{\eta_{ij}^E v_1 + \xi_{ij}^E v_2}{\sqrt{2}}\right)\overline{E'_L}E'_R + \eta_{ij}^{\Sigma}v_2\overline{\Sigma'^-_{Ri}}e'_{Lj} + M_{ij}^{\Sigma}\overline{\Psi'}_{Ri}\Psi'_{Lj} + h.c, \\
&= \overline{E'_L}M^E E'_R + \eta_{ij}^{\Sigma}v_2\overline{\Sigma'^-_{Ri}}e'_{Lj} + M_{ij}^{\Sigma}\overline{\Psi'}_{Ri}\Psi'_{Lj} + h.c., \qquad (4\text{-}154)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y^{LN} &= \frac{1}{2}m_R N_R^T\hat{C}^{\dagger}N_R - \frac{M_{ij}^{\Sigma}}{2}\overline{\Sigma_{Ri}'^0}\Sigma_{Rj}'^0 - \left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right)\overline{N'_L}N'_R - \frac{\eta_{ij}^{\Sigma}v_2}{\sqrt{2}}\overline{\Sigma_{Ri}'^0}\nu'_{Lj} + h.c, \\
&= \frac{1}{2}m_R N_R^T\hat{C}^{\dagger}N_R - \frac{M_{ij}^{\Sigma}}{2}\overline{\Sigma_{Ri}'^0}\Sigma_{Rj}'^0 - \overline{N'_L}M_{ij}^{\nu}N'_R - \frac{\eta_{ij}^{\Sigma}v_2}{\sqrt{2}}\overline{\Sigma_{Ri}'^0}\nu'_{Lj} + h.c., \qquad (4\text{-}155)
\end{aligned}$$

respectivamente, mientras que el término de masa para los leptones neutros L_Y^{LN} se puede escribir como

$$\mathcal{L}_Y^{LN} = \frac{1}{2}N_L^T\hat{C}^{\dagger}M_{LN}N_L + h.c., \qquad (4\text{-}156)$$

siendo

$$N_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \hat{C}\overline{\nu_R}^T \\ \hat{C}\overline{\Sigma_L^0}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \\ \Sigma_L^{0c} \end{pmatrix}, \qquad (4\text{-}157)$$

el vector asociado para los campos neutros. La matriz de masa es

$$M_{LEP} = \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\eta^N_{ij} v_1 + \xi^N_{ij} v_2}{\sqrt{2}}\right)^T & \left(\frac{\eta^\Sigma_{ij} v_2}{\sqrt{2}}\right)^T \\ \left(\frac{\eta^N_{ij} v_1 + \xi N^N_{ij} v_2}{\sqrt{2}}\right) & m_R & 0 \\ \frac{\eta^\Sigma_{ij} v_2}{\sqrt{2}} & 0 & M_\Sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & M^T_\nu & \left(\frac{\eta^\Sigma_{ij} v_2}{\sqrt{2}}\right)^T \\ M_\nu & m_R & 0 \\ \frac{\eta^\Sigma_{ij} v_2}{\sqrt{2}} & 0 & M_\Sigma \end{pmatrix}. \tag{4-158}$$

Ahora, se realiza la extensión al caso de 3 generaciones

$$\mathcal{L}^{\mathbf{LN}}_{\mathbf{Y}} = \frac{1}{2} \mathbf{N}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{L}} \hat{\mathbf{C}}^\dagger \mathbf{M}_{\mathbf{LN}} \mathbf{N}_{\mathbf{L}} + h.c., \tag{4-159}$$

siendo

$$\mathbf{N}_{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} \nu_{\mathbf{L}} \\ \nu^{\mathbf{c}}_{\mathbf{R}} \\ \mathbf{\Sigma}^{\mathbf{0c}}_{\mathbf{L}} \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_{\mathbf{LEP}} = \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\eta^{\mathbf{N}}_{\mathbf{ij}} v_1 + \xi^{\mathbf{N}}_{\mathbf{ij}} v_2}{\sqrt{2}}\right)^T & \left(\frac{\eta^{\mathbf{\Sigma}}_{\mathbf{ij}} v_2}{\sqrt{2}}\right)^T \\ \left(\frac{\eta^{\mathbf{N}}_{\mathbf{ij}} v_1 + \xi \mathbf{N}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{ij}} v_2}{\sqrt{2}}\right) & \mathbf{m}_{\mathbf{R}} & 0 \\ \frac{\eta^{\mathbf{\Sigma}}_{\mathbf{ij}} v_2}{\sqrt{2}} & 0 & \mathbf{M}_{\mathbf{\Sigma}} \end{pmatrix}, \tag{4-160}$$

donde $\nu_{\mathbf{L}}$,$\nu_{\mathbf{R}}$,$\mathbf{\Sigma}^{\mathbf{0c}}_{\mathbf{R}}$ corresponden a los

$$\nu'_L = \begin{pmatrix} \nu'_{\alpha_1 L} \\ \nu'_{\alpha_2 L} \\ \nu'_{\alpha_3 L} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{\Sigma}'^{0C}_R = \begin{pmatrix} \Sigma'^{0c}_{s_1 R} \\ \Sigma'^{0c}_{s_2 R} \\ \Sigma'^{0c}_{s_3 R} \end{pmatrix}. \tag{4-161}$$

La diagonalización de la matriz de masa, en este caso 9×9 es debido a la existencia simultánea del singlete y del triplete de Majorana. Por tanto, la matriz de masa de los neutrinos ligeros es igual a la suma de las matrices de masa obtenidas en el estudio del singlete y triplete separadamente. Ahora la matriz de los campos pesados están dados por

$$
\begin{aligned}
M_{Pes} &\approx M_{\nu\Sigma} + M_D B_1 + B_1^T M_D^T \\
&= M_{\nu\Sigma} + M_D M_D^{\dagger} M_{\nu\Sigma}^{-1\dagger} + M_{\nu\Sigma}^{-1*} M_D^* M_D^T \\
&= \begin{pmatrix} M_R & 0 \\ 0 & M_\Sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi N_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right) \\ \frac{\eta_{ij}^\Sigma v_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right)^\dagger & \left(\frac{\eta_{ij}^\Sigma v_2}{\sqrt{2}}\right)^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_R^{\dagger -1} & 0 \\ 0 & M_\Sigma^{\dagger -1} \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} M_R^{*-1} & 0 \\ 0 & M_\Sigma^{*-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{N}} v_1 + \xi_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{N}} v_2}{\sqrt{2}}\right)^* \\ \left(\frac{\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{\Sigma}} v_2}{\sqrt{2}}\right)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right)^T & \left(\frac{\eta_{ij}^\Sigma v_2}{\sqrt{2}}\right)^T \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} M_R & 0 \\ 0 & M_\Sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi N_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi N_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right)^\dagger M_R^{\dagger -1} & \left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi N_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{\eta_{ij}^\Sigma v_2}{\sqrt{2}}\right)^T M_\Sigma^{\dagger -1} \\ \left(\frac{\eta_{ij}^\Sigma v_2}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi N_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right)^\dagger M_\Sigma^{\dagger -1} & \left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi N_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{\eta_{ij}^\Sigma v_2}{\sqrt{2}}\right)^T M_\Sigma^{\dagger -1} \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} M_R^{*-1} \left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi N_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right)^* \left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi N_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right)^T & M_R^{*-1} \left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi N_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right)^* \left(\frac{\eta_{ij}^\Sigma v_2}{\sqrt{2}}\right)^T \\ M_\Sigma^{*-1} \left(\frac{\eta_{ij}^\Sigma v_2}{\sqrt{2}}\right)^* \left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi N_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right)^\dagger & M_\Sigma^{*-1} \left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi N_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right)^* \left(\frac{\eta_{ij}^\Sigma v_2}{\sqrt{2}}\right)^T \end{pmatrix} \\
&\approx \begin{pmatrix} M_R & 0 \\ 0 & M_\Sigma \end{pmatrix}, \qquad (4\text{-}162)
\end{aligned}
$$

resultado evidente que los campos pesados están desacoplados a primer orden, lo cual es una buena aproximación.

4.10. Conclusiones

El MSS explica la pequeñez de la masa del neutrino al considerar que el singlete posee una masa muy grande, por lo que se obtiene que las masas de los neutrinos de quiralidad izquierda son muy pequeñas comparadas con las de los demás fermiones de la misma familia. Se ha mostrado la equivalencia entre el MEE extendido con el singlete en el escenario de see saw. Al adicionar un segundo doblete de Higgs $SU(2)$, la presencia de este doblete permite una explicación de la pequeñez de la masa de los neutrinos junto con el MSS tipo I. Adicionalmente hemos considerado el escenario híbrido, el cual es una extensión del MEE con la inclusión simultánea de un singlete y un triplete de Majorana (ver anexos G Y H). Para este caso se ha estudiado directamente el MSS, mostrando que la matriz de masa de los neutrinos ligeros corresponde a la suma de las matrices obtenidas para cada uno de los casos por separado. Finalmente, se ha mostrado que esta extensión del MEE posee una importante consecuencia en las oscilaciones, ya que si la matriz de masa de los neutrinos ligeros no presenta submatrices con determinante cero, se puede esperar que esta provenga de la extensión con singlete y triplete simultáneos.

5. Oscilaciones de neutrinos

5.1. Introducción

La observación experimental de las oscilaciones de neutrinos solares [73, 74, 75, 3, 76], atmosféricos [77][78][79], en reactores [80][81][82][83] y en aceleradores [82][83][84][85] [86][87] constituye una evidencia sólida de la existencia de masas para los neutrinos. Desde el punto de vista de la mecánica cuántica, las oscilaciones de neutrinos es un fenómeno de interferencia. La idea fue sugerida hace mucho tiempo, antes de que las teorías de gauge se hicieran populares [88].

El tratamiento de las oscilaciones de neutrinos en el vacío (ver enexo K), se basa en los supuestos de que los neutrinos son estables y ultrarrelativistas. Ambos supuestos son razonables para neutrinos ligeros. En cualquier caso, si se asumiera inestabilidad de los neutrinos, entonces anchos de decaimiento se deben incluir en la amplitud de probabilidad.

En este capítulo se consideran las oscilaciones de neutrinos teniendo en cuenta las posibles fases de violación de CP presentes en las matrices de mezcla de los neutrinos. Esta matriz es generada mediante una extencion mínimal del MEE y por la implementación de una simetría S_3. Se evidencia que el monto de violación de CP es proporcional al invariante de Jarlskog, el cual se mantiene inalterado ante reparametrizaciones de la matriz UPMNS y proporcional una medida real de la violación de CP.

5.2. Motivación

Los experimentos con neutrinos solares, atmosféricos, en reactores y aceleradores han proporcionado pruebas de que los neutrinos tienen masa y mezcla [1, 2]. Estos resultados experimentales pueden ser mejor entendidas en términos de las oscilaciones de neutrinos [3]. Esto implica claramente que el MEE ha de ampliarse al menos en el sector leptónico. La mayoría de los análisis fenomenológicos realizados hasta ahora asumen la existencia de tres neutrinos masivos activos y una matriz unitaria de mezcla tres por tres para la corriente cargada de interacciones de los leptones.

El sector leptónico contiene entonces dos diferencias de masas al cuadrado de los neutrinos, tres ángulos de mezcla, más tres fases de violación CP. Se ha demostrado que es posible ajustar los parámetros observados en los experimentos de neutrinos con las predicciones teóricas, excepto el resultado LSND [4], que sin embargo no fue confirmado por otros experimentos iniciales cortos [5] y el cual queda por aclarar en el futuro (por ejemplo por MiniBooNE [6]). Desde el punto de vista de la construcción de modelos, este escenario requiere nuevos grados de libertad que se añaden al MEE, o bien algunos neutrinos pesados [7], o un triplete de Higgs, que también desarrolla un VEV [8]. En el primer caso, la matriz de mezcla tres por tres entre tres neutrinos ligeros, es aproximadamente unitaria en la medida en que su mezcla con los neutrinos pesados puede ser ignorada en el análisis de los datos actuales. Así, lo anterior es equivalente a tener una teoría efectiva de bajas energías. En el segundo caso, se asume la existencia de un doblete de Higgs adicional.

También hay intentos de incorporar el resultado LSND al incluir explícitamente un neutrino estéril en el sistema de mezcla [9]. Pero ellos se encuentran desfavorecidos por los resultados experimentales, ya sea debido a la tensión entre el resultado positivo de LSND y los negativos de otros experimentos de referencia, o por el rechazo de la implicación neutrino estéril en datos solares y atmosféricos
En este capítulo hemos dejado de lado el resultado LSND como en la mayoría de los estudios y nos hemos preguntado si es posible entender los datos de neutrinos en una extensión mínima del MEE. La extensión es mínima en el sentido de que presenta el menor número de nuevos grados de libertad y de parámetros libres físicos en una teoría fundamental, sin poner en peligro los datos de precisión electrodébil. Con esto en mente, una posibilidad sería introducir uno neutrino estéril a la tres generaciones del MEE. Este tipo de modelos se han estudiado sistemáticamente desde hace mucho tiempo en el trabajo pionero de la referencia [11]. Ellos también fueron considerados sin incluir términos de masa de Majorana en la referencia [12]. De acuerdo con el análisis en la ref. [11], esto introduciría 5 ángulos de mezcla y 3 fases de violación CP, además de dos diferencias masas de los neutrinos (con los otros dos sin masa). Así, es importante acomodar a los mencionados datos de neutrinos que esencialmente requieren dos diferencias de masas al cuadrado y 3 ángulos de mezcla independientes.

5.3. Generalidades sobre oscilaciones de neutrinos

Generalmente los autoestados de sabor $|\nu_\alpha\rangle$ con ($\alpha = e, \mu, \tau$ y los autoestados de masa $|\nu_i\rangle$ con ($i = 1, 2, 3$) están relacionados mediante una transformación unitaria, donde la matriz U, la cual es llamada la matriz de mezcla de leptones, o matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagata-Sakata (PMNS) [11], la cual permite

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle \,. \tag{5-1}$$

Consideramos una matriz de masa M para los neutrinos, la cual no es diagonal en la base de sabor. Esta matriz puede ser diagonalizada por la misma transformación unitaria, obteniendo los auto valores m_1, m_2 y m_3 de los estados de masa[1]. Con respecto a la parametrización de la matriz PMNS, se sabe que existen n^2 parámetros reales en esta matriz. Si fijamos las fases relativas de los estados de neutrino podemos remover $2n-1$ parámetros, con lo cual sólo habría $(n-1)/2$ parámetros libres. Es conveniente dividir estos parámetros en $n(n-1)/2$ ángulos de mezcla y $(n-2)(n-1)/2$ factores de fase complejos. Por la forma en la que la matriz PMNS entra en el lagrangiano de la interacción débil, sabemos que estas fases complejas son una fuente de violación de CP.

Analizamos la propagación de un haz de neutrinos con un sabor dado $|\Psi(0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle$ el cual se construye como una superposición de estados de masa

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle . \tag{5-2}$$

Sabemos que el operador evolución temporal está formado a partir del hamiltoniano $e^{it\hat{H}}$ y el operador de transformación espacial está formado a partir del momento lineal e^{-ixp}. Luego la energía del neutrino está dada por la relación de energía relativista

$$E_k = \sqrt{p_k^2 + m_k^2} = \sqrt{p_k^2(p_k^2 + m_k^2)/p_k^2} \simeq p\sqrt{1 + \frac{m_k^2}{p^2}} = p + \frac{1}{2}\frac{m_k^2}{2p} = E + \frac{1}{2}\frac{m_k^2}{2E}, \tag{5-3}$$

donde la aproximación es buena en el límite $p_k \gg m_k$, la cual es razonable ya que la masa de los neutrinos está por debajo de 1 eV, luego

$$|\Psi(x,t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i} e^{-ipx} e^{itE_i} |\nu_i\rangle . \tag{5-4}$$

Se observa que el hamiltoniano permite considerar la transición entre estados de masa, ya que los neutrinos están viajando a velocidades muy cercanas a la velocidad de la luz $x \approx t$

$$\begin{aligned} |\Psi(x,t)\rangle &= \sum_{i=1}^{n} U_{\alpha i} e^{-i(E_i t - px)} |\nu_i\rangle , \\ &= \sum_{i=1}^{n} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-i(E_i t - px)} |\nu_\beta\rangle . \end{aligned}$$

Dado que estamos interesados en cantidades observables buscamos una expresión para la probabilidad de encontrar un neutrino de sabor β a un tiempo t después de la emisión y a una distancia x de la fuente, teniendo que esta fuente emite neutrinos de sabor α. Para encontrar esta probabilidad, empezamos con la amplitud de probabilidad

$$A\left(\alpha \to \beta : x, t\right) = \langle \nu_\beta | \nu(x,y)\rangle = \sum_{i=1}^{n} U_{\beta i}^* U_{\alpha i} e^{-i(E_i t - px)}. \tag{5-5}$$

[1] U es una matriz unitaría, tal que la traspuesta conjugada es su inversa $U^\dagger U = UU^\dagger = I$.

Experimentalmente no es posible medir el tiempo entre la emisión y la detección, por lo cual debemos asumir algún tipo de relación entre las coordenadas de espacio y tiempo con el fin de eliminar t. Por simplicidad vamos a asumir que los neutrinos se propagan casi a la velocidad de la luz de tal modo que $x \approx ct$. Teniendo en cuenta lo anterior y usando 5-3, obtenemos que

$$A(\alpha \to \beta; x) = \sum_{i=1}^{n} U_{\beta i}^{*} U_{\alpha i} exp\left(-i\frac{m_i^2 x}{2E}\right), \tag{5-6}$$

con lo cual se tiene que

$$P\left(\alpha \to \beta; x\right) = \sum_{i=1}^{n} U_{\alpha i}^{*} U_{\alpha j} U_{\beta i}^{*} U_{\beta j} exp\left(-i\frac{\triangle m_{ij}^2 x}{2E}\right), \tag{5-7}$$

con $\triangle m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$. Esta expresión puede escribirse como

$$P\left(\alpha \to \beta; x\right) = \sum_{i=1}^{n} ||U_{\alpha i}^{*} U_{\beta i}||^2 + 2Re\left[\sum_{j>i=1} U_{\alpha i} U_{\alpha j}^{*} U_{\beta i}^{*} U_{\beta j}\left(-i\frac{\triangle m_{ij}^2 x}{2E}\right)\right]. \tag{5-8}$$

Podemos simplificar adicionalmente esta fórmula asumiendo que U es una matriz real, obteniendo que

$$P\left(\alpha \to \beta; x\right) = \delta_{\alpha\beta} - 4\sum_{j>i=1} U_{\alpha i} U_{\alpha j} U_{\beta i} U_{\beta j} \sin^2\left(\frac{\triangle m_{ij}^2 x}{4E} x\right). \tag{5-9}$$

Podemos ver que la probabilidad depende de la parametrización escogida para la matriz unitaria. Para el caso de dos generaciones, la tradicional representación es la matriz de rotación

$$U = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{5-10}$$

Usando esta matriz, es posible obtener directamente que la probabilidad de supervivencia de una neutrino de sabor α es

$$P\left(\alpha \to \alpha; x\right) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\triangle m_{ij}^2 x}{4E}\right). \tag{5-11}$$

5.3.1. El caso de tres sabores

Vamos a considerar ciertas aproximaciones que nos permitirán obtener fórmulas simples con un número de parámetros más pequeño, lo cual resulta conveniente a la hora de investigar las implicaciones fenomenológicas al momento de comparar con los datos de un experimento.

Supongamos que las masas de los neutrinos obedecen una relación de jerarquía, de tal manera que

$$\left|\triangle m_{12}^2\right| \ll \left|\triangle m_{31}^2\right| \approx \left|\triangle m_{32}^2\right|, \tag{5-12}$$

con esto, la probabilidad de transición se reduce a

$$P(\alpha \to \beta; x) = \\ \sum_{i=1}^{n} ||U_{\alpha i}^* U_{\beta i}||^2 + 2Re\left[U_{\alpha 1}U_{\alpha 2}^* U_{\beta 1}^* U_{\beta 2} + \left(U_{\alpha 1}U_{\beta 1}^* + U_{\alpha 2}U_{\beta 2}^*\right) U_{\alpha 3}^* U_{\beta 3}\right] \times exp\left(-i\frac{m_i^2 x}{2E}\right).$$

Aplicando la condición de unitariedad

$$\sum_{i=1}^{n} U_{\alpha i}U_{\beta i}^* = \delta_{\alpha\beta} \tag{5-13}$$

y haciendo uso de algunas identidades trigonométricas llegamos a

$$P(\alpha \to \beta; x) = \delta_{\alpha\beta} - 4\,||U_{\alpha 3}||^2 \left(\delta_{\alpha\beta} - ||U_{\beta 3}||^2\right) \times \sin^2\left(\frac{\triangle m_{31}^2 x}{4E}\right). \tag{5-14}$$

Para obtener una expresió más explícita debemos tomar una parametrización para la matriz PMNS, tipo la que se tiene para la matriz de CKM en el sector de quarks, es decir para el caso de tres generaciones podemos escribir que

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{-i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{-i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{-i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{-i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{-i\alpha_1/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{5-15}$$

donde $c_{12} = \cos\theta_{12}$ y seis parámetros caracterizan esta matriz U: tres ángulos de mezcla (θ_{12}, θ_{13} y θ_{23}) y un ángulo de fase (δ) y dos fases más generales (α_1 y α_2), que son ignoradas cuando se calcula las probabilidades de transición. En adición a la aproximación de jerarquí de masas, otra suposición posible para simplificar la formula es que los argumentos de las exponenciales satisfacen la condición

$$\frac{\triangle m_{31}^2 x}{2E} \gg 1 \qquad ; \qquad \frac{\triangle m_{32}^2 x}{2E} \gg 1. \tag{5-16}$$

Adicionalmente podemos suponer que los neutrinos que constituyen el haz poseen alguna distribución de energía descrita por una función espectral $\Theta(E)$, tal que

$$\int \Theta(E)dE = 1, \tag{5-17}$$

con esto, la probabilidad medida no es directamente la que habíamos obtenido, sino una probabilidad promediada sobre la energía con un peso $\Theta(E)$

$$P_{obs}(\alpha \to \beta; x) = \int P_{obs}(\alpha \to \beta; x)\Theta(E)dE. \tag{5-18}$$

Dado que la probabilidad depende de funciones oscilantes, sabemos a partir del análisis de Fourier que con la última condición de jerarquía de masas y funciones $\Theta(E)$ lo suficientemente suaves, los términos que involucran esos argumentos se anulan, por lo tanto se llega a que

$$P\left(\alpha \to \beta; x\right) = \sum_i \left|\left|U_{\alpha i}U^*_{\beta i}\right|\right| + 2Re\left[U_{\alpha 1}U^*_{\alpha 2}U^*_{\beta 1}U^*_{\beta 2} \times \int \Theta(E')dE' exp\left(\frac{\triangle m^2_{ij}x}{4E}\right)\right]. \tag{5-19}$$

Teniendo en cuenta la manera en la que los haces de neutrinos se producen, tenemos que $\Theta(E')$ debe estar concentrada en torno a un valor medio de energía E, por lo tanto resulta razonable suponer que la exponencial es aproximadamente constante en el rango en el que $\Theta(E')$ difiere significativamente de cero. Por lo anterior, podemos escribir la formula de oscilación como

$$P\left(\alpha \to \beta; x\right) = \sum_i \left|\left|U_{\alpha i}U^*_{\beta i}\right|\right| + 2Re\left[U_{\alpha 1}U^*_{\alpha 2}U^*_{\beta 1}U^*_{\beta 2} \times exp\left(-i\frac{\triangle m^2_{ij}}{4E}x\right)\right]. \tag{5-20}$$

Aplicando repetidamente la condición de unitariedad, esta expresión se puede escribir como

$$\begin{aligned} P_{obs}\left(\alpha \to \beta; x\right) &= \delta_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}2\left|\left|U_{\alpha 3}\right|\right|^2 + 2\left|\left|U_{\alpha 3}\right|\right|^2\left|\left|U_{\beta 3}\right|\right|^2 - 4Re\left[U_{\alpha 1}U^*_{\alpha 2}U^*_{\beta 1}U^*_{\beta 2}\sin^2\left(-i\frac{\triangle m^2_{ij}}{4E}x\right)\right] \\ &- 4Im\left[U_{\alpha 1}U^*_{\alpha 2}U^*_{\beta 1}U^*_{\beta 2}\right]\sin\left(-i\frac{\triangle m^2_{12}}{4E}x\right)\cos\left(-i\frac{\triangle m^2_{12}}{4E}x\right). \end{aligned} \tag{5-21}$$

5.3.2. Tratamiento estándar

Desde las evidencias experimentales, se cree que $\theta_{13} \approx 0$, y que el efecto de δ, puede ser ignorado. Lo anterior produce una considerable simplificación, tal que U, con $\theta_{12} = \theta$ y $\theta_{23} = \phi$, toma la forma

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & \sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & -\cos\theta\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}. \tag{5-22}$$

Las probabilidades de transición entre los diferentes estados pueden ser calculadas a partir de (**??**), obteniéndo como resultado que

$$
\begin{aligned}
P_{ee} &= \left|\sum_{i,j} U^T_{ie} U_{ei} e^{im_i^2 L/2p}\right|^2 \\
&= \left|\cos^2\theta e^{im_1^2 L/2p} + \sin\theta e^{im_2^2 L/2p}\right|^2 \\
&= \left(\cos^2\theta e^{-im_1^2 L/2p} + \sin\theta e^{-im_2^2 L/2p}\right)\left(\cos^2\theta e^{im_1^2 L/2p} + \sin\theta e^{im_2^2 L/2p}\right) \\
&= \cos^4\theta + \sin^4\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta\left(e^{iL(m_1^2-m_2^2)/2p} + e^{iL(m_2^2-m_1^2)/2p}\right) \\
&= \cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta\cos\left(\frac{\triangle m_{12}^2}{2p}L\right) \\
&= \cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta\left(1 - \sin\left(\frac{\triangle m_{12}^2}{2p}L\right)\right) \\
&= \cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta - 4\sin^2\theta\cos^2\theta\sin\left(\frac{\triangle m_{12}^2}{2p}L\right) \\
&= \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)^2 - 4\sin^2\theta\cos^2\theta\sin\left(\frac{\triangle m_{12}^2}{4p}L\right) \\
&= 1 - 4\sin^2\theta\cos^2\theta\sin\left(\frac{\triangle m_{12}^2}{4E}L\right),
\end{aligned}
\tag{5-23}
$$

donde $\triangle m_{12}^2 = m_1^2 - m_2^2$. Las otras posibilidades, que se pueden calcular similarmente, son

$$P_{e\mu} = 4\sin^2\theta\cos^2\theta\cos^2\phi\sin\left(\frac{\triangle m_{21}^2}{4E}L\right) \tag{5-24}$$

$$P_{e\tau} = 4\sin^2\theta\cos^2\theta\cos^2\phi\sin\left(\frac{\triangle m_{21}^2}{4E}L\right) \tag{5-25}$$

$$
\begin{aligned}
P_{\mu\mu} &= 1 - 4\sin^2\theta\cos^2\theta\cos^4\phi\sin^2\left(\frac{\triangle m_{21}^2}{4E}L\right) - 4\sin^2\theta\sin^2\phi\cos^2\phi\sin^2\left(\frac{\triangle m_{31}^2}{4E}L\right) \\
&- 4\cos^2\theta\sin^2\phi\cos^4\phi\sin^2\left(\frac{\triangle m_{32}^2}{4E}L\right),
\end{aligned}
\tag{5-26}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{\mu\tau} &= -4\sin^2\theta\cos^2\theta\sin^2\phi\cos^2\phi\sin^2\left(\frac{\triangle m_{21}^2}{4E}L\right) + 4\sin^2\theta\sin^2\phi\cos^2\phi\cos^2\phi\sin^2\left(\frac{\triangle m_{31}^2}{4E}L\right) \\
&+ 4\cos^2\theta\sin^2\phi\cos^2\phi\sin^2\left(\frac{\triangle m_{32}^2}{4E}L\right)
\end{aligned}
\tag{5-27}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{\tau\tau} &= 1 - 4\sin^2\theta\cos^2\theta\sin^4\phi\sin^2\left(\frac{\triangle m_{21}^2}{4E}L\right) + 4\sin^2\theta\sin^2\phi\cos^2\phi\cos^2\phi\sin^2\left(\frac{\triangle m_{31}^2}{4E}L\right) \\
&- 4\cos^2\theta\sin^2\phi\cos^2\phi\sin^2\left(\frac{\triangle m_{32}^2}{4E}L\right),
\end{aligned}
\tag{5-28}
$$

siendo evidente que todas las oscilaciones dependen del término L/E. Algunos de los valores de los ángulos de mezcla han sido determinados experimentalmente, siendo éstos

$$\begin{aligned}\theta &\approx 34\\ \phi &\approx 45\\ \triangle m_{\odot}^2 = \triangle m_{12}^2 &\approx 7{,}6 \times 10^{-5} eV^2\\ \triangle m_{atm}^2 &= \triangle m_{23}^2 \approx {,}0024 eV^2. \end{aligned} \tag{5-29}$$

Si ahora se tiene en cuenta los valores de las fases que violan CP, entonces la probabilidad se escribe como

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) &= \left|\sum_j U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-i\frac{m_j^2}{2E}}\right|^2 \\ &= \delta_{\alpha\beta} - 4\sum_{i>j} \Re(U_{\alpha i}^* U_{\alpha j} U_{\beta i} U_{\beta j}^*) \sin^2\left(\frac{\triangle m_{ij}^2}{2E} L\right) \\ &+ 2\sum_{i>j} \Im(U_{\alpha i}^* U_{\alpha j} U_{\beta i} U_{\beta j}^*) \sin\left(\frac{\triangle m_{ij}^2}{2E} L\right). \end{aligned} \tag{5-30}$$

5.4. Generalidades sobre violación de CP

Se ha reconocido desde hace mucho tiempo que la violación de la fase CP de Dirac presente en el modelo más simple de tres neutrinos puede, en principio, ser observarse en los experimentos de oscilaciones de neutrinos [89]. Posiblemente ésta sea la forma más prometedora de probar directamente la existencia de la fase de violación de CP presente en la matriz de mezcla de neutrinos, a menos que el ángulo de mezcla θ_{13} sea demasiado pequeño. Si CPT se conserva, la violación de CP implica la conservaciń de T. En esta sección, no se considera la posible violación de CPT en el sector de neutrinos [101]. Actualmente se tiene claridad de que la diferencia entre las probabilidades de oscilación de neutrinos y anti-neutrino es proporcional al factor de CP invariante del sector leptónico, de forma análoga a lo que sucede en el sector de quarks [91]. En la última década, la violación de CP en las oscilaciones de neutrinos ha sido un tema de gran interés [91, 14, 15, 16, 12, 13]. En esta sección, consideramos tres neutrinos activos sin tener en cuenta neutrinos estériles, estos últimos inmunes a la interacción débil [92][93], cuya existencia ha sido planteada a partir de los datos del LSND y MiniBooNE [94][95].

La evidencia experimental a favor de la pequeñez de la masa de los neutrinos de quiralidad izquierda exige una extensión del MEE. Los resultados recientes de las colaboraciones Minos [96] y MiniBooNE [42] no sólo reafirman lo anterior, sino que también motivan a pensar sobre la posible violación del teorema CPT. La colaboración Minos ha buscado y encontrado señales de oscilaciones tanto en ν_μ como en $\bar{\nu}_\mu$. Sin embargo, el hallazgo más sorprendente de Minos se centra qne que los parámetros que rigen la desaparición ν_μ son diferentes a los que gobiernan a $\bar{\nu}_\mu$. La interpretación más directa, es decir, que los neutrinos tengan masas diferentes de las de los anti-neutrinos, implica una violación del teorema CPT, que a su vez ha sido considerada una buena simetría para cualquier teoría de campo gauge definida en un espacio-tiempo de Minkowski, siendo una simetría que se espera sea respetada en todas las interacciones fundamentales. Posiblemente, éste sea el primer resultado experimental en fśica de neutrinos que para ser explicado se requiera la violación de la simetría CPT.

