CAPITULO III

SIMBOLOS SUMATORIO Y DE VALOR ABSOLUTO

INTRODUCCION

El objetivo del presente capítulo es introducir unos símbolos, llamados sumatorio y de valor absoluto, estudiar sus propiedades y aprender su manejo.

Estos símbolos son de uso frecuente en muchos temas de cálculo, es así como el símbolo sumatorio se usa para escribir sumas finitas e infinitas en forma abreviada, como unos ejemplos de aplicación tenemos: las series infinitas, la definición integral de Riemann, el binomio de Newton; el símbolo de valor absoluto nos sirve para dar una definición de distancia entre puntos de la recta real o eje numérico y esto nos facilita la escritura del concepto de límite y el manejo de algunas de sus propiedades, pues este concepto está definido en términos de distancias.

Debido a su gran uso, estos símbolos son introducidos aquí a manera de un capítulo, pues merecen un estudio detallado.

EL SIMBOLO SUMATORIO

Existe un símbolo que permite escribir sumas en forma abreviada, este símbolo se denomina "símbolo sumatorio" y se denota $\sum$ que se lee " sigma " .

Cuando se desea formar la suma de ciertos números reales $a_1, a_2, \ldots a_n$, utilizando el símbolo sumatorio escribimos $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.
y se lee " Suma de a_k desde 1 hasta n " .

Si la suma es infinita, es decir $a_1 + a_2 \ldots + a_n + \ldots$, escribimos abreviadamente en la forma $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, y se lee " suma de a_k desde 1 hasta infinito "

Los números que aparecen encima y debajo del símbolo Σ indican el re -

rrido de la letra k (debe tenerse en cuenta que el recorrido de la letra k es solo entre los números naturales comprendidos entre 1 y n).

La letra k se denomina índice de la suma y el término a_k se llama término general de la suma.

Es claro que la letra k puede ser sustituida por otra letra cualquiera .

Ejemplos .-

$$\sum_{k=1}^{7} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2$$

$$\sum_{i=1}^{m} i^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + m^3$$

$$\sum_{k=0}^{p} 2^{m-k} = 2^m + 2^{m-1} + \dots + 2^{m-p}$$

Definición .-

Se define $\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$

Propiedades .-

1) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (Propiedad Aditiva).

2) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad c \in R$ (Propiedad Homogénea)

3) $\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$ (Propiedad Telescópica)

Demostr.-

1) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n)$

$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$ por propiedad asociativa de la suma entre números reales.

$= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

2) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n = c (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$, por propiedad distributiva del producto respecto a la suma de números reales .

Luego : $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$

3) $\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = (\cancel{a_1} - a_{1-1}) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_1}) + (a_3 - a_2) + \ldots$

$+ (\cancel{a_{n-1}} - a_{n-2}) + a_n - \cancel{a_{n-1}} = a_n - a_0$

Definición .-

Definimos la expresión $\sum_{k=m}^{m+n} a_k$ como $\sum_{k=0}^{n} a_{k+m}$. La definición es razonable si se tiene en cuenta que :

$$\sum_{k=m}^{m+n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+n} = a_{0+m} + a_{1+m} + a_{2+m} + \ldots + a_{n+m}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_{k+m} \ , \ m \in Z^+ \text{ fijo} .$$

Veamos ahora algunos ejemplos de aplicación del símbolo sumatorio :

Ejemplo 1.-

$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$. La suma anterior se puede considerar como de la forma :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \ , \quad \text{donde } a_k = 1 \text{ para todo } k = 1, 2, \ldots n.$$

$$\text{Como} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$= \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ - veces}} = n$$

Otra forma : $1 = k - (k - 1) = a_k - a_{k-1}$, donde $a_k = k$

Luego : $\sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} (k - (k - 1)) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_o$, por propiedad Telescópica .

Como $a_k = k$, entonces $a_n = n$ y $a_o = 0$, así que $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

Ejemplo 2.-

$$\sum_{k=1}^{n} k = n (n + 1)/ 2 \ , \quad n \in N$$

1^a Forma : $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = S$

Como $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1$, entonces

$$2S = (1+n) + (2+(n-1)) + (3+(n-2)) + \ldots + ((n-1)+2) + (n+1)$$

$$= \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ - sumandos}}$$

$$= n(n+1), \text{ de aquí entonces } S = n(n+1)/2$$

$2^{\underline{a}}$ Forma : $k^2 - (k-1)^2 = k^2 - (k^2 - 2k + 1) = 2k - 1$

Sea $a_k = k^2$, entonces :

$$\sum_{k=1}^{n} (k^2 - (k-1)^2) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} 2k + \sum_{k=1}^{n} (-1)$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1, \text{ por propiedad Homogéneo .}$$

$$= 2\, n(n+1)/2 - n, \text{ según ejemplos 1 y 2 } (1^{\underline{a}} \text{ forma})$$

$$= n^2$$

Luego : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = (2.1-1) + (2.2-1) + \ldots + (2n-1)$

$$= 1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2 \quad (*)$$

De otro lado, si <u>no</u> suponemos conocida la fórmula $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$,

tenemos por propiedad telescópica que :

