



Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín
Facultad de Ciencias - Escuela de Física

MATERIA OSCURA A PARTIR DEL SECTOR ESCALAR DE MODELOS 3-4-1

Tesis de Maestría para optar al Título de Magister en Ciencias-Física
Presentada por Sally Valbuena Burbano

Director:
Dr. Luis Alberto Sanchez Duque
Profesor - Grupo Física Teórica

15 de febrero de 2013

Dr. Luis Alberto Sanchez Duque
Director de Tesis
Escuela de Física
Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

Dr. Diego Restrepo Quintero
Jurado
Instituto de Física
Universidad de Antioquia

Dr. Daniel Esteban Jaramillo Arango
Jurado
Instituto de Física
Universidad de Antioquia

Dedicado a Fulla, Bart y mi hermana Adriana.

Tabla de contenido

Índice de figuras	VII
Introducción	IX
1. Materia oscura en un universo en expansión	1
1.1. Las ecuaciones de Friedmann	1
1.2. Corrimiento al rojo	4
1.3. Termodinámica de la expansión del universo	5
1.4. Naturaleza, evidencia y detección de materia oscura	7
1.4.1. Lentes gravitatorias	9
1.4.2. Curvas de rotación de galaxias	10
2. Modelos de materia oscura.	13
2.1. Materia oscura bariónica	13
2.2. Materia oscura no bariónica	14
2.2.1. Materia oscura caliente	14
2.2.2. Materia oscura fría	15
2.3. Materia oscura escalar autointeractuante	16
3. Candidatos a Materia Oscura/Sector escalar 3-4-1	19
3.1. Simetría gauge $SU(3)_c \otimes SU(4)_L \otimes U(1)_x$	19
3.2. Modelo A: Potencial escalar	20
3.3. Sector Escalar mínimo	21
3.4. Acoples Trilineales entre escalares y Bosones Gauge	23
3.5. Cota de Spergel-Steinhardt	26
3.6. Densidad cósmica	27
4. Conclusiones	29
A. El Mecanismo Higgs	31
A.1. El bosón Higgs	33
B. Extensión $SU(3) \otimes SU(4) \otimes U(1)$	35
B.1. El sector escalar	36
C. Anomalías en el 3-4-1	39
D. Parámetros cosmológicos	41
D.1. Algunas constantes y parámetros en Cosmología	41
D.2. Algunas conversiones de unidades usadas:	42
Bibliografía	43

Índice de figuras

1.1. Rayos X, obtenidos por el satélite ROSAT, de las galaxias en el cúmulo de Virgo, en el grupo de galaxias NGC 2300. Créditos: NASA.	8
1.2. Esquema del efecto de lentes gravitatorias. Un rayo de luz viaja desde la fuente S al observador O pasando la lente en un parámetro de impacto ξ . La distancia transversal entre el eje óptico es η . El rayo de luz se desvía a través de un ángulo $\hat{\alpha}$, las separaciones angulares de la fuente y la imagen desde el eje óptico se denotan por β y θ , respectivamente. Las distancias entre, observador y la fuente, observador y la lente y la fuente y la lente son D_s , D_d y D_{ds} , respectivamente. Imagen cortesía de Mathias Bartelmann	10
1.3. Presencia de materia oscura. Grupo de galaxias conocido como MACSJ0025.4-1222. Explosión de las galaxias. Créditos: NASA.	11
1.4. Curva de rotación observada de NGC 2403 (puntos) y las curvas de rotación de los componentes de masa (líneas). De Begeman (1987).[29]	11

Introducción

En este trabajo se muestra que dos campos escalares neutros, los cuales se identifican realizando una exploración en el sector escalar de la extensión $SU(3)_c \otimes SU(4)_L \otimes U(1)_x$ (extensión 3-4-1[1]) de la simetría del Modelo Estándar, son candidatos realistas a materia oscura autointeractuante generada térmicamente.