Sin embargo, otro resultado experimental anómalo conocido desde hace mucho tiempo es el obtenido por la colaboración LSND [2], donde las oscilaciones de $\bar{\nu}_e$ observadas requieren la existencia de un tipo de partícula no conocido. El aspecto clave es que la escala de masa asociada al nuevo tipo de partícula requerida para entender las oscilaciones observadas resultó se muy distinta de cualquiera de las que se habían considerado en las oscilaciones de los neutrinos solares (aparentemente $\nu e \leftrightarrow \nu_\mu$) o en las oscilaciones de los neutrinos atmosféricos ($\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$). Aunque el anterior hecho podría explicarse postulando la existencia de un neutrino estéril, esta explicación está muy desfavorecida por un ajuste global de todos los datos de neutrinos [97], en particular los relacionados con las corrientes neutras medidas [74]. Para resolver esta anomalía, varios experimentos han sido propuestos y desarrollados. El último en esta línea es el MiniBooNE, cuyos resultados han sido coherentes con los resultados de la colaboración LSND. Cabe señalar en este punto, que el resultado de la colaboración LSND podría, en principio, ser explicado en el marco de la violación de la simetría CPT [97].

5.5. Generalidades sobre parametrización de la matriz de mezcla

Desde el punto de vista teórico, el descubrimiento de la masa y la mezcla de neutrinos ha propiciado cambios importantes. Por ejemplo, debido a que en el MEE los sectores de Higgs y de Yukawa, que son responsables de la generación de las masas de los fermiones cargados y de los bosones electrodébiles, no permiten dotar de masa a los neutrinos de quiralidad izquierda. Adicionalmente, el sector de Yukawa del MEE tiene suficientes parámetros cuyos valores deben ser determinados a partir de experimentos. Estos dos hechos, tomados en conjunto, apuntan a la necesidad y la conveniencia de eliminar parámetros libres y sistematizar las jerarquías de masas y mezclas observadas, así como la presencia o ausencia de fases que violen CP.

En un trabajo reciente, se ha argumentado que la simetría de sabor, corresponde a una simetría de permutación de tres objetos, S_3, introduciéndose una extensión mínima del MEE para ser invariante S3 [117]. En el modelo propuesto en [117], se planteó que S_3 es una simetría fundamental en el sector fermiónico. Esta suposición, conlleva necesariamente a ampliar el

concepto de sabor y aumentar el número de campos de Higgs inicialmente a tres [117]. Asumiendo la existencia de tres campos de Higgs, el potencial de Higgs V_H (H_S,H_D) resulta más complicado que el del MEE. Este potencial fué analizado por Pakvasa y Sugawara quienes encontraron que además de la simetría S_3, existe tanto una simetría de permutación S_2 $H_1 \leftrightarrow H_2$, que no es un subgrupo del grupo S_3 de sabor, como una simetría abeliana discreta que se puede utilizar para definir las reglas de selección de los acoples de Yukawa en el sector leptónico.
En esta dirección, vamos a suponer que el vacío respeta la simetría S_2 que presenta potencial de Higgs y que se cumple que

$$\langle H_1 \rangle = \langle H_2 \rangle \, . \tag{5-31}$$

En general, esta extensión del MEE deja matrices de masa de la forma

$$M = \begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_2 & \mu_2 & \mu_5 \\ \mu_2 & \mu_1 - \mu_2 & \mu_5 \\ \mu_4 & \mu_4 & \mu_3 \end{pmatrix} . \tag{5-32}$$

La masa de Majorana para el neutrino ν_L se obtiene a partir del MSS.

5.6. Matriz de masa para el M2DH-III extendido y MSID

Por las razones consideradas en la sección anterior, resulta conveniente eliminar parámetros en el sector de Yukawa, imponiendo una jerarquás en la matriz de masa y mezcla de neutrinos. De igual forma es necesario establecer la presencia o ausencia de fases que violen CP, por medio de una simetría de sabor o de una simetría de familia bajo las cuales las familias transformen en una forma no trivial. Tal simetría de sabor puede ser un grupo continuo o, más económicamente, un grupo finito. Tal como se mencionó en la sección anterior, recientemente en la literatura se ha argumentado que tal simetría de sabor es la simetría de permutación de tres objetos, S_3, y por lo cual se ha introducido una extensión mínima del MEE invariante S_3 [117, 118]. En esta extensión del MEE se ha asumido que $S3$ es una simetría fundamental en el sector de materia. Esta suposición ha conducido necesariamente a ampliar el concepto de sabor y aumentar el número de bosones de Higgs. Por lo tanto, considerando las representaciones irreducibles de $S3$, en esta sección se considera una extensión del MEE que consiste en añadir un doblete de Higgs de $SU(2)_L$ en la representación S_3 singlete, es decir considerar un M2DH.
Sin embargo es necesario tener en cuenta que es posible realizar una reducción adicional del número de parámetros en el sector leptónico, a través de considerar la existencia de una simetría Z_2. Un posible conjunto de asignaciones de carga de Z_2, compatible con los datos experimentales sobre masas y mezclas en el sector leptónica se dan en [CITAR ARTICULO] reduciéndoce al M2DH.

5.6.1. Matriz de masa para los leptones cargados

La matriz de masa para los leptones cargados toma la forma

$$M_e = m_\tau \begin{pmatrix} \widetilde{\mu}_2 & \widetilde{\mu}_2 & \widetilde{\mu}_5 \\ \widetilde{\mu}_2 & -\widetilde{\mu}_2 & \widetilde{\mu}_5 \\ \widetilde{\mu}_4 & \widetilde{\mu}_4 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5-33}$$

La matriz unitaria $T_{eL}^\dagger$, que entra en la definición de la matriz V_{PNMS}, es

$$T_{eL}^\dagger M_e M_e^\dagger T_{eL} = diag(m_e^2, m_\mu^2, m_\tau^2), \tag{5-34}$$

donde m_e, m_μ y m_{tau} son las masas de los leptones cargados y

$$M_e M_e^\dagger = m_\tau \begin{pmatrix} 2\left|\widetilde{\mu}_2\right|^2 + \left|\widetilde{\mu}_5\right|^2 & \left|\widetilde{\mu}_5\right|^2 & 2\left|\widetilde{\mu}_2\right|^2 \left|\widetilde{\mu}_4\right|^2 e^{-i\delta_e} \\ \left|\widetilde{\mu}_5\right|^2 & 2\left|\widetilde{\mu}_2\right|^2 + \left|\widetilde{\mu}_5\right|^2 & 0 \\ 2\left|\widetilde{\mu}_2\right|^2 \left|\widetilde{\mu}_4\right|^2 e^{-i\delta_e} & 0 & 2\left|\widetilde{\mu}_4\right|^2 \end{pmatrix}. \tag{5-35}$$

Observamos que esta matriz contiene solamente un factor de fase no ignorable, mientras que los parámetros $\left|\widetilde{\mu}_2\right|, \left|\widetilde{\mu}_4\right|$ y $\left|\widetilde{\mu}_5\right|$ pueden expresarse en términos de las masas de los leptones cargados. A partir de los invariantes $M_e M_e^\dagger$ se tiene que

$$\begin{aligned} Tr(M_e M_e^\dagger) &= m_e^2 + m_\mu^2 + m_\tau^2 = m_\tau^2 \left[4\left|\widetilde{\mu}_4\right| + 2\left(\left|\widetilde{\mu}_4\right|^2 + \left|\widetilde{\mu}_5\right|^2\right)\right] \\ \Lambda(M_e M_e^\dagger) &= m_\tau^2\left(m_e^2 + m_\mu^2\right) + m_e^2 m_\mu^2 = 4m_\tau^4 \left[\left|\widetilde{\mu}_2\right|^4 + \left|\widetilde{\mu}_2\right|^2\left(\left|\widetilde{\mu}_4\right|^2 + \left|\widetilde{\mu}_5\right|^2\right) + \left|\widetilde{\mu}_4\right|^2\left|\widetilde{\mu}_5\right|^2\right] \\ det(M_e M_e^\dagger) &= m_e^2 m_\mu^2 m_\tau^2 = 4m_\tau^6 \left|\widetilde{\mu}_2\right|^2 \left|\widetilde{\mu}_4\right|^2 \left|\widetilde{\mu}_5\right|^2, \end{aligned} \tag{5-36}$$

donde $\Lambda(M_e M_e^\dagger) = \frac{1}{2}\left[\left(Tr(M_e M_e^\dagger)\right)^2 - Tr(M_e M_e^\dagger)^2\right]$. Solucionando estas ecuaciones para $\left|\widetilde{\mu}_4\right|^2, \left|\widetilde{\mu}_4\right|^2$ y $\left|\widetilde{\mu}_4\right|^2 + \left|\widetilde{\mu}_5\right|^2$, obtenemos

$$\left|\widetilde{\mu}_2\right|^2 = \frac{1}{2}\frac{m_e^2 + m_\mu^2}{m_\tau^2} - \frac{m_e^2 m_\mu^2}{m_\tau^2\left(m_e^2 + m_\mu^2\right)} + \beta. \tag{5-37}$$

En esta expresión, β es la solución de la ecuación

$$\beta^3 - \frac{1}{2}\left(1 - 2y + 6\frac{z}{y}\right)\beta^2 - \frac{1}{4}\left(y - y^2 - 4\frac{z}{y} + 7z - 12\frac{z^2}{y^2}\right)\beta - \frac{1}{8}yz - \frac{1}{2}\frac{z^2}{y^2} + \frac{3}{4}\frac{z^2}{y} - \frac{z^3}{y^3} = 0, \tag{5-38}$$

con $y = (m_e^2 + m_\mu^2)/m_\tau^2$ y $z = m_\mu^2 m_e^2/m_\tau^2$. Un buen orden de magnitud para β se obtiene de (5-38), es decir

$$\beta \approx \frac{m_\mu^2 m_e^2}{2m_\tau^2\left(m_\tau^2 - \left(m_\mu^2 + m_e^2\right)\right)}. \tag{5-39}$$

Los parámetros $|\widetilde{\mu_4}|^2$ y $|\widetilde{\mu_5}|^2$, están expresados en términos de $|\widetilde{\mu_2}|^2$

$$\begin{aligned}
|\widetilde{\mu_{4,5}}|^2 &= \frac{1}{4}\left[1-\frac{m_e^2+m_\mu^2}{m_\tau^2}+4\frac{m_e^2 m_\mu^2}{m_\tau^2\left(m_e^2+m_\mu^2\right)}-4\right] \\
&\pm \sqrt{\left(1-\frac{m_e^2+m_\mu^2}{m_\tau^2}+4\frac{m_e^2 m_\mu^2}{m_\tau^2\left(m_e^2+m_\mu^2\right)}-4\beta\right)^2-\frac{m_e^2 m_\mu^2}{m_\tau^2}\frac{1}{|\widetilde{\mu_2}|^2}}. \qquad (5\text{-}40)
\end{aligned}$$

Ya que $M_e M_e^\dagger$ se ha reparametrizado en términos de las masas de los leptones cargados, resulta sencillo calcular U_{eL} como una función de las masas de leptones. A continuación, con el fin de simplificar la notación, escribiremos el resultado en términos de $\left(m_\mu m_e/m_\tau^2\right)^2$, es decir

$$M_e \approx m_\tau \frac{1}{\sqrt{2}} \times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{m_\mu^2+m_e^2}}{m_\tau}\sqrt{1-2\frac{m_\mu^2 m_e^2}{\left(m_\mu^2+m_e^2\right)m_\tau^2}} & \frac{\sqrt{m_\mu^2+m_e^2}}{m_\tau}\sqrt{1-2\frac{m_\mu^2 m_e^2}{\left(m_\mu^2+m_e^2\right)m_\tau^2}} & \sqrt{1-\frac{m_\mu^2+m_e^2}{m_\tau}+4\frac{m_\mu^2 m_e^2}{\left(m_\mu^2+m_e^2\right)m_\tau^2}} \\ \frac{\sqrt{m_\mu^2+m_e^2}}{m_\tau}\sqrt{1-2\frac{m_\mu^2 m_e^2}{\left(m_\mu^2+m_e^2\right)m_\tau^2}} & -\frac{\sqrt{m_\mu^2+m_e^2}}{m_\tau}\sqrt{1-2\frac{m_\mu^2 m_e^2}{\left(m_\mu^2+m_e^2\right)m_\tau^2}} & \sqrt{1-\frac{m_\mu^2+m_e^2}{m_\tau}+4\frac{m_\mu^2 m_e^2}{\left(m_\mu^2+m_e^2\right)m_\tau^2}} \\ \frac{m_\mu m_e}{\sqrt{\left(m_\mu^2+m_e^2\right)m_\tau}}e^{i\delta_e} & \frac{m_\mu m_e}{\sqrt{\left(m_\mu^2+m_e^2\right)m_\tau}}e^{i\delta_e} & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_{eL} \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\frac{m_e}{m_\mu}}{\sqrt{1-\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{m_e m_\mu}{m_\tau^2}\right)}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\frac{m_e}{m_\mu}}{\sqrt{1-\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{m_e m_\mu}{m_\tau^2}\right)}} \\ \frac{\sqrt{1-2\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2}e^{i\delta_e}}{\sqrt{\left(m_\mu^2+m_e^2\right)m_\tau}} & \frac{\frac{m_e}{m_\tau^2}e^{i\delta_e}}{\sqrt{1+\left(\frac{m_e}{m_\tau}\right)^2}} & \frac{\frac{m_e m_\mu}{m_\tau^2}e^{i\delta_e}}{\sqrt{1+\left(\frac{m_e m_\mu}{m_\tau^2}\right)}} \end{pmatrix},$$

5.6.2. Matriz de masa de neutrinos

De acuerdo con la siemtría Z_2, la matriz de masa de neutrinos de Dirac toma la forma

$$M = \begin{pmatrix} \mu_2^\nu & \mu_2^\nu & 0 \\ \mu_2^\nu & -\mu_2^\nu & 0 \\ \mu_4^\nu & \mu_4^\nu & \mu_3^\nu \end{pmatrix}, \qquad (5\text{-}41)$$

luego, la matriz de masa para los neutrinos de quiralidad izquierda obtenida con la implementación del MSS es

$$M_\nu = M_{\nu D} M^{-1}\left(M_{\nu D}\right)^T = \begin{pmatrix} 2\left(\rho_2^\nu\right)^2 & 0 & 2\rho_2^\nu\rho_4^\nu \\ 0 & 2\left(\rho_2^\nu\right)^2 & 0 \\ 2\rho_2^\nu\rho_4^\nu & 0 & 2\left(\rho_4^\nu\right)^2+\left(\rho_3^\nu\right)^2 \end{pmatrix}, \qquad (5\text{-}42)$$

donde $\rho_2^\nu = (\mu_2^\nu)/M_1^{1/2}$,$\rho_4^\nu = (\mu_4^\nu)/M_1^{1/2}$ y $\rho_3^\nu = (\mu_3^\nu)/M_3^{1/2}$, M_1, M_3 son las masas de los neutrinos de quiralidad derecha. Las características (no hermítica, compleja y simétrica) de la matriz hace que se pueda diagonalizar gracias a una transformación biunitaria de la siguiente manera

$$U_\nu^T M_\nu U_\nu = diag\left(|m_{\nu 1}|\, e^{i\phi_1}, |m_{\nu 2}|\, e^{i\phi_2}, |m_{\nu 3}|\, e^{i\phi_3}\right). \tag{5-43}$$

Con el fin de calcular U_ν, tenemos en cuenta que M_ν puede ser llevada a una forma matriz diagonal por bloques mediante una permutación de las segunda y tercera filas y columnas, por tanto

$$S_{23} M_\nu S_{23} = \begin{pmatrix} 2\left(\rho_2^\nu\right)^2 & 2\rho_2^\nu\rho_4^\nu & 0 \\ 2\rho_2^\nu\rho_4^\nu & 2\left(\rho_4^\nu\right)^2 + \left(\rho_3^\nu\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\left(\rho_2^\nu\right)^2 \end{pmatrix},, \tag{5-44}$$

con

$$S_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5-45}$$

La entrada en la esquina inferior derecha de la matriz en el lado derecho de la ecuación (5-44) ya es diagonal y puede ser identificada con $|m_{\nu 3}|\, e^{i\phi_3}$, mientras que $|m_{\nu 3}|$ es la masa física. De esta forma, la matriz 2×2 cuadrada en la esquina superior izquierda se puede diagonalizar mediante una transformación biunitaria de la forma

$$U_{2\times 2}^T M_{2\times 2} U_{2\times 2} = diag\left(|m_{\nu 1}|\, e^{i\phi_1}, |m_{\nu 2}|\, e^{i\phi_2}\right). \tag{5-46}$$

La matriz $U_{2\times 2}$ tiene la forma

$$U_{2\times 2}^\dagger M_{2\times 2} M_{2\times 2}^\dagger U_{2\times 2} = diag\left(|m_{\nu 1}|, |m_{\nu 2}|\right). \tag{5-47}$$

Ya que la matriz 2×2 por ser hermítica $M_{2\times 2} M_{2\times 2}^\dagger$ tiene únicamente un factor de fase. Por lo tanto la matriz puede ser escrita como

$$U_{2\times 2} = \begin{pmatrix} \sin\varrho & \cos\varrho \\ -\cos\varrho e^{i\delta_\nu} & \sin\varrho e^{i\delta_\nu} \end{pmatrix}, \tag{5-48}$$

donde $\sin\varrho$ y $\cos\varrho$ está en función de las masas complejas $m_{\nu 1}$, $m_{\nu 2}$ y $m_{\nu 3}$. Sustituyendo en (5-43), el resultado es

$$\cos\varrho = \sqrt{\frac{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 1}}}, \qquad \sin\varrho = \sqrt{\frac{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 1}}}, \tag{5-49}$$

La unitariedad de $U_{2\times 2}$ fija $\sin\varrho$ para ser real y $|\sin\varrho| \leq 1$. Esta condición fija las fases ϕ_1 y ϕ_2 como

$$|m_{\nu 1}| \sin\phi_1 = |m_{\nu 2}| \sin\phi_2 = |m_{\nu 3}| \sin\phi_\nu, \tag{5-50}$$

La fase real δ_ν en (5-48) no está limitada por la unitariedad de U_ν. Al hacer una segunda permutación de las segunda y tercera filas y columnas en (5-44) y escribir las entradas en M_ν como funciones de las masas complejas $m_{\nu 1}$, $m_{\nu 2}$ y $m_{\nu 3}$, encontramos

$$M_\nu = \begin{pmatrix} m_{\nu 3} & 0 & \sqrt{(m_{\nu 3} - m_{\nu 1})(m_{\nu 2} - m_{\nu 3})} e^{-i\delta_\nu} \\ 0 & m_{\nu 3} & 0 \\ \sqrt{(m_{\nu 3} - m_{\nu 1})(m_{\nu 2} - m_{\nu 3})} e^{-i\delta_\nu} & 0 & (m_{\nu 1} + m_{\nu 2} + m_{\nu 3}) e^{-i2\delta_\nu} \end{pmatrix} \quad (5\text{-}51)$$

y

$$U_\nu = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 1}}} & \sqrt{\frac{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 1}}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sqrt{\frac{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 1}}} e^{i\delta_\nu} & -\sqrt{\frac{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 1}}} e^{i\delta_\nu} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5\text{-}52)$$

Los únicos parámetros libres en estas matrices, además de las masas de los neutrinos, son la fase ϕ_ν implícita en $m_\nu 1$, $m_\nu 2$ y $m_\nu 3$ y la fase de Dirac δ_ν.

5.7. Matriz de mezcla de neutrinos para los dos modelos

La matriz de mezcla U_{PMNS} es obtenida por el producto $T_{eL}^\dagger U_\nu K$. Realizando una adecuada transformación de fase, escribimos

$$U_{PMNS} \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sin\varrho + \frac{\sqrt{1-2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \cos\varrho & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cos\varrho - \frac{\sqrt{1-2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \sin\varrho & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{-i\delta} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \sin\varrho - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cos\varrho e^{i\delta} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cos\varrho + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \sin\varrho e^{i\delta} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1+2\frac{z}{y(1-y)}}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{z}}} \sin\varrho + \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{1+\sqrt{z}}} \cos\varrho e^{i\delta} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{z}}} \cos\varrho + \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{1+\sqrt{z}}} \sin\varrho e^{i\delta} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{z}}} \end{bmatrix} K, \quad (5\text{-}53)$$

donde $\sin\varrho$ y $\cos\varrho$ fueron definidos anteriormente (5-49), mientras que $x = m_e/m_\mu, \delta = \delta_\nu - \delta_e$ y K es la matriz de fase de Majorana diagonal dada por $K = diag\left(1, e^{i\alpha}, e^{i\beta}\right)$. Una comparación de esta expresión con la parametrización estándar nos permitió derivar expresiones para los ángulos de mezcla en función de la carga de los leptones y de las masas de los neutrinos

$$\sin\theta_{13} \approx \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{m_e}{m_\mu}}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2}}, \quad (5\text{-}54)$$

$$\sin\theta_{23} \approx -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2}}, \quad (5\text{-}55)$$

y

$$\tan\theta_{12} \approx -\sqrt{\frac{m_{\nu 2}-m_{\nu 3}}{m_{\nu 3}-m_{\nu 1}}} \times \left(\frac{\sqrt{1-2x^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} x \sqrt{\frac{m_{\nu 3}-m_{\nu 1}}{m_{\nu 2}-m_{\nu 3}}}}{\sqrt{1-2x^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} x \sqrt{\frac{m_{\nu 2}-m_{\nu 3}}{m_{\nu 3}-m_{\nu 1}}}} \right). \tag{5-56}$$

La dependencia de $\tan\theta_{12}$ en la fase ϕ_ν y las masas físicas de los neutrinos se hace explícita con la ayuda de la restricció de la unitariedad de U_ν dada por (5-50), obtenemos

$$\tan^2\varrho = \frac{m_{\nu 2}-m_{\nu 3}}{m_{\nu 3}-m_{\nu 1}} = -\frac{\left(|m_{\nu 2}|^2 - |m_{\nu 3}|^2 \sin^2\phi_\nu\right)^{1/2} - |m_{\nu 3}|\,|\cos\phi_\nu|}{\left(|m_{\nu 1}|^2 - |m_{\nu 3}|^2 \sin^2\phi_\nu\right)^{1/2} - |m_{\nu 3}|\,|\cos\phi_\nu|}. \tag{5-57}$$

Similarmente, las fases de Majorana están dadas por

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \sin(\phi_1 - \phi_1) = \pm\frac{|m_{\nu 3}|\sin\phi_\nu}{|m_{\nu 1}|\,|m_{\nu 2}|} \times \left(\sqrt{|m_{\nu 2}|^2 - |m_{\nu 3}|^3 \sin^2\phi_\nu} + \sqrt{|m_{\nu 1}|^2 - |m_{\nu 3}|^3 \sin^2\phi_\nu}\right), \\ \sin 2\beta &= \sin(\phi_1 - \phi_\nu) = \pm\frac{\sin\phi_\nu}{|m_{\nu 1}|} \times \left(|m_{\nu 3}|\sqrt{1-\sin^2\phi_\nu} + \sqrt{|m_{\nu 1}|^2 - |m_{\nu 3}|^3 \sin^2\phi_\nu}\right). \end{aligned} \tag{5-58}$$

Una más completa y detallada discusión de las fases de Majorana en la matriz de mezcla U_{PMNS} se encuentra [100].

5.8. Violación de CP en las oscilaciones de neutrinos para los dos modelos

Dado que la matriz mezcla leptónica típicamente contiene fases que violan CP, entonces su presencia puede afectar a las oscilaciones de neutrinos [101]. En esta sección, se discuten los aspectos teóricos de la violación de CP en oscilaciones de neutrinos y la posibilidad de sondear experimentalmente sus efectos en futuras búsquedas experimentales. Se ha reconocido durante mucho tiempo que la fase de violación de CP de Dirac presente en el más simple modelo de tres neutrinos podría en principio ser observado en experimentos de oscilación de neutrinos [102]. Probablemente, ésta es la vía más prometedora para sondear directamente la fase CP de Dirac presente en la matriz de mezcla de neutrinos, a menos que θ_{13} sea demasiado pequeño.

Si CPT se conserva, la violación de CP implica la violación de T. Por lo anyerior, no consideramos la posible violación de CPT en el sector neutrinos. En la literatura es posible encontrar trabajos realcionados con violación de CP y/o T [103, 104, 105, 106, 107, 108]. Tal como se mencionó al inicio de este capítulo, actualmente se sabe que la diferencia entre las probabilidades de oscilación para neutrino y antineutrino es proporcional al factor de fase leptónica, de una forma análog a lo que sucede con el factor invariante CP del sector

de quarks [145]. En la última década, la violación de CP en las oscilaciones de neutrinos ha tenido gran interés [109, 110].
Con respecto a la aproximación para argumentos grandes, se observa que la expresión 5-21 adquiere una forma más complicada. Mediante la aplicación de la inversión temporal, se puede verificar que todos los términos de 5-21 son invariantes a excepción del último. Así, este término proporciona la violación de CP en fenómeno de las oscilaciones de neutrinos. Más aún, la combinación $Im\,[U_{\alpha 1}, U_{\alpha 2}, U_{\beta 1}, U_{\beta 2}]$, la cual es la fuente de la violación de CP, aparece con frecuencia [14] en secciones eficaces de procesos con violación de CP y tiene varias propiedades utiles. Esta combinación puede ser escrita como

$$Im\left[U_{\alpha i}, U^*_{\alpha j}, U^*_{\beta i}, U^*_{\beta j}\right] = J\sum_{\gamma,k}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{ijk}, \tag{5-59}$$

donde J se denomina el invariante de Jarlskog, el cual se mantiene inalterado ante reparametrizaciones de la matriz U_{PMNS} y proporciona una medida real de la violación de CP. Actualmente no existe información sobre la violación CP leptónica. En experimentos de oscilaciones de enutrinos se puede detectar efectos que violen CP [111], que tiene que ser proporcionales al invariante de Jarlskog [112].

5.8.1. Probabilidad de conversión $\nu_\mu \to \nu_\mu$

El invariante de Jarlskog para el proceso $\nu_\mu \to \nu_\mu$

$$\begin{aligned}
J_{CP} \quad &= Im\left\{U_{e1}U_{\mu 2}U^*_{\mu 1}U^*_{e2}\right\} \\
&\left[\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{(1-x^2)}\right)[\sin\varrho\cos\varrho] + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left[\sin^2\varrho e^{i\delta}\right]\right. \\
&\left.+\frac{\sqrt{1-2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\cos^2\varrho\right] + \frac{\sqrt{1-2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}[\sin\varrho\cos\varrho]\,e^{i\delta}\right] \\
&\left[\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{(1-x^2)}\right)[\sin\varrho\cos\varrho] - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left[\cos^2\varrho e^{-i\delta}\right]\right. \\
&\left.-\frac{\sqrt{1-2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\sin^2\varrho\right] + \frac{\sqrt{1-2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}[\sin\varrho\cos\varrho]\,e^{-i\delta}\right] \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin^2\varrho\sin\delta + \frac{\sqrt{1-2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}[\sin\varrho\cos\varrho]\sin\delta \\
&+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left[\cos^2\varrho\right]\sin\delta - \frac{\sqrt{1-2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}[\sin\varrho\cos\varrho]\sin\delta \\
&\approx \sin\delta\left[\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right],
\end{aligned} \tag{5-60}$$

A partir de estos resultados podemos establecer que las oscilaciones de neutrinos son, en principio, útiles para estudiar la violación de CP en el sector leptónico. En adición, vemos que existen alteraciones importantes en las probabilidades de oscilación debido a la falta de esta simetría de tal manera que estas alteraciones definitivamente pueden tener efectos en procesos donde CP no se respeta, tales como la leptogónesis del Universo temprano.