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0 = n^2 - 0^2 = n^2, \text{ siendo } a_k = k^2$$

Entonces: $2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} 1 + n^2 = n + n^2 = n(n+1)$, de aquí $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = (1/2)n(n+1)$

Nota : La fórmula (*) corresponde a la suma de los n - primeros números impares.

Ejemplo 3.-

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = n^3/3 + n^2/2 + n/6$$

Sabemos que $k^3 - (k-1)^3 = k^3 - (k^3 - 3k^2 + 3k - 1) = 3k^2 - 3k + 1$
Haciendo $a_k = k^3$, tenemos que :

$$\sum_{k=1}^{n} (k^3 - (k-1)^3) = a_n - a_o = n^3 - 0^3 = n^3$$

De otro lado $\sum_{k=1}^{n} (k^3 - (k-1)^3) = \sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1) = 3 \sum_{k=1}^{n} k^2 - 3 \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$

Pero: $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} 1$ y $\sum_{k=1}^{n} (k^3 - (k-1)^3)$ son conocidas, así que :

$$3 \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} (k^3 - (k-1)^3) + 3 \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = n^3 + 3n(n+1)/2 - n$$

$$= n^3 + 3n^2/2 + n/2,$$ de donde :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n^3/3 + n^2/2 + n/6$$

Procediendo de manera análoga, como se procedió en los ejemplos 1) , 2) y 3) se pueden deducir fórmulas generales para $\sum_{k=1}^{n} k^p$, $p \in N$, por ejemplo :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4/4 + n^3/2 + n^2/4$$

Ejemplo 4.-

Mostrar que si $x \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = (1 - x^{n-1})/(1-x)$. En efecto :

Haciendo $a_k = x^{k+1}$ y definiendo $x^0 = 1$, la suma anterior puede ser deducida como sigue :

$$\sum_{k=0}^{n} (x^{k+1}-x^k) = (x^{0+1}-x^0) + \sum_{k=1}^{n} (x^{k+1}-x^k) = (x-1) + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})$$

$$= (x-1) + a_n - a_0 = (x-1) + x^{n+1} - x$$

Luego $\sum_{k=0}^{n} (x^{k+1}-x^k) = x^{n+1} - 1$. De otro lado : $\sum_{k=0}^{n} (x^{k+1} - x^k) = \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} x^k$

pero $\sum_{k=0}^{n} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} x^k = x \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^k = (x-1) \sum_{k=0}^{n} x^k$

En total $(x-1) \sum_{k=0}^{n} x^k = x^{n+1} - 1$, así que $\sum_{k=0}^{n} x^k = (x^{n+1}-1)/(x-1)$, si $x \neq 1$,

pero $(x^{n+1}-1)/(x-1) = (1-x^{n+1})/(1-x)$, de donde $\sum_{k=0}^{n} x^k = (1-x^{n+1})/(1-x)$, si $x \neq 1$.

Procediendo de otra forma, podemos obtener el mismo resultado anterior :

Sea $S = \sum_{k=0}^{n} x^k = x^0 + x^1 + x^2 + \ldots + x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$, entonces

$$xS = x(1 + x + x^2 + \ldots + x^n) = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + x^{n+1}$$, así que :

$S - xS = 1 - x^{n+1}$, y por tanto $(1-x)S = 1 - x^{n+1}$, de donde :

$$S = \sum_{k=0}^{n} x^k = (1 - x^{n+1})/(1-x) \text{ si } x \neq 1 .$$

Cuál es la suma $\sum_{k=0}^{n} x^k$, cuando $x = 1$?