El sofisticado Modelo Estándar (ME), con simetría gauge local $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_x$, el cual identifica las partículas de interacciones fundamentales: las interacciones fuerte, débil y electromagnética, excluyendo la gravitacional, entre los fermiones elementales: quarks y leptones, logra describir con precisión las interacciones ya mencionadas hasta energías del orden de los 5 TeV, pero no resulta del todo satisfactorio, pues, por ejemplo deben determinarse las nueve masas de los leptones cargados y de los quarks, las constantes de acople y algunos otros parámetros a partir de los experimentos, el modelo tampoco incluye la materia oscura. Ante esto surge la idea de extender el modelo con el propósito de dar respuesta a algunas preguntas que no soluciona el modelo estándar, bien añadiendo nuevos campos fermiónicos, aumentando el sector escalar a más de una representación de Higgses, o ampliando el grupo gauge local. En esta última dirección $SU(4)_L \otimes U(1)_x$ como un grupo de sabor, ha sido estudiado previamente en las referencias [1, 2], explorando las distintas posibilidades de contenido fermiónico y de los bosones Higgs.

Una de las motivaciones para el estudio de la extensión 3-4-1 radica en el interés por responder a la pregunta, que no soluciona el ME , de por qué existen tres familias fermiónicas en la naturaleza. El modelo clarifica esto teniendo en cuenta la replicación de familias, relacionando el número de familias al número de colores de la interacción fuerte, a través del requerimiento de la cancelación de anomalías. Mientras que las anomalías se cancelan para cada familia individualmente en el ME , éstas se cancelan en este nuevo modelo cuando todas las tres familias son incluidas (modelos de 3 familias).

Diferentes clases de modelos 3-4-1 han sido construidos, los cuales se diferencian entre sí por la forma como el generador de carga eléctrica $Q = T_{3L} + \frac{b}{\sqrt{3}}T_{8L} + \frac{c}{\sqrt{6}}T_{15L} + XI_4$ es inmerso en el grupo de simetría $SU(4)_L \otimes U(1)_x$. Existen entonces modelos que incluyen partículas elementales con cargas eléctricas exóticas (distintas de $\pm 1/3$, $\pm 2/3$, ± 1 , 0 , en unidades de la carga del electrón) [3], y modelos en los que todas las partículas, tanto en el sector de bosones de gauge como en el escalar y en el fermiónico, tienen solo cargas eléctricas ordinarias [2, 4]. Una clasificación sistemática de todos los posibles modelos con simetría 3-4-1, libres de anomalías quirales y sin cargas eléctricas exóticas, ha sido llevada a cabo en la referencia [2], mientras que en la referencia [4] se han estudiado las implicaciones fenomenológicas de algunos de esos modelos. Se ha mostrado que solo existen dos clases de modelos 3-4-1 sin cargas exóticas caracterizados por los valores $b = c = 1$ (Modelos tipo A) y $b = 1, c = -2$ (Modelos tipo B) de los parámetros en el generador de carga eléctrica. En la clase

A existen dos modelos en los que la cancelación de anomalías se da entre familias (modelos de tres familias), mientras que en la clase B existen dos modelos en los que las anomalías se cancelan familia por familia (modelos de una familia), y dos modelos de tres familias [2].

Sentado esto, la extensión 3-4-1 del ME exige la inclusión de campos exóticos, razón por la cual los diferentes modelos 3-4-1 deben involucrar, en general, dos escalas de energía: una escala del orden de 1 TeV asociada al rompimiento de la simetría 3-4-1 y otra escala del orden de los 100 GeV asociada al rompimiento de la simetría 3-3-1 que conduce a la simetría del ME . Los campos escalares necesarios en cada modelo se seleccionan a partir del Lagrangiano de Yukawa, el cual acopla el sector escalar con el fermiónico, de tal manera que el rompimiento espontáneo de la simetría proporcione masas tanto para las partículas exóticas como para las ordinarias, y de tal manera que, al mismo tiempo, el alineamiento del vacío respete el esquema de rompimiento: $SU(4)_L \otimes U(1)_x \rightarrow SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q$. En modelos sin cargas eléctricas exóticas y sin exigir términos de masa para los neutrinos a nivel árbol, estos criterios conducen a la necesidad de cuatro 4-pletos de Higgses [2, 4], o un sector mas económico la necesidad de tres 4-pletos de Higgses. Es manifiesto entonces que después del rompimiento espontáneo de la simetría e identificados los bosones de Goldstone, el sector escalar de modelos 3-4-1 posee, en general, un número importante de campos físicos escalares y masivos, tanto cargados como neutros tipo CP-par y CP-impar.