5.8.2. Probabilidad de conversión $\nu_e \to \nu_\tau$

Para este proceso se tiene que

$$\begin{aligned} J_{CP} &= Im\left\{U_{e1}U_{\tau 3}U^*_{\tau 1}U^*_{e3}\right\} \\ &\approx \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sin\varrho e^{i\alpha} + \frac{\sqrt{1-2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\cos\varrho e^{i\alpha}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos\varrho + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin\varrho e^{i\delta}\right) \\ &\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\sin\varrho - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cos\varrho e^{-i\delta}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cos\varrho e^{-i\alpha} - \frac{\sqrt{1-2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\sin\varrho e^{-i\alpha}\right), \end{aligned} \tag{5-61}$$

$$\begin{aligned} J_{CP} \approx\; & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x^4}{(1-x^2)^2}\sin\varrho\cos^3\varrho e^{-i\delta} + \frac{1}{2}\frac{x^3\sqrt{1-2x^2}}{(1-x^2)^2}\sin^2\varrho\cos^2\varrho e^{-i\delta} \\ & +\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x^3}{1-x^2}\frac{1}{1+x^2}\sin^3\varrho\cos\varrho e^{i\delta} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x^2}\frac{\sqrt{1-2x^2}}{1+x^2}\sin^4\varrho e^{i\delta} \\ & -\frac{1}{2}\frac{x^2\sqrt{1-2x^2}}{(1-x^2)^2}\cos^4\varrho e^{-i\delta} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x\left(1-2x^2\right)}{(1-x^2)^2}\cos^3\varrho\sin\varrho e^{-i\delta} \\ & +\frac{1}{2}\frac{x^2\sqrt{1-2x^2}}{1-x^2}\frac{1}{1+x^2}\cos^2\varrho\sin^2\varrho e^{i\delta} - \frac{x\left(1-2x^2\right)}{1-x^2}\frac{1}{1+x^2}\sin^3\varrho\cos\varrho e^{i\delta}, \end{aligned} \tag{5-62}$$

$$\begin{aligned} J_{CP} \approx\; & \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x^4}{(1-x^2)^2}\sin\varrho\cos^3\varrho - \frac{1}{2}\frac{x^3\sqrt{1-2x^2}}{(1-x^2)^2}\sin^2\varrho\cos^2\varrho \\ & +\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x^3}{1-x^2}\frac{1}{1+x^2}\sin^3\varrho\cos\varrho - \frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x^2}\frac{\sqrt{1-2x^2}}{1+x^2}\sin^4 \\ & +\frac{1}{2}\frac{x^2\sqrt{1-2x^2}}{(1-x^2)^2}\cos^4\varrho - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x\left(1-2x^2\right)}{(1-x^2)^2}\cos^3\varrho\sin\varrho \\ & +\frac{1}{2}\frac{x^2\sqrt{1-2x^2}}{1-x^2}\frac{1}{1+x^2}\cos^2\varrho\sin^2\varrho - \frac{x\left(1-2x^2\right)}{1-x^2}\frac{1}{1+x^2}\sin^3\varrho\cos\varrho, \end{aligned} \tag{5-63}$$

$$\begin{aligned} &\approx \sin\delta\times \\ &\left[\sin\varrho\cos^3\varrho\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x^4}{(1-x^2)^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x\left(1-2x^2\right)}{(1-x^2)^2}\right) + \cos^2\varrho\sin^2\varrho\left(\frac{1}{2}\frac{x^2\sqrt{1-2x^2}}{1-x^2}\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\frac{x^3\sqrt{1-2x^2}}{(1-x^2)^2}\right)\right. \\ &\left. +\sin^3\varrho\cos\varrho\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x^3}{1-x^2}\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x\left(1-2x^2\right)}{(1-x^2)^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{x^2\sqrt{1-2x^2}}{(1-x^2)^2}\cos^4\varrho - \frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x^2}\frac{\sqrt{1-2x^2}}{1+x^2}\sin^4\right], \end{aligned} \tag{5-64}$$

5.8.3. Probabilidad de conversión $\nu_\mu \to \nu_\tau$

Para este proceso se encuentra que

$$\begin{aligned} J_{CP} &= Im\left\{U_{\mu 2}U_{\tau 3}U^*_{\tau 2}U^*_{\mu 3}\right\} \\ &\approx \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos\varrho + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin\varrho e^{i\delta}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{z}}}\right) \\ &\times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{z}}}\cos\varrho + \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{1+\sqrt{z}}}\sin\varrho e^{-i\delta}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1+2\frac{z}{y(1-y)}}{\sqrt{1-x^2}}\right), \end{aligned} \tag{5-65}$$

$$J_{CP} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{z}}}\right)\left(\frac{1+2\frac{z}{y(1-y)}}{\sqrt{1-x^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{z}}}\sin\varrho\cos\varrho\sin\delta\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{1-x^2}}\right]. \tag{5-66}$$

5.9. Parámetro de asimetría CP para los dos modelos

La asimetría CP en el decaimiento de partículas pesadas son convencionalmente evaluadas en la interferencia entre los diagramas a nivel arbol y las correcciones al vértice a un loop a través de diagramas de caja [113] (ver anexo J sobre funciones especiales, parametrización de Feynman, y funciones de Green a un punto, a dos puntos y a tres puntos). También se pueden tener en cuenta términos de interferencia con correcciones a la autoenergía, los cuales han sido considerados en varios modelos [114, 115]. A continuación se presenta el caso de neutrinos pesados de Majorana, los cuales son autoestados de masa si se agregan neutrinos derechos al MEE. Puesto que estas partículas son inestables, ellas no pueden aparecer como estados iniciales o finales de los elementos de la matriz de dispersión S. De esta forma, sus propiedades son definidas por los elementos de la matriz S para partícula estable [116]. En esta sección se hace una descripción sobre la forma en que se calcula el parámetro de asimetría CP en el decaimiento de los neutrinos pesados de Majorana a leptones y escalares en el contexto del MEE con extensión de Majorana, es decir que incluye tres neutrinos de Majorana de quiralidad derecha. Se usará la aproximación en la cual las masas de los leptones y del escalar es pequeña comparada con la masa del neutrino de Majorana. La asimetría de CP está definida por

$$\epsilon_i = \frac{\Gamma(N\to l\phi) - \Gamma(N\to\overline{l\phi})}{\Gamma(N\to l\phi) + \Gamma(N\to\overline{l\phi})}. \tag{5-67}$$

Bajo las transformaciones unitarias definidas en **??**, se encuentra que los VEV se pueden escribir como en (3-45),(3-46) y(3-47). Al hacer $\gamma_R = \theta_R/2$ se encuentra directamente que las masas de los neutrinos derechos son reales. De esta forma, la matriz de masa para los neutrinos ligeros del MSID-II es

$$m_\nu = \zeta v_L e^{i\theta_L} - \frac{k_1^2}{v_R}\left(\eta\zeta_d^{-1}\eta^T\right)e^{i(2\alpha_1-\theta_R)}, \tag{5-68}$$

se transforma en

$$\begin{aligned} m_\nu &= \zeta v_L e^{i(\theta_L-2\gamma_L)} - \frac{k_1^2}{v_R}\left(\eta\zeta_d^{-1}\eta^T\right)e^{i(2\alpha_1+2\gamma_L-\theta_R)} \\ &= m_\nu^{II} + m_\nu^{I}. \end{aligned} \tag{5-69}$$

A continuación, se analizan dos posibles casos de interés de acuerdo con la escogencia de fase que se realiza, que permitirán determinar las cotas superiores a la asimetrí CP. En primer lugar, por convención se puede definir que $\gamma_L = -\alpha_1 + \theta_R/2$. Esta escogencia particular de fase permite hacer que el término m_ν^I sea real y que m_ν^{II} sea puramente imaginario. Este caso es llamado comúnmente fase tipo II. De esta forma, la matriz de masa de neutrinos ligeros se puede escribir como

$$m_\nu = \zeta v_L e^{i\left(\theta_L'\right)} - \frac{k_1^2}{v_R}\left(\eta\zeta_d^{-1}\eta^T\right), \tag{5-70}$$

con $\theta_L' = (\theta_L - \theta_R + 2\alpha_1)$. De igual manera, para un segundo caso, al hacer $\gamma_L = \theta_L/2$, se encuentra que m_ν^I es real y m_ν^{II} es puramente imaginario. Esta escogencia en particular es llamada fase tipo I. Por lo anterior, se encuentra que la matriz de masa se puede escribir como

$$m_\nu = \zeta v_L - \frac{k_1^2}{v_R}e^{i(\theta_R')}\left(\eta\zeta_d^{-1}\eta^T\right), \tag{5-71}$$

con $\theta_R' = (\theta_L - \theta_R + 2\alpha_1)$. Asumiremos que la asimetría leptónica del Universo es producida por el decaimiento de los neutrinos pesados de Majorana en leptones y escalares del MEE que violan CP. También asumiremos una jerarquía de masa normal para los neutrinos pesados de Majorana. En este escenario, mientras los neutrinos mas pesados $N2$ y $N3$ decaen, el mas liviano de los neutrinos pesados de Majorana se encuentra en equilibrio térmico. Así, cualquier asimetría producida por el decaimiento de $N2$ y $N3$ sería cancelada por interacciones que violan número leptónico mediadas por $N1$. Además, la asimetría leptónica final está dada únicamente por el decaimiento de $N1$ que viola CP. La asimetrí CP está dada por

$$\epsilon_1 = \epsilon_1^I + \epsilon_1^{II}, \tag{5-72}$$

en donde la contribución a I proviene de la interferencia a nivel arbol y las correcciones a la autoenergía mediante diagramas de caja. Esta contribución es similar a la del modelo de fase tipo I [119, 120] y está dada por

$$\epsilon_1^I = \frac{3M_1}{16\pi v^2}\frac{\sum_{i,j} Im\left[\eta_{1i}^T\left(m_\nu^I\right)\eta_{j1}\right]}{\left(\eta^T\eta\right)_{11}}. \tag{5-73}$$

Por otra parte, la contribución a II proviene de la interferencia a nivel arbol y de las correcciones a un loop de diagramas que involucran al triplete $\triangle_L$, la cual está dada por

$$\epsilon_1^{II} = \frac{3M_1}{16\pi v^2}\frac{\sum_{i,j} Im\left[\eta_{1i}^T\left(m_\nu^{II}\right)\eta_{j1}\right]}{\left(\eta^T\eta\right)_{11}}. \tag{5-74}$$

La asimetría total de CP está dada por

$$\epsilon_1^{II} = \frac{3M_1}{16\pi v^2}\frac{\sum_{i,j} Im\left[\eta_{1i}^T\left(m_\nu^{I}+m_\nu^{II}\right)\eta_{j1}\right]}{\left(\eta^T\eta\right)_{11}}. \tag{5-75}$$

A continuación se utilizará el límite sobre ϵ_1 proveniente de la asimetrí bariónica observada para obtener cotas superiores para las masas de los neutrinos derechos para los dos diferentes tipos de fases.

5.9.1. Fases tipo I

En las fases tipo I el término de masa tipo II es real. Así la violación de CP proviene del término de masa tipo I únicamente. La asimetría CP total en este caso está dada por [13]

$$\epsilon_1 = \epsilon_1^I = \frac{3M_1k_1^2}{16\pi v^2 v_R}\frac{\left[\eta_{1i}^T\eta\zeta_{diag}^{-1}\eta_{1i}^T\eta\right]_{11}}{\left(\eta^T\eta\right)_{11}} Im\left(e^{-i\theta'_R}\right). \tag{5-76}$$

Consideremos el término tipo I de la matriz de masa de neutrinos ligeros

$$\begin{aligned} m_v^I &= m_v - m_v^{II} \\ &= -\frac{-k_1^2}{v_Rx'}\eta\zeta_{diag}^{-1}\eta^T e^{-i\theta'_R}. \end{aligned} \tag{5-77}$$

Se puede encontrar una matriz diagonalizante $U=\mathcal{O}U_{fase}$ para m_v^I, tal que

$$U^Tm_\nu^IU = -D_{m_I} = -diag.(m_{I1}, m_{I2}, m_{I3}), \tag{5-78}$$

donde (m_{I1}, m_{I2}, y m_{I3}) son reales. Escogiendo $U_{fase}=e^{-i\theta'_R/2}$, entonces matriz diagonalizada es

$$D_{mI} = \frac{-k_1^2}{v_Rx'}\mathcal{O}\left(\eta\zeta_{diag}^{-1}\eta^T\right)\mathcal{O}. \tag{5-79}$$

Introduciendo 5-79 en la ecuación 5-76, el parámetro ϵ_1 se puede escribir como

$$\begin{aligned} \epsilon_1^I &= \frac{3M_1}{16\pi v^2}\frac{\sum_i\left[\left(\mathcal{O}\eta^T\right)_{1i}D_{m_I}\left(\mathcal{O}^T\eta\right)_{1i}\right]}{\left(\eta^T\eta\right)_{11}} Im\left(e^{-i\theta'_R}\right) \\ &= \epsilon_1^I = \frac{3M_1}{16\pi v^2}\frac{\sum_i m_{Ii}\left(\mathcal{O}^T\eta\right)_{1i}^2}{\left(\eta^T\eta\right)_{11}} Im\left(e^{-i\theta'_R}\right), \end{aligned} \tag{5-80}$$

por lo tanto, el límite teórico superior de la asimetría CP está dado por [119, 120]

$$|\epsilon_{1,max}| = \frac{3M_1}{16\pi v^2}\sum_i m_{Ii}. \tag{5-81}$$

En la anterior espresión, los m_I son los valores propios de la matriz m_v^I y no son las masas físicas de los neutrinos ligeros.

5.10. Conclusiones

Hemos estudiado la violación de CP en las oscilaciónes de neutrinos y hemos discutido que la sensibilidad para tales efectos afectaría a la medición de la oscilación. Para esto, hemos considerado concretamente el problema de los efectos en las oscilaciones de neutrinos de interacciones que violan CP tales como las del M2DH-III y el MSID-II. Para esto hemos examinado la formula general de oscilaciones permitiendo fases complejas en la matriz de mezcla de neutrinos, las cuales implican violación de CP. Hemos realizado ciertas aproximaciones que nos han permitido encontrar efectos específicos fáciles de interpretar. A pesar de que la probabilidad de oscilación es invariante CP, hemos llegado a que es sensible al valor de la fase de violación de CP. Por lo tanto, con esta jerarquía el proceso de oscilación podría ser usado para obtener información acerca de la violación de CP en el sector leptónico. Debemos notar aquí que la sensibilidad con respecto a los parámetros de violación de CP depende fuertemente en la parametrización escogida para la matriz PMNS, por lo cual en general podemos esperar que las probabilidades de oscilación dependan en alguna medida de los parámetros de violación de CP.

6. Conclusiones

6.1. Conclusiones

En el M2DH se ha introducido un doblete extra de Higgs y tres nuevos acoplamientos de Yukawa en los sectores quark y leptónico respecto al MEE. Por conteo de grados de libertad después de la RES el espectro de partículas del sector de Higgs del M2DH se extiende, permitiendo la aparición de cinco nuevos bosones de Higgs reales, tres bosones escalares neutros A^0, h^0, H^0 y dos bosones escalares cargados $H^{\pm}$. Dependiendo de la manera como se ha dotado de masa a los fermiones, el M2DH se clasifica como de tipo I, tipo II y tipo III. En el M2DH tipo I, un doblete de Higgs proporciona masa a los quarks tipo up y tipo down simultáneamente. En el M2DH tipo II un doblete dota de masa a los quarks up y el otro a los quarks down. Para evitar la existencia de CNCS a nivel árbol se ha introducido en estos modelos una simetría discreta. No obstante, si no se tiene en cuenta esta simetría, ambos dobletes pueden generar las masas para los quarks up y down simultáneamente. Este modelo es conocido como M2DH-III.//
Por otra parte, el MSID permite dar una explicación natural al origen de la violación de la simetría de paridad (P) y también al origen de la violación de la simetría carga-paridad (CP). En el MSID no existen grandes CNCS que entren en conflicto con los datos experimentales, ofreciéndo un rico panorama fenomenológico de violación de CP en el sector de leptones y nuevos bosones de Higgs neutros, una vez cargados y dos veces cargados en la escala electrodébil. Mediante un análisis numérico detallado de la relación existente entre las CNCS y las dos fases de CP espontáneas presentes en el MSID, se ha podido explorar el papel que juega cada una de las dos fases de violación de CP espantáneas presentes en este modelo. Cada fase de CP está relacionada con uno de los sectores de materia: el de quarks o el de leptones. Se ha encontrado que diferentes combinaciones de valores nulos o máximos entre las dos fases de CP espontáneas conducen a cuatro casos diferentes correspondientes a violación de CP máxima o nula en el sector de quarks y en el de leptones. Así mismo se ha establecido que la única manera de suprimir las CNCS en el MSID es ajustar cerca a cero la fase de CP espontánea asociada con el sector de quarks, como en los casos III y IV estudiados previamente, pudiéndose concluir que el monto de la violación de CP en el sector de leptones no depende de las restricciones teóricas estudiadas.//
Considerando que el MSS se implementa en el MEE a través de una extensión poco natural del mismo, denominada extensión de Majorana, es interesante implementar el MSS de forma simple y elegante en algunos modelos más allá del MEE. Teniendo lo anterior en mente, se

ha estudiado la implementación del MSS en el M2DH-III y en el MSID-II. Hemos encontrado que el MSS explica la pequeñez de la masa del neutrino al considerar que el singlete posee una masa muy grande, por lo que se obtiene que las masas de los neutrinos de quiralidad izquierda son muy pequeñas comparadas con las de los demás fermiones de la misma familia. Tambiń hemos mostrado la equivalencia entre el MEE extendido con el singlete en el escenario del MSS. Al adicionar un segundo doblete de Higgs $SU(2)$ en el M2DH-III, la presencia de este doblete permite una explicación de la pequeñez de la masa de los neutrinos en el contexto del MSS tipo I. Adicionalmente, hemos considerado el escenario híbrido el cual es una extensión del MEE con la inclusión simultánea de un singlete y un triplete de Majorana. Hemos estudiado directamente el MSS para este caso, mostrando que la matriz de masa de los neutrinos ligeros corresponde a la suma de las matrices obtenidas para cada uno de los casos por separado.

Así mismo, hemos mostrado que esta extensión del MEE posee una importante consecuencia en las oscilaciones, ya que si la matriz de masa de los neutrinos ligeros no presenta submatrices con determinante cero, se podría esperar que esta provenga de la extensión con singlete y triplete simultáneos. Dado que en el M2DH-III se tiene la misma fenomenología relacionada con los fermiones y los bosones de gauge que en el MEE, entonces la nueva física está restringida al aumento en el número de bosones de Higgs de uno en el MEE a cinco en el M2DH. Por esta razón, ha sido necesario extender el M2DH-III con: (i) un singlete de Majorana por cada sabor de neutrino (MSS tipo I); (ii) un triplete de Majorana por cada sabor de neutrino (MSS tipo III); (ii) un singlete y un triplete de Majorana por cada sabor de neutrino (MSS hibrido) con el fin de dotar con masa muy pequeña a los neutrinos de quiralidad izquierda. Al igual que en el caso del MEE con la extensión de Majorana, el MSS en el M2DH-III resulta poco natural.//

Por otra parte, hemos mostrado que el lagrangiano de Yukawa del MSID es totalmente real, con lo cual en el MSID no se tienen fases complejas explícitas. Se ha visto que en el MSID debido a la inclusión de un bidoblete y dos tripletes de campos escalares, el sector escalar del MSID resulta muy interesante y presenta propiedades destacables, entre las cuales podemos mencionar la presencia de dos fases complejas espontáneas con origen en la RES, la existencia de una amplia variedad de bosones escalares neutros, cargados, doblemente cargados, y la posibilidad de explicar el origene de la masa tan pequeña de los neutrinos de quiralidad izquierda de una forma satisfactoria mediante la implementación del MSS tipo I. La implementación del MSS tipo I en el MSID es bastante natural debido a que no es necesario meter a mano nuevos términos en el lagrangiano de Yukawa. Adicionalmente, el MSID permite explicar de una forma natural no solo el origen de la violación de CP sino también el origen de la violación de paridad (P), además de dar un significado físico al número cuántico de hipercarga (Y), identificándolo con la diferencia entre número bariónico y número leptónico ($B - L$).//

En el tratamiento de las oscilaciones de neutrinos, desde el punto de vista de las amplitudes de transición, hemos considerado un aspecto adicional y es el tener en cuenta las fases de violación de CP presentes en las matrices de mezcla de los neutrinos. Se ha mosgtrado que el monto de violación CP es proporcional al invariante de Jarlskog, el cual se mantiene inalterado ante reparametrizaciones de la matriz PMNS y proporcional una medida real de la violación de CP. Concretamente, hemos estudiado la violación de CP en las oscilaciónes de neutrinos y hemos discutido que la sensibilidad para tales efectos afectaría a la medición de la oscilación. Para esto, hemos considerado el problema de los efectos en las oscilaciones de neutrinos de interacciones que violan CP tales como las del M2DH-III y el MSID-II. Para esto hemos examinado la formula general de oscilaciones permitiendo fases complejas en la matriz de mezcla de neutrinos, las cuales implican violación de CP. Hemos realizado ciertas aproximaciones que nos han permitido encontrar efectos específicos fáciles de interpretar. A pesar de que la probabilidad de oscilación es invariante CP, hemos llegado a que es sensible al valor de la fase de violación de CP. Por lo tanto, con esta jerarquía el proceso de oscilación podría ser usado para obtener información acerca de la violación de CP en el sector leptónico. Es importante notar que la sensibilidad con respecto a los parámetros de violación de CP depende fuertemente en la parametrización escogida para la matriz PMNS, por lo cual en general podemos esperar que las probabilidades de oscilación dependan en alguna medida de los parámetros de violación de CP.

A. Anexo: Determinación de los auto-estados de masa M2DH

Ligaduras del Potencial

EL potencial puede ser escrito en término de los operadores hermíticos

$$\hat{A} \equiv \Phi_1^\dagger \Phi_1, \quad \hat{B} \equiv \Phi_2^\dagger \Phi_2, \quad \hat{C} \equiv \frac{1}{2}\left(\Phi_1^\dagger \Phi_2 + \Phi_2^\dagger \Phi_1\right), \quad \hat{D} \equiv -\frac{i}{2}\left(\Phi_1^\dagger \Phi_2 - \Phi_2^\dagger \Phi_1\right) \quad . \tag{A-1}$$

El potencial más general, renormalizable e invariante bajo $SU(2) \times U(1)$ esta dado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} V &= -\mu_1^2 \hat{A} - \mu_2^2 \hat{B} - \mu_3^2 \hat{C} - \mu_4^2 \hat{D} + \lambda_1 \hat{A}^2 + \lambda_2 \hat{B}^2 + \lambda_3 \hat{C}^2 \\ &+ \lambda_4 \hat{D}^2 + \lambda_5 \hat{A}\hat{B} + \lambda_6 \hat{A}\hat{C} + \lambda_7 \hat{B}\hat{C} + \lambda_8 \hat{A}\hat{D} + \lambda_9 \hat{B}\hat{D} + \lambda_{10} \hat{C}\hat{D}. \end{aligned} \tag{A-2}$$

Los dos campos complejos pueden ser expandidos en términos de 4 campos reales como sigue

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \qquad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_5 + i\phi_6 \\ \phi_7 + i\phi_8 \end{pmatrix}. \tag{A-3}$$

Asumiremos en principio la no existencia de violación de CP espontánea, exigiendo los VEV para ser reales, tal que $\langle\phi_3\rangle = v_1/\sqrt{2}$, $\langle\phi_7\rangle = v_2/\sqrt{2}$. Las condiciones mínimas del potencial se establecen al examinar

$$T_i = \left.\frac{\partial V}{\partial \phi_i}\right|_{\langle\phi_3\rangle = v_1/\sqrt{2}; \langle\phi_7\rangle = v_2/\sqrt{2}} = 0, \tag{A-4}$$

con $\phi_i, (i = 1, ..., 8 =$. A partir de los auto estados de gauge escalares definidos anteriormente, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0 &= T_3 = \frac{1}{4}\lambda_7 v_2^3 + \lambda_1 v_1^3 + \frac{3}{4}\lambda_6 v_1^3 - \mu_1^2 v_1 + \frac{1}{2}\lambda_3 v_2^3 v_1 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1 v_2^2 - \frac{1}{2}\mu_3^2 v_2, \\ 0 &= T_4 = (-2\mu_4^2 + \lambda_9 v_2^2 + \lambda_8 v_1^2 + \lambda_{10} v_2 v_1) v_2, \\ 0 &= T_7 = \frac{3}{4}\lambda_7 v_2^2 v_1 - \mu_2^2 v_2 + \lambda_2 v_2^3 - \frac{1}{2}\mu_3^2 v_1 + \frac{1}{4}\lambda_6 v_1^3 + \frac{1}{2}\lambda_3 v_1^2 v_2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_2 v_1^2, \\ 0 &= T_8 = (2\mu_4^2 + \lambda_9 v_2^2 + \lambda_8 v_1^2 + \lambda_{10} v_2 v_1) v_1. \end{aligned} \tag{A-5}$$

Para la matriz de masa, antes de reemplazar las ligaduras del potencial, se tiene que

$$M_{ij}^2 = \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}\right|_{\langle\phi_3\rangle = v_1/\sqrt{2}; \langle\phi_7\rangle = v_2/\sqrt{2}} = 0, \tag{A-6}$$

por lo tanto la matriz de masa 8×8 es

$$\begin{pmatrix}
M_{11}^2 & 0 & 0 & 0 & M_{15}^2 & M_{16}^2 & 0 & 0 \\
0 & M_{22}^2 & 0 & 0 & M_{25}^2 & M_{26}^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & M_{33}^2 & M_{34}^2 & 0 & 0 & M_{37}^2 & M_{38}^2 \\
0 & 0 & M_{43}^2 & M_{44}^2 & 0 & 0 & M_{47}^2 & M_{48}^2 \\
M_{15}^2 & M_{25}^2 & 0 & 0 & M_{55}^2 & 0 & 0 & 0 \\
M_{16}^2 & M_{26}^2 & 0 & 0 & 0 & M_{66}^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & M_{37}^2 & M_{47}^2 & 0 & 0 & M_{77}^2 & M_{78}^2 \\
0 & 0 & M_{38}^2 & M_{48}^2 & 0 & 0 & M_{78}^2 & M_{88}^2
\end{pmatrix}, \tag{A-7}$$

donde los elementos de matriz están dados por

$$\begin{aligned}
M_{11}^2 &= -\mu_1^2 + \lambda_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_6 v_1 v_2, \\
M_{15}^2 &= -\frac{1}{2}\mu_3^2 + \frac{1}{2}\lambda_3 v_1 v_2 + \frac{1}{4}\lambda_6 v_1^2 + \frac{1}{4}\lambda_7 v_2^2, \\
M_{16}^2 &= -\frac{1}{2}\mu_4^2 + \frac{1}{4}\lambda_{10} v_1 v_2 + \frac{1}{4}\lambda_8 v_1^2 + \frac{1}{4}\lambda_9 v_2^2, \\
M_{22}^2 &= -\mu_1^2 + \lambda_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_6 v_1 v_2, \\
M_{25}^2 &= -\frac{1}{4}\lambda_9 v_2^2 - \frac{1}{4}\lambda_{10} v_1 v_2 + \frac{1}{2}\mu_4^2 - \frac{1}{4}\lambda_8 v_1^2, \\
M_{26}^2 &= -\frac{1}{2}\mu_3^2 + \frac{1}{4}\lambda_7 v_2^2 + \frac{1}{4}\lambda_6 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_3 v_1 v_2, \\
M_{33}^2 &= -\mu_1^2 + 3\lambda_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_3 v_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_2^2 + \frac{3}{2}\lambda_6 v_1 v_2, \\
M_{34}^2 &= -\frac{1}{2}\lambda_8 v_1 v_2 - \frac{1}{4}\lambda_{10} v_2^2, \\
M_{37}^2 &= -\frac{1}{2}\mu_3^2 + \frac{3}{4}\lambda_7 v_2^2 + \frac{3}{4}\lambda_6 v_1^2 + \lambda_5 v_1 v_2 + \lambda_3 v_1 v_2, \\
M_{38}^2 &= \frac{1}{4}\lambda_9 v_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_{10} v_1 v_2 + -\frac{1}{2}\mu_4^2 + \frac{3}{4}\lambda_8 v_1^2, \\
M_{44}^2 &= -\mu_1^2 + \lambda_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_4 v_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_6 v_1 v_2, \\
M_{47}^2 &= -\frac{3}{4}\lambda_9 v_2^2 - \frac{1}{2}\lambda_{10} v_1 v_2 + \frac{1}{2}\mu_4^2 + \frac{1}{4}\lambda_8 v_1^2, \\
M_{48}^2 &= -\frac{1}{2}\mu_3^2 + \frac{1}{4}\lambda_7 v_2^2 + \frac{1}{4}\lambda_6 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_3 v_1 v_2 - \frac{1}{2}\lambda_4 v_1 v_2, \\
M_{55}^2 &= -\mu_2^2 + \lambda_2 v_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_7 v_1 v_2,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_{66}^2 &= -\mu_2^2 + \lambda_2 v_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_7 v_1 v_2, \\
M_{77}^2 &= \mu_2^2 + 3\lambda_2 v_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_3 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2 + \frac{3}{2}\lambda_7 v_1 v_2, \\
M_{78}^2 &= \frac{1}{2}\lambda_9 v_1 v_2 + \frac{1}{4}\lambda_{10} v_1^2, \\
M_{88}^2 &= -\mu_2^2 + \lambda_2 v_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_4 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_7 v_1 v_2.
\end{aligned} \tag{A-8}
$$

Si solucionamos las condiciones mínimas del potencial cuando $v_2 = 0$, siendo ésta una solución válida, y reemplazamos estas condiciones en las ligaduras, entonces después de algunos paso algebraicos se obtiene que los términos de masa son

$$
\begin{aligned}
&M_{11}^2 = 0, \quad M_{15}^2 = 0, \quad M_{16}^2 = \frac{1}{4}\lambda_8 v_1^2, \quad M_{22}^2 = 0, \quad M_{25}^2 = -\frac{1}{2}\lambda_8 v_1^2, \quad M_{26}^2 = 0, \quad M_{33}^2 = 2\lambda_1 v_1^2, \\
&M_{34}^2 = 0, \quad M_{37}^2 = \frac{1}{2}\lambda_6 v_1^2, \quad M_{38}^2 = \lambda_8 v_1^2, \quad M_{44}^2 = 0, \quad M_{47}^2 = -\frac{1}{2}\lambda_8 v_1^2, \quad M_{48}^2 = 0, \\
&M_{55}^2 = -\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2, \quad M_{66}^2 = -\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2, \quad M_{77}^2 = -\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_3 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2, \quad M_{78}^2 = \frac{1}{4}\lambda_{10} v_1^2, \\
&M_{88}^2 = -\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_4 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2.
\end{aligned} \tag{A-9}
$$

Se aprecia que el potencial (2-15) viola CP explícitamente por medio de los términos M_{16}, M_{25}, M_{34}, M_{47}, M_{78} de la matriz de masa, ya que estos términos mezclan partes reales con partes imaginarias de los campos complejos neutros Φ_1^0, Φ_2^0.