Si $x = 1$, tendríamos $\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} 1^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = 1^0 + \sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + n$

Ejemplo 5.-

Demostrar por inducción que la suma $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k(2k+1)$ es proporcional a n y hallar la constante de proporcionalidad .

i) Si n=1,

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k(2k+1) = \sum_{k=1}^{2} (-1)^k(2k+1) = (-1)^1(2.1+1) + (2.2+1)$$

$$= -3 + 5 = 2 = 2.1 = 2.n$$

Luego si n=1, $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k(2k+1)$ es proporcional a n y la constante de proporcionalidad es 2.

ii) Supongamos que $\sum_{k=1}^{2p} (-1)^k(2k+1)$ es proporcional a p, y veamos que

$\sum_{k=1}^{2(p+1)} (-1)^k(2k+1)$ es proporcional a p+1. Por inducción se concluye.

Supongamos entonces que $\sum_{k=1}^{2p} (-1)^k(2k+1) = 2p$ y veamos que $\sum_{k=1}^{2(p+1)} (-1)^k(2k+1) =$
$= 2(p+1)$

$$\sum_{k=1}^{2(p+1)} (-1)^k(2k+1) = \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k(2k+1) + (-1)^{2p+1}(2(2p+1)+1) + (-1)^{2(p+1)}(2(2(p+1))+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k(2k+1) + (-\cancel{4}p-3) + (\cancel{4}p+5)$$

$$= 2p + 2$$

$$= 2(p+1)$$

Luego $\sum_{k=1}^{2(p+1)} (-1)^k(2k+1)$ es proporcional a p + 1, con constante de proporcionalidad igual a 2.

El ejercicio también se puede mirar de la siguiente forma :

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k(2k+1) = \sum_{k=1}^{2n} ((-1)^k 2k + (-1)^k 1) = 2\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k + \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k$$

$$= 2(-1+2-3+4-\ldots+(-1)^{2n}2n) + (-1+1-1+1\ldots+(-1)^{2n-1}+(-1)^{2n})$$

$$= 2(-(1+3+5+\ldots+2n-1)+(2+4+6+\ldots+2n))$$

$$= -2(1+3+5+\ldots+2n-1)+4(1+2+3+\ldots+n)$$

$$= -2\sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 4\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= -2n^2 + 4\; n(n+1)/2$$

$$= -\cancel{2n^2} + \cancel{2n^2} + 2n$$

Luego $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1) = 2n$, e.d. $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k(2k+1)$ es proporcional a n y la constante de proporcionalidad es 2.

Ejemplo 6.-

Inducir y demostrar una regla general que simplifique la suma $\sum_{k=1}^{n} 1/k(k+1)$

Solución : Consideremos la siguiente suma : $\sum_{k=1}^{n} (1/(k+1) - 1/k)$

$$\sum_{k=1}^{n} (1/(k+1) - 1/k) = \sum_{k=1}^{n} (k-(k+1)/k(k+1)) = \sum_{k=1}^{n} -1/k(k+1)$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} 1/k(k+1)$$

Así que : $\sum_{k=1}^{n} 1/k(k+1) = -\sum_{k=1}^{n} (1/(k+1) - 1/k)$

Ahora haciendo $a_k = 1/(k+1)$, entonces $\sum_{k=1}^{n} (1/(k+1) - 1/k)$

$$= \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_o, \quad \text{pero}$$

$$a_n = 1/(n+1) \text{ y } a_o = 1/(0+1) = 1$$

Luego : $\sum_{k=1}^{n} 1/k(k+1) = -(1/(n+1) - 1) = -(1-n-1/(n+1)) = n/(n+1)$

En total : $\sum_{k=1}^{n} 1/k(k+1) = n/(n+1)$, la demostración de que esta fórmula es válida para todo entero positivo n se deja al lector .

LA FORMULA DEL BINOMIO DE NEWTON .

Definición .-

Sea n un entero positivo, se define la expresión $n!$, que se lee " n factorial" o " factorial de n ", como el producto de todos los enteros positivos sucesivos de 1 a n ; esto es :

$$n! = 1 . 2 . 3 . \ldots (n-1) . n$$

Puesto que interesa la expresión $0!$ convenimos en que $0! = 1$.