De otro lado, evidencia experimental obtenida en parte a partir de las curvas de rotación de las galaxias y de que supernovas tipo I_a con alto corrimiento al rojo son menos brillantes de lo esperado, soporta la idea de que más del 95% del contenido de materia-energía en el universo es de naturaleza desconocida [5]. Esta es la llamada “componente oscura” de la cual el 26.8% está en forma de materia de naturaleza no bariónica (materia oscura) que interactúa muy débilmente con la materia ordinaria, y el 68.3% en forma de energía (energía oscura). Las teorías de formación de estructuras de grande escala en el universo deben entonces incluir los efectos dinámicos de esta componente oscura y, en este contexto, se ha construido un modelo exitoso de formación de galaxias: el modelo Materia Oscura Fría con constante cosmológica (Lambda C.D.M.) [6], donde el adjetivo fría se refiere al hecho de que es materia oscura formada por partículas que se desacoplaron de la materia ordinaria cuando ya no eran relativistas. El modelo, sin embargo, predice regiones centrales de las galaxias que son demasiado densas en comparación con la evidencia experimental [7]. Una solución elegante a este impasse ha sido la de proponer materia oscura de naturaleza escalar y auto-interactuante, con una alta sección eficaz de dispersión y muy débil interacción con la materia ordinaria [8]. Si las partículas de materia oscura interactúan entre sí, conducen calor y esto permite la expansión del centro galáctico disminuyendo así su densidad. Escalares en el rango de los MeV y acoples a la materia ordinaria de orden $1/M_\pi$ (donde M_π es la masa de Planck), fueron propuestos por primera vez como materia oscura auto-interactuante en la referencia [5] y han sido propuestos como candidatos para explicar los flujos de fotones de 511 KeV a partir de la protuberancia galáctica [6]. Para que este escenario sea adecuado se requiere que las partículas de materia oscura obedezcan la llamada cota de Spergel-Steinhardt [8], según la cual el cociente entre su sección eficaz de dispersión y su masa debe estar entre $2 \times 10^3 (GeV)^{-3}$ y $3 \times 10^4 (GeV)^{-3}$. Esto ha motivado la búsqueda de posibles candidatos a materia oscura en modelos de partículas elementales cuyo sector escalar contenga un número importante de campos escalares neutros en comparación con el ME , y los modelos 3-4-1 tienen esta característica.

Varios autores han propuesto modelos en los que, de manera “ad hoc”, se adicionan al modelo estándar un singlete escalar que obedece la cota de Spergel-Steinhardt y una simetría adicional (usualmente una $U(1)$) que impide la interacción de la materia oscura con la ordinaria [5, 12]. Desde este punto de vista, es preferible la identificación de candidatos escalares a materia oscura que estén presentes naturalmente en el sector escalar de un modelo de física de partículas elementales, sin necesidad de adicionar nuevos campos ni de introducir simetrías extras, así que los modelos 3-4-1, teniendo en su espectro una serie de campos físicos masivos en el sector escalar neutro tanto CP-par como CP-impar, conllevan a creer que los parámetros relevantes del Lagrangiano escalar en algunos de esos modelos puedan elegirse de tal manera que por lo menos uno de esos escalares satisfaga las condiciones para ser considerado como candidato a materia oscura. En consecuencia, en este trabajo se muestra que el sector escalar de un modelo de física de partículas elementales, la extensión 3-4-1 del ME , posee una rica estructura con la capacidad de proporcionar candidatos a materia oscura en el universo. Este mismo problema fue estudiado previamente en las referencias [9, 10, 11] en el marco de la extensión $SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_x$ (modelos 3-3-1) de la simetría del modelo estándar.