B. Anexo: Lagrangiano de Yukawa del M2DH

Sustituyendo los términos correspondientes en el lagrangiano (2-18) obtenemos en forma matricial que

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y &= \left(\overline{\nu_{iL}^0}\ \overline{e_{iL}^0}\right)\eta_{ij}^E\begin{pmatrix}\phi_1^+\\ \phi_1^o\end{pmatrix}e_{jR}^0+\left(\overline{\nu_{iL}^0}\ \overline{e_{iL}^0}\right)\xi_{ij}^E\begin{pmatrix}\phi_2^+\\ \phi_2^o\end{pmatrix}e_{jR}^0\\ &+\left(\overline{u_{iL}^0}\ \overline{d_{iL}^0}\right)\eta_{ij}^U\begin{pmatrix}\phi_1^0\\ -\phi_1^-\end{pmatrix}u_{jR}^0+\left(\overline{u_{iL}^0}\ \overline{d_{iL}^0}\right)\xi_{ij}^U\begin{pmatrix}\phi_2^0\\ -\phi_2^-\end{pmatrix}u_{jR}^0\\ &+\left(\overline{u_{iL}^0}\ \overline{d_{iL}^0}\right)\eta_{ij}^D\begin{pmatrix}\phi_1^+\\ \phi_1^o\end{pmatrix}d_{jR}^0+\left(\overline{u_{iL}^0}\ \overline{d_{iL}^0}\right)\xi_{ij}^D\begin{pmatrix}\phi_2^+\\ \phi_2^o\end{pmatrix}d_{jR}^0+h.c. \end{aligned} \tag{B-1}$$

Realizando los productos

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y &= \overline{\nu_{iL}^0}\eta_{ij}^E\phi_1^+e_{jR}^0+\overline{e_{iL}^0}\eta_{ij}^E\phi_1^0e_{jR}^0+\overline{\nu_{iL}^0}\xi_{ij}^E\phi_2^+e_{jR}^0+\overline{e_{iL}^0}\xi_{ij}^E\phi_2^0e_{jR}^0\\ &+\overline{u_{iL}^0}\eta_{ij}^U\phi_1^0u_{jR}^0-\overline{d_{iL}^0}\eta_{ij}^U\phi_1^-u_{jR}^0+\overline{\nu_{iL}^0}\xi_{ij}^U\phi_2^0d_{jR}^0-\overline{d_{iL}^0}\xi_{ij}^U\phi_2^-u_{jR}^0\\ &+\overline{u_{iL}^0}\eta_{ij}^D\phi_1^+d_{jR}^0+\overline{d_{iL}^0}\eta_{ij}^D\phi_1^0d_{jR}^0+\overline{u_{iL}^0}\xi_{ij}^D\phi_2^+d_{jR}^0+\overline{d_{iL}^0}\xi_{ij}^D\phi_2^0d_{jR}^0\\ &+h.c., \end{aligned} \tag{B-2}$$

factorizando

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y &= \overline{\nu_{iL}^0}\left(\eta_{ij}^E\phi_1^++\xi_{ij}^E\phi_2^+\right)e_{jR}^0+\overline{e_{iL}^0}\left(\eta_{ij}^E\phi_1^0+\xi_{ij}^E\phi_2^0\right)e_{jR}^0\\ &+\overline{u_{iL}^0}\left(\eta_{ij}^U\phi_1^0+\xi_{ij}^U\phi_2^0\right)u_{jR}^0-\overline{d_{iL}^0}\left(\eta_{ij}^U\phi_1^-+\eta_{ij}^U\phi_2^-\right)u_{jR}^0\\ &+\overline{u_{iL}^0}\left(\eta_{ij}^D\phi_1^++\eta_{ij}^D\phi_2^+\right)d_{jR}^0+\overline{d_{iL}^0}\left(\eta_{ij}^D\phi_1^o+\xi_{ij}^D\phi_2^o\right)d_{jR}^0\\ &+h.c. \end{aligned} \tag{B-3}$$

Introduciendo la siguiente notación vectorial:

$$N=\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\\ \nu_3\\ \vdots\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\\ e_3\\ \vdots\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ \vdots\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\\ \vdots\end{pmatrix} \tag{B-4}$$

y definiendo la matríz de masa como

$$M=\frac{\eta v_1+\xi v_2}{\sqrt{2}}, \tag{B-5}$$

el lagrangiano de Yukawa adquiere la forma

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y &= \overline{N_L^0}\left(\eta^E\phi_1^+ + \xi^E\phi_2^+\right)E_R^0 - \overline{D_L^0}\left(\eta^U\phi_1^- + \xi^U\phi_2^-\right)U_R^0 + \overline{U_L^0}\left(\eta^D\phi_1^+ + \xi^D\phi_2^+\right)D_R^0 \\
&\quad + \overline{E_L^0}\left(\eta^E\phi_1^o + \eta^E\phi_2^o\right)E_R^0 + \overline{U_L^0}\left(\eta^U\phi_1^o + \xi^U\phi_2^o\right)U_R^0 + \overline{D_L^0}\left(\eta^D\phi_1^o + \xi^D\phi_2^o\right)D_R^0 + h.c.
\end{aligned}$$

Cada uno factores entre paréntesis de los términos del anterior lagrangiano se puede reescribir a partir de las siguientes definiciones:

$$\sin\beta = \frac{v_2}{v}, \qquad \cos\beta = \frac{v_1}{v}. \tag{B-6}$$

Teniendo en cuenta estas definiciónes, usando $1/v = g/2M_W$ y multiplicando por $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ y por $\frac{\sin\beta}{\sin\beta}$, se obtiene que los factores que aparecen entre paréntesis en cada uno de los términos del lagrangiano se escriben como

$$\begin{aligned}
\eta\phi_1^\pm + \xi\phi_2^\pm &= \eta(G_w^\pm\cos\beta - H^\pm\sin\beta) + \xi(G_w^\pm\sin\beta + H^\pm\cos\beta) \\
&= (\eta\cos\beta + \xi\sin\beta)G_w^\pm - \eta\sin\beta H^\pm + \xi\cos\beta H^\pm \\
&= \frac{\sqrt{2}}{v}\left(\frac{\eta v_1 + \xi v_2}{\sqrt{2}}\right)G_w^\pm - \frac{\eta}{\sin\beta}\sin^2\beta H^\pm + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\xi\sin\beta H^\pm \\
&= \frac{g}{\sqrt{2}M_W}MG_w^\pm + \frac{\eta}{\sin\beta}\cos^2\beta H^\pm - \frac{\eta}{\sin\beta}H^\pm + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\xi\sin\beta H^\pm \\
&= \frac{g}{\sqrt{2}M_W}MG_w^\pm + \cot\beta(\eta\cos\beta + \xi\sin\beta)H^\pm - \frac{\eta}{\sin\beta}H^\pm \\
&= \frac{g}{\sqrt{2}M_W}MG_w^\pm + \frac{\sqrt{2}}{v}\cot\beta\left(\frac{\eta v_1 + \xi v_2}{\sqrt{2}}\right)H^\pm - \frac{\eta}{\sin\beta}H^\pm \\
&= \frac{g}{\sqrt{2}M_W}MG_w^\pm + \frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_W}MH^\pm - \frac{\eta}{\sin\beta}H^\pm,
\end{aligned} \tag{B-7}$$

$$\eta\phi_1^0 + \xi\phi_2^0 = \frac{\eta}{\sqrt{2}}\left[H^0\cos\alpha - h^0\sin\alpha + v_1 + iG_Z^0\cos\beta - iA^0\sin\beta\right] \tag{B-8}$$

$$+ \frac{\xi}{\sqrt{2}}\left[H^0\sin\alpha + h^0\cos\alpha + v_2 + iG_Z^0\sin\beta + iA^0\cos\beta\right] \tag{B-9}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\eta}{\sqrt{2}}\cos\alpha H^0 - \frac{\eta}{\sqrt{2}}\sin\alpha h^0 + \frac{\xi}{\sqrt{2}}\sin\alpha H^0 + \frac{\xi}{\sqrt{2}}\cos\alpha h^0 \\
&+ \left(\frac{\eta v_1 + \xi v_2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{i}{v}\left(\frac{\eta v_1 + \xi v_2}{\sqrt{2}}\right)G_Z^0 \\
&+ i\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\frac{\xi}{\sqrt{2}}\sin\beta A^0 i\frac{1}{\sin\beta}\frac{\eta}{\sqrt{2}}\sin^2\beta A^0
\end{aligned} \tag{B-10}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos\beta}{\sqrt{2}\sin\beta}\eta\sin\alpha H^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi\sin\alpha H^0 + \frac{\cos\beta}{\sqrt{2}\sin\beta}\eta\cos\alpha h^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi\cos\alpha h^0 \\
&- \frac{\cos\beta}{\sqrt{2}\sin\beta}\eta\sin\alpha H^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta\cos\alpha H^0 - \frac{\cos\beta}{\sqrt{2}\sin\beta}\eta\cos\alpha h^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi\sin\alpha h^0 \\
&+ M + \frac{ig}{2M_W}MG_Z^0 + i\cot\beta\frac{\xi}{\sqrt{2}}\sin\beta A^0 - i\frac{1}{\sin\beta}\frac{\eta}{\sqrt{2}}A^0
\end{aligned} \tag{B-11}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}v_2}\eta v_1 \sin\alpha H^0 + \frac{1}{\sqrt{2}v_2}\xi v_2 \sin\alpha H^0 + \frac{1}{\sqrt{2}v_2}\eta v_1 \cos\alpha h^0 + \frac{1}{\sqrt{2}v_2}\xi v_2 \cos\alpha h^0 \\
&- \frac{\eta}{\sqrt{2}\sin\beta}(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)H^0 - \frac{\eta}{\sqrt{2}\sin\beta}(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)h^0 \\
&+ M + \frac{ig}{2M_W}MG_Z^0 + i\frac{\cot\beta}{v}\left(\frac{\eta v_1 + \xi v_2}{\sqrt{2}}\right)A^0 - i\frac{1}{\sin\beta}\frac{\eta}{\sqrt{2}}A^0 \qquad \text{(B-12)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{v\sin\beta}\left(\frac{\eta v_1 + \xi v_2}{\sqrt{2}}\right)\sin\alpha H^0 + \frac{1}{v\sin\beta}\left(\frac{\eta v_1 + \xi v_2}{\sqrt{2}}\right)\cos\alpha h^0 \\
&- \frac{\eta}{\sqrt{2}\sin\beta}\sin(\alpha-\beta)H^0 - \frac{\eta}{\sqrt{2}\sin\beta}\cos(\alpha-\beta)h^0 \\
&+ M + \frac{ig}{2M_W}MG_Z^0 - \frac{ig\cot\beta}{2M_W}MA^0 - \frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\eta A^0 \qquad \text{(B-13)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= M + \frac{ig}{2M_W}MG_Z^0 - \frac{ig\cot\beta}{2M_W}MA^0 - \frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\eta A^0 \\
&+ \frac{g}{2M_W\sin\beta}M(\sin\alpha H^0 + \cos\alpha h^0) \\
&- \frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\eta\left[\sin(\alpha-\beta)H^0 + \cos(\alpha-\beta)h^0\right]. \qquad \text{(B-14)}
\end{aligned}$$

Sustituyendo los anteriores factores, se observa que el lagrangiano de Yukawa toma la forma

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y &= \overline{N_L^0}\left(\frac{g}{\sqrt{2}M_w}M^E G_w^+ + \frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_w}M^E H^+ - \frac{1}{\sin\beta}\eta^E H^+\right)E_R^0 \\
&- \overline{D_L^0}\left(\frac{g}{\sqrt{2}M_w}M^U G_w^- + \frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_w}M^U H^- - \frac{1}{\sin\beta}\eta^U H^-\right)U_R^0 \\
&+ \overline{U_L^0}\left(\frac{g}{\sqrt{2}M_w}M^d G_w^+ + \frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_w}M^D H^+ - \frac{1}{\sin\beta}\eta^D H^+\right)D_R^0 \\
&+ \overline{E_L^0}\left(M^E + \frac{ig}{2M_w}M^E G_z^0 + \frac{ig\cot\beta}{2M_w}M^E A^0 - \frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\eta^E A^0\right)E_R^0 \\
&+ \overline{U_L^0}\left(M^U + \frac{ig}{2M_w}M^U G_z^0 + \frac{ig\cot\beta}{2M_w}M^U A^0 - \frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\eta^U A^0\right)U_R^0 \\
&+ \overline{D_L^0}\left(M^D + \frac{ig}{2M_w}M^D G_z^0 + \frac{ig\cot\beta}{2M_w}M^D A^0 - \frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\eta^D A^0\right)D_R^0 \\
&+ \overline{E_L^0}\left(\frac{g}{2M_w\sin\beta}M^E(H^o\sin\alpha + h^o\cos\alpha)\right)E_R^0 \\
&+ \overline{U_L^0}\left(\frac{g}{2M_w\sin\beta}M^U(H^o\sin\alpha + h^o\cos\alpha)\right)U_R^0
\end{aligned}$$

(B-15)

$$
\begin{aligned}
&+ \overline{D^0_L}\left(\frac{g}{2M_w\sin\beta}M^D(H^o\sin\alpha+h^o\cos\alpha)\right)E^0_D\\
&- \overline{E^0_L}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\eta^E\left[H^o\sin(\alpha-\beta)+h^o\cos(\alpha-\beta)\right]\right)E^0_R\\
&- \overline{U^0_L}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\eta^U\left[H^o\sin(\alpha-\beta)+h^o\cos(\alpha-\beta)\right]\right)U^0_R\\
&- \overline{D^0_L}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\eta^D\left[H^o\sin(\alpha-\beta)+h^o\cos(\alpha-\beta)\right]\right)D^0_R\\
&+ h.c.
\end{aligned}
\tag{B-16}
$$

Desarrollando explícitamente los productos en el anterior lagrangiano, se obtiene que

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y =\ & \frac{g}{\sqrt{2}M_w}\left(\overline{N^0_L}M^E E^0_R G^+_w-\overline{D^0_L}M^U U^0_R G^-_w+\overline{U^0_L}M^D D^0_R G^+_w\right)\\
&+\frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_w}\left(\overline{N^0_L}M^E E^0_R H^+-\overline{D^0_L}M^U H^- U^0_R+\overline{U^0_L}M^D H^+ D^0_R\right)\\
&-\frac{1}{\sin\beta}\left(\overline{N^0_L}\eta^E E^0_R H^+-\overline{D^0_L}\eta^U U^0_R H^-+\overline{U^0_L}\eta^D D^0_R H^+\right)+h.c\\
&+\overline{E^0_L}M^E E^0_R+\overline{U^0_L}M^U U^0_R+\overline{D^0_L}M^D D^0_R\\
&+\frac{ig}{2M_w}\left(\overline{E^0_L}M^E E^0_R+\overline{U^0_L}M^U U^0_R+\overline{D^0_L}M^D D^0_R\right)G^o_z\\
&+\frac{ig\cot\beta}{2M_w}\left(\overline{E^0_L}M^E E^0_R+\overline{U^0_L}M^U U^0_R+\overline{D^0_L}M^D D^0_R\right)A^o\\
&-\frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{E^0_L}\eta^E E^0_R+\overline{U^0_L}\eta^U U^0_R+\overline{D^0_L}\eta^D D^0_R\right)A^o\\
&\frac{g}{2M_w\sin\beta}\left(\overline{E^0_L}M^E E^0_R+\overline{U^0_L}M^U U^0_R+\overline{D^0_L}M^D D^0_R\right)\left[H^o\sin\alpha+h^o\cos\alpha\right]\\
&-\frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{E^0_L}\eta^E E^0_R+\overline{U^0_L}\eta^U U^0_R+\overline{D^0_L}\eta^D D^0_R\right)\left[H^o\sin(\alpha-\beta)+h^o\cos(\alpha-\beta)\right]
\end{aligned}
\tag{B-17}
$$

Convertimos los campos del lagrangiano de Yukawa en estados propios de masa con las transformaciones unitarias dadas por

$$
\begin{aligned}
N_L = S_L N^0_L,\quad & E_L = T_L E^0_L,\quad U_L = V_L U^0_L,\quad D_L = W_L D^0_L,\\
& E_R = T_R E^0_R,\quad U_R = V_R U^0_R,\quad D_R = W_R D^0_R,
\end{aligned}
\tag{B-18}
$$

cuyos adjuntos conjugados son

$$
\begin{aligned}
\overline{N_L} = \overline{N^0_L}S^\dagger_L,\quad & \overline{E_L} = \overline{E^0_L}T^\dagger_L,\quad \overline{U_L} = \overline{U^0_L}V^\dagger_L,\quad \overline{D_L} = \overline{D^0_L}W^\dagger_L,\\
& \overline{E_R} = \overline{E^0_R}T^\dagger_R,\quad \overline{U_R} = \overline{U^0_R}V^\dagger_R,\quad \overline{D_R} = \overline{D^0_R}W^\dagger_R.
\end{aligned}
\tag{B-19}
$$

Con las transformaciones unitarias, además de poder obtener los estados propios de masa, es posible diagonalizar la matriz de masa

$$
M^{diag}_E = T_L M^E T^\dagger_R \quad M^{diag}_U = V_L M^U V^\dagger_R \quad M^{diag}_D = W_L M^D W^\dagger_R.
\tag{B-20}
$$

Sin embargo se observa que la anterior transformación no puede diagonalizar a η simultáneamente, con lo cual es necesario introducir la transformación $I = A^{\dagger}A$ al lado izquierdo y derecho de la matriz M y de esta forma el lagrangiano de Yukawa queda escrito como

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y &= \frac{g}{\sqrt{2}M_W}\begin{pmatrix} \overline{N_L^0}S_L^{\dagger}S_L T_L^{\dagger}T_L M^E T_R^{\dagger}T_R E_R^0 G_w^+ \\ -\overline{D_L^0}W_L^{\dagger}W_L V_L^{\dagger}V_L M^U V_R^{\dagger}V_R U_R^0 G_w^- \\ +\overline{U_L^0}V_L^{\dagger}V_L W_L^{\dagger}W_L M^D W_R^{\dagger}W_R D_R^0 G_w^+ \end{pmatrix} \\
&+ \frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_W}\begin{pmatrix} \overline{N_L^0}S_L^{\dagger}S_L T_L^{\dagger}T_L M^E T_R^{\dagger}T_R E_R^0 H^+ \\ -\overline{D_L^0}W_L^{\dagger}W_L V_L^{\dagger}V_L M^U V_R^{\dagger}V_R U_R^0 H^- \\ +\overline{U_L^0}V_L^{\dagger}V_L W_L^{\dagger}W_L M^D W_R^{\dagger}W_R D_R^0 H^+ \end{pmatrix} \\
&- \frac{1}{\sin\beta}\begin{pmatrix} \overline{N_L^0}S_L^{\dagger}S_L T_L^{\dagger}T_L M^E T_R^{\dagger}T_R E_R^0 H^+ \\ -\overline{D_L^0}W_L^{\dagger}W_L V_L^{\dagger}V_L M^U V_R^{\dagger}V_R U_R^0 H^- \\ +\overline{U_L^0}V_L^{\dagger}V_L W_L^{\dagger}W_L M^D W_R^{\dagger}W_R D_R^0 H^+ \end{pmatrix} \\
&+ \overline{E_L^0}T_L^{\dagger}T_L M^E T_R^{\dagger}T_R E_R^0 + \overline{U_L^0}V_L^{\dagger}V_L M^U V_R^{\dagger}V_R U_R^0 + \overline{D_L^0}W_L^{\dagger}W_L M^D W_R^{\dagger}W_R D_R^0 \\
&+ \frac{ig}{2M_W}\begin{pmatrix} \overline{E_L^0}T_L^{\dagger}T_L M^E T_R^{\dagger}T_R E_R^0 \\ +\overline{U_L^0}V_L^{\dagger}V_L M^U V_R^{\dagger}V_R U_R^0 \\ +\overline{D_L^0}W_L^{\dagger}W_L M^D W_R^{\dagger}W_R D_R^0 \end{pmatrix} G_z^o \\
&+ \frac{ig\cot\beta}{2M_W}\begin{pmatrix} \overline{E_L^0}T_L^{\dagger}T_L M^E T_R^{\dagger}T_R E_R^0 \\ +\overline{U_L^0}V_L^{\dagger}V_L M^U V_R^{\dagger}V_R U_R^0 \\ +\overline{D_L^0}W_L^{\dagger}W_L M^D W_R^{\dagger}W_R D_R^0 \end{pmatrix} A^o \\
&- \frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\begin{pmatrix} \overline{E_L^0}T_L^{\dagger}T_L M^E T_R^{\dagger}T_R E_R^0 \\ +\overline{U_L^0}V_L^{\dagger}V_L M^U V_R^{\dagger}V_R U_R^0 \\ +\overline{D_L^0}W_L^{\dagger}W_L M^D W_R^{\dagger}W_R D_R^0 \end{pmatrix} A^o \\
&+ \frac{g}{2M_W\sin\beta}\begin{pmatrix} \overline{E_L^0}T_L^{\dagger}T_L M^E T_R^{\dagger}T_R E_R^0 \\ +\overline{U_L^0}V_L^{\dagger}V_L M^U V_R^{\dagger}V_R U_R^0 \\ +\overline{D_L^0}W_L^{\dagger}W_L M^D W_R^{\dagger}W_R D_R^0 \end{pmatrix} (H^o\sin\alpha + h^o\cos\alpha) \\
&- \frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\begin{pmatrix} \overline{E_L^0}T_L^{\dagger}T_L M^E T_R^{\dagger}T_R E_R^0 \\ +\overline{U_L^0}V_L^{\dagger}V_L M^U V_R^{\dagger}V_R U_R^0 \\ +\overline{D_L^0}W_L^{\dagger}W_L M^D W_R^{\dagger}W_R D_R^0 \end{pmatrix} [H^o\sin(\alpha-\beta) + h^o\cos(\alpha-\beta)] \\
&+ h.c., \qquad \text{(B-21)}
\end{aligned}
$$

el cual, después de realizarse explícitamente las multiplicaciones, adquiere la forma

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y &= \frac{g}{\sqrt{2}M_W}\left(\overline{N_L}S_L T_L^\dagger M_E^{diag}E_R G_w^+ - \overline{D_L}W_L V_L^\dagger M_U^{diag}U_R G_w^- + \overline{U_L}V_L W_L^\dagger M_D^{diag}D_R G_w^+\right)\\
&+ \frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_W}\left(\overline{N_L}S_L T_L^\dagger M_E^{diag}E_R H^+ - \overline{D_L}W_L V_L^\dagger M_U^{diag}U_R H^- + \overline{U_L}V_L W_L^\dagger M_D^{diag}D_R H^+\right)\\
&- \frac{1}{\sin\beta}\left(\overline{N_L}S_L T_L^\dagger T_L \eta_E E_R H^+ - \overline{D_L}W_L V_L^\dagger \eta_U U_R H^- + \overline{U_L}V_L W_L^\dagger \eta_D D_R H^+\right) \qquad \text{(B-22)}\\
&+ \overline{E_L}M_E^{diag}E_R + \overline{U_L}M_U^{diag}U_R + \overline{D_L}M_D^{diag}D_R\\
&+ \frac{ig}{2M_W}\left(\overline{E_L}M_E^{diag}E_R + \overline{U_L}M_U^{diag}U_R + \overline{D_L}M_D^{diag}D_R\right)G_z^o\\
&+ \frac{ig\cot\beta}{2M_W}\left(\overline{E_L}M_E^{diag}E_R + \overline{U_L}M_U^{diag}U_R + \overline{D_L}M_D^{diag}D_R\right)A^o\\
&- \frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{E_L}\eta_E E_R + \overline{U_L}\eta_U U_R + \overline{D_L}\eta_D D_R\right)A^o\\
&+ \frac{g}{2M_W\sin\beta}\left(\overline{E_L}M_E^{diag}E_R + \overline{U_L}M_U^{diag}U_R + \overline{D_L}M_D^{diag}D_R\right)(H^o\sin\alpha + h^o\cos\alpha)\\
&- \frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{E_L}\eta_E E_R + \overline{U_L}\eta_U U_R + \overline{D_L}\eta_D D_R\right)[H^o\sin(\alpha-\beta) + h^o\cos(\alpha-\beta)]\\
&+ h.c. \qquad \text{(B-23)}
\end{aligned}$$

Ahora introduciendo las transformaciones unitarias entre los términos del lagrangiano, haciendo uso de las matrices del sector leptónico $I = S_L T_L^\dagger$ (no existe mezcla para el sector leptónico) y la del sector de quarks (matriz de CKM) $V = V_L W_L^\dagger$, y separando los lagrangianos para cada uno de los sectores up y down, se obtiene que

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y &= \frac{g}{\sqrt{2}M_W}\left(\overline{N_L}M_E^{diag}E_R G_w^+ - \overline{D_L}V^\dagger M_U^{diag}U_R G_w^- + \overline{U_L}V M_D^{diag}D_R G_w^+\right)\\
&+ \frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_W}\left(\overline{N_L}M_E^{diag}E_R H^+ - \overline{D_L}V^\dagger M_U^{diag}U_R H^- + \overline{U_L}V M_D^{diag}D_R H^+\right)\\
&- \frac{1}{\sin\beta}\left(\overline{N_L}\eta_E E_R H^+ - \overline{D_L}V^\dagger \eta_U U_R H^- + \overline{U_L}V\eta_D D_R H^+\right)\\
&+ E_L M_E^{diag}E_R + U_L M_U^{diag}U_R + D_L M_D^{diag}D_R\\
&+ \frac{ig}{2M_W}\left(\overline{E_L}M_E^{diag}E_R + \overline{U_L}M_U^{diag}U_R + \overline{D_L}M_D^{diag}D_R\right)G_z^o\\
&+ \frac{ig\cot\beta}{2M_W}\left(\overline{E_L}M_E^{diag}E_R + \overline{U_L}M_U^{diag}U_R + \overline{D_L}M_D^{diag}D_R\right)A^o\\
&- \frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{E_L}\eta_E E_R + \overline{U_L}\eta_U U_R + \overline{D_L}\eta_D D_R\right)A^o\\
&+ \frac{g}{2M_W\sin\beta}\left(\overline{E_L}M_E^{diag}E_R + \overline{U_L}M_U^{diag}U_R + \overline{D_L}M_D^{diag}D_R\right)(H^o\sin\alpha + h^o\cos\alpha)\\
&- \frac{g}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{E_L}\eta_E E_R + \overline{U_L}\eta_U U_R + \overline{D_L}\eta_D D_R\right)[H^o\sin(\alpha-\beta) + h^o\cos(\alpha-\beta)]\\
&+ h.c. \qquad \text{(B-24)}
\end{aligned}$$

Tomando el hermítico conjugado del segundo término dentro del paréntesis $(\overline{D_L}M_U^{diag}U_RY^-)^\dagger = (D_L^\dagger\gamma^0 M_U^{diag}U_RY^-)^\dagger = (U_R^\dagger\gamma^{0\dagger}M_U^{diag\dagger}D_LY^+) = U_R^\dagger\gamma^{0\dagger}M_U^{diag}D_LY^+ = \overline{U_R}M_U^{diag\dagger}D_LY^+$, el lagrangiano de Yukawa se escribe como

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y &= \frac{g}{\sqrt{2}M_W}\left(\overline{N_L}M_E^{diag}E_R - \overline{U_R}M_U^{diag}VD_L + \overline{U_L}VM_D^{diag}D_R\right)G_w^+ \\
&+ \frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_W}\left(\overline{N_L}M_E^{diag}E_R - \overline{U_R}M_U^{diag}VD_L + \overline{U_L}VM_D^{diag}D_R\right)H^+ \\
&- \frac{1}{\sin\beta}\left(\overline{N_L}\eta_E E_R H^+ - \overline{U_R}\eta_U VD_L + \overline{U_L}V\eta_D D_R\right)H^+ \\
&+ E_LM_E^{diag}E_R + U_LM_U^{diag}U_R + D_LM_D^{diag}D_R \\
&+ \frac{ig}{2M_W}\left(\overline{E_L}M_E^{diag}E_R + \overline{U_R}M_U^{diag}U_L + \overline{D_L}M_D^{diag}D_R\right)G_z^0 \\
&+ \frac{ig\cot\beta}{2M_W}\left(\overline{E_L}M_E^{diag}E_R + \overline{U_R}M_U^{diag}U_L + \overline{D_L}M_D^{diag}D_R\right)A^0 \\
&- \frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{E_L}\eta_E E_R + \overline{U_R}\eta_U U_L + \overline{D_L}\eta_D D_R\right)A^0 \\
&+ \frac{g}{2M_W\sin\beta}\left(\overline{E_L}M_E^{diag}E_R + \overline{U_R}M_U^{diag}U_L + \overline{D_L}M_D^{diag}D_R\right)\left(H^0\sin\alpha + h^0\cos\alpha\right) \\
&- \frac{g}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{E_L}\eta_E E_R + \overline{U_R}\eta_U U_R + \overline{D_L}\eta_D D_R\right)\left[H^0\sin(\alpha-\beta) + h^0\cos(\alpha-\beta)\right] \\
&+ h.c. \qquad \text{(B-25)}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las siguientes identidades

$$\begin{aligned}
\overline{E_L}ME_R &= E_L^\dagger\gamma^0 MP_RE = E^\dagger P_L\gamma^0 MP_RE = E^\dagger\gamma^0 P_RMP_RE = E^\dagger\gamma^0 MP_RP_RE = \overline{E}ME_R, \\
\overline{E_R}ME_L &= E_R^\dagger\gamma^0 MP_LE = E^\dagger P_R\gamma^0 MP_LE = E^\dagger\gamma^0 P_LMP_LE = E^\dagger\gamma^0 MP_LP_LE = \overline{E}ME_L, \qquad \text{(B-26)}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\overline{E_L}ME_R + \overline{E_R}ME_L &= \overline{E}ME_R + \overline{E}ME_L = \overline{E}M(E_R + E_L) = \overline{E}ME, \\
\overline{E_L}ME_R - \overline{E_R}ME_L &= \overline{E}ME_R + \overline{E}ME_L = \overline{E}M(E_R - E_L) = \overline{E}M\gamma^5 E. \qquad \text{(B-27)}
\end{aligned}$$

De igual forma, con las identidades

$$\begin{aligned}
\overline{N_L}M_E^{diag}E_R &= N^\dagger P_L\gamma^0 M_E^{diag}P_RE = \overline{N}M_E^{diag}P_RE, \\
\overline{U_L}VM_D^{diag}D_R &= U^\dagger P_L\gamma^0 VM_D^{diag}P_RD = \overline{U}VM_D^{diag}P_RD, \\
\overline{U_R}M_U^{diag}VD_L &= U^\dagger P_R\gamma^0 M_U^{diag}VP_LD = \overline{U}M_U^{diag}VP_LD. \qquad \text{(B-28)}
\end{aligned}$$

Si ahora se suma el hermítico conjugado en el lagrangiano de Yukawa se tiene que

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y &= \frac{g}{\sqrt{2}M_W}\left(\overline{N_L}M_E^{diag}P_RE-\overline{U_R}M_U^{diag}VP_LD+\overline{U_L}VM_D^{diag}P_RD\right)G_w^+\\
&+ \frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_W}\left(\overline{N_L}M_E^{diag}P_RE-\overline{U_R}M_U^{diag}VP_LD+\overline{U_L}VM_D^{diag}P_RD\right)H^+\\
&- -\frac{1}{\sin\beta}\left(\overline{N_L}\eta_EP_REH^+-\overline{U_R}\eta_UVP_LD+\overline{U_L}V\eta_DP_RD\right)H^+ + h.c\\
&+ \overline{E_L}M_E^{diag}E_R+\overline{U_L}M_U^{diag}U_R+\overline{D_L}M_D^{diag}D_R\\
&+ \frac{ig}{2M_W}\begin{pmatrix}\overline{E}M_E^{diag}(P_R-P_L)E\\ +\overline{U}(P_L-P_R)M_U^{diag}U\\ +\overline{D}M_D^{diag}(P_R-P_L)D\end{pmatrix}G_z^0\\
&+ \frac{ig\cot\beta}{2M_W}\begin{pmatrix}\overline{E}M_E^{diag}(P_R-P_L)E\\ +\overline{U}(P_L-P_R)M_U^{diag}U\\ +\overline{D}M_D^{diag}(P_R-P_L)D\end{pmatrix}A^0\\
&- \frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\begin{pmatrix}\overline{E}\eta_E^{diag}(P_R-P_L)E\\ +\overline{U}(P_L-P_R)\eta_U^{diag}U\\ +\overline{D}\eta_D^{diag}(P_R-P_L)D\end{pmatrix}A^0\\
&+ \frac{g}{2M_W\sin\beta}\begin{pmatrix}\overline{E}M_E^{diag}(P_R+P_L)E\\ +\overline{U}(P_L+P_R)M_U^{diag}U\\ +\overline{D}M_D^{diag}(P_R+P_L)D\end{pmatrix}(H^0\sin\alpha+h^0\cos\alpha)\\
&- \frac{g}{\sqrt{2}\sin\beta}\begin{pmatrix}\overline{E}\eta_E^{diag}(P_R+P_L)E\\ +\overline{U}(P_L+P_R)\eta_U^{diag}U\\ +\overline{D}\eta_D^{diag}(P_R+P_L)D\end{pmatrix}\left[H^0\sin(\alpha-\beta)+h^0\cos(\alpha-\beta)\right].
\end{aligned}
\tag{B-29}
$$

Para los campos neutros, teniendo en cuenta que al sumarle el hermítico conjugado al lagrangiano, a partir de los coeficientes reales se puede escribir que $P_R + P_L = \gamma^5$ y de igual forma que $P_R - P_L = -\gamma^5$, con lo cual finalmente el lagrangiano se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y &= \frac{g}{\sqrt{2}M_W}\left(\overline{N_L}M_E^{diag}P_R E - \overline{U_R}M_U^{diag}V P_L D + \overline{U_L}V M_D^{diag}P_R D\right)G_w^+ \\
&+ \frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_W}\left(\overline{N_L}M_E^{diag}P_R E - \overline{U_R}M_U^{diag}V P_L D + \overline{U_L}V M_D^{diag}P_R D\right)H^+ \\
&- \frac{1}{\sin\beta}\left(\overline{N_L}\eta_E P_R E H^+ - \overline{U_R}\eta_U V P_L D + \overline{U_L}V\eta_D P_R D\right)H^+ + h.c \\
&+ +\overline{E_L}M_E^{diag}E_R + \overline{U_L}M_U^{diag}U_R + \overline{D_L}M_D^{diag}D_R \\
&+ +\frac{ig}{2M_W}\left(\overline{E}M_E^{diag}\gamma^5 E - \overline{U}M_U^{diag}\gamma^5 U + \overline{D}M_D^{diag}\gamma^5 D\right)G_z^0 \\
&+ \frac{ig\cot\beta}{2M_W}\left(\overline{E}M_E^{diag}\gamma^5 E - \overline{U}M_U^{diag}\gamma^5 U + \overline{D}M_D^{diag}\gamma^5 D\right)A^0 \\
&- \frac{i}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{E}\eta_E^{diag}\gamma^5 E - \overline{U}\eta_U^{diag}\gamma^5 U + \overline{D}\eta_D^{diag}\gamma^5 D\right)A^0 \\
&+ \frac{g}{2M_W\sin\beta}\left(\overline{E}M_E^{diag}E + \overline{U}M_U^{diag}U + \overline{D}M_D^{diag}D\right)\left(H^0\sin\alpha + h^0\cos\alpha\right) \\
&- \frac{g}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{E}\eta_E E - \overline{U}\eta_U U + \overline{D}\eta_D D\right)\left[H^0\sin(\alpha-\beta) + h^0\cos(\alpha-\beta)\right],
\end{aligned} \tag{B-30}$$

el cual recibe el nombre de lagrangiano tipo III con cambio de sabor $-\mathcal{L}_Y^{IIIcs}$.