Definición .-

Si $0 \leq k \leq n$, $k, n \in Z$, se define el " coeficiente binomial " o de Newton, notado $\binom{n}{k}$, que se lee " n combinado k " , por :

$$\binom{n}{k} = n!/(k!(n-k)!) = n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)!/k!(n-k)!$$

$$= n(n-1)\ldots(n-k+1)/k!$$

Si $k = 0, n,$ $\binom{n}{k} = 1$, es decir, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Si $k = 1, n-1,$ $\binom{n}{k} = n$, es decir $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

Tenemos ahora, la siguiente propiedad del coeficiente binomial :

Si k es un entero positivo fijo se verifica la siguiente fórmula :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

En efecto : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1)/k! + n(n-1)\ldots(n-k+2)/(k-1)!$

$$= n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1)/k! + n(n-1)\ldots(n-k+2)k/(k-1)!\,k$$

$$= n(n-1)\ldots(n-k+2)\ (n-\cancel{k}+1+\cancel{k})/k! \text{ Haciendo común denominador}$$

$$= n(n-1)\ldots(n-k+2)(n+1)/k!$$

$$= (n+1)\,n(n-1)\ldots(n-k+2)/k!$$

$$= \binom{n+1}{k}$$

Luego $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

La relación anterior da lugar a la siguiente configuración conocida con el nombre de " Triángulo de Pascal " : Todo número que no esté sobre uno de los lados del triángulo es la suma de los dos números que tiene encima .

1
1 1 → n=1
1 2 1 → n=2
p 1 3 3 1 → n=3
1 4 6 4 1 → n=4
1 5 10 10 5 1 → n=5
m ← 1 6 15 20 15 6 1 → n=6

El coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ es el número (k + 1)-ésimo de la fila n . Obsérvese que todos los números del triángulo de Pascal son números naturales; demostraremos por inducción que $\binom{p}{k}$ es siempre un número natural (Utilizaremos el tercer método de demostración por inducción) .
Sea $m \in Z^+$ fijo. Supongamos que $\binom{p}{k}$ es un número natural para todo $p < m$ y veamos que $\binom{m}{k}$ es un número natural .

Como $p < m$ y $0 \leq k \leq p$, entonces $0 \leq k < m$
Por la propiedad demostrada antes, sabemos que :

$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}$$

Como $m-1 < m$ y $k-1 < k$, entonces $\binom{m-1}{k-1} \in N$ y $\binom{m-1}{k} \in N$, por hipótesis de inducción ($\binom{m-1}{k-1}$ es el número k-ésimo de la fila m-1 y $\binom{m-1}{k}$ es el número (k+1) ésimo de la fila m-1, luego aparecen en el triángulo de Pascal por incima de la fila m) .

Obsérvese que $\binom{m-1}{k}$ tiene sentido, pues como $k < m$, entonces $k \leq m-1$.
Luego : $\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k} \in N$

Restaría probar que $\binom{m}{k} \in N$ para el caso $k = m$, pues este caso no está incluido en el ya observado, ya que para hablar de $\binom{m-1}{k}$ es necesario que $k \leq m-1$, e.d. $k < m$.

Supongamos pues $k = m$, entonces $\binom{m}{k} = \binom{m}{m} = 1 \in \mathbb{N}$. Luego en cualquier caso $\binom{m}{k} \in N$, y así concluimos que $\binom{n}{k} \in N$ para todo número natural n.

Nota :

Obsérvese el método de demostración en el triángulo de Pascal.
Tenemos ahora sí, la fórmula del binomio de Newton .

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n,$$

La anterior fórmula escrita en forma abreviada utilizando el símbolo sumatorio es:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Se ve fácilmente que el segundo miembro de la igualdad es una suma de n+1 términos, el primero es a^n y el último b^n, ya que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Veamos la demostración de esta fórmula por inducción :

i) Si n=1, $(a+b)^1 = a+b = a^1 + \binom{1}{1} a^{1-1} b = a+1.1.b = a+b = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k$

ii) Supongamos que la fórmula es válida para n y veamos que entonces lo es para n + 1.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = a(a+b)^n + b(a+b)^n$$

$$= a\left(a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n\right) +$$

$$+ b\left(a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n\right)$$

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \binom{n}{2} a^{n-1} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^2 b^{n-1} + ab^n + a^n b + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2$$

$$+ \binom{n}{2} a^{n-2} b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^n + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + a^n b + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right) a^{n-1} b^2 + \ldots + ab^n + \binom{n}{n-1} ab^n + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \binom{n+1}{2} a^{n-1} b^2 + \ldots + \binom{n+1}{n} ab^n + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

Luego la fórmula es válida para n + 1, y así por el primer método de demostración por inducción se concluye que la fórmula es válida para todo $n \in Z^+$.

Ejercicio .-

Demostrar que :

i) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$

ii) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots \pm \binom{n}{n} = 0$

DESIGUALDAD DE SCHWARZ.

Aplicando inducción matemática demostraremos la siguiente desigualdad, conocida con el nombre de desigualdad de Schwarz :

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)$$

que escrita abreviadamente es :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right), \ x_i, y_i \in R, \ i = 1,2,\ldots,n$$

Demostr.

i) Si $n=1$, es claro que $(x_1y_1)^2 \leq x_1^2 y_1^2$.

ii) Supongamos que la desigualdad es válida para n y veamos que lo es para $n + 1$.