Para realizar entonces este trabajo, se tomaron los resultados de la referencia [1], en la cual fue determinado el sector escalar más económico posible para modelos 3-4-1 de tres familias y sin cargas eléctricas exóticas, el cual está constituido por tres 4-pletos de Higgses que resultan necesarios y suficientes para obtener los 15 bosones de Goldstone requeridos por el esquema de rompimiento $SU(4)_L \otimes U(1)_x \rightarrow SU(3)_L \otimes U(1)_z \rightarrow SU(2)_L \otimes U(1)_y \rightarrow U(1)_Q$. Se encuentra en dicha referencia que para modelos tipo A hay un escalar neutro CP-impar y uno neutro CP-par, singletes de $SU(2)$, con acoples débiles a las partículas del ME , que son los identificados como candidatos a materia oscura. De igual manera, se identifica un posible candidato a materia oscura escalar en modelos tipo B: un escalar neutro CP-impar, que por ser singlete de $SU(2)$ debería tener acoples débiles con la materia ordinaria.

La presentación de las diferentes clases de materia oscura propuestas en la literatura, profundizando en la materia oscura escalar autointeractuante, y de los cálculos que dan cuenta de que aquellos candidatos a materia oscura escalar autointeractuante ya identificados en modelos 3-4-1 de la referencia [1] son realistas, serán los temas que ocuparán este trabajo.

En el primer capítulo se presentará una revisión sobre la dinámica de la expansión del universo, las evidencias experimentales de la existencia de materia oscura, y se discutirán dos clases de materia oscura: de naturaleza bariónica y de naturaleza no bariónica. En el segundo capítulo se hará un revisión del modelo de materia oscura fría de naturaleza escalar y autointeractuante con alta sección eficaz de dispersión y despreciable aniquilación. En el tercer capítulo, en el contexto del modelo 3-4-1, se presentará el estudio detallado de los escalares físicos neutros, tanto CP-par como CP-impar, identificando los parámetros del Lagrangiano escalar que intervienen en sus interacciones y las condiciones necesarias para que los escalares identificados sean candidatos realistas de materia oscura, tales como la consistencia con la cota de Spergel-Steinhardt, que interactuen débilmente con las partículas del ME , que no sean relativistas al momento de su desacople de las demás partículas (materia oscura fría) y que no sobrepueblen el universo. Por último se presentarán las conclusiones.

Capítulo 1

Materia oscura en un universo en expansión

En este capítulo se estudian primero las ecuaciones de Friedmann que describen la expansión de un Universo homogéneo e isótropo dentro del contexto de la Teoría General de la Relatividad, el mecanismo de corrimiento hacia el rojo y la termodinámica de la expansión. Posteriormente se revisan los aspectos más relevantes de la materia oscura, su posible naturaleza, la evidencia experimental de la existencia de materia oscura y los parámetros más importantes para su análisis.

Mayores detalles pueden encontrarse en las referencias [22], [23], [25], [26].

1.1. Las ecuaciones de Friedmann

En la teoría de la relatividad la distancia (o intervalo) ds entre dos puntos del espacio-tiempo x^μ y $x^\mu + dx^\mu$, está dada por el producto escalar [22]