C. Anexo: Obtención de los diferentes lagrangianos de Yukawa del M2DH

Lagrangiano de Yukawa del ME

Una de las primeras condiciones que se le puede exigir al lagrangiano de Yukawa del M2DH es la de reducirse al lagrangiano de Yukawa del ME. Esto se puede lograr mediante rotaciones de los campos de tal manera que se suprima el efecto del segundo doblete. Para eliminar el primer doblete Φ_1 imponemos la condición $v_1 = 0$ y $v_2 = v$, de tal manera que $\tan\beta = \infty$, en consecuencia $\beta = \pi/2$. Si adicionalmente eliminamos los términos de cambio de sabor, obtenemos

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^{ME} = \; & \frac{g}{\sqrt{2}M_w}\left(\overline{N}M_E^{diag}P_R E - \overline{U}M_U^{diag}VP_L D + \overline{U}VM_D^{diag}P_R D\right)G_w^+ + h.c. \\
& + \overline{E}M_E^{diag}E + \overline{U}M_U^{diag}U + \overline{D}M_D^{diag}D \\
& + i\frac{g}{2M_w}\left(\overline{E}M_E^{diag}\gamma^5 E - \overline{U}\gamma^5 M_U^{diag}U + \overline{D}M_D^{diag}\gamma^5 D\right)G_z^o \\
& + \frac{g}{2M_w}\left(\overline{E}M_E^{diag}E + \overline{U}M_U^{diag}U + \overline{D}M_D^{diag}D\right)h^o.
\end{aligned}$$

Lagrangiano de Yukawa del M2DH tipo I

El M2DH tipo I con cambio de sabor se genera con

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^{Ics} &= -\mathcal{L}_Y^{\chi}(\alpha,\beta) \\
&= \frac{g}{\sqrt{2}M_w}\left(\overline{N}M_E^{diag}P_R E - \overline{U}M_U^{diag}VP_L D + \overline{U}VM_D^{diag}P_R D\right)G_w^+ \\
&\quad + \frac{g\cot\beta}{\sqrt{2}M_w}\left(\overline{N}M_E^{diag}P_R E - \overline{U}M_U^{diag}VP_L D + \overline{U}VM_D^{diag}P_R D\right)H^+ \\
&\quad - \frac{1}{\sin\beta}\left(\overline{N}\eta^E P_R E - \overline{U}\eta^U VP_L D + \overline{U}V\eta^D P_R D\right)H^+ + h.c. \\
&\quad + \overline{E}M_E^{diag}E + \overline{U}M_U^{diag}U + \overline{D}M_D^{diag}D \\
&\quad + i\frac{g}{2M_w}\left(\overline{E}M_E^{diag}\gamma^5 E - \overline{U}\gamma^5 M_U^{diag}U + \overline{D}M_D^{diag}\gamma^5 D\right)G_z^o \\
&\quad + i\frac{g\cot\beta}{2M_w}\left(\overline{E}M_E^{diag}\gamma^5 E - \overline{U}\gamma^5 M_U^{diag}U + \overline{D}M_D^{diag}\gamma^5 D\right)A^o \\
&\quad - i\frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{E}\eta^E\gamma^5 E - \overline{U}\gamma^5\eta^U U + \overline{D}\eta^D\gamma^5 D\right)A^o.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{g}{2M_w\sin\beta}\left(\overline{E}M_E^{diag}E+\overline{U}M_U^{diag}U+\overline{D}M_D^{diag}D\right)\left[H^o\sin\alpha+h^o\cos\alpha\right]\\
&-\frac{1}{\sqrt{2}\sin\beta}\left(\overline{E}\eta^E E+\overline{U}\eta^U U+\overline{D}\eta^D D\right)\left[H^o\sin\left(\alpha-\beta\right)+h^o\cos\left(\alpha-\beta\right)\right]. \qquad \text{(C-1)}
\end{aligned}
$$

En este lagrangiano podemos tomar el límite $\tan\beta\to\infty$. Eliminando las interacciones de cam,bio de sabor obtenemos el lagrangiano tipo I.

Lagrangiano de Yukawa del M2DH tipo II

El M2DH tipo II con cambio de sabor se genera con

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^{IIcs} &= -\mathcal{L}_Y^{\chi}\left(\alpha-\pi/2,\beta-\pi/2\right)\\
&= \frac{g}{\sqrt{2}M_w}\left(\overline{N}M_E^{diag}P_RE-\overline{U}M_U^{diag}VP_LD+\overline{U}VM_D^{diag}P_RD\right)G_w^+\\
&\quad-\frac{g\tan\beta}{\sqrt{2}M_w}\left(\overline{N}M_E^{diag}P_RE-\overline{U}M_U^{diag}VP_LD+\overline{U}VM_D^{diag}P_RD\right)H^+\\
&\quad+\frac{1}{\cos\beta}\left(\overline{N}\xi_2^E P_RE-\overline{U}\xi_2^U VP_LD+\overline{U}V\xi_2^D P_RD\right)H^+ + h.c.\\
&\quad+\overline{E}M_E^{diag}E+\overline{U}M_U^{diag}U+\overline{D}M_D^{diag}D\\
&\quad+i\frac{g}{2M_w}\left(\overline{E}M_E^{diag}\gamma^5E-\overline{U}\gamma^5M_U^{diag}U+\overline{D}M_D^{diag}\gamma^5D\right)G_z^o\\
&\quad-i\frac{g\tan\beta}{2M_w}\left(\overline{E}M_E^{diag}\gamma^5E-\overline{U}\gamma^5M_U^{diag}U+\overline{D}M_D^{diag}\gamma^5D\right)A^o\\
&\quad+i\frac{1}{\sqrt{2}\cos\beta}\left(\overline{E}\xi_2^E\gamma^5E-\overline{U}\gamma^5\xi_2^U U+\overline{D}\xi_2^D\gamma^5D\right)A^o\\
&\quad+\frac{g}{2M_w\cos\beta}\left(\overline{E}M_E^{diag}E+\overline{U}M_U^{diag}U+\overline{D}M_D^{diag}D\right)\left[H^o\cos\alpha-h^o\sin\alpha\right]\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{2}\cos\beta}\left(\overline{E}\xi_2^E E+\overline{U}\xi_2^U U+\overline{D}\xi_2^D D\right)\left[H^o\sin\left(\alpha-\beta\right)+h^o\cos\left(\alpha-\beta\right)\right], \qquad \text{(C-2)}
\end{aligned}
$$

En este lagrangiano podemos tomar el límite $\tan\beta\to 0$. Eliminando las interacciones de cambio de sabor obtenemos el lagrangiano tipo II, de la siguiente manera: $-\mathcal{L}_Y^{II} = -\mathcal{L}_Y^{E}\left(\alpha-\pi/2,\beta-\pi/2\right)-\mathcal{L}_Y^{D}\left(\alpha,\beta\right)-\mathcal{L}_Y^{U}\left(\alpha-\pi/2,\beta-\pi/2\right)$.

Lagrangiano de Yukawa del M2DH-III

El M2DH-III con cambio de sabor en la parametrización fundamental, se genera reparametrizando los términos de cambio de sabor de tal manera que ningún término del lagrangiano dependa del parámetro β, con lo cual

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^{IIIcs} \;=\;& \frac{g}{\sqrt{2}M_w}\left(\overline{N}M_E^{diag}P_R E - \overline{U}M_U^{diag}VP_L D + \overline{U}VM_D^{diag}P_R D\right)G_w^+ \\
&+\left(\overline{N}\eta^E P_R E - \overline{U}\eta^U VP_L D + \overline{U}V\eta^D P_R D\right)H^+ + h.c. \\
&+\overline{E}M_E^{diag}E + \overline{U}M_U^{diag}U + \overline{D}M_D^{diag}D \\
&+i\frac{g}{2M_w}\left(\overline{E}M_E^{diag}\gamma^5 E - \overline{U}\gamma^5 M_U^{diag}U + \overline{D}M_D^{diag}\gamma^5 D\right)G_z^o \\
&+i\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{E}\xi_2^E\gamma^5 E - \overline{U}\gamma^5\xi_2^U U + \overline{D}\xi_2^D\gamma^5 D\right)A^o \\
&+\frac{g}{2M_w}\left(\overline{E}M_E^{diag}E + \overline{U}M_U^{diag}U + \overline{D}M_D^{diag}D\right)\left(H^o\cos\alpha - h^o\sin\alpha\right) \\
&+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{E}\eta^E E + \overline{U}\eta^U U + \overline{D}\eta^D D\right)\left(H^o\sin\alpha + h^o\cos\alpha\right). \qquad \text{(C-3)}
\end{aligned}
$$

D. Anexo: Modelo simetríco izquierda derecha

Ortogonalidad de los campos de gauge

Mezclando las terceras componente de los campos de gauge $W^3_{\mu L,R}$ con el campo de gauge B_μ, se obtiene el bosón para el campo electromagnético A_μ (fotón). Teniendo en cuenta que este no puede interactuar con los neutrinos, se tiene entonces que $A_\mu = aB_\mu + bW^3_{\mu L} + cW^3_{\mu R}$, de tal manera que los productos escalares $A_\mu \cdot \left(-g'B_\mu + gW^3_{\mu L}\right)$ y $A_\mu \cdot \left(-g'B_\mu + gW^3_{\mu R}\right)$ se hagan iguales a cero. Con lo anterior, a partir del producto interno de los campos

$$\begin{aligned}(aB_\mu + bW^3_{\mu L} + cW^3_{\mu R}) \cdot \left(-g'B_\mu + gW^3_{\mu L}\right) &= 0 \\ &= -ag' + bg = 0,\end{aligned}$$

se desprende la primera condición $ag' = bg$. Ahora para el siguiente producto de campos

$$\begin{aligned}(aB_\mu + bW^3_{\mu L} + cW^3_{\mu R}) \cdot \left(-g'B_\mu + gW^3_{\mu R}\right) &= 0 \\ &= -ag' + cg = 0.\end{aligned}$$

Tomando las anteriores dos condiciones del producto escalar, tenemos que $bg = cg$, entonces $b = c$. Ahora se aplica la condición de la norma

$$\begin{aligned}A_\mu \cdot A_\mu = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \\ &= a^2 + 2b^2 = 1, \qquad \text{(D-1)}\end{aligned}$$

entonces, tenemos que $a = b\frac{g}{g'}$. Reemplazando en la anterior condición de la norma

$$b^2\frac{g^2}{g'^2} + 2b^2 = b^2\left(\frac{g^2}{g'^2} + 2\right) = b^2\left(\frac{g^2}{g'^2} + 2\frac{g'^2}{g'^2}\right) = 1,$$

despejando $b = \frac{g'}{\sqrt{g^2+2g'^2}} = c$ y $a = \frac{g}{\sqrt{g^2+2g'^2}}$, tenemos que el fotón queda escrito como

$$\begin{aligned}A_\mu &= \frac{g}{\sqrt{g^2+2g'^2}}B_\mu + \frac{g'}{\sqrt{g^2+2g'^2}}W^3_{\mu L} + \frac{g'}{\sqrt{g^2+2g'^2}}W^3_{\mu R} \\ &= \frac{g + g'(W^3_{\mu L} + W^3_{\mu R})}{\sqrt{g^2+2g'^2}}. \qquad \text{(D-2)}\end{aligned}$$

Definiendo el ángulo de mezcla de Weinberg θ_W como

$$\sin\theta = \frac{e}{g} = \frac{g'}{\sqrt{g^2+2g'^2}} \qquad \sqrt{\cos 2\theta_w} = \frac{e}{g} = \frac{g}{\sqrt{\cos 2\theta_w}}, \tag{D-3}$$

se concluye que $A_\mu = \sqrt{\cos 2\theta_w} B_\mu + \sin\theta_W \left(W^3_{\mu L} + W^3_{\mu R}\right)$. Ahora se define arbitrariamente un campo de gauge neutro Z'_μ con el que interactúan un par de neutrinos derechos

$$Z'_\mu = \frac{gW^3_{\mu R} - g' B_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}. \tag{D-4}$$

Teniendo en cuenta el ángulo de Weinberg, expresamos el coeficiente del campo de gauge B_μ en función de las constantes de acoplamiento. Para esto definimos $\cos\theta$ como

$$\cos 2\theta = \frac{g^2}{g^2+2g'^2} = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos^2\theta - \frac{g'^2}{g^2+2g'^2}.$$

Despejando $\cos^2\theta$ se tiene

$$\cos^2\theta = \frac{g^2}{g^2+2g'^2} + \frac{g'^2}{g^2+2g'^2} = \frac{g^2+g'^2}{g^2+2g'^2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{\sqrt{g^2+2g'^2}}. \tag{D-5}$$

Se define $\tan\theta$ como

$$\tan\theta = \frac{\frac{g'}{\sqrt{g^2+2g'^2}}}{\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{\sqrt{g^2+2g'^2}}} = \frac{g'\sqrt{g^2+2g'^2}}{\sqrt{g^2+2g'^2}\sqrt{g^2+g'^2}} = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}. \tag{D-6}$$

Ahora para el coeficiente del campo de gauge $W^3_{\mu R}$ tenemos

$$\frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}} = \frac{\frac{g}{\sqrt{g^2+2g'^2}}}{\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{\sqrt{g^2+2g'^2}}} = \frac{\sqrt{\cos 2\theta_W}}{cos\theta_W}, \tag{D-7}$$

enseguida definimos $Z'_\mu = -\tan\theta B_\mu + \frac{\sqrt{\cos 2\theta_W}}{cos\theta_W} W^3_{\mu R}$. Una vez que se conocen las expresiones para A_μ y Z'_μ, se puede definir el campo Z_μ, exigiendo que sea ortogonal a los campos A_μ y Z'_μ, permitiendo encontrar la expresión para el campo Z_μ del mismo modo que hallamos una expresión para el fotón. De esta forma se obtienen las siguientes relaciones:

$$a\sqrt{\cos 2\theta_W} - b\sin\theta_W + c\sin\theta = 0, \tag{D-8}$$

$$-a\tan\theta_W + c\frac{\sqrt{\cos 2\theta_W}}{cos\theta_W} = 0, \tag{D-9}$$

$$a^2+b^2+c^2 = 1. \tag{D-10}$$

A partir de (D-9), se tiene que

$$a\tan\theta_W = c\frac{\sqrt{\cos 2\theta_W}}{cos\theta_W} \Rightarrow c = a\frac{\sin\theta_W}{\sqrt{\cos 2\theta_W}} \Rightarrow c^2 = a^2\frac{\sin^2\theta_W}{\cos 2\theta_W}. \tag{D-11}$$

Reemplazando (D-10), encontramos

$$a^2 + b^2 + a^2 \frac{\sin^2\theta_W}{\cos 2\theta_W} = a^2 \left(1 + \frac{\sin^2\theta_W}{\cos 2\theta_W}\right) + b^2 = 1. \tag{D-12}$$

Ahora de (D-8), tenemos

$$a\sqrt{\cos 2\theta_W} - b\sin\theta_W + a\frac{\sin^2\theta_W}{\sqrt{\cos 2\theta_W}} = a\left(\sqrt{\cos 2\theta_W} + \frac{\sin^2\theta_W}{\sqrt{\cos 2\theta_W}}\right) - b\sin\theta_W = 0, \tag{D-13}$$

entonces

$$\begin{aligned} &a\left(\sqrt{\cos 2\theta_W} + \frac{\sin^2\theta_W}{\sqrt{\cos 2\theta_W}}\right) = b\sin\theta_W \\ &\Rightarrow b = a\left(\frac{\sqrt{\cos 2\theta_W}}{\sin\theta_W} + \frac{\sin^2\theta_W}{\sin\theta_W\sqrt{\cos 2\theta_W}}\right) = a\left(\frac{\cos^2\theta_W}{\sin\theta_W\sqrt{\cos 2\theta_W}}\right). \end{aligned} \tag{D-14}$$

Reemplazando el anterior resultado en (D-12) se encuentra

$$a^2\left(1 + \frac{\sin^2\theta_W}{\cos 2\theta_W}\right) + a^2\left(\frac{\cos^4\theta_W}{\sin\theta_W^2\cos 2\theta_W}\right) = 1, \tag{D-15}$$

de donde despejando a se tiene

$$a = -\sqrt{\cos 2\theta_W}\tan\theta_W, \tag{D-16}$$

por consiguiente

$$c = \frac{a\sin\theta_W}{\sqrt{\cos 2\theta_W}} = -\frac{\sqrt{\cos 2\theta_W}\tan\theta_W}{\sqrt{\cos 2\theta_W}}\sin\theta_W = -\sin\theta_W\tan\theta_W. \tag{D-17}$$

Finalmente podemos encontrar que $Z_\mu = -\sqrt{\cos 2\theta_W}\tan\theta_W B_\mu + W^3_{\mu L}\cos\theta_W - \sin\theta_W\tan\theta_W W^3_{\mu R}$. En forma matricial, los anteriores resultados se pueden resumir en las siguientes matrices de mezcla

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ Z'_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta_W\tan\theta_W & -\tan\theta_W\sqrt{\cos 2\theta_W} \\ 0 & \sqrt{\cos 2\theta_W}/\cos\theta_W & -\tan\theta_W \\ \sin\theta_W & \sin\theta_W & \sqrt{\cos 2\theta_W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^3_{\mu L} \\ W^3_{\mu R} \\ B_\mu \end{pmatrix}, \tag{D-18}$$

y las rotaciones inversas

$$\begin{pmatrix} W^3_{\mu L} \\ W^3_{\mu R} \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W\tan\theta_W & \sqrt{\cos 2\theta_W}/\cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\tan\theta_W\sqrt{\cos 2\theta_W} & -\tan\theta_W & \sqrt{\cos 2\theta_W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ Z'_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}. \tag{D-19}$$

E. Anexo: Potencial de Higgs en el MSID

EL potencial de Higgs más general puede ser escrito como

$$V = V_{\Phi} + V_{\triangle} + V_{\Phi\triangle}, \tag{E-1}$$

donde cada componente del potencial esta formado como

$$\begin{aligned}
V_{\Phi} = & -\mu_1^2 Tr(\Phi^{\dagger}\Phi) - \mu_2^2 \left[Tr(\tilde{\Phi}\Phi^{\dagger}) + Tr(\tilde{\Phi}^{\dagger}\Phi)\right] - \lambda_1 \left[Tr(\Phi\Phi^{\dagger})\right]^2 \\
& + \lambda_2 \left\{\left[Tr(\tilde{\Phi}\Phi^{\dagger})\right]^2 \left[Tr(\tilde{\Phi}^{\dagger}\Phi)^2\right]\right\} + \lambda_3 \left[Tr(\tilde{\Phi}\Phi^{\dagger})Tr(\tilde{\Phi}^{\dagger}\Phi)\right] \\
& + \lambda_4 \left\{Tr(\tilde{\Phi}\Phi^{\dagger}) \left[Tr(\tilde{\Phi}\Phi^{\dagger}) + Tr(\tilde{\Phi}^{\dagger}\Phi)\right]\right\},
\end{aligned} \tag{E-2}$$

$$\begin{aligned}
V_{\triangle} = & -\mu_3^2 \left[Tr(\triangle_L\triangle_L^{\dagger}) + Tr(\triangle_R\triangle_R^{\dagger})\right] + \rho_1 \left\{\left[Tr(\triangle_L\triangle_L^{\dagger})\right]^2 + \left[Tr(\triangle_R\triangle_R^{\dagger})\right]^2\right\} \\
& + \rho_2 \left[Tr(\triangle_L\triangle_L)Tr(\triangle_L^{\dagger}\triangle_L^{\dagger}) + Tr(\triangle_R\triangle_R)Tr(\triangle_R^{\dagger}\triangle_R^{\dagger})\right] \\
& + \rho_3 \left[Tr(\triangle_L\triangle_L^{\dagger})Tr(\triangle_R\triangle_R^{\dagger})\right] \\
& + \rho_4 \left[Tr(\triangle_L\triangle_L)Tr(\triangle_L^{\dagger}\triangle_L^{\dagger}) + Tr(\triangle_L^{\dagger}\triangle_L^{\dagger})Tr(\triangle_R\triangle_R)\right],
\end{aligned} \tag{E-3}$$

$$\begin{aligned}
V_{\Phi\triangle} = & \alpha_1 \left\{Tr(\Phi^{\dagger}\Phi) \left[Tr(\triangle_L\triangle_L^{\dagger}) + Tr(\triangle_R\triangle_R^{\dagger})\right]\right\} + \alpha_2 \left[Tr(\tilde{\Phi}^{\dagger}\Phi)Tr(\triangle_R\triangle_R^{\dagger})\right. \\
& \left. + Tr(\tilde{\Phi}^{\dagger}\Phi)Tr(\triangle_L\triangle_L^{\dagger}) + Tr(\tilde{\Phi}\Phi^{\dagger})Tr(\triangle_R\triangle_R^{\dagger}) + Tr(\Phi^{\dagger}\tilde{\Phi})Tr(\triangle_L\triangle_L^{\dagger})\right] \\
& + \alpha_3 \left[Tr\left(\Phi\Phi^{\dagger}\triangle_L\triangle_L^{\dagger}\right) + Tr\left(\Phi^{\dagger}\Phi\triangle_R\triangle_R^{\dagger}\right)\right] + \beta_1 \left[Tr\left(\Phi\triangle_R\Phi^{\dagger}\triangle_L^{\dagger}\right) + Tr\left(\Phi^{\dagger}\triangle_L\Phi\triangle_R^{\dagger}\right)\right] \\
& + \beta_2 \left[Tr\left(\tilde{\Phi}\triangle_R\Phi^{\dagger}\triangle_L^{\dagger}\right) + Tr\left(\tilde{\Phi}^{\dagger}\triangle_L\Phi\triangle_R^{\dagger}\right)\right] + \beta_3 \left[Tr\left(\Phi\triangle_R\tilde{\Phi}^{\dagger}\triangle_L^{\dagger}\right) + Tr\left(\Phi^{\dagger}\triangle_L\tilde{\Phi}\triangle_R^{\dagger}\right)\right],
\end{aligned} \tag{E-4}$$

en donde se ha definido $\tilde{\Phi} = \tau_2\Phi^{\star}\tau_2$, y gracias a la simetría izquierda-derecha, todos los términos del potencial son auto conjugados. Después de aplicar las transformaciones unitarias a los campos fermiónicos y a los campos escalares, absorbiéndose algunas fases tenemos que los VEV en el MSID son

$$\langle\triangle_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_R e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \langle\triangle_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_L & 0 \end{pmatrix},$$

$$\langle\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_1 e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}, \qquad \langle\Phi^\dagger\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_1 e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\left\langle\widetilde{\Phi}\right\rangle = \tau_2\Phi^*\tau_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & ik_1 e^{-i\alpha} \\ -ik_2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & k_1 e^{-i\alpha} \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Dentro de los posibles acoplamientos presentes en el potencial mas general se encuentran

$$\begin{aligned}
\Phi^\dagger\Phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_1 e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_1 e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} k_1^2 & 0 \\ 0 & k_2^2 \end{pmatrix}, \\
\widetilde{\Phi}\Phi^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & k_1 e^{-i\alpha} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_1 e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} k_1k_2 e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & k_1k_2 e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \\
\widetilde{\Phi}^\dagger\Phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & k_1 e^{i\alpha} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_1 e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} k_1k_2 e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & k_1k_2 e^{i\alpha} \end{pmatrix}, \\
\Phi\Phi^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_1 e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_1 e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} k_1^2 & 0 \\ 0 & k_2^2 \end{pmatrix}, \\
\triangle_L\triangle_L &= \triangle_R\triangle_R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_L & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_L & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\triangle_L\triangle_L^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_L & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & v_L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_L^2 \end{pmatrix}, \\
\triangle_R\triangle_R^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_R e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & v_R e^{-i\theta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_R^2 \end{pmatrix}, \\
\triangle_R^\dagger\triangle_R &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & v_R e^{-i\theta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_R e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} v_R^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{E-5}$$

Otros acoples presentes en el potencial son los siguientes:

$$\begin{aligned}
\Phi^\dagger\triangle_L\triangle_L^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_1 e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_L^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2 v_L^2 \end{pmatrix}, \\
\Phi\Phi^\dagger\triangle_L\triangle_L^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_1 e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2 v_L^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2^2 v_L^2 \end{pmatrix}, \\
\Phi\triangle_R\triangle_R^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_1 e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_R^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2 v_R^2 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{E-6}$$

$$
\begin{aligned}
\Phi^\dagger\Phi\triangle_R\triangle_R^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_1e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2v_R^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2^2v_R^2 \end{pmatrix}, \\
\Phi^\dagger\triangle_L^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_1e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & v_L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & k_1e^{-i\alpha}v_L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\Phi^\dagger\triangle_L^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_1e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & v_L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & k_1e^{-i\alpha}v_L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\triangle_R\Phi^\dagger\triangle_L^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_Re^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & k_1e^{-i\alpha}v_L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_1v_Lv_Re^{i\theta}e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \\
\Phi\triangle_R\Phi^\dagger\triangle_L^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_1e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_1v_Lv_Re^{i\theta}e^{-i\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_1k_2v_Lv_Re^{i\theta}e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \\
\Phi\triangle_R^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_1e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & v_Re^{-i\theta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & k_1v_Re^{-i\theta}e^{i\alpha} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\triangle_L\Phi\triangle_R^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_L & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & k_1v_Re^{-i\theta}e^{i\alpha} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_1v_Lv_Re^{-i\theta}e^{i\alpha} \end{pmatrix}, \\
\Phi^\dagger\triangle_L\Phi\triangle_R^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_1e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_1v_Lv_Re^{-i\theta}e^{i\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_1k_2v_Lv_Re^{-i\theta}e^{i\alpha} \end{pmatrix}, \\
\Phi^\dagger\triangle_L^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_1e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & v_L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & k_1e^{-i\alpha}v_L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\triangle_R\Phi^\dagger\triangle_L^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_Re^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & k_1e^{-i\alpha}v_L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_1v_Lv_Re^{i\theta}e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \\
\widetilde{\Phi}\triangle_R\Phi^\dagger\triangle_L^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & k_1e^{-i\alpha} \end{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_1v_Lv_Re^{i\theta}e^{-i\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_1^2v_Lv_Re^{i\theta}e^{-2i\alpha} \end{pmatrix}, \\
\Phi\triangle_R^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_1e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & v_Re^{-i\theta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & k_1v_Re^{-i\theta}e^{i\alpha} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\triangle_L\Phi\triangle_R^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_L & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & k_1v_Re^{-i\theta}e^{i\alpha} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_1v_Lv_Re^{-i\theta}e^{i\alpha} \end{pmatrix}, \\
\widetilde{\Phi}^\dagger\triangle_L\Phi\triangle_R^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & k_1e^{i\alpha} \end{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_1v_Lv_Re^{-i\theta}e^{i\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_1^2v_Lv_Re^{-i\theta}e^{2i\alpha} \end{pmatrix}, \\
\widetilde{\Phi}^\dagger\triangle_L^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & k_1e^{i\alpha} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & v_L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & k_2v_L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\triangle_R\widetilde{\Phi}^\dagger\triangle_L^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_Re^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & k_2v_L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2v_Rv_Le^{i\theta} \end{pmatrix}, \\
\Phi\triangle_R\widetilde{\Phi}^\dagger\triangle_L^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_1e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2v_Rv_Le^{i\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2^2v_Rv_Le^{i\theta} \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{E-7}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}\triangle_R^{\dagger} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & k_1 e^{-i\alpha}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & v_R e^{-i\theta} \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & k_2 v_R e^{-i\theta} \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \\
\triangle_L\widetilde{\Phi}\triangle_R^{\dagger} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_L & 0\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & k_2 v_R e^{-i\theta} \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2 v_L v_R e^{-i\theta}\end{pmatrix}, \\
\Phi^{\dagger}\triangle_L\widetilde{\Phi}\triangle_R^{\dagger} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} k_1 e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & k_2\end{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2 v_L v_R e^{-i\theta}\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2^2 v_L v_R e^{-i\theta}\end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{E-8}
$$