$(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_n y_n + x_{n+1}y_{n+1})^2 = ((x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_n y_n) +$

$+ (x_{n+1} y_{n+1}))^2$ que es igual a :

$(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)^2 + 2(x_1y_1 + \ldots + x_n y_n)(x_{n+1} y_{n+1}) + x_{n+1}^2 y_{n+1}^2$

Como $2ab \leq a^2 + b^2$, pues $a^2+b^2-2ab = (a- b)^2 \geq 0$, tomando en el papel de $a = x_k y_{n+1}$ y $b = x_{n+1} y_k$, tenemos :

$\sum_{k=1}^{n} 2x_k y_{n+1} x_{n+1} y_k \leq \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 y_{n+1}^2 + x_{n+1}^2 y_k^2)$ es decir ,

$$2x_{n+1} y_{n+1} \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq y_{n+1}^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + x_{n+1}^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2 , \quad \text{esto es ,}$$

$2(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)\, x_{n+1}y_{n+1} \leq (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)y_{n+1}^2 + (y_1^2+\ldots+y_n^2)x_{n+1}^2$,
y entonces:

$$(x_1y_1+\dots+x_ny_n+x_{n+1}y_{n+1})^2 \leq (x_1y_1+\dots+x_ny_n)^2+(x_1^2+\dots+x_n^2)\,y_{n+1}^2$$
$$+\,(y_1^2+\dots+y_n^2)\,x_{n+1}^2+x_{n+1}^2\,y_{n+1}^2$$

Por hipot. de Induc. $\leq (x_1^2+\dots+x_n^2)(y_1^2+\dots+y_n^2)+(x_1^2+\dots+x_n^2)y_{n+1}^2$

$$+\,(y_1^2+\dots+y_n^2)\cdot x_{n+1}^2+x_{n+1}^2\,y_{n+1}^2$$
$$=(x_1^2+\dots+x_n^2)(y_1^2+\dots+y_n^2+y_{n+1}^2)+(y_1^2+\dots+y_n^2+y_{n+1}^2)x_{n+1}^2$$
$$=(x_1^2+\dots+x_n^2+x_{n+1}^2)(y_1^2+\dots+y_{n+1}^2)$$ En total :

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\,y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1} y_i^2\right)$$

Entonces por el primer método de demostración por inducción concluimos que la desigualdad es válida para todo entero positivo n.

VALOR ABSOLUTO

El hecho de que $-a \geq 0$ si $a \leq 0$, es la base del concepto que vamos a introducir.

Definición .-

Si x es un número real, se define el valor absoluto de x, que se nota $|x|$, de la forma siguiente :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

es decir, $|x| = x$ si $x \geq 0$ y $|x| = -x$ si $x \leq 0$

Observaciones .-

i) $|x| \geq 0$ para todo $x \in R$, pues si $x \geq 0$, $|x| = x \geq 0$, y si $x \leq 0$, entonces $|x| = -x \geq 0$.

ii) $-|x| \leq x \leq |x|$, ya que si $x \geq 0$, entonces $x = |x|$ y $-|x| = -x \leq 0$, así que : $-|x| = -x \leq 0 \leq x = |x|$, lo que implica :

$$-|x| \leq x \leq |x| .$$

Si $x \leq 0$, entonces $-x \geq 0$, así que $x \leq 0 \leq -x = |x|$, de donde :

$$-|x| = -(-x) = x \leq |x|, \text{ que implica :}$$

$$-|x| \leq x \leq |x| .$$

Nota :

Si los números reales están representados geométricamente por la recta real el número $|x|$ determina la distancia del número real x al 0 de la recta.

Si $a > 0$ y si un punto x está situado entre $-a$ y a, entonces $|x|$ está más próximo a 0 que a .

Teorema .-

Si $a \geq 0$, $|x| \leq a$ si y solo si $-a \leq x \leq a$.