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad (1.1)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico el cual describe la geometría del espacio-tiempo. Para grandes escalas de distancia, sobre las que se encuentran las galaxias ($\sim 10^{21}m$), se asume un universo isótropo y homogéneo. A esta suposición se le suele denominar “Principio Cosmológico”¹. Ahora consideremos un concepto muy importante, el “observador comóvil” (o fundamental), aquel que se mueve junto con la expansión del Universo y en reposo respecto al promedio de la materia en sus alrededores. Así, en un tiempo cósmico dado, todos los puntos en el espacio son equivalentes a observadores comóviles y podemos entonces escoger la coordenada de tiempo cósmico t de tal manera que los elementos de espacio-tiempo sean:

$$ds^2 = dt^2 - g_{ij}(\mathbf{x}, t)dx^i dx^j, \quad (1.2)$$

donde $i, j = 1, 2, 3$ corre sobre las coordenadas espaciales, y \mathbf{x} es un vector espacial. Además, si el espacio es homogéneo su curvatura debe ser la misma en todas partes, entonces una superficie tridimensional de curvatura constante y positiva podemos

¹Término introducido en 1933 por el astrónomo británico Edward Arthur Milne y formulado por primera vez por Albert Einstein alrededor de 1915, cuando todavía los astrónomos consideraban al sistema de estrellas de la Vía Láctea como todo el universo conocido, y los análisis estadísticos de la distribución estelar mostraban un sistema ligado con forma de disco achatado y por tanto claramente inhomogéneo.

pensarla como una 3-esfera (extensión natural de la superficie esférica bidimensional que conocemos) inmersa en el espacio de 4-dimensiones². Más generalmente la ecuación para un superficie de curvatura constante es:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{x_4^2}{k} = \frac{R(t)^2}{k}, \quad (1.3)$$

con

$$k = \begin{cases} 1, & \text{curvatura positiva (espacio esférico, cerrado)} \\ 0, & \text{curvatura cero (espacio plano, abierto)} \\ -1, & \text{curvatura negativa (espacio hiperbólico, abierto)} \end{cases}$$

Por “cerrado” se entiende un espacio que tiene una extensión finita, aunque no tenga “orillas”, justo como la superficie de una esfera. Por “abierto”, en cambio, se entiende un espacio con extensión infinita, como un plano o un hiperboloide.

La curvatura está dada por

$$K = \frac{k}{R(t)^2}, \quad (1.4)$$

tal que $R(t)$ determina la magnitud de la curvatura en cualquier tiempo cósmico. Ahora, empleando coordenadas polares podemos determinar la métrica espacial g_{ij} en (1.2) para un universo isotrópico y homogéneo. Recordemos que hay tres diferentes geometrías que cumplen las condiciones de isotropía y homogeneidad. Estas geometrías se pueden escribir como:

$$ds^2 = dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (1.5)$$

$R(t)$ es un factor de escala cósmico llamado *parámetro de expansión* que depende del tiempo, el cual determina la escala de longitud y se incrementa a medida que el universo se expande, rompiendo así la invarianza de Lorentz, mientras r , θ y ϕ son “coordenadas comóviles”, las cuales permanecen fijas para los objetos que sólo tienen el movimiento asociado a la expansión del universo. La ecuación (1.5) es la llamada “métrica de **Robertson-Walker**”(RW)³

De acuerdo a (1.5), el único elemento indeterminado es el factor de escala del universo $R(t)$. Así, para describir la evolución de este factor, y con esto la dinámica del universo, sustituiremos la métrica RW (1.5) en las ecuaciones de Einstein dadas por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

en la que está incluida la constante cosmológica Λ , la constante gravitacional de Newton G_N (D.1), el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, el escalar de Ricci R , la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$ y el tensor momento-energía $T_{\mu\nu}$. Este tensor, para materia de densidad ρ moviéndose con una velocidad \mathbf{v} y presión ($p(t)$) dependientes del tiempo, debe tomar la forma de un fluido perfecto a fin de cumplir la condición de un universo isotrópico y homogéneo, así:

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)U_\mu U_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

donde $U_\mu \equiv dx_\mu/d\tau$ ($U_0 \equiv dt/d\tau = \gamma$, con γ el factor de Lorentz), es el 4-vector velocidad.

²Este espacio no es el espacio-tiempo; es un espacio ficticio inventado para calcular la métrica.