F. Anexo: Matriz de masa para los bosones escalares neutros

Las componentes de la matriz de masa simétrica en la base $\{\phi_1^r, \phi_2^r, \phi_1^r, \delta_R^r, \delta_L^r, \phi_1^i, \phi_2^i, \delta_R^i, \delta_L^i\}$ para los bosones escalares neutros son

$$
\begin{aligned}
M_{11}^2 =& -\mu_1^2 + \lambda_1\left[k_1^2\left(2\cos^2\alpha+1\right)+k_2^2\right] + 2\left(2\lambda_2+\lambda_3\right)k_2^2 + 6\lambda_4 k_1 k_2\cos\alpha \\
&+\frac{1}{2}\alpha_1(v_L^2+v_R^2) + \beta_2 v_L v_R\cos\theta, \\
M_{12}^2 =& -2\mu_2^2 + 2\left(\lambda_1+4\lambda_2+2\lambda_3\right)k_1k_2\cos\alpha + \lambda_4\left[k_1^2\left(2\cos^2\alpha+1\right)+3k_2^2\right] \\
&+\alpha_2(v_L^2+v_R^2)+\frac{1}{2}\beta_1 v_L v_R\cos\theta, \\
M_{13}^2 =& \alpha_1 k_1 v_R\cos\alpha\cos\theta + 2\alpha_2 k_2 v_R\cos\theta + \frac{1}{2}v_L\left(\beta_1 k_2 + 2\beta_2 k_1\cos\alpha\right), \\
M_{14}^2 =& \alpha_1 k_1 v_R\cos\alpha + 2\alpha_2 k_2 v_L + \frac{1}{2}v_R\left(\beta_1 k_2\cos\theta + 2\beta_2 k_1\cos(\theta-\alpha)\right), \\
M_{15}^2 =& \lambda_1 k_1^2\sin 2\alpha + 2\lambda_4 k_1 k_2\sin\alpha + \beta_2 v_L v_R\sin\theta, \\
M_{16}^2 =& -8\lambda_2 k_1 k_2\sin\alpha - \lambda_4 k_1^2\sin 2\alpha - \frac{1}{2}\beta_1 v_L v_R\sin\theta, \\
M_{17}^2 =& \alpha_1 k_1 v_R\cos\alpha\sin\theta + 2\alpha_2 k_2 v_R\sin\theta + \beta_2 k_1 v_L\sin\alpha, \\
M_{18}^2 =& \frac{1}{2}v_R\left(\beta_1 k_2\cos\theta + 2\beta_2 k_1\cos(\theta-\alpha)\right), \\
M_{22}^2 =& -\mu_1^2 + \lambda_1\left[k_1^2+3k_2^2\right] + 2\left(2\lambda_2\cos 2\alpha+\lambda_3\right)k_1^2 + 6\lambda_4 k_1k_2\cos\alpha, \\
&+\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)(v_L^2+v_R^2) + \beta_3 v_L v_R\cos\theta, \\
M_{23}^2 =& \alpha_1 k_2 v_R\cos\theta + 2\alpha_2 k_1 v_R\cos\alpha\cos\theta + \alpha_3 k_2 v_R\cos\alpha, \\
&+\frac{1}{2}v_L\left(\beta_1 k_1\cos\alpha + 2\beta_3 k_2\right), \\
M_{24}^2 =& (\alpha_1+\alpha_3)k_2 v_L + 2\alpha_2 k_1 v_L\cos\alpha + \frac{1}{2}v_R\left(\beta_1 k_1\cos(\theta-\alpha) + 2\beta_3 k_2\cos\theta\right), \\
M_{25}^2 =& 2\mu_2^2 + 2\left(\lambda_1-4\lambda_2+2\lambda_3\right)k_1k_2\sin\alpha + \lambda_4 k_1^2\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\beta_1 v_L v_R\sin\theta, \\
M_{26}^2 =& -4\lambda_2 k_1^2\sin 2\alpha - 2\lambda_4 k_1 k_2\sin\alpha - \beta_2 v_L v_R\sin\theta, \\
M_{27}^2 =& \alpha_1 k_2 v_R\sin\theta + 2\alpha_2 k_1 v_R\cos\alpha\sin\theta + \alpha_3 k_2 v_R\sin\theta + \frac{1}{2}\beta_1 k_1 v_L\sin\alpha, \\
M_{28}^2 =& \frac{1}{2}v_R\left(\beta_1 k_1\sin(\theta-\alpha) + 2\beta_3 k_2\sin\theta\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{33}^2 =& -\mu_3^2+\frac{1}{2}\alpha_1(v_L^2+v_R^2)+2\alpha_2k_2v_R\cos\theta+\frac{1}{2}\alpha_3k_2^2+\rho_1v_R^2(2\cos^2\theta+1)\\
&+\frac{1}{2}\rho_3v_L^2,\\
M_{34}^2 =&\frac{1}{2}\beta_1k_1k_2\cos\alpha+\frac{1}{2}\beta_2k_1^2\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\beta_3k_2^2+\rho_3v_Lv_R\cos\theta,\\
M_{35}^2 =&\alpha_1k_1v_R\sin\alpha\cos\theta-\beta_2k_1v_L\sin\alpha,\\
M_{36}^2 =& -2\alpha_2k_1v_R\sin\alpha\cos\theta+\frac{1}{2}\beta_1k_1v_L\sin\alpha\\
M_{37}^2 =&\rho_1v_R^2\sin 2\theta,\\
M_{38}^2 =& -\frac{1}{2}\beta_1k_1k_2\sin\alpha-\frac{1}{2}\beta_2k_1^2\sin 2\alpha,\\
M_{44}^2 =& -\mu_3^2+\frac{1}{2}\alpha_1(k_1^2+k_2^2)+2\alpha_2k_1k_2\cos\alpha+\frac{1}{2}\alpha_3k_2^2+3\rho_1v_L^2+\frac{1}{2}\rho_3v_R^2\\
M_{45}^2 =&\alpha_1k_1v_L\sin\alpha+\frac{1}{2}\beta_1k_1v_R\sin\theta+\beta_2k_1v_R\sin(\theta-\alpha)\\
M_{46}^2 =& -2\alpha_2k_1v_L\sin\alpha-\frac{1}{2}\beta_1k_1v_R\sin(\theta-\alpha)-\beta_3k_2v_R\sin\theta\\
M_{47}^2 =&\frac{1}{2}\beta_1k_1k_2\sin\alpha+\frac{1}{2}\beta_2k_1^2\sin 2\alpha+\rho_3v_Lv_R\sin\theta\\
M_{48}^2 =&0\\
M_{55}^2 =& -\mu_1^2+\lambda_1\left[k_1^2\left(2\sin^2\alpha+1\right)+k_2^2\right]+2\left(-2\lambda_2+\lambda_3\right)k_2^2+2\lambda_4k_1k_2\cos\alpha\\
&+\frac{1}{2}\alpha_1(v_L^2+v_R^2)-\beta_2v_Lv_R\cos\theta,\\
M_{56}^2 =&2\mu_2^2+-8\lambda_2k_1k_2\cos\alpha-\lambda_4\left[k_1^2\left(2\sin^2\alpha+1\right)+k_2^2\right]-\alpha_2(v_L^2+v_R^2)\\
&+\frac{1}{2}\beta_1v_Lv_R\cos\theta,\\
M_{57}^2 =&\alpha_1k_1v_R\sin\alpha\sin\theta+\frac{1}{2}\beta_1k_2v_L\cos\alpha\\
M_{58}^2 =& -\frac{1}{2}\beta_3k_2v_R\sin\theta-\beta_2k_1v_R\cos(\theta-\alpha),\\
M_{66}^2 =& -\mu_1^2+\lambda_1(k_1^2+k_2^2)+2\left(-2\lambda_2\cos 2\alpha+\lambda_3\right)k_1^2+2\lambda_4k_1k_2\cos\alpha\\
&+\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)(v_L^2+v_R^2)-\beta_3v_Lv_R\cos\theta,\\
M_{67}^2 =& -2\alpha_2k_1v_R\sin\alpha\sin\theta-\frac{1}{2}\beta_1k_1v_L\cos\theta-\beta_3k_2v_L,\\
M_{68}^2 =&\frac{1}{2}\beta_1k_1v_R\cos(\theta-\alpha)-\beta_3k_2v_R\cos\theta,
\end{aligned}
\tag{F-1}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{77}^2 =& -\mu_3^2 + \frac{1}{2}\alpha_1(v_L^2 + v_R^2) + 2\alpha_2 k_1 k_2 \cos\alpha + \frac{1}{2}\alpha_3 k_2^2 v_L + \rho_1 v_R^2(2\sin^2\theta + 1) \\
&+ \frac{1}{2}\rho_3 v_L^2 \\
M_{78}^2 =& \frac{1}{2}\beta_1 k_1 k_2 \cos\alpha + \frac{1}{2}\beta_2 k_1^2 \cos 2\alpha + \frac{1}{2}\beta_3 k_2^2 \\
M_{88}^2 =& -\mu_3^2 + \frac{1}{2}\alpha_1(k_1^2 + k_2^2) + 2\alpha_2 k_1 k_2 \cos\alpha + \frac{1}{2}\alpha_3 k_2^2 + \rho_1 v_L^2 + \frac{1}{2}\rho_3 v_R^2.
\end{aligned}
$$

Matriz de masa para los bosones una vez cargados

Las componentes de la matriz de masa hermítica en la base $\left\{\phi_1^+, \phi_2^+, \delta_R^+, \delta_L^+\right\}$, para los bosones escalares una vez cargados son

$$
\begin{aligned}
M_{11}^{+2} =& -\mu_1^2 + \lambda_1(k_1^2 + k_2^2) + 2\lambda_4 k_1 k_2 \cos\alpha + \frac{1}{2}\alpha_1(v_R^2 + v_L^2) + \frac{1}{2}\alpha_3 v_R^2, \\
M_{12}^{+2} =& 2\mu_2^2 - 2(2\lambda_2 e^{i\alpha} + \lambda_3 e^{-i\alpha})k_1 k_2 - \lambda_4(k_1^2 + k_2^2) - \alpha_2(v_R^2 + v_L^2), \\
M_{13}^{+2} =& \frac{1}{2\sqrt{2}}\alpha_3 k_1 v_R e^{i(\theta-\alpha)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} v_L(\beta_1 k_2 + 2\beta_2 k_1 e^{i\alpha}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{14}^{+2} =& \frac{1}{2\sqrt{2}}\alpha_3 k_2 v_L + \frac{1}{2\sqrt{2}} v_R(\beta_1 k_1 e^{i(\theta-\alpha)} + 2\beta_3 k_2 e^{i\theta}), \\
M_{22}^{+2} =& -\mu_1^2 + \lambda_1(k_1^2 + k_2^2) + 2\lambda_4 k_1 k_2 \cos\alpha + \frac{1}{2}\alpha_1(v_R^2 + v_L^2) + \frac{1}{2}\alpha_3 v_L^2, \\
M_{23}^{+2} =& \frac{1}{2\sqrt{2}}\alpha_3 k_2 v_R e^{i\theta} + \frac{1}{2\sqrt{2}} v_L(\beta_1 k_1 e^{i\alpha} + 2\beta_3 k_2), \\
M_{24}^{+2} =& \frac{1}{2\sqrt{2}}\alpha_3 k_1 v_L e^{i\alpha} - \frac{1}{2\sqrt{2}} v_R\left(\beta_1 k_2 e^{i\theta} + 2\beta_2 k_1 e^{i(\theta-\alpha)}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{33}^{+2} =& -\mu_3^2 + \frac{1}{2}\alpha_1(k_1^2 + k_2^2) + 2\alpha_2 k_1 k_2 \cos\alpha + \frac{1}{4}\alpha_3(k_1^2 + k_2^2) + \rho_1 v_R^2 + \frac{1}{2}\rho_3 v_L^2, \\
M_{34}^{+2} =& \frac{1}{4}\beta_1(k_1^2 + k_2^2) + \frac{1}{2}\left(\beta_2 e^{-i\alpha} + \beta_3 e^{i\alpha}\right) k_1 k_2, \\
M_{44}^{+2} =& -\mu_3^2 + \frac{1}{2}\alpha_1(k_1^2 + k_2^2) + 2\alpha_2 k_1 k_2 \cos\alpha + \frac{1}{4}\alpha_3(k_1^2 + k_2^2) + \rho_1 v_L^2 + \frac{1}{2}\rho_3 v_R^2.
\end{aligned}
\tag{F-2}
$$

Matriz de masa para los bosones dos veces cargados

Las componentes de la matriz de masa hermítica en la base $\left\{\delta_R^{++}, \delta_L^{++}\right\}$, para los bosones escalares doblemente cargados son

$$
\begin{aligned}
M_{11}^{++2} =& -\mu_3^2 + \frac{1}{2}\alpha_1(k_1^2 + k_2^2) + 2\alpha_2 k_1 k_2 \cos\alpha + \frac{1}{2}\alpha_3 k_1^2 + (\rho_1 + 2\rho_2)v_R^2 + \frac{1}{2}\rho_3 v_L^2, \\
M_{12}^{++2} =& 2\rho_4 v_L v_R e^{i\theta} + \frac{1}{2}\beta_1 k_1 k_2 e^{i\alpha} + \frac{1}{2}\beta_2 k_2^2 + \frac{1}{2}\beta_3 k_1^2 e^{2i\alpha}, \\
M_{22}^{++2} =& -\mu_3^2 + \frac{1}{2}\alpha_1(k_1^2 + k_2^2) + 2\alpha_2 k_1 k_2 \cos\alpha + \frac{1}{2}\alpha_3 k_1^2 + (\rho_1 + 2\rho_2)v_L^2 + \frac{1}{2}\rho_3 v_R^2.
\end{aligned}
$$

G. Anexo: MSS tipo III en el M2DH-III

Diagonalización de las matrices de masa para leptones neutros y cargados

Generamos la siguiente matriz de masa para el neutrino

$$-\mathcal{L}_Y^{\nu} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \overline{\nu_{Li}^{\prime c}} & \overline{\Sigma_{Ri}^{\prime 0}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & v_2\left(\eta_{ij}^{\Sigma}\right)^T/\sqrt{2} \\ v_2\eta_{ij}^{\Sigma}/\sqrt{2} & M_{ij}^{\Sigma} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_{Lj}^{\prime} \\ \Sigma_{Rj}^{\prime 0} \end{pmatrix} + h.c. \qquad \text{(G-1)}$$

y la siguiente matriz de masa para los leptones cargados

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^{l} &= \begin{pmatrix} \overline{e_{Ri}^{\prime}} & \overline{\Sigma_{Ri}^{\prime -}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1\eta_{ij}^{E}/\sqrt{2} & 0 \\ v_2\eta_{ij}^{\Sigma} & M_{ij}^{\Sigma} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_{Lj} \\ \Sigma_{Ri}^{\prime +c} \end{pmatrix} + h.c, \\ &= \begin{pmatrix} \overline{e_{Ri}^{\prime}} & \overline{\Sigma_{Ri}^{\prime -}} \end{pmatrix} M_{\alpha}^{LC}\begin{pmatrix} e_{Lj}^{\prime} \\ \Sigma_{Ri}^{\prime +c} \end{pmatrix} + h.c. \end{aligned} \qquad \text{(G-2)}$$

Con el fin de diagonalizar la matriz de masa M_{α}^{LC} para los leptones cargados, tanto los que constituyen el doblete leptónico del MEE como los del triplete de Majorana, se desarrollará por medio de la transformación unitaria. Al imponer la simetría Z_2, la masa del neutrino dependerá únicamente de uno de los VEV v_2, mientras en el caso de la matriz de masa para los leptones cargados, ambos dobletes de acoplan para dotarle masa a los leptones del MEE, el valor de v_2 está determinado por la escala de masa del neutrino y es independiente de la escala de masa de los demás fermiones, por lo tanto, los valores de la matriz de masa del neutrino puede ser pequeña, sin reducir el valor de las constantes de acoplamiento de Yukawa.
La matriz (G-1), 6×6 puede ser diagonalizada dejando 3 neutrinos livianos y 3 neutrinos pesados de Majorana. La matriz unitaria 6×6, U esta definida por

$$\mathbf{U^T}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{m_D^T} \\ \mathbf{m_D^T} & \mathbf{M_{\Sigma}} \end{pmatrix}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{m^{diag}} & 0 \\ 0 & \mathbf{M^{diag}} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \nu_{\mathbf{L}} \\ \mathbf{\Sigma_R^{0C}} \end{pmatrix} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \nu_{\mathbf{L}}^{\prime} \\ \mathbf{\Sigma_R^{\prime 0C}} \end{pmatrix}, \qquad \text{(G-3)}$$

donde $\mathbf{m_D} = v_2\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{\Sigma}}/\sqrt{2}$. Cada uno de las componentes son vectores de la forma

$$\nu^{\prime}{}_L = \begin{pmatrix} \nu_{\alpha_1 L}^{\prime} \\ \nu_{\alpha_2 L}^{\prime} \\ \nu_{\alpha_3 L}^{\prime} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{\Sigma}_R^{\prime 0C} = \begin{pmatrix} \Sigma_{s_1 RR}^{\prime 0c} \\ \Sigma_{s_2 R}^{\prime 0c} \\ \Sigma_{s_3 R}^{\prime 0c} \end{pmatrix}, \qquad \text{(G-4)}$$

por lo que existirán 3 campos activos $\nu'_{\alpha_i L}$ (α_3 sabores correspondientes) y se incluirán 3 campos estériles $\Sigma^{0'}_{sR}$

$$\mathbf{m^{diag}} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M^{diag}} = \begin{pmatrix} m_{\Sigma 1} & 0 & 0 \\ 0 & m_{\Sigma 2} & 0 \\ 0 & 0 & m_{\Sigma 3} \end{pmatrix}. \tag{G-5}$$

Aquí $\mathbf{m_i}$ y $\mathbf{M_{\Sigma i}}$ ($i = 1, 2, 3$) son las masas de los neutrinos de Majorana livianos y pesados respectivamente. Dado que hemos cambiado la base a estados con masas definidas, entonces la matriz de mezcla U puede ser parametrizada como el productos de dos submatrices

$$\mathbf{U} = \mathbf{W}_\nu \mathbf{U}_\nu, \tag{G-6}$$

donde $\mathbf{W}_\nu$ es la matriz (G-1), 6×6, diagonal por bloques de la forma

$$\mathbf{W}_\nu^{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{m_D^T} \\ \mathbf{m_D^T} & \mathbf{M_\Sigma} \end{pmatrix} \mathbf{W}_\nu = \begin{pmatrix} \mathbf{M_{lig}} & 0 \\ 0 & \mathbf{M_{pes}} \end{pmatrix}, \tag{G-7}$$

con $(\mathbf{m_D})_{kj} \ll (\mathbf{M^\Sigma})_{kj}$, mientras que $\mathbf{U}_\nu$ diagonaliza a $\mathbf{M_{lig}}$ y $\mathbf{M_{Pes}}$

$$\mathbf{U}_\nu^{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{M_{lig}} & 0 \\ 0 & \mathbf{M_{Pes}} \end{pmatrix} \mathbf{U}_\nu = \begin{pmatrix} \mathbf{m^{diag}} & 0 \\ 0 & \mathbf{M^{diag}} \end{pmatrix}. \tag{G-8}$$

La parametrización anterior permite estimar analíticamente los auto valores de masa y la matriz de mezcla $\mathbf{U}$ en términos de $\mathbf{W}_\nu$ y $\mathbf{U}_\nu$. La matriz puede ser parametrizada como

$$\mathbf{W}_\nu = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{B}\mathbf{B}^\dagger} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^\dagger & \sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{B}^\dagger\mathbf{B}} \end{pmatrix}, \tag{G-9}$$

donde B es una matriz 3×3, $B = B_1 + B_2 + B_3 + ...$ y $B_j \sim (1/m_\Sigma)^j$, siendo m_Σ la escala de masa del fermion de Majorana pesado. Usando una expansión en $1/m_\Sigma$ y conservando únicamente términos de primer orden, obtenemos

$$(\mathbf{W_L^\nu})^T \mathbf{M_v} \mathbf{W_L^\nu} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{B}^*\mathbf{B^T}} & -\mathbf{B}^* \\ \mathbf{B}^* & \sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{B^T}\mathbf{B}^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{M_D^T} \\ \mathbf{M_D^T} & \mathbf{M_\Sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{B}\mathbf{B}^\dagger} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^\dagger & \sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{B}^\dagger\mathbf{B}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M_{Lig}} = -\mathbf{B}^*\mathbf{M_D}\sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{B}\mathbf{B}^\dagger} - \sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{B}^*\mathbf{B^T}}\mathbf{M_D^T}\mathbf{B}^\dagger + \mathbf{B}^*\mathbf{M_\Sigma}\mathbf{B}^\dagger, \tag{G-10}$$

$$\mathbf{M_{Pes}} = \sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{B^T}\mathbf{B}^*}\mathbf{M_D^T}\mathbf{B} + \mathbf{B^T}\mathbf{M_D^T}\sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{B}^\dagger\mathbf{B}} + \sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{B^T}\mathbf{B}^*}\mathbf{M_\Sigma^T}\sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{B}^\dagger\mathbf{B}}, \tag{G-11}$$

$$0 = -\mathbf{B^T}\mathbf{M_D^T}\mathbf{B}^\dagger + \sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{B^T}\mathbf{B}^*}\mathbf{M_D}\sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{B}^\dagger\mathbf{B}} - \sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{B^T}\mathbf{B}^*}\mathbf{M_\Sigma}\mathbf{B}^\dagger \quad . \tag{G-12}$$

A primer orden la ecuación (G-12) toma la forma

$$\mathbf{M_D} - \mathbf{M_\Sigma}\mathbf{B_1^\dagger} = 0. \tag{G-13}$$

Resolviendo para B_1

$$\mathbf{B_1} = \mathbf{M_D^\dagger M_\Sigma^{-1\dagger}}, \tag{G-14}$$

dejando

$$\begin{aligned}
\mathbf{M_{Lig}} &\approx -\mathbf{B_1^* M_D} - \mathbf{M_D^T B_1^\dagger} + \mathbf{B_1^* M_\Sigma B_1^\dagger} \\
&= -\mathbf{M_D^T M_\Sigma^{-1T} M_D} - \mathbf{M_D^T M_\Sigma^{-1} M_D} + \mathbf{M_D^T M_\Sigma^{-1T} M_\Sigma M_\Sigma^{-1} M_D} \\
&= -\mathbf{M_D^T M_\Sigma^{-1} M_D}, \qquad \text{(G-15)} \\
\mathbf{M_{Pes}} &\approx \mathbf{M_\Sigma} + \mathbf{M_D^T B_1} + \mathbf{B_1^T M_D^T} \\
&= \mathbf{M_\Sigma} + \mathbf{M_D^T M_D^\dagger M_\Sigma^{-1\dagger}} + \mathbf{M_\Sigma^{-1*} M_D^* M_D^T} \\
&\approx \mathbf{M_\Sigma}, \qquad \text{(G-16)}
\end{aligned}$$

las matrices de masa de los neutrinos pesados y livianos, son obtenidas mediante diagonalizacion por bloques

$$\begin{aligned}
\mathbf{M_{Lig}} &\approx -\mathbf{M_D^T M_\Sigma^{-1} M_D}, \\
\mathbf{M_{Pes}} &\approx \mathbf{M_\Sigma}.
\end{aligned} \tag{G-17}$$

Con el fin de diagonalizar la matriz de masa M_α para los leptones cargados, tanto los que constituyen el doblete leptónico del MEE como los del triplete d Majorana, por medio de la transformación biunitaria

$$\mathbf{W_R^\dagger M_\alpha^{LC} W_L} = \mathbf{M_\alpha^D} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{M_l^D} & 0 \\ 0 & \mathbf{M_T^D} \end{pmatrix}, \tag{G-18}$$

se utilizaran matrices unitarias similares a las utilizadas en la diagonalizaón de la matriz de leptones neutros, por lo que se tendrá (G-2)

$$\mathbf{W_L} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{1 - B_L B_L^\dagger}} & \mathbf{B_L} \\ -\mathbf{B_L^\dagger} & \sqrt{\mathbf{1 - B_L^\dagger B_L}} \end{pmatrix}, \mathbf{W_R} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{1 - B_R B_R^\dagger}} & \mathbf{B_R} \\ -\mathbf{B_R^\dagger} & \sqrt{\mathbf{1 - B_R}} \end{pmatrix}. \tag{G-19}$$

Mediante la definición de las siguientes matrices

$$\mathbf{M_{DT}} = v_2 \eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{\Sigma}}, \quad \mathbf{M_L} = \frac{v_1}{\sqrt{2}} \eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{E}}, \tag{G-20}$$

al diagonalizar de la matriz M_α^{LC}, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{1 - B_R^\dagger B_R}} & -\mathbf{B_R} \\ \mathbf{B_R^\dagger} & \sqrt{\mathbf{1 - B_R B_R^\dagger}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{M_L} & 0 \\ \mathbf{M_{DT}} & \mathbf{M_\Sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{1 - B_L B_L^\dagger}} & \mathbf{B_L} \\ -\mathbf{B_L^\dagger} & \sqrt{\mathbf{1 - B_L^\dagger B_L}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{M_L^{Diag}} & 0 \\ 0 & \mathbf{M_\Sigma^{Diag}} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{G-21}$$

encontrándose las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
\mathbf{M_L^{Diag}} &= \sqrt{\mathbf{1 - B_R^\dagger B_R}}\mathbf{M_L}\sqrt{\mathbf{1 - B_L B_L^\dagger}} - \mathbf{B_R M_{DT}}\sqrt{\mathbf{1 - B_L B_L^\dagger}} + \mathbf{B_R M_\Sigma B_L^\dagger}, \\
\mathbf{M_\Sigma^{Diag}} &= \mathbf{B_R^\dagger M_l B_L} + \sqrt{\mathbf{1 - B_R B_R^\dagger}}\mathbf{M_{DT} B_L} + \sqrt{\mathbf{1 - B_R B_R^\dagger}}\mathbf{M_\Sigma}\sqrt{\mathbf{1 - B_L^\dagger B_L}}, \\
0 &= \mathbf{B_R^\dagger M_l}\sqrt{\mathbf{1 - B_R B_R^\dagger}} + \sqrt{\mathbf{1 - B_R^\dagger B_R}}\mathbf{M_{DT}}\sqrt{\mathbf{1 - B_L B_L^\dagger}} - \sqrt{\mathbf{1 - B_R B_R^\dagger}}\mathbf{M_L B_L^\dagger}, \\
0 &= \sqrt{\mathbf{1 - B_R^\dagger B_R}}\mathbf{M_L B_L} - \mathbf{B_R M_{DT} B_L} + \mathbf{B_R M_\Sigma}\sqrt{\mathbf{1 - B_R^\dagger B_L}}. \qquad \text{(G-22)}
\end{aligned}$$

Las dos últimas ecuaciones se pueden resolver si se asume que las matrices B_R, B_L se pueden escribir como una serie de potencias de $\mathbf{M_\Sigma^{-1}}$, tal que

$$\mathbf{B_{R,L}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{B_{R,L}^k} \qquad \mathbf{B_{R,L}^k} \propto \frac{1}{\mathbf{M_\Sigma^k}}, \qquad \text{(G-23)}$$

de esta manera, tomando hasta el primer orden de las dos últimas ecuaciones (G-22), se encuentra

$$\begin{aligned}
\mathbf{M_l B_L^1} - \mathbf{B_R^1 M_\Sigma} &= 0, && \text{(G-24)} \\
\mathbf{B_R^{1\dagger} M_l} - \mathbf{M_{DT}} - \mathbf{M_L B_L^{1\dagger}} &= 0. && \text{(G-25)}
\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación (G-24) para B_R^1

$$\mathbf{B_R^1} = \mathbf{M_L B_L^1 M_\Sigma^{-1}}, \qquad \text{(G-26)}$$

reemplazando en (G-25) y despreciando el término de orden M_Σ^{-2}, se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{B_L^1} &= \mathbf{M_{DT}^\dagger M_\Sigma^{-1\dagger}}, && \text{(G-27)} \\
\mathbf{B_R^1} &= \mathbf{M_L M_{DT}^\dagger M_\Sigma^{-1\dagger} M_\Sigma^{-1}}. && \text{(G-28)}
\end{aligned}$$

Luego, las matrices que conforman la diagonal corresponderán, a primer orden, a

$$\begin{aligned}
\mathbf{M_L^{Diag}} &= \sqrt{\mathbf{1 - B_R B_R^\dagger}}\mathbf{M_L}\sqrt{\mathbf{1 - B_L B_L^\dagger}} - \mathbf{B_R M_{DT}}\sqrt{\mathbf{1 - B_L B_L^\dagger}} + \mathbf{B_R M_\Sigma B_L^\dagger} \\
&\approx \mathbf{M_L} - \mathbf{B_R^1 M_{DT}} + \mathbf{B_R^1 M_\Sigma B_L^{1\dagger}} \\
&= \mathbf{M_L} - \mathbf{M_L M_{DT}^\dagger M_\Sigma^{-1} M_{DT}} + \mathbf{M_L M_{DT}^\dagger M_\Sigma^{-1\dagger} M_\Sigma^{-1} M_{DT}} \\
&= \frac{v_1}{\sqrt{2}}\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{E}}, \qquad \text{(G-29)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M_\Sigma^{Diag}} &= \mathbf{B_R^\dagger M_L B_L} + \sqrt{\mathbf{1 - B_R B_R^\dagger}}\mathbf{M_{DT} B_L} + \sqrt{\mathbf{1 - B_R B_R^\dagger}}\mathbf{M_\Sigma}\sqrt{\mathbf{1 - B_L B_L^\dagger}} \\
&\approx \mathbf{B_R^{1\dagger} M_L B_L^1} - \mathbf{M_{DT} B_L^1} + \mathbf{M_\Sigma} \\
&\approx \mathbf{M_\Sigma} - \mathbf{M_{DT} M_\Sigma^{-1} M_{DT}}. \qquad \text{(G-30)}
\end{aligned}$$

Ya que $(\mathbf{m_D})_{kj} \ll (\mathbf{M^{\Sigma}})_{kj}$ a primer orden en la expanción, entonces

$$\mathbf{M_{\Sigma}^{Diag}} = \mathbf{M_{\Sigma}}, \tag{G-31}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{W_L} &\approx \begin{pmatrix} \mathbf{1} - \frac{1}{2}\mathbf{B_L^1}\mathbf{B_L^{1\dagger}} & \mathbf{B_L^1} \\ -\mathbf{B_L^{1\dagger}} & \mathbf{1} - \frac{1}{2}\mathbf{B_L^{1\dagger}}\mathbf{B_L^1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{1} - \frac{v_2^2}{2}\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{\Sigma}\dagger}\left(\mathbf{M_\Sigma}\mathbf{M_\Sigma^\dagger}\right)^{-1}\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{\Sigma}} & v_2\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{\Sigma}\dagger}\left(\mathbf{M_\Sigma^\dagger}\right)^{-1} \\ -v_2\mathbf{M_\Sigma^{-1}}\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{\Sigma}} & \mathbf{1} - \frac{v_2^2}{2}\mathbf{M_\Sigma^{-1}}\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{\Sigma}}\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{\Sigma}\dagger}\mathbf{M_\Sigma^{\dagger-1}} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{G-32}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{W_R} &\approx \begin{pmatrix} \mathbf{1} - \frac{1}{2}\mathbf{B_R^1}\mathbf{B_R^{1\dagger}} & \mathbf{B_R^1} \\ -\mathbf{B_R^{1\dagger}} & \mathbf{1} - \frac{1}{2}\mathbf{B_R^{1\dagger}}\mathbf{B_R^1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \frac{v_1 v_2}{\sqrt{2}}\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{E}}\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{\Sigma}\dagger}\left(\mathbf{M_\Sigma^\dagger}\right)^{-1}\mathbf{M_\Sigma^{-1}} \\ -\frac{v_1 v_2}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{M_\Sigma^\dagger}\right)^{-1}\mathbf{M_\Sigma^{-1}}\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{\Sigma}}\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{E}\dagger} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{G-33}$$

H. Anexo: Neutrinos masivos caso singlete-triplete de Majorana

MSS con singlete y triplete de Majorana

La diagonalización de la matriz de masa 9×9, debido a la existencia simultánea del singlete y del triplete de Majorana.

$$\mathbf{M_{LEP}} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & \vdots & \left(\frac{\eta^{\mathbf{N}}_{\mathbf{ij}} v_1 + \xi^{\mathbf{N}}_{\mathbf{ij}} v_2}{\sqrt{2}}\right)^T & \left(\frac{\eta^{\mathbf{\Sigma}}_{\mathbf{ij}} v_2}{\sqrt{2}}\right)^T \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{\eta^{\mathbf{N}}_{\mathbf{ij}} v_1 + \xi \mathbf{N}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{ij}} v_2}{\sqrt{2}}\right) & \vdots & \mathbf{m_R} & 0 \\ \frac{\eta^{\mathbf{\Sigma}}_{\mathbf{ij}} \mathbf{v_2}}{\sqrt{2}} & \vdots & 0 & \mathbf{M_\Sigma} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & M_D^T \\ M_D & M_{\nu\Sigma} \end{array} \right), \tag{H-1}$$

siendo

$$\mathbf{M_D} \equiv \left(\begin{array}{c} \left(\frac{\eta^{\mathbf{N}}_{\mathbf{ij}} v_1 + \xi \mathbf{N}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{ij}} v_2}{\sqrt{2}}\right) \\ \frac{\eta^{\mathbf{\Sigma}}_{\mathbf{ij}} \mathbf{v_2}}{\sqrt{2}} \end{array} \right), \qquad \mathbf{M_{\nu\Sigma}} \equiv \left(\begin{array}{cc} \mathbf{m_R} & 0 \\ 0 & \mathbf{M_\Sigma} \end{array} \right), \tag{H-2}$$

matrices de 6×3 y 6×6, respectivamente, es evidente que $M_{\nu\Sigma}$ es diagonal por bloques, se podría pensar en una diagonalización por bloques, de un tipo similar al utilizado cuando se consideraba singlete y triplete de manera separada, es decir

$$\mathbf{W_\nu^T} \mathbf{M_{LEP}} \mathbf{W}_\nu = \mathbf{M}_\nu^{\mathbf{D}} = \left(\begin{array}{cc} \mathbf{M_{lig}} & 0 \\ 0 & \mathbf{M_{Pes}} \end{array} \right), \tag{H-3}$$

donde $\mathbf{M_{Pes}}$ es una matriz 6×6 correspondiente a los campos de neutrino pesados. Además la matriz unitaria $\mathbf{W}_\nu$ de 9×9 se tomará como

$$\mathbf{W}_\nu = \left(\begin{array}{cc} \sqrt{\mathbf{1_{3\times 3}} - \mathbf{B}\mathbf{B}^\dagger} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^\dagger & \sqrt{\mathbf{1_{6\times 6}} - \mathbf{B}^\dagger\mathbf{B}} \end{array} \right) \tag{H-4}$$

siendo $\mathbf{B}$ una matriz 3×6.Por otro lado, la elección de esta matriz simplemente surge del hecho de considerar una partición conformante[1], que permitirá diagonalizar la matriz de masa