Demostr.- i) Supongamos que $|x| \leq a$ y veamos que $-a \leq x \leq a$. Como $|x| \leq a$, entonces $-a \leq -|x|$. De la observación ii) anterior, sabemos que $-|x| \leq x \leq |x|$, así que :

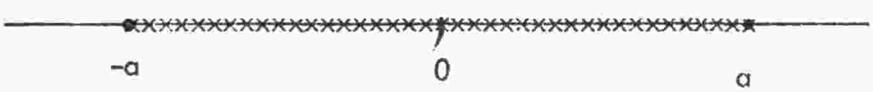
$$-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a, \text{ lo que implica : } -a \leq x \leq a.$$

ii) Supongamos ahora que $-a \leq x \leq a$ y veamos que $|x| \leq a$. Como $-a \leq x \leq a$ es equivalente a $-a \leq -x \leq a$, entonces : Si $x \geq 0$, $|x| = x$, así que $-a \leq x = |x| \leq a$, que implica, en particular $|x| \leq a$.

Si $x \leq 0$, $|x| = -x$, así que $-a \leq -x = |x| \leq a$, que implica $|x| \leq a$. Luego en cualquier caso, si $-a \leq x \leq a$, entonces $|x| \leq a$.

El significado geométrico del teorema es el que se muestra en la figura :

$|x| \leq a$ para todo $x \in [-a, a]$



El siguiente es un resultado importante conocido con el nombre de desigualdad triangular .

Teorema .-

Para x, y números reales cualesquiera se tiene :

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad (\text{ Desigualdad Triangular })$$

Demostr.- Como $\left.\begin{array}{c} -|x| \leq x \leq |x| \\ y \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{array}\right\}$ entonces: $-|x| - |y| \leq x+y \leq |x| + |y|$,

pero por el teorema anterior, esto último es equivalente a: $|x+y| \leq |x| + |y|$

Por inducción matemática se puede extender la desigualdad triangular como sigue:

Teorema .-

Si $a_1, a_2, \ldots a_n$ son números reales cualesquiera :

$$P(n) : \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} | a_k |$$

Demostr.- i) P(1) es cierta, pues $\left| \sum_{k=1}^{1} a_k \right| = | a_1 |$ y $\sum_{k=1}^{1} |a_k| = | a_1 |$, luego se tiene $\left| \sum_{k=1}^{1} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{1} | a_k |$

P(2) es cierta por el teorema anterior .

ii) Supongamos que la proposición es cierta para $p \in Z^+$ fijo, y veamos que la proposición es cierta para $p + 1$, es decir supongamos que :

$\left| \sum_{k=1}^{p} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{p} | a_k |$ y veamos que $\left| \sum_{k=1}^{p+1} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{p+1} | a_k |$

$$\left| \sum_{k=1}^{p+1} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{p} a_k + a_{p+1} \right| \underbrace{\leq}_{\text{Pues P(2) es cierta}} \left| \sum_{k=1}^{p} a_k \right| + | a_{p+1} | \underbrace{\leq}_{\text{Por hipót. de inducción}} \sum_{k=1}^{p} | a_k | + | a_{p+1} |$$

Pero $\sum_{k=1}^{p} | a_k | + | a_{p+1} | = \sum_{k=1}^{p+1} | a_k |$, así que hemos demostrado que :

$$\left| \sum_{k=1}^{p+1} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{p+1} | a_k |$$

Por el primer método de demostración por inducción concluimos que la proposición P(n) es cierta para todo $n \in Z^+$.

Tenemos ahora las siguientes propiedades del valor absoluto .

Propiedad 1.-

$|x| = 0$ si y solo si $x = 0$.

Demostr. i) Supongamos que $|x| = 0$ y veamos que $x = 0$. En efecto, como $|x| = 0$ y $-|x| \leq x \leq |x|$, entonces $-0 \leq x \leq 0$, es decir, $0 \leq x \leq 0$, así que $x = 0$.

ii) Si $x = 0$, por definición de valor absoluto, entonces $|x| = 0$.

Propiedad 2.-

$|x| = |-x|$.

Demostr. Si $x \geq 0$, entonces $-x \leq 0$, así que $|x| = x = -(-x) = |-x|$, luego $|x| = |-x|$.
Si $x \leq 0$, entonces $-x \geq 0$, así que $|x| = -x = |-x|$, luego $|x| = |-x|$.
Luego en cualquier caso, $|x| = |-x|$.

Propiedad 3.-

$|x - y| = |y-x|$

Demost. Se deja al lector .

Propiedad 4.-

$|x|^2 = x^2$, de aquí $|x| = \sqrt{x^2}$

Demostr. Si $x \geq 0$, $|x| = x$, así que $|x|^2 = x^2$.
Si $x \leq 0$, $|x| = -x$, así que $|x|^2 = (-x)(-x) = x^2$.
Luego para todo número real x, $|x|^2 = x2$
Por otra parte como $0 \leq |x|$, entonces $\sqrt{|x|^2} = |x| = \sqrt{x^2}$

Propiedad 5.-

$|xy| = |x||y|$

Demostr. Se deja al lector

Propiedad 6.-

$|x/y| = |x|/|y|$ siempre que $y \neq 0$.