³Las componentes del tensor métrico, en coordenadas polares son: $g_{00} = 1$, $g_{rr} = -\frac{R^2}{1-kr^2}$, $g_{\theta\theta} = -R^2 r^2$ y $g_{\phi\phi} = -R^2 r^2 \sin^2 \theta$ con $g^{ii} = (g^{ii})^{-1}$ para $i = r, \theta, \phi$.

Sustituyendo (1.5), se encuentran las llamadas **ecuaciones de Friedmann**, las cuales determinan la dinámica del universo:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{4\pi G_N \rho}{3} \quad (1.8)$$

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G_N \rho}{3} - \frac{k}{R^2}, \quad (1.9)$$

con H el parámetro de Hubble. En estas se ha considerado que en la época actual es la materia, que no ejerce ninguna presión, lo que determina la dinámica del universo y Λ muy pequeña.

UN POCO DE HISTORIA: El mayor paso en el desarrollo de la cosmología fue la observación hecha por Hubble en 1929⁴. Esta observación llevó a reconocer que la velocidad con que las galaxias se alejan unas de otras es proporcional a su distancia, es decir $\dot{R} = HR$, con H la “constante” de proporcionalidad, el parámetro de Hubble. Las estimaciones actuales del parámetro de Hubble (que depende de la escala de tiempo del universo y por esto no se le llama constante) es

$$H_0 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)_0 = h_0 \times 100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \approx h_0 / 10^{10} \text{ años}, \quad (1.10)$$

donde h_0 , en el rango de $\frac{1}{2}$ a 1, incorpora las incertidumbres observacionales.

Con H_0 ⁵ podemos estimar la edad del universo, debido a que su inversa es el llamado tiempo de Hubble, como sigue:

$$t_0 \sim H_0^{-1}. \quad (1.11)$$

Para esto se acostumbra escribir la constante de Hubble en unidades de $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ y en función del parámetro adimensional h

$$H_0 = 100 \text{ h km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (1.12)$$

Con el principal propósito de determinar este parámetro H_0 , en el año 1990 el telescopio espacial Hubble (HST) fué puesto en órbita y para el 2001 se reveló un valor de $72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, lo que refería que la edad del universo era de unos 10,000 millones de años, sin embargo esto no parecía cobijar edades de las estrellas más antiguas, con unos 14000 millones de años. Paralelamente, observaciones de supernovas lejanas revelaron que existe algún otro factor que acelera la expansión del universo, al que se le dio el nombre de energía oscura.

Para el año 2001 se lanzó el satélite WMAP para estudiar la radiación cósmica de fondo y se obtuvo un valor para H de $70 \pm 2, 4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. En los últimos años, experimentos de precisión han permitido obtener el resultado $H = 71 \pm 0, 03 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, lo que nos da a la fecha el valor más preciso para la edad del universo, unos $13, 7 \pm 0, 2$ mil millones de años.

Volviendo a las ecuaciones de Friedmann, de (1.9) podemos definir, para cualquier instante, la llamada densidad crítica (ver (D.9))

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G_N}. \quad (1.13)$$

⁴Sobre la base de mediciones de corrimientos al rojo (z) para 22 galaxias cercanas, y usando distancias estimadas, que por un factor de ~ 10 no fueron acertadas, se reconoció un universo en expansión.

⁵El subíndice 0 denota el tiempo presente.

Según las observaciones, la densidad de materia bariónica ρ_B es mucho menor que (1.13), $\rho_B \approx 0,01\rho_c$. Sin embargo, la densidad de materia-energía ρ no puede ser tan diferente a ρ_c pues si $\rho \geq \rho_c$ la desaceleración (D.3) podría ser tan grande que el universo se hubiera contraído de nuevo antes de que las estrellas hubieran tenido tiempo de evolucionar, y si $\rho \leq \rho_c$ el universo se habría expandido tan rápidamente que la materia no se hubiera condensado en galaxias y estrellas.