[1]Partición en bloques que permite que todos lo subproductos de la multiplicación con otra matriz en bloques estén bien definidos

de manera similar a los casos mostrados anteriormente; Así, operando (H-3), se encontraran las siguientes relaciones:

$$\mathbf{M_{Lig}} = -\mathbf{B^*M_D}\sqrt{\mathbf{1_{n\times n}} - \mathbf{BB^\dagger}} - \sqrt{\mathbf{1_{n\times n}} - \mathbf{B^*B^T}}\mathbf{M_D^T B^\dagger} + \mathbf{B^* M_{\nu\Sigma} B^\dagger}, \tag{H-5}$$

$$\mathbf{M_{Pes}} = \sqrt{\mathbf{1_{6\times 6}} - \mathbf{B^TB^*}}\mathbf{M_D^T B} + \mathbf{B^T M_D^T}\sqrt{\mathbf{1_{6\times 6}} - \mathbf{B^\dagger B}} + \sqrt{\mathbf{1_{6\times 6}} - \mathbf{B^TB^*}}\mathbf{M_{\nu\Sigma}}\sqrt{\mathbf{1_{6\times 6}} - \mathbf{B^\dagger B}}, \tag{H-6}$$

$$\mathbf{0_{6\times 3}} = -\mathbf{B^* M_D^T B^\dagger} + \sqrt{\mathbf{1_{6\times 6}} - \mathbf{B^TB^*}}\mathbf{M_D}\sqrt{\mathbf{1_{3\times 3}} - \mathbf{B^\dagger B}} - \sqrt{\mathbf{1_{6\times 6}} - \mathbf{B^TB^*}}\mathbf{M_{\nu\Sigma}B^\dagger} \tag{H-7}$$

$$\mathbf{0_{3\times 6}} = -\mathbf{B^* M_D B^\dagger} + \sqrt{\mathbf{1_{3\times 3}} - \mathbf{B^*B^T}}\mathbf{M_D^T}\sqrt{\mathbf{1_{6\times 6}} - \mathbf{B^\dagger B}} - \mathbf{B^* M_{\nu\Sigma}}\sqrt{\mathbf{1_{6\times 6}} - \mathbf{B^TB^*}}, \tag{H-8}$$

las dos últimas ecuaciones se pueden resolver si se supone nuevamente que, B puede expandirse como una serie de potencias de $\mathbf{M_{\nu\Sigma}^{-1}}$ es decir

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{B^k} \qquad \mathbf{B_k} \propto \frac{A}{\mathbf{M_{\nu\Sigma}^k}} \tag{H-9}$$

Siendo $\mathbf{A}$ una matriz desconocida de $n \times 2n$. Por lo tanto, si se toma la expansión hasta primer orden en (H-7), se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{0_{6\times 3}} &= \mathbf{M_D} - \mathbf{M_{\nu\Sigma}B_1^\dagger}, \\ \mathbf{B_1} &= \mathbf{M_D^\dagger M_{\nu\Sigma}^{\dagger -1}}, \end{aligned} \tag{H-10}$$

con lo cual $\mathbf{A} = \mathbf{M_D^\dagger}$. Por lo tanto las matrices de los campos ligeros están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{M_{Lig}} &\approx -\mathbf{B_1^* M_D} - \mathbf{M_D B_1^\dagger} + \mathbf{B_1^* M_{\nu\Sigma} B_1^\dagger} \\ &= -\mathbf{M_D^T M_{\nu\Sigma}^{-1T} M_D} - \mathbf{M_D^T M_{\nu\Sigma}^{-1} M_D} + \mathbf{M_D^T M_{\nu\Sigma}^{-1T} M_{\nu\Sigma} M_{\nu\Sigma}^{-1T} M_D} \\ &= -\mathbf{M_D^T M_{\nu\Sigma}^{-1T} M_D} \\ &= -\left[\left(\frac{\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{N}} v_1 + \xi_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{N}} v_2}{\sqrt{2}}\right)^T \quad \left(\frac{\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{\Sigma}} v_2}{\sqrt{2}}\right)^T\right] \begin{pmatrix} M_R^{-1} & 0 \\ 0 & M_\Sigma^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{N}} v_1 + \xi_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{N}} v_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{\Sigma}} v_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{M_{Lig}} \approx -\left(\frac{\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{N}} v_1 + \xi_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{N}} v_2}{\sqrt{2}}\right)^T \mathbf{M_R^{-1}} \left(\frac{\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{N}} v_1 + \xi_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{N}} v_2}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{\Sigma}} v_2}{\sqrt{2}}\right)^T \mathbf{M_\Sigma^{-1}} \left(\frac{\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{\Sigma}} v_2}{\sqrt{2}}\right), \tag{H-11}$$

por tanto, la matriz de masa de los neutrinos ligeros es igual a la suma de las matrices de masa obtenidas en el estudio del singlete y triplete separadamente. Ahora la matriz de los campos pesados están dados por

$$
\begin{aligned}
M_{Pes} &\approx M_{\nu\Sigma} + M_D B_1 + B_1^T M_D^T \\
&= M_{\nu\Sigma} + M_D M_D^{\dagger} M_{\nu\Sigma}^{-1\dagger} + M_{\nu\Sigma}^{-1*} M_D^* M_D^T \\
&= \begin{pmatrix} M_R & 0 \\ 0 & M_\Sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi N_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right) \\ \frac{\eta_{ij}^\Sigma v_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right)^\dagger & \left(\frac{\eta_{ij}^\Sigma v_2}{\sqrt{2}}\right)^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_R^{\dagger-1} & 0 \\ 0 & M_\Sigma^{\dagger-1} \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} M_R^{*-1} & 0 \\ 0 & M_\Sigma^{*-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{N}} v_1 + \xi_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{N}} v_2}{\sqrt{2}}\right)^* \\ \left(\frac{\eta_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{\Sigma}} v_2}{\sqrt{2}}\right)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right)^T & \left(\frac{\eta_{ij}^\Sigma v_2}{\sqrt{2}}\right)^T \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} M_R & 0 \\ 0 & M_\Sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi N_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi N_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right)^\dagger M_R^{\dagger-1} & \left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi N_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\eta_{ij}^\Sigma v_2}{\sqrt{2}}\right)^T M_\Sigma^{\dagger-1} \\ \left(\frac{\eta_{ij}^\Sigma v_2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi N_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right)^\dagger M_\Sigma^{\dagger-1} & \left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi N_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\eta_{ij}^\Sigma v_2}{\sqrt{2}}\right)^T M_\Sigma^{\dagger-1} \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} M_R^{*-1}\left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi N_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right)^*\left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi N_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right)^T & M_R^{*-1}\left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi N_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right)^*\left(\frac{\eta_{ij}^\Sigma v_2}{\sqrt{2}}\right)^T \\ M_\Sigma^{*-1}\left(\frac{\eta_{ij}^\Sigma v_2}{\sqrt{2}}\right)^*\left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi N_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right)^\dagger & M_\Sigma^{*-1}\left(\frac{\eta_{ij}^N v_1 + \xi N_{ij}^N v_2}{\sqrt{2}}\right)^*\left(\frac{\eta_{ij}^\Sigma v_2}{\sqrt{2}}\right)^T \end{pmatrix} \\
&\approx \begin{pmatrix} M_R & 0 \\ 0 & M_\Sigma \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{H-12}
$$

resultado evidente que los campos pesados están desacoplados a primer orden, lo cual es una buena aproximación.

I. Anexo: Oscilaciones de Neutrinos en el Vacío desde la Mecánica Cuántica

Para considerar la evolución de una partícula relativista se hacemos uso de la solución de partícula con energí positiva ($E > 0$) de la ecuación de Dirac

$$\left(\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{p} + \beta m_k\right) \nu_k(t) = \left(\sqrt{p^2 + m_k^2}\right) \nu_k(t), \tag{I-1}$$

al considerar la propagación de los neutrinos en una sola dirección espacial, la ecuación de Dirac de la siguiente manera

$$i\frac{\partial \nu_k}{\partial t} = \left(\alpha_x p + \beta m_k\right) v_k, \tag{I-2}$$

recordando que los neutrinos son partículas relativistas, el segundo término se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{p} + \beta m_k\right) \nu_k(t) &= \left(\sqrt{p^2 + m_k^2}\right) \nu_k(t) \\ \left(\alpha_x p + \beta m_k\right) v_k(t) &\simeq \left(p + \frac{m_k^2}{2p}\right) \nu_k(t) \\ \left(\alpha_x p\right) \nu_k(t) &\simeq \left(p + \frac{m_k^2}{2p} - \beta m_k\right) \nu_k(t), \end{aligned} \tag{I-3}$$

Reemplazando esta ultima expresión en I-1 se obtiene una forma similar a la ecuación de Schrodinger

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \nu_k}{\partial t} &= \left(\alpha_x p + \beta m_k\right) v_k \\ &= \left(p + \frac{m_k^2}{2p} - \beta m_k + \beta m_k\right) \nu_k \\ &= \left(E + \frac{m_k^2}{2E}\right) \nu_k \\ &= H_k^{vac} \nu_k, \end{aligned} \tag{I-4}$$

Para el caso de dos sabores, esta última ecuación se puede escribir de forma matricial así

$$
\begin{aligned}
i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}E_1 & 0\\ 0 & E_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}E+\frac{m_1^2}{2E} & 0\\ 0 & E+\frac{m_2^2}{2E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix}\\
&= \left[\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}+\frac{1}{2E}\begin{pmatrix}m_1^2 & 0\\ 0 & m_2^2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix}\\
&= \left[E\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{1}{4E}\begin{pmatrix}2m_1^2 & 0\\ 0 & 2m_2^2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix}\\
&= \left[EI+\frac{1}{4E}\begin{pmatrix}m_2^2+m_1^2 & 0\\ 0 & m_2^2+m_2^2\end{pmatrix}-\frac{1}{4E}\begin{pmatrix}m_2^2-m_1^2 & 0\\ 0 & m_2^2-m_2^2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix}\\
&= \left[EI+\frac{m_2^2+m_1^2}{4E}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\frac{m_2^2-m_1^2}{4E}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix}\\
&= \left[EI+\frac{\sum_\nu}{4E}I-\frac{\triangle_\nu}{4E}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{I-5}
$$

la anterior expresión se puede escribir, dejando a un lado los términos proporcionales a la matriz identidad y teniendo en cuenta el hecho de que $t \approx x$

$$
\begin{aligned}
i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix} &= \left[-\frac{\triangle_\nu}{4E}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix}\\
&= H_k^{vac}\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix}, \qquad \text{(I-6)}
\end{aligned}
\tag{I-7}
$$

pasando de la base de auto estados de masa a la base de los auto estados de interacción, esto es debido al hecho que los neutrinos son producidos en procesos de interacción débil los cuales corresponden a auto estados de interacción. En el caso de dos familias se tiene

$$
\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\end{pmatrix} = U\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix}, \tag{I-8}
$$

en donde la matriz de mezcla tiene la forma

$$
U = \begin{pmatrix}\cos\theta_\nu & \sin\theta_\nu\\ -\sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu\end{pmatrix}, \tag{I-9}
$$

donde I-6 adquiere la forma

$$\begin{aligned}
i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} &= H_k^{vac}\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \\
i\frac{d}{dt}U^\dagger\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} &= H_k^{vac}U^\dagger\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \\
i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} &= UH_k^{vac}U^\dagger\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \\
i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} &= H_l^{vac}\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{I-10}$$

siendo

$$\begin{aligned}
H_l^{vac} &= UH_k^{vac}U^\dagger = \begin{pmatrix} \cos\theta_\nu & \sin\theta_\nu \\ -\sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu \end{pmatrix}\left[-\frac{\triangle_\nu}{4E}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \cos\theta_\nu & -\sin\theta_\nu \\ \sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu \end{pmatrix} \\
&= -\frac{\triangle_\nu}{4E}\begin{pmatrix} \cos\theta_\nu & \sin\theta_\nu \\ -\sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_\nu & -\sin\theta_\nu \\ \sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu \end{pmatrix} \\
&= -\frac{\triangle_\nu}{4E}\begin{pmatrix} \cos\theta_\nu & \sin\theta_\nu \\ -\sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_\nu & -\sin\theta_\nu \\ -\sin\theta_\nu & -\cos\theta_\nu \end{pmatrix} \\
&= -\frac{\triangle_\nu}{4E}\begin{pmatrix} \cos^2\theta_\nu - \sin^2\theta_\nu & -2\cos\theta_\nu\sin\theta_\nu \\ -2\cos\theta_\nu\sin\theta_\nu & \sin^2\theta_\nu - \cos^2\theta_\nu \end{pmatrix} \\
&= -\frac{\triangle_\nu}{4E}\begin{pmatrix} \cos 2\theta_\nu & -\sin 2\theta_\nu \\ -\sin 2\theta_\nu & -\cos 2\theta_\nu \end{pmatrix} \\
&= \frac{\triangle_\nu}{4E}\begin{pmatrix} -\cos 2\theta_\nu & \sin 2\theta_\nu \\ \sin 2\theta_\nu & \cos 2\theta_\nu \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{I-11}$$

J. Anexo: Funciones Especiales

LA FUNCIÓN GAMMA

La función gamma está definida como

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0)\ , \tag{J-1}$$

haciendo un cambio de variable $t \to t^2$ tal que $dt \to 2tdt$

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2x-1} dt, \tag{J-2}$$

Ahora Consideramos siguiente integral doble,

$$I = \iint_R e^{-t^2-w^2} t^{2x-1} w^{2y-1} dtdw,$$

donde R es la región del espacio representada por el primer cuadrante $t - w$ en un plano cartesiano,
Expandiendo parcialmente

$$\begin{aligned} I &= \int_{t=0}^{t=\infty} \int_{w=0}^{w=\infty} e^{-t^2-w^2} t^{2x-1} w^{2y-1} dtdw \\ &= \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-t^2} t^{2x-1} dt \int_{w=0}^{w=\infty} e^{-w^2} w^{2y-1} dw. \end{aligned}$$

Aplicando (J-2), tenemos

$$I = \frac{1}{2}\Gamma\left(x\right).\frac{1}{2}\Gamma\left(y\right) = \frac{1}{4}\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(y\right) \tag{J-3}$$

Similarmente, podríamos realizar un cambio de variable del plano a coordenadas polares r y ξ, tal que $t = r\cos\xi$, $w = r\sin\xi$. entonces $dw = rd\xi$ y $dt = dr$, siendo el elemento de área $dt.dw = r.dr.d\xi$

$$\begin{aligned} I &= \iint_R e^{-r^2\cos^2\xi - r^2\sin^2\xi} \left(r\cos\xi\right)^{2x-1} \left(r\sin\xi\right)^{2y-1} r.dr.d\xi \\ &= \int_{r=0}^{r=\infty} \int_{\xi=0}^{\xi=\pi/2} e^{-r^2} r^{2x-1} \cos^{2x-1}\xi r^{2y-1} \sin^{2y-1}\xi r.dr.d\xi \\ &= \int_{r=0}^{r=\infty} e^{-r^2} r^{2(x+y)-1} dr \int_{\xi=0}^{\xi=\pi/2} \cos^{2x-1}\xi \sin^{2y-1}\xi.d\xi, \end{aligned}$$

de la expresión (J-2), tenemos

$$\Gamma(x+y) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2(x+y)-1} dt, \tag{J-4}$$

entonces

$$I = \frac{1}{2}\Gamma(x+y)\int_{\xi=0}^{\theta=\pi/2} \cos^{2x-1}\xi \sin^{2y-1}\xi . d\xi. \tag{J-5}$$

Si Comparamos (J-3) y (J-5) vemos que

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\xi \sin^{2y-1}\xi . d\xi = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}, \tag{J-6}$$

con $x > 0$ y $y > 0$ debido que en esta región fue definida la función gamma, para hallar $\Gamma(1)$, hacemos $x = 1$ en (J-1)

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty ,$$

tenemos

$$\Gamma(1) = 1, \tag{J-7}$$

análogamente para en $\Gamma(1/2)$, hacemos $x = y = 1/2$ en (J-6)

$$\int_0^{\pi/2} d\xi = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{2\Gamma(1)},$$

y como $\Gamma(1) = 1$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\left[\Gamma(1/2)\right]^2 ,$$

por lo tanto $\Gamma(1/2) = \pm\sqrt{\pi}$, por la definición (J-1) cuando $x > 0$:

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}. \tag{J-8}$$

Volviendo a la definición de la función gamma, ahora para $\Gamma(x+1)$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt,$$

integrando por partes

$$= \left[\left(-e^{-t}\right)t^{x}\right]_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty}\left(-e^{-t}\right)xt^{x-1}dt,$$

$$= 0 + x\int_{0}^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt,$$

debido a los limites de integración el primer término se anula ya que en el límite superior el exponencial domina sobre la función la potencial, y en el límite inferior ya que $x > 0$. Aplicando de nuevo la definición de la función $\Gamma(x)$, la parte derecha en la evaluación de la integral toma la forma

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \tag{J-9}$$

Aplicando esta expresión en forma sucesiva, para $X \in Z$, por ejemplo n, entonces $\Gamma(n+1)$=$n\Gamma(n)$=$n(n-1)\Gamma(n-1)$= $n(n-1)\Gamma(n-1)$=$n(n-1)(n-2)\ldots = n!$, siendo

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{J-10}$$

LA CONSTANTE DE EULER-MASCHERONI

La representación de producto de Weierstrass de la función $\Gamma(z)$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}, \tag{J-11}$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = 0{,}5772157,$$

aplicando logaritmo natural a la expresión (J-11)

$$\ln 1 - \ln\Gamma(z) = -\ln\Gamma(z) = \ln z + \gamma z + \sum_{r=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{z}{r}\right) - \frac{z}{n}\right],$$

seguidamente, derivando con respecto a z

$$-\frac{d\ln\Gamma(z)}{dz} = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r+z} - \frac{1}{r}\right),$$

así, la definición de $\psi_1(z)$ es

$$\psi_1(z) = \frac{d\ln\Gamma(z)}{dz} = \frac{\Gamma\prime(z)}{\Gamma(z)}, \tag{J-12}$$

Por lo tanto

$$\psi_1(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+z}\right),$$

cuando $z = n \in Z$

$$\psi_1(n) = -\gamma - \frac{1}{n} + \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+n}\right) \qquad \psi_1(1) = -\gamma, \tag{J-13}$$

Ahora haciendo una expansión de Taylor de $\Gamma(1+\varepsilon)$ para $\varepsilon \ll 1$

$$\begin{aligned}\Gamma(1+\varepsilon) &= \Gamma(1) + \varepsilon\Gamma\prime(1) + O(\varepsilon^2)\\ &= \Gamma(1) + \varepsilon\Gamma(1)\psi_1(1) + O(\varepsilon^2)\\ &= 1 - \varepsilon\gamma + O(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

de la ecuación (J-9), $z\Gamma(z) = \Gamma(1+z)$, despejando, $\Gamma(\varepsilon) = \Gamma(1+\varepsilon)/\varepsilon$

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon), \tag{J-14}$$

aplicando (J-9) una vez más

$$(-1+\varepsilon)\Gamma(-1+\varepsilon) = \Gamma(-1+\varepsilon+1) = \Gamma(\varepsilon), \tag{J-15}$$

despejando

$$\Gamma(-1+\varepsilon) = \frac{1}{-1+\varepsilon}\Gamma(\varepsilon) = -\left[\frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma + O(\varepsilon)\right].$$

Análogamente

$$\Gamma(-2+\varepsilon) = \frac{1}{-2+\varepsilon}\Gamma(-1+\varepsilon) = \frac{(-1)^2}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon} + \left(1 + \frac{1}{2} - \gamma\right) + O(\varepsilon)\right],$$

generalizando

$$\Gamma(-n+\varepsilon) = \frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{1}{\varepsilon} + \psi_1(n+1) + O(\varepsilon)\right], \tag{J-16}$$

LA FUNCIÓN BETA DE EULER

Por definición, la función beta está dada por

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \quad (x>0) \quad (y>0) \tag{J-17}$$

Realizando un cambio de variable $t = \cos^2 \xi$, con los elementos diferenciales $dt = -2 \cos \xi \sin \xi d\xi$; para que $t = 0$, $\xi = \pi/2$ y para que $t = 1$, $\xi = 0$, con el fin de respetar los limites de integración

$$B(x, y) = -2 \int_{\pi/2}^{0} \left(\cos^2 \xi\right)^{x-1} (\sin^2 \xi)^{y-1} \cos \xi \sin \xi d\xi$$

absorbiendo el signo negativo al intercambiar los limites de integración

$$B(x, y) = 2 \int_{0}^{\pi/2} \cos^{2x-1} \xi \sin^{2y-1} \xi d\xi$$

La expresión corresponde a dos veces la relación (J-6) por lo tanto concluímos que:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)} \tag{J-18}$$

ELEMENTO DIFERENCIAL DE VOLUMEN PARA UNA N-HIPERESFERA

La n-hiperesfera es una generalización para $n \geq 4$ dimensiones, Por lo tanto estará definida a partir de un conjunto de n-tuplas de puntos $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. La ecuación de una hiperesfera de n-dimensiones en coordenadas cartesianas con centro en $(0, 0, \cdots, 0)$ y radio R está dada por

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 = R^2.$$

El contenido el volumen n-dimensional (V_n) de una n-hiperesfera de radio R está dado por

$$V_n = \int_0^R S_n r^{n-1} dr, \tag{J-19}$$

aquí S_n representa el área superficial de una n-hiperesfera de radio unidad que cumple con la condición

$$\begin{aligned} S_n \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2\right)} dx_1 dx_2 \ldots dx_n \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right]^n, \end{aligned}$$

utilizando la definición de la función gamma (J-2) y (J-8)

$$\frac{1}{2} S_n \Gamma(n/2) = [\Gamma(1/2)]^n = \left(\sqrt{\pi}\right)^n = \pi^{n/2},$$

despejando

$$S_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}. \tag{J-20}$$

Realizando las siguientes sustituciones $t = \xi_k$, $y = (k+1)/2$ y $x = 1/2$ en la propiedad (J-6)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\sin\xi_k)^k \, d\xi_k &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} \\
\int_0^{\pi}\prod_{k=1}^{n-2}\sin^k\xi_k d\xi_k &= \prod_{k=1}^{n-2}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)},
\end{aligned}$$

el $1/2$ antes de la integral es debido a que se a duplicado el intervalo de integración (duplicado los limites de integración), por ende ser reduce a la mitad, el valor de de la integral para $x = 1$, $\Gamma(1) = 1$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\prod_{k=1}^{n-2}\sin^k\xi_k d\xi_k &= \left(\sqrt{\pi}\right)^{n-2}\frac{\Gamma(1)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\
&= \frac{\left(\sqrt{\pi}\right)^{n-2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\
2\pi\int_0^{\pi}\prod_{k=1}^{n-2}\sin^k\xi_k d\xi_k &= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \\
\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\prod_{k=1}^{n-2}\sin^k\xi_k d\theta_k &= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} = S_n,
\end{aligned}$$

en donde el valor de 2π, se ha expresado como la integral del ángulo ϕ, de esta manera el volumen de la hiper esfera (J-19) está dado por

$$V_n = \int_0^R S_n r^{n-1}dr = \int_0^R r^{n-1}dr\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\prod_{k=1}^{n-2}\sin^k\xi_k d\xi_k,$$

expandiendo el volumen en forma integral

$$\int\cdots\int d^n r = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^{n-1}dr d\phi\prod_{k=1}^{n-2}\sin^k\xi_k d\xi_k,$$

el elemento de volumen estará dado por

$$d^n r = r^{n-1}dr d\phi\prod_{k=1}^{n-2}\sin^k\xi_k d\xi_k, \tag{J-21}$$

donde el radio $0 < r < R$, la longitud $0 < \phi < 2\pi$ y la colatitud $0 < \xi_k < \pi$.

MÉTODO DE REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL

Cuando evaluamos diagramas de caja, necesitamos evaluar integrales de la forma

$$I_n\left(q\right)=\int\frac{d^np}{\left(p^2+2pq-m^2\right)^{\alpha}}, \tag{J-22}$$

donde $p=(p_0,\overrightarrow{r})$, es un "n-vector" del espacio-tiempo de "Minkowski" n-dimensional, (p_0 es la componente temporal y $\overrightarrow{r}$ es un vector espacial $(n-1)$-dimensional). Escribiendo el momento en coordenadas polares, $(p_0,r,\phi,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-3})$. Tenemos que el elemento infinitesimal de volumen realizar un cambio de variable $r\rightarrow p$ como $dp=(dp_0,d\overrightarrow{r})$, es una n-hiper esfera cuyo radio es p [1], al reemplazar en (J-21), tenemos que

$$d^np=dp_0r^{n-2}drd\phi\prod_{k=1}^{n-3}\sin^k\theta_kd\theta_k, \tag{J-23}$$

con $dp^{n-1}=dp_0dr^{n-2}$, de tal manera que

$$d^np=dp_0r^{n-2}drd\phi\sin\theta_1d\theta_1\sin\theta_2d\theta_2,\ldots,\sin\theta_{n-3}d\theta_{n-3},$$

donde las cotas de las variables se encuentran $-\infty<p_0<\infty$, $0<r<\infty$, $0<\phi<2\pi$, $0<\theta_k<\pi$. Entonces

$$\begin{aligned}I_n\left(q\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}dp_0\int_0^{\infty}r^{n-2}dr\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\frac{\prod_{k=1}^{n-3}\sin^k\theta_kd\theta_k}{\left(p^2+2pq-m^2\right)^{\alpha}}\\ I_n\left(q\right) &= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}dp_0\int_0^{\infty}\frac{r^{n-2}dr}{\left(p^2+2pq-m^2\right)^{\alpha}}\int_0^{\pi}\prod_{k=1}^{n-3}\sin^k\theta_kd\theta_k,\end{aligned} \tag{J-24}$$

de (J-6) y realizándolas siguientes sustituciones $x\rightarrow 1/2$, $y\rightarrow(k+1)/2$ y $\theta\rightarrow\theta_k$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^k\theta_k.d\theta_k=\frac{\Gamma\left(1/2\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{2\Gamma(\frac{k+2}{2})},$$

al realizar los cambios de variables tuvimos que modificar los límites de integración. teniendo en cuenta que $\Gamma(1)=1$ y aplicando (J-8)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\sin^k\theta_k.d\theta_k &= \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma(\frac{k+2}{2})}\\ \int_0^{\pi}\prod_{k=1}^{n-3}\sin^k\theta_k.d\theta_k &= \prod_{k=1}^{n-3}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma(\frac{k+2}{2})}\\ &= \left(\sqrt{\pi}\right)^{n-3}\frac{\Gamma\left(1\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\\ &= \left(\sqrt{\pi}\right)^{n-3}\frac{\Gamma\left(1\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)},\end{aligned}$$

[1]ya que nos encontramos en el espacio de los momentos

ya que $\left(\pi^{1/2}\right)^{n-3}=\pi^{(n-1)/2}\pi^{-1}$, obtenemos

$$2\pi\int_0^{\pi}\prod_{k=1}^{n-3}\sin^k\theta_k.d\theta_k=\frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)},$$

tenemos que la integral (J-24),

$$I_n\left(q\right)=\frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}dp_0\int_0^{\infty}\frac{r^{n-2}dr}{\left(p^2+2pq-m^2\right)^{\alpha}},$$

reemplazamos $p^2=p_0^2-r^2$, lo que conduce a

$$I_n\left(q\right)=\frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}dp_0\int_0^{\infty}\frac{r^{n-2}dr}{\left(p_0^2-r^2+2pq-m^2\right)^{\alpha}}.$$

Esta es una integral invariante "Lorentz", es posible trabajar en el sistema de referencia $q=(\mu,\overrightarrow{0})$. Como $p=(p_0,\overrightarrow{r})$, el término $2p\cdot q=2\left(p_0,\overrightarrow{r}\right)\cdot(\mu,\overrightarrow{0})=2\mu p_0$.

$$I_n\left(\mu\right)=\frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}dp_0\int_0^{\infty}\frac{r^{n-2}dr}{\left(p_0^2+2p_0\mu-r^2-m^2\right)^{\alpha}}.$$

Realizando otro el cambio de variable $p_{\mu}\prime=p_{\mu}+q_{\mu}$, tal que $p\prime^2=p^2+2pq+q^2$, por lo tanto, $p\prime_0^2=p_0^2+2p_0\mu+q_0^2$, de donde $p\prime_0^2-q_0^2=p_0^2+2p_0\mu$, tenemos

$$\begin{aligned}I_n\left(q_0\right)&=\frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}dp\prime_0\int_0^{\infty}\frac{r^{n-2}dr}{\left(p\prime_0^2-2p_0\mu-q_0^2+2p_0\mu-r^2-m^2\right)^{\alpha}}\\&=\frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}dp\prime_0\int_0^{\infty}\frac{r^{n-2}dr}{\left(p\prime_0^2-q_0^2-r^2-m^2\right)^{\alpha}},\end{aligned}\tag{J-25}$$

utilizamos la función beta Euler (J-18), con las respectivas sustituciones $x\to\left(1+\beta\right)/2$, $y\to\alpha-\left(1+\beta\right)/2$ y $t\to s/M$ en (C.19):

$$\begin{aligned}2\int_0^{\infty}\left(\frac{s}{M}\right)^{\beta}\left(1+\frac{s^2}{M^2}\right)^{-\alpha}\frac{ds}{M}&=\frac{\Gamma\left(\frac{1+\beta}{2}\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{1+\beta}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\\2\int_0^{\infty}\frac{s^{\beta}}{M^{1+\beta}}\left(\frac{s^2+M^2}{M^2}\right)^{-\alpha}ds&=\frac{\Gamma\left(\frac{1+\beta}{2}\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{1+\beta}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\\2\int_0^{\infty}\frac{s^{\beta}M^{2\alpha-(1+\beta)}}{\left(s^2+M^2\right)^{\alpha}}ds&=\frac{\Gamma\left(\frac{1+\beta}{2}\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{1+\beta}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)},\end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{s^{\beta}}{\left(s^2+M^2\right)^{\alpha}}ds=\frac{\Gamma\left(\frac{1+\beta}{2}\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{1+\beta}{2}\right)}{2\left(M^2\right)^{\alpha-(1+\beta)/2}\Gamma(\alpha)},\tag{J-26}$$

identificando $\beta \to n-2$, $M^2 \to -p\prime_0^2 + q_0^2 + m^2$ y $s \to r$, tenemos

$$\int_0^\infty \frac{r^{n-2}dr}{\left(r^2 - p\prime_0^2 + q_0^2 + m^2\right)^\alpha} = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha - \frac{n-1}{2}\right)}{2\left(-p\prime_0^2 + q_0^2 + m^2\right)^{\alpha-(n-1)/2}\Gamma(\alpha)}.$$