Demostr. Si $y \neq 0$, entonces $x = x.y/y$, así que $|x| = |xy/y| = |(x/y)y|$, y por propiedad 5, $|(x/y).y| = |x/y||y|$, así que $|x| = |x/y||y|$, de donde $|x/y| = |x|/|y|$ si $y \neq 0$.

Propiedad 7.-

$|x-y| \leqslant |x+y|$.

Demostr. Por la desigualdad triangular, $|x-y| = |x+(-y)| \leqslant |x| + |-y| = |x| + |y|$, así que $|x-y| \leqslant |x| + |y|$.

Propiedad 8.-

$|x| - |y| \leqslant |x-y|$.

Demostr. $|x| = |x-y+y| = |(x-y)+y| \leqslant |x-y| + |y|$, así que $|x| - |y| \leqslant |x-y|$

Propiedad 9.-

$||x|-|y|| \leqslant |x-y|$.

Demostr. Demostrar que $||x|-|y|| \leqslant |x-y|$ es equivalente a demostrar que $-|x-y| \leqslant |x|-|y| \leqslant |x-y|$, por un teorema anterior; pero por la propiedad 8, sabemos que $|x|-|y| \leqslant |x-y|$, luego solo resta probar que $-|x-y| \leqslant |x|-|y|$.

$|y| = |y-x+x| = |(y-x)+x| \leqslant |y-x| + |x| = |x-y| + |x|$ así que: $-|x-y| \leqslant |x|-|y|$, que era lo que se quería probar .

Combinando las dos desigualdades anteriores , obtenemos :

$$-|x-y| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x-y|,$$ lo que significa :

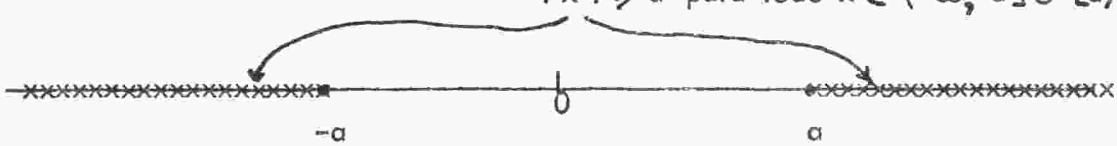
$$||x| - |y|| \leqslant |x-y| .$$

Propiedad 10.-

Si $a \geqslant 0$, $|x| \geqslant a$ si y solo sí $x \geqslant a$ ó $x \leqslant -a$.

El significado geométrico de esta propiedad es que si representamos los números reales en una recta y si $a \geqslant 0$, si un punto x está situado a la derecha de a o a la izquierda de $-a$, entonces a está más próximo a 0 que $|x|$, y recíprocamente.

$|x| \geqslant a$ para todo $x \in (-\infty,-a] \cup [a,+\infty)$



Demostr. Se deja al lector .

EJERCICIOS

1. Cada desigualdad (a_i), de las escritas a continuación, equivale exactamente a una desigualdad (b_i). Por ejemplo $|x| < 3$ es equivalente a $-3 < x < 3$, así que (a_1) es equivalente a (b_2). Determinar todos los pares equivalentes :

(a_1)	$\lvert x\rvert < 3$	(b_1)	$4 < x < 6$
(a_2)	$\lvert x-1\rvert < 3$	(b_2)	$-3 < x < 3$
(a_3)	$\lvert 3-2x\rvert < 1$	(b_3)	$x > 3$ ó $x < -1$
(a_4)	$\lvert 1+2x\rvert \leq 1$	(b_4)	$x > 2$
(a_5)	$\lvert x-1\rvert > 2$	(b_5)	$-2 < x < 4$
(a_6)	$\lvert x+2\rvert \geq 5$	(b_6)	$-\sqrt{3} \leq x \leq -1$ ó $1 \leq x \leq \sqrt{3}$
(a_7)	$\lvert 5-x^{-1}\rvert < 1$	(b_7)	$1 < x < 2$
(a_8)	$\lvert x-5\rvert < \lvert x+1\rvert$	(b_8)	$x \leq -7$ ó $x \geq 3$
(a_9)	$\lvert x^2-2\rvert \leq 1$	(b_9)	$1/6 < x < 1/4$
(a_{10})	$x < x^2 - 12 < 4x$	(b_{10})	$-1 \leq x \leq 0$

Solución : $(a_1) \Longleftrightarrow (b_2)$ ($\Longleftrightarrow$: es equivalente)

(a_2) $|x-1| < 3 \Longleftrightarrow -3 < x-1 < 3 \Longleftrightarrow -2 < x < 4$, según teorema anterior. Luego (a_2) es equivalente a (b_5) .