Es conveniente entonces introducir el *parámetro de densidad*

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = 1 + \frac{k^2}{R^2 H^2} = 2q \quad \text{con } 0,01 \leq \Omega \leq 4, \quad (1.14)$$

donde el límite inferior proviene de la materia luminosa observada y el límite superior del parámetro de desaceleración. Las observaciones actuales sugieren que el universo es plano, favoreciendo el hecho de que $\Omega \approx 1$.

1.2. Corrimiento al rojo

Como ya habíamos especificado la edad del universo es de unos 13,7 mil millones de años, esta estimación surge considerando el corrimiento hacia el rojo⁶ (especie de efecto doppler) que muestran las estrellas y galaxias más lejanas en su espectro de luz. Por ejemplo la luz que recibimos de una estrella que se aleja de nosotros está desplazada hacia longitudes de onda más largas (hacia el extremo rojo del espectro, de manera análoga a como el sonido de una fuente ruidosa en movimiento suena más agudo de lo normal cuando se acerca a nosotros y más grave cuando se aleja), esta afirmación se conoce como la **ley de Hubble**: “Cuando más lejos se halla una galaxia, mayor es su corrimiento al rojo”. Otro aspecto importante, es el hecho de que en las observaciones no se presente, entre las galaxias más distantes, ningún desplazamiento hacia el azul sino hacia el rojo, confirmando el hecho de estar en un universo en expansión y no en contracción.

Dada entonces la importancia del corrimiento al rojo, introduciremos otra variable llamada el desplazamiento al rojo z , relacionada con el parámetro de expansión pero que es directamente observable. Definimos por consiguiente el corrimiento al rojo de una fuente luminosa, por ejemplo una galaxia distante, por [25]

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (1.15)$$

donde λ_0 es la longitud de onda de radiación de la fuente observada en O (origen de nuestro sistema de coordenadas) en un t_0 y emitido por la fuente en algún tiempo menor t_e , la fuente se mueve con la expansión del universo y está en una coordenada comóvil r . La longitud de onda de radiación emitida por la fuente es λ_e . La radiación viaja a lo largo de una geodésica nula, $ds^2=0$, y entonces de la métrica RW se sigue

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_0^r \frac{dr}{(1 - Kr^2)^{1/2}} = f(r). \quad (1.16)$$

La luz emitida desde la fuente en el instante $t'_e = t_e + \delta t_e$ alcanza al observador en $t'_0 = t_0 + \delta t_0$. Dado que $f(r)$ no cambia, ya que r es una coordenada comóvil y tanto la fuente como el observador se mueve con la expansión, podemos escribir

$$\int_{t'_e}^{t'_0} \frac{dt}{R(t)} = f(r). \quad (1.17)$$

⁶Un incremento en la longitud de onda λ de radiación electromagnética. El decrecimiento en la λ de la radiación electromagnética se llama corrimiento al azul.

Si δt y δt_0 son pequeños, las ecuaciones (1.16) y (1.17) conllevan a

$$\frac{\delta t_0}{R(t_0)} = \frac{\delta t}{R(t_e)}. \quad (1.18)$$

Si $\delta t = \frac{1}{\nu_e}$ y $\delta t_0 = \frac{1}{\nu_0}$, con ν_e y ν_0 las frecuencias de la luz emitidas y observadas respectivamente, tendremos

$$\nu_e R(t_e) = \nu_0 R(t_0) \iff \frac{R(t_e)}{\lambda_e} = \frac{R(t_0)}{\lambda_0} \quad (1.19)$$

de lo cual

$$1 + z = \frac{R(t_0)}{R(t_e)}. \quad (1.20)$$

En un universo en expansión: $R(t_0) > R(t_e)$ entonces $z > 0$, lo que está de acuerdo con las observaciones.