Para que tome la forma de la ecuación (J-25) multiplicamos y dividimos por $(-1)^\alpha$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{(-1)^\alpha r^{n-2}dr}{(-1)^\alpha\left(r^2 - p\prime_0^2 + q_0^2 + m^2\right)^\alpha} &= \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha - \frac{n-1}{2}\right)}{2(-1)^{\alpha-(n-1)/2}\left(p\prime_0^2 - q_0^2 - m^2\right)^{\alpha-(n-1)/2}\Gamma(\alpha)} \\
\int_0^\infty \frac{r^{n-2}dr}{\left(p\prime_0^2 - q_0^2 - r^2 - m^2\right)^\alpha} &= \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha - \frac{n-1}{2}\right)}{2(-1)^{2\alpha-(n-1)/2}\left(p\prime_0^2 - q_0^2 - m^2\right)^{\alpha-(n-1)/2}\Gamma(\alpha)},
\end{aligned}$$

Reemplazando en la integral (J-25):

$$I_n(q_0) = \frac{(-1)^{(n-1)/2-2\alpha}\,\pi^{(n-1)/2}\Gamma\left(\alpha - \frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^\infty \frac{dp\prime_0}{\left(p\prime_0^2 - q_0^2 - m^2\right)^{\alpha-(n-1)/2}},$$

Para resolver esta integral, hacemos uso de (J-26) teniendo en cuenta las siguientes sustituciones: $\alpha \to \alpha - (n-1)/2$, $\beta \to 0$, $M^2 = -q_0^2 - m^2$, $s = p\prime_0$ da

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dp\prime_0}{\left(p\prime_0^2 - q_0^2 - m^2\right)^{\alpha-(n-1)/2}} = \frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(\alpha - n/2)}{2\left(-q_0^2 - m^2\right)^{\alpha-n/2}\Gamma(\alpha - \frac{n-1}{2})},$$

donde se han cambiado los límites de integración. Sustituyendo este resultado en la última integral $I_n(q_0)$

$$I_n(q_0) = \frac{(-1)^{(n-1)/2-2\alpha}\,\pi^{(n-1)/2}\Gamma\left(\alpha - \frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(\alpha - n/2)}{\left(-q_0^2 - m^2\right)^{\alpha-n/2}\Gamma(\alpha - \frac{n-1}{2})},$$

aplicando el hecho que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ y haciendo el cambio de variable $q_0 \to q$

$$I_n(q) = (-1)^{n/2} i\pi^{n/2}\frac{\Gamma(\alpha - n/2)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\left(-q^2 - m^2\right)^{\alpha-n/2}},$$

Por lo tanto la integral (J-22) toma la forma

$$\int \frac{d^np}{\left(p^2 + 2pq - m^2\right)^\alpha} = (-1)^\alpha i\pi^{n/2}\frac{\Gamma(\alpha - n/2)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\left(q^2 + m^2\right)^{\alpha-n/2}}. \qquad \text{(J-27)}$$

Para derivar con respecto a q, escribimos el denominador de la forma

$$\begin{aligned}
\int \left(p^2+2pq-m^2\right)^{-\alpha} d^n p &= (-1)^\alpha i\pi^{n/2}\frac{\Gamma\left(\alpha-n/2\right)}{\Gamma(\alpha)}\left(q^2+m^2\right)^{-\alpha+n/2} \\
-\alpha\int \left(p^2+2pq-m^2\right)^{-\alpha-1} 2pd^n p &= (-1)^\alpha i\pi^{n/2}\frac{\Gamma\left(\alpha-n/2\right)}{\Gamma(\alpha)}(-\alpha+n/2)\left(q^2+m^2\right)^{-\alpha+n/2-1} 2q \\
\int \frac{2p}{(p^2+2pq-m^2)^{\alpha+1}} d^n p &= (-1)^\alpha i\pi^{n/2}\frac{(\alpha-n/2)\Gamma\left(\alpha-n/2\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)}\frac{2q}{(q^2+m^2)^{\alpha-n/2+1}},
\end{aligned}$$

aplicando la propiedad de la función gamma, $\beta\Gamma\left(\beta\right)=\Gamma\left(\beta+1\right)$ y si $\alpha+1\to\alpha$

$$\int \frac{p}{(p^2+2pq-m^2)^{\alpha}} d^n p = (-1)^{1+\alpha} i\pi^{n/2}\frac{\Gamma\left(\alpha-n/2\right)}{\Gamma(\alpha)}\frac{q}{(q^2+m^2)^{\alpha-n/2}}, \tag{J-28}$$

y derivando otra vez con respecto a q conduce a

$$\begin{aligned}
&-\alpha\int p^\mu \left(p^2+2pq-m^2\right)^{-\alpha-1} 2p^\nu d^n p \\
&= (-1)^{1+\alpha} i\pi^{n/2}\frac{\Gamma\left(\alpha-n/2\right)}{\Gamma(\alpha)}\left(q^\mu\left(-\alpha+n/2\right)\left(q^2+m^2\right)^{-\alpha+n/2-1} 2q^\nu + \left(q^2+m^2\right)^{-\alpha+n/2}\right) \\
&\int \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2+2pq-m^2)^{\alpha+1}} d^n p \\
&= (-1)^{1+\alpha}\frac{i\pi^{n/2}}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left(\frac{q^\mu q^\nu\left(\alpha-n/2\right)\Gamma\left(\alpha-n/2\right)}{(q^2+m^2)^{\alpha-n/2+1}} - \frac{\Gamma\left(\alpha-n/2\right)}{2\left(q^2+m^2\right)^{\alpha-n/2}}\right),
\end{aligned}$$

usando $\beta\Gamma\left(\beta\right)=\Gamma\left(\beta+1\right)$ y si $\alpha+1\to\alpha$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2+2pq-m^2)^{\alpha}} d^n p \\
&= (-1)^\alpha\frac{i\pi^{n/2}}{\Gamma(\alpha)\left(q^2+m^2\right)^{\alpha-n/2}}\left(q^\mu q^\nu\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)-\frac{g^{\mu\nu}}{2}\left(q^2+m^2\right)\Gamma\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)\right),
\end{aligned} \tag{J-29}$$

multiplicando por $g_{\mu\nu}$ y contrayendo tenemos

$$\begin{aligned}
&\int \frac{p^2 d^n p}{(p^2+2pq-m^2)^{\alpha}} \\
&= (-1)^\alpha\frac{i\pi^{n/2}}{\Gamma(\alpha)\left(q^2+m^2\right)^{\alpha-n/2}}\left(q^2\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)-\frac{n}{2}\left(q^2+m^2\right)\Gamma\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)\right),
\end{aligned} \tag{J-30}$$

La ecuación (J-22) sólo converge si $d<2\alpha$, de tal manera que

$$\begin{aligned}
&\int \frac{p^2 d^n p}{(p^2+2pq-m^2)^{\alpha}} \\
&= (-1)^{d/2}\frac{i\pi^{n/2}}{\Gamma(\alpha)\left(q^2+m^2\right)^{\alpha-n/2}}\left(q^2\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)-\frac{n}{2}\left(q^2+m^2\right)\Gamma\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)\right),
\end{aligned} \tag{J-31}$$

INTEGRACIÓN EN EL CASO $q = 0$

En en caso especial, para $q = 0$, (J-30) toma la forma

$$\int \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - m^2)^\alpha} d^n p = -(-1)^\alpha \frac{i\pi^{n/2}}{2\Gamma(\alpha)\,(m^2)^{\alpha - n/2 - 1}} \Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{n}{2}\right) g^{\mu\nu}, \tag{J-32}$$

y en (J-31)

$$\int \frac{p^2 d^n p}{(p^2 - m^2)^\alpha} = -(-1)^\alpha \frac{i\pi^{n/2}}{2\Gamma(\alpha)\,(m^2)^{\alpha - n/2 - 1}} \Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{n}{2}\right) n, \tag{J-33}$$

Sustituyendo la segunda expresión en la primera

$$\int \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - m^2)^\alpha} d^n p = \frac{g^{\mu\nu}}{n} \int \frac{p^2 d^n p}{(p^2 - m^2)^\alpha}.$$

Finalmente tenemos

$$\int p^\mu p^\nu f(p^2) d^n p = \frac{g^{\mu\nu}}{n} \int p^2 f(p^2) d^n p, \tag{J-34}$$

FÓRMULAS DE FEYNMAN CON PARÁMETROS

FÓRMULA DE FEYNMAN CON UN PARÁMETRO

Partimos de

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a}\frac{b-a}{ab} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right),$$

y del hecho que

$$\int_a^b \frac{du}{u^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b},$$

comparando estas dos expresiones vemos que

$$\frac{1}{ab} = \int_{u=a}^{u=b} \frac{1}{u^2}\frac{du}{b-a},$$

Para determinar la función $u = u(x)$, no es difícil apreciar que $du = (b-a)\,dx$, integrando $u(x) = (b-a)\,x + k$ imponiendo la condición de frontera $u(0) = a$ se concluye que $k = a$. En consecuencia

$$u(x) = a(1-x) + bx,$$

Despejando x en esta ecuación

$$x(u) = \frac{u-a}{b-a}.$$

Haciendo el cambio de variable

$$\frac{1}{ab} = \int_{x(a)}^{x(b)} \frac{dx}{[a(1-x)+bx]^2},$$

Como $x(a) = 0$ y $x(b) = 1$, obtenemos la fórmula de Feynman con 1-parámetro

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[a(1-x)+bx]^2}, \tag{J-35}$$

FÓRMULA DE FEYNMAN CON DOS PARÁMETROS

Seguimos un procedimiento similar al anterior

$$\begin{aligned}
\frac{1}{ac} &= \frac{1}{c-a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right), \\
\frac{1}{acb} &= \frac{1}{c-a}\left[\frac{1}{ab} - \frac{1}{cb}\right],
\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{ab} &= \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right), \\
\frac{1}{cb} &= \frac{1}{b-c}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right),
\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{1}{abc} = \frac{1}{c-a}\left[\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) - \frac{1}{b-c}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)\right],$$

Basados en

$$\int_a^b \frac{du}{u^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}, \qquad \text{y} \qquad \int_c^b \frac{dv}{v^2} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b},$$

tenemos

$$\frac{1}{abc} = \frac{1}{c-a}\left[\int_{u=a}^{u=b} \frac{1}{u^2}\frac{du}{b-a} - \int_{v=c}^{v=b} \frac{1}{v^2}\frac{dv}{b-c}\right],$$

como en el caso anterior, establecemos las funciones

$$\begin{aligned} du &= (b-a)\,dx \quad \text{integrando} \quad u(x) = (b-a)\,x + k_u, \\ dv &= (b-c)\,dx \quad \text{integrando} \quad v(x) = (b-c)\,x + k_v, \end{aligned}$$

con las condiciones de frontera $u(0) = a$ y $v(0) = c$, se concluye que $k_u = a$ y $k_v = c$, respectivamente

$$\begin{aligned} u(x) &= a(1-x) + bx, \\ v(x) &= c(1-x) + bx, \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable

$$\frac{1}{abc} = \frac{1}{c-a}\left[\int_{x(a)}^{x(b)} \frac{dx}{[a(1-x)+bx]^2} - \int_{x(c)}^{x(b)} \frac{dx}{[c(1-x)+bx]^2}\right],$$

como

$$\begin{aligned} x(u) &= \frac{u-a}{b-a}, \\ x(v) &= \frac{v-c}{b-c}, \end{aligned}$$

vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{abc} &= \frac{1}{c-a}\left[\int_0^1 \frac{dx}{[a(1-x)+bx]^2} - \int_0^1 \frac{dx}{[c(1-x)+bx]^2}\right] \\ &= \frac{2}{c-a}\int_0^1 dx\left[\frac{1}{2\,[a(1-x)+bx]^2} - \frac{1}{2\,[c(1-x)+bx]^2}\right], \end{aligned}$$

ahora teniendo en cuenta que

$$\int_a^b \frac{dw}{w^3} = \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2b^2},$$

$$\frac{1}{abc} = 2\int_0^1 dx\left[\int_{w=a(1-x)+bx}^{w=c(1-x)+bx} \frac{1}{w^3}\frac{dw}{c-a}\right].$$

Para determinar la función $w = w(y)$, tomamos $dw = (c-a)\,dy$, integrando $w\,(y) = (c-a)\,y + k$ imponiendo la condición de frontera $w(0) = a(1-x) + bx$, se concluye que $k = a(1-x) + bx$. En consecuencia

$$w\,(y) = a(1-x-y) + bx + cy,$$

Haciendo el cambio de variable

$$\frac{1}{abc} = 2\int_0^1 dx\left[\int_{y(a(1-x)+bx)}^{y(c(1-x)+bx)} \frac{dy}{[a(1-x-y)+bx+cy]^3}\right],$$

teniendo en cuenta que

$$y\,(w) = \frac{w - [a(1-x) + bx]}{c-a},$$

de donde $y(a(1-x)+bx) = 0$ y $y(c(1-x)+bx) = 1-x$, obtenemos la fórmula de Feynman con 2-parámetros.

$$\frac{1}{abc} = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{\left[a\,(1-x-y) + bx + cy\right]^3} \tag{J-36}$$

Bibliografía

[1] Super-Kamiokande Collaboration, Y. Fukuda et al., Phys. Lett. B 433, 9 (1998); Phys. Lett. B 436, 33 (1998); GALLEX Collaboration, W. Hampel et al., Phys. Lett. B 388, 384 (1996); LSND Collaboration, C. Athanassopoulos et al., Phys. Rev. Lett. 75, 2650 (1995).

[2] C. Athanassopoulos et al, LSND Collaboration. Candidate events in a search for $\overline{\nu}_\mu \rightarrow \overline{\nu}_e$ oscillations. Phys. Rev. Lett., 75:2650, 1995.

[3] S. Fukuda et al. Solar 8B and hep Neutrino Measurements from 1258 Days of Super-Kamiokande Data. Phys. Rev.Lett., 86:5651-5655,2001

[4] Q. R. Ahmad et al. Measurement of the charged current interactions produced by B-8 solar neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory. Phys. Rev. Lett., 87:071301, 2001.

[5] R. N. Mohapatra and P. B. Pall, Massive Neutrinos in Physics and Astro- physics, World Scientific Lecture Notes in Physics - Vol. 41, World Scien- tific, (1991); R. N. Mohapatra, Unification and Supersymmetry, Springer-Verlag, (1992).

[6] R. N. Mohapatra. ICTP lectures on theoretical aspects of neutrino masses and mixings. ArXiv e-print, hep-ph/0211252.

[7] M. Gell-Mann et al. Supergravity. In F. van Nieuwenhuizen and D. Freedman, editors, North Holland, Amsterdam, 1979.

[8] T. Yanagida. Workshop on unified theory and the barion number of the universe. In KEK, Japan, 1979.

[9] R. N. Mohapatra, G. Senjanović. Neutrino mass and spontaneous parity violation. Phys.Rev.Lett., 44:912, 1980.

[10] Super-Kamiokande Collaboration, Y.Ashie et al., Phys. Rev. Lett. 93 (2004) 101801

[11] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, Prog. Theor. Phys. 28 (1962) 870.

[12] Note on a Pattern from CP Violation in Neutrino Oscillations arXiv:1010.0931v2 [hep-ph]

[13] Neutrino physics, arXiv:1010.4131v1 [hep-ph]

[14] Event Excess in the MiniBooNE Search for $\bar{\nu_\mu} \to \bar{\nu_e}$ Oscillations, arXiv:1007.1150v3

[15] A Search for Lorentz Invariance and CPT Violation with the MINOS Far Detector, arXiv:1007.2791v1 [hep-ex]

[16] Mutual consistency of the MINOS and MiniBooNE Antineutrino Results and Possible CPT Violation , arXiv:1007.2923v1 [hep-ph]

[17] E. Ma, Phys. Rev. Lett. 81, 1171 (1998).

[18] C. Giunti Ch. Kim. Fundamentals of Neutrino in Physics and Astrophysics. Oxford University Press, 2007.

[19] E. Ma. Neutrino mass seesaw version 3: Recent developments. arXiv:0810.5574v1 [hep-ph] hep-ph/0810.5574v1, http://arxiv.org/abs/hep-ph/0810.5574v1.

[20] A. Abada, C. Biggio, F. Bonnet , M.B. Gavela , T. Hambye. Low energy effects of neutrino masses. ArXiv:0707.4058v3 [hep-ph], hep-ph/0707.4058v3, http://arxiv.org/abs/hep-ph/0707.4058v3.

[21] A. Abada, C. Biggio, F. Bonnet , M.B. Gavela , T. Hambye. $\mu \to e\gamma$ and $\tau \to l\gamma$ decays in the fermion triplet seesaw model. Phys.Rev.D, 78:033007, 2008.

[22] R. Franceschini, T. Hambye, A. Strumia. Type-III see-saw at LHC. arXiv:0805.1613v1 [hep-ph], hep-ph/0805.1613v1, http://arxiv.org/abs/hep-ph/0805.1613v1.

[23] S. Glashow y S. Weinberg, Phys. Rev. D **15** , 1958 (1977).

[24] W. S. Hou, Phys. Lett. B **296**, 179 (1992); D. Chang, W. S. Hou, y W. Y. Keung, Phys. Rev. D **48**, 217 (1993).

[25] M. Sher y Y. Yuan, Phys. Rev. D **44**, 1461 (1991).

[26] S. Nie y M. Sher, Phys. Rev. D **58**, 097701 (1998).

[27] D. Atwood, L. Reina, y A. Soni, Phys. Rev. D **53**, 1199 (1996); **54**, 3296 (1996); Phys. Rev. Lett. **75**, 3800 (1993).

[28] R. DIAZ. Phenomenological analisis of the Two Higgs Doublet Model. Tesis doctoral, Universidad Nacional de Colombia, 2003, arXiv:hep-ph/0212237v2.

[29] J. C. Pati and A. Salam, Phys. Rev. D10 (1974) 275; R. N. Mohapatra and J. C. Pati, Phys. Rev. D11 (1975) 566; ibid 2558; G. Senjanovic and R. N. Mohapatra, Phys. Rev. D12 (1975) 1502; A. Davidson, Phys. Rev. D20 (1979) 776; R. N. Mohapatra and R. E. Marshak, Phys. Lett. B91 (1980) 222.

[30] P. Langacker and S. Uma Sankar, Phys. Rev. D40 (1989) 1569; G. Barenboim and J. Bernabeu, Z. Phys. C73 (1997) 321; G. Barenboim and N. Rius, Phys. Rev. D58 (1998) 065010; N. G. Deshpande, J. F. Gunion, B. Kayser and F. Olness, Phys. Rev. D44 (1991) 837.

[31] J.-M. Frére, J. Galand, A. Le Yaouanc, L. Oliver, O. Péne, and J.-C. Raynal,

[32] T. D. Lee, Phys. Rev. D8, (1973) 1226;
G. Senajanovic, Nucl. Phys. B153, (1979) 334;
G. Senajanovic and P. Senjanovic, Phys. Rev. D21, (1980) 3253;
D. Chang, Nucl. Phys. B214, (1983) 435;
H. Harari and M. Leurer, Nucl. Phys. B233, (1984) 221;
G. Ecker and W. Grimus, Nucl. Phys. B258, (1985) 328;
M. Leurer, Nucl. Phys. B266, (1986) 147.

[33] Alexander Moreno Briceño, Leptogénesis en el Modelo Simétrico Izquierda-Derecha

[34] Yeinzon Rodriguez and Carlos Quimbay, Spontaneous CP Phases and Flavour Changing Neutral Currents in the Left-Right Symmetric Model

[35] R. A. Diaz, R. Martinez y J-A. Rodriguez., Phys. Rev. D 63 0950XX (2001).

[36] M. Ciuchini et al., Phys. Lett. B **316**, 127 (1993); Nucl. Phys. B **421**, 41 (1994); S. Bertolini, F. Borzumati, A. Masiero, y G. Ridolfi, *ibid.* B **353**, 591 (1991).

[37] H. Stern y M. K. Gaillard, Ann. Phys. (N.Y.) **76**, 580 (1993); C. S. Kim, J. L. Rosner, y C. P. Yuan, Phys. Rev. D **42**, 96 (1990).

[38] T. Imami y C. S. Lim, Prog. Theor. Phys. **65**, 297 (1981).

[39] J. L. Diaz-Cruz et al., Phys Rev. D **41**,891 (1990); G. Eilam, J. Hewett, y A. Soni, *ibid.* **44**, 1473 (1991); G. Couture, C. Hamzanoi, y H. Konig, *ibid*, **52**, 1713 (1995).

[40] J. Liu y L. Wolfenstein, Nucl. Phys. B **289**, 1 (1987).

[41] M. Nowakowski y A. Pilaftsis, Nucl. Phys. B **461**, 19 (1996); A. Joshipura y M. Nowakowski, Phys. Rev. D **51**, 5271 (1995); G. Ross y J. W. Valle, Phys. Lett. **151**B, 375 (1985).

[42] T. P. Cheng y M. Sher, Phys. Rev. D **35**, 3484 (1987).

[43] D. Atwood, L. Reina, y A. Soni, Phys. Rev. D **55**, 3156 (1997); G. Cvetic, S. Hwang, y C. S. Kim, *ibid.* **58**, 116003 (1998).

[44] Kamiokande-II, K. S. Hirata et al., Phys. Lett B205 (1988) 416.

[45] Y. Fukuda et al., Phys. Rev. Lett. **81**, 1562 (1998).

[46] J. F. Gunion, Extended Higgs sectors, arXiv:hep-ph/0212150.

[47] Para una revisión, ver J. Gunion, H. Haber, G. Kane, y S. Dawson, The Higgs Hunter's Guide. Addison-Wesley, New York, 1990.

[48] J. Liu and L. Wolfenstein, Nucl. Phys. B289 (1987) 1

[49] G. C. Branco and M. N. Rebelo, Phys. Lett. B160 (1985) 117.

[50] R. Santos, A. Barroso. Phys. Rev. D56 (1997) 5366, [arXiv: hep-ph/9701257].

[51] H. E. Haber, G. L. Kane y T. Sterling, Nucl. Phys. **B161**, 493 (1979).

[52] W. Pauli, in Neutrino Physics, p. 1, edited by K. Winter, Cambridge University Press, 1991.

[53] J. C. Pati and A. Salam, Phys. Rev. D10 (1974) 275; R. N. Mohapatra and J. C. Pati, Phys. Rev. D11 (1975) 566; ibid 2558; G. Senjanovic and R. N. Mohapatra, Phys. Rev. D12 (1975) 1502; A. Davidson, Phys. Rev. D20 (1979) 776; R. N. Mohapatra and R. E. Marshak, Phys. Lett. B91 (1980) 222.

[54] V. Gribov and B. Pontecorvo, Phys. Lett. B 28 (1969) 493.

[55] P. Langacker and S. Uma Sankar, Phys. Rev. D40 (1989) 1569; G. Barenboim and J. Bernabeu, Z. Phys. C73 (1997) 321; G. Barenboim and N. Rius, Phys. Rev. D58 (1998) 065010; N. G. Deshpande, J. F. Gunion, B. Kayser and F. Olness, Phys. Rev. D44 (1991) 837.

[56] B. Grzadkowski, Z. Phys. C22, (1984) 361.

[57] J. F. Gunion, J. Grifols, A. Mendez, B. Kayser, and F. Olness, Phys. Rev. D40, (1989) 1546.

[58] D. E. Groom et al. (Particle Data Group), Eur. Phys. J. C15, (2000) 1

[59] G. Barenboim, J. Bernabú, and M. Raidal, Nucl. Phys. B478, (1996) 527.

[60] G. Barenboim and J. Bernabeu, Z. Phys. C73, (1997) 321.

[61] N. G. Deshpande, J. F. Gunion, B. Kayser and F. I. Olness, Phys. Rev. D44 (1991) 837.

[62] Peter Minkowski. $\mu \to e\gamma$ at a Rate of One Out of 1-Billion Muon Decays? Phys. Lett., B67:421, 1977.

[63] P. Ramond M. Gell-Mann and R. Slansky. In Supergravity, edited by P. van Nieuwenhuizen and D. Freedman, (North-Holland, 1979), p. 315.

[64] Tsutomu Yanagida. Horizontal gauge symmetry and masses of neutrinos. In Proceedings of the Workshop on the Baryon Number of the Universe and Unified Theories, Tsukuba, Japan, 13-14 Feb 1979.

[65] Rabindra N. Mohapatra and Goran Senjanović. Neutrino mass and spontaneous parity nonconservation.

[66] J. A. Sánchez-Monroy, C. J. Quimbay. Generación de masa de neutrinos a través de la intro- ducción simultánea de un singlete y un triplete de majorana. Rev.Col.Fis, 41:448, 2009.

[67] S. Weinberg. Baryon- and lepton-nonconserving processes. Phys.Rev.Lett., 43:1566, 1979.

[68] A. Briceño. Leptogénesis en el modelo simétrico izquierda-derecha. Masters thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2006.

[69] P. Ball, J. M. Frere and J. Matias, Nucl. Phys. B572 (2000) 3.

[70] P. Ball, J. M. Frere and J. Matias, Nucl. Phys. B 572 (2000) 3; N. Sahu and S. U. Sankar, Nucl. Phys. B 724 (2005) 329.

[71] A. Abada, C. Biggio, F. Bonnet , M.B. Gavela , T. Hambye. Low energy effects of neutrino masses. ArXiv:0707.4058v3 [hep-ph], hep-ph/0707.4058v3, http://arxiv.org/abs/hep-ph/0707.4058v3.

[72] R. Franceschini, T. Hambye, A. Strumia. Type-III see-saw at LHC. arXiv:0805.1613v1 [hep- ph], hep-ph/0805.1613v1, http://arxiv.org/abs/hep-ph/0805.1613v1.

[73] B. T. Cleveland et al. Measurement of the solar electron neutrino flux with the Homestake chlorine detector.

[74] Abdurashitov J. N. et al. (SAGE Collab.). Measurement of the Solar Neutrino Capture Rate with Gallium Metal // Phys. Rev. C. 1999. V. 60. P. 055801; Nucl. Phys. Proc. Suppl. 2002. V. 110. P. 315.

[75] W. Hampel et al. GALLEX solar neutrino observations: Results for GALLEX

[76] J. P. Cravens et al. Solar neutrino measurements in Super-Kamiokande-II. Phys. Rev., D78:032002, 2008.

[77] Y. Fukuda et al. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. Phys. Rev.

[78] M. Ambrosio et al. Matter effects in upward-going muons and sterile neutrino oscillations.

[79] Y. Ashie et al. A Measurement of Atmospheric Neutrino Oscillation Parameters by Super-Kamiokande I.

[80] M. Apollonio et al. Limits on Neutrino Oscillations from the CHOOZ Experiment.

[81] M. Apollonio et al. Search for neutrino oscillations on a long base-line at the CHOOZ nuclear power station. Eur. Phys. J.,

[82] F. Boehm et al. Final results from the Palo Verde Neutrino Oscillation Experiment. Phys. Rev.,

[83] K. Eguchi et al. First results from KamLAND: Evidence for reactor anti- neutrino disappearance. Phys. Rev.

[84] M. H. Ahn et al. Indications of Neutrino Oscillation in a 250 km Long- baseline Experiment. Phys. Rev. Lett.,

[85] E. Aliu et al. Evidence for muon neutrino oscillation in an accelerator- based experiment. Phys. Rev. Lett.,

[86] D. G. Michael et al. Observation of muon neutrino disappearance with the MI- NOS detectors and the NuMI neutrino beam. Phys. Rev. Lett.,

[87] P. Adamson et al. Measurement of Neutrino Oscillations with the MINOS De- tectors in the NuMI Beam. Phys. Rev. Lett.,

[88] B. Pontecorvo. Mesonium and antimesonium. Sov. Phys. JETP, 6:429, 1957.

[89] N. Cabibbo, Phys. Lett. B72, 333 (1978).

[90] J. Schechter and J. W. F. Valle, Phys. Rev. D22, 2227

[91] C. Jarlskog, Phys. Rev. Lett. 55, 1039 (1985).

[92] Reconciling Dark Matter, Solar and Atmospheric Neutrinos, arXiv:hep-ph/9302316v1

[93] D. O. Caldwell and R. N. Mohapatra, Phys. Rev. D48, 3259 (1993).

[94] LSND collaboration, A. Aguilar et al., Phys. Rev. D64, 112007 (2001), [hep-ex/0104049]

[95] The MiniBooNE collaboration, A. A. Aguilar-Arevalo et al., arXiv:0704.1500 [hep-ex]

[96] See talk by P. Vahle for MINOS Collaboration at at Neutrino 2010, Greece.

[97] T. Schwetz, M.A. Tortola and J.W.F. Valle, New J. Phys. 10 (2008) 113011 [arXiv:0808.2016 [hep-ph]].

[98] S. N. Ahmed et al. Measurement of the total active B-8 solar neutrino flux at the Sudbury Neutrino Observatory with enhanced neutral current sensitivity. Phys. Rev. Lett., 92:181301, 2004.

[99] B. Aharmim et al. An Independent Measurement of the Total Active 8B Solar Neutrino Flux Using an Array of 3He Proportional Counters at the Sudbury Neutrino Observatory. Phys. Rev. Lett., 101:111301, 2008.

[100] J. Kubo, Phys. Lett. B578, (2004), 156; Erratum: ibid 619 (2005) 387.

[101] J. Schechter, J.W.F. Valle, Phys. Rev. D22 (1980) 2227.

[102] N. Cabibbo, Phys. Lett. B72 (1978) 333.

[103] J. Schechter, J.W.F. Valle, Phys. Rev. D22 (1980) 2227.

[104] S.M. Bilenky, J. Hosek, S.T. Petcov, Phys. Lett. B94 (1980) 495.

[105] J. Schechter, J.W.F. Valle, Phys. Rev. D23 (1981) 1666.

[106] M. Doi, T. Kotani, H. Nishiura, K. Okuda, E. Takasugi, Phys. Lett. B102 (1981) 323.

[107] V.D. Barger, K. Whisnant, R.J.N. Phillips, Phys. Rev. Lett. 45 (1980) 2084.

[108] S. Pakvasa, AIP Conf. Proc. 68 (1980) 1164.

[109] J.Arafune, J. Sato, Phys. Rev. D55 (1997) 1653. hep-ph/9607437.

[110] A. Romanino, Nuclear Phys. B574 (2000) 675. hep-ph/9909425.

[111] M. Lindner, invited talk at 20th International Conference on Neutrino Physics and Astro- physics (Neutrino 2002), Munich, Germany, 25-30 May 2002, hep-ph/0210377.

[112] P. I. Krastev and S. T. Petcov, Phys. Lett. B 205 (1988) 84.

[113] E. W. Kolb and M. S. Turner, The Early Universe, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1990.

[114] M. A. Luty, Phys. Rev. D45 (1992) 455; M. Flanz, E. A. Paschos and U. Sarkar, Phys. Lett. B345 (1995) 248, arXiv:hep-ph/9411366

[115] A. Yu Ignatev, V. A. Kuzmin and M. E. Shaposhnikov, JETP Lett. 30 (1979) 688; F. J. Botella and J. Roldan, Phys. Rev. D44 (1991) 966; J. Liu and G. Segré, Phys. Rev. D48 (1993) 4609; Phys. Rev. D49 (1994) 1342.

[116] M. Veltman, Physica 29 (1963) 186.

[117] Lepton masses in a minimal model with triplet Higgs Bosons and S3 flavor symmetry,M.Mitra and S.Choubey, Phys.Rev.D78,115014(2008)

[118] A. Mondragón and E. Rodríguez-Jáuregui, Phys. Rev. D59 (1999), 093009.

[119] S. Davidson and A. Ibarra, Phys. Lett. B535 (2002) 25.

[120] W. Buchmuller, P. Di Bari and M. Plumacher, Nucl. Phys. B643 (2002) 367.