(a_3) $|3-2x| < 1 \Longleftrightarrow -1 < 3-2x < 1 \Longleftrightarrow -4 < -2x < -2 \Longleftrightarrow 2 < 2x < 4$, lo cual es equivalente a $1 < x < 2$. Así que (a_3) es equivalente a (b_7)

(a_4) $|1+2x| \leq 1 \Longleftrightarrow -1 \leq 1+2x \leq 1 \Longleftrightarrow -2 \leq 2x \leq 0 \Longleftrightarrow -1 \leq x \leq 0$. Así que ($a_4$) es equivalente a ($b_{10}$) .

(a_5) $|x-1| > 2 \Longleftrightarrow x-1 > 2$ ó $x-1 < -2$, según propiedad 10, pero esto último es equivalente a $x > 3$ ó $x < -1$, por tanto (a_5) es equivalente a (b_3)

(a_6) $|x+2| \geq 5 \Longleftrightarrow x+2 \geq 5$ ó $x+2 \leq -5$, según propiedad 10, pero esto último es equivalente a $x \geq 3$ ó $x \leq -7$, Luego (a_6) es equivalente a (b_8).

(a_7) $|5-x^{-1}| < 1 \Longleftrightarrow -1 < 5-x^{-1} < 1 \Longleftrightarrow -6 < -x^{-1} < -4 \Longleftrightarrow 4 < x^{-1} < 6$, y por propiedad de los números reales, esto último es equivalente a $1/6 < x < 1/4$.

(a_{10}) $x < x^2-12 < 4x$. Para encontrar la solución de esta doble desigualdad, consideramos por separado las desigualdades a) $x < x^2-12$ y b) $x^2-12 < 4x$.

a) $x < x^2-12 \Leftrightarrow 0 < x^2-x-12 \Leftrightarrow 0 < (x-4)(x+3)$.

Por propiedad anterior, $(x-4)(x+3) > 0 \Leftrightarrow (x-4) > 0$ y $x+3 > 0)$ ó $(x-4 < 0$ y $x+3 < 0)$. lo cual es equivalente a $(x > 4$ y $x > -3)$ ó $(x < 4$,y,$x < -3)$, que es equivalente a $x > 4$ ó $x < -3$.

b) $x^2-12 < 4x \Leftrightarrow x^2-4x-12 < 0 \Leftrightarrow (x-6)(x+2) < 0$, que, nuevamente, por propiedad anterior es equivalente a: $(x-6 < 0$ y $x+2 > 0)$ ó $(x-6 > 0$ y $x+2 < 0)$, que es equivalente a $(x < 6$ y $x > -2)$ ó $(x > 6$ y $x < -2) \Leftrightarrow -2 < x < 6$. En total la doble desigualdad $x < x^2-12 < 4x$ es equivalente a $(x > 4$ ó $x < -3)$ y $-2 < x < 6$, que es equivalente a $4 < x < 6$.

Ver la siguiente ilustración gráfica de las soluciones de a) y b) .

La solución de la desigualdad $x < x^2-12 < 4x$ es lo doble rayado .

(a_{10}) es por tanto equivalente a (b_1) .

2.- Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es cierta o falsa. En cada caso, razonar la decisión .

a) $x < 5$ implica $|x| < 5$.
Falsa, pues $-20 < 5$ sinembargo $|-20| = 20 \nless 5$

b) $|x-5| < 2$ implica $3 < x < 7$.
$|x-5| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-5 < 2 \Leftrightarrow 3 < x < 7$. Como $|x-5| < 2$ es equivalente a $3 < x < 7$, en particular $|x-5| < 2$ implica $3 < x < 7$. Así que la afirmación es cierta.

c) $|1+3x| \leq 1$ implica $x \geq -2/3$.
$|1+3x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 1+3x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 3x \leq 0 \Leftrightarrow -2/3 \leq x \leq 0$.
Luego : $|1+3x| \leq 1$ es equivalente a $-2/3 \leq x \leq 0$ lo cual es equivalente a $-2/3 \leq x$ y $x \leq 0$, lo cual, en particular implica $-2/3 \leq x$. Luego la afirmación es cierta .