1.3. Termodinámica de la expansión del universo

En la actualidad nuestro universo contiene una radiación cósmica de fondo (CMB), con un espectro de cuerpo negro a $T = 2,725K$, la cual indica que la materia estaba distribuida homogénea e isotrópicamente, así como en equilibrio térmico en los inicios del universo, es decir en un intervalo de 10^{-43} (tiempo de Planck) luego de la “gran explosión”. En este equilibrio, según la física estadística de Fermi-Dirac (FD) o de Bose-Einstein (BE), la función de distribución es [26]

$$f(|\vec{p}|) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1}, \quad (1.21)$$

con el signo + correspondiente a la distribución de FD (fermiones), y el signo – a la de BE (Bosones), T la temperatura relacionada con la densidad de energía, μ el potencial químico que, para reacciones en equilibrio, es cero y E la energía de las partículas relacionadas con el momento $p = \gamma mv$ como $E(\vec{p}) = \sqrt{p^2 + m^2}$. La densidad numérica de partículas, se obtiene integrando la función de distribución (1.21) sobre todos los momentos:

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty f(|\vec{p}|) d^3\vec{p}, \quad (1.22)$$

donde g es el peso estadístico del estado y $(2\pi)^3$ es el volumen de la celda unitaria en el espacio fase. Similarmente, la densidad de energía ρ es:

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty f(|\vec{p}|) E(|\vec{p}|) d^3\vec{p}, \quad (1.23)$$

Ahora para obtener la presión, usamos el hecho de que $P = n \langle p^2/E \rangle / 3$, así que:

$$P = \frac{g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{|\vec{p}|^2}{3E} f(|\vec{p}|) d^3\vec{p}. \quad (1.24)$$

Las anteriores integrales sólo pueden resolverse de manera numérica, pero existen 2 límites con los cuales se pueden encontrar resultados analíticos importantes. El primero es el caso ultra-relativista, en el cual se considera la masa de las partículas

despreciables, es decir $T \gg m$ y el segundo límite es $T \ll m$, el cual es un caso no relativista.

Para $T \gg m$ obtenemos el límite ultra-relativista [28]

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \begin{cases} \frac{3}{4\pi^2} \zeta(3) g T^3 & \text{fermiones} \\ \frac{1}{\pi^2} \zeta(3) g T^3 & \text{bosones} \end{cases} \quad (1.25)$$

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \begin{cases} \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g T^4 & \text{fermiones} \\ \frac{\pi^2}{30} g T^4 & \text{bosones} \end{cases} \quad (1.26)$$

$$P = \frac{g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \frac{1}{3} \rho \approx \begin{cases} 1,0505 n T & \text{fermiones} \\ 0,9004 n T & \text{bosones,} \end{cases} \quad (1.27)$$

donde $\zeta(3)$ es la función de Riemann, con $\zeta(3) \equiv \sum_{n=1}^\infty (1/n^3) = 1,20206$.

Para $T \ll m$ y $T \gg |\mu|$, obtenemos el límite no relativista

$$n = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-(m-\mu)/T} \quad (1.28)$$

$$\rho = n \left(m + \frac{3T}{2} \right) \quad (1.29)$$

$$P = nT \ll \rho \quad (1.30)$$

La dependencia exponencial en (1.28) muestra que la densidad de equilibrio de las partículas decae abruptamente cuando T cae por debajo de m . A esta temperatura se le conoce como “umbral”, aquella a partir de la cual los fotones tienen suficiente energía para crear pares partícula-antipartícula. La temperatura umbral es menor para partículas de menor masa, las cuales permanecen en equilibrio con la radiación de fondo hasta tiempos más tardíos (temperaturas más bajas). Por debajo del umbral, las partículas se desacoplan del fondo de radiación.

Finalmente, de acuerdo a las ecuaciones de Friedmann (1.9), la expansión del universo es gobernado por una densidad total de energía

$$\rho(T) = \sum_i \rho_i(T), \quad (1.31)$$

donde i corre sobre r especies de partículas. Mientras la densidad de energía de especies relativistas sean más grandes que las especies no relativistas, basta con incluir las especies relativistas solamente. Tenemos por tanto

$$\rho(T) = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4, \quad (1.32)$$

donde

$$g_*(T) = g_b(T) + \frac{7}{8} g_f(T), \quad (1.33)$$

es el número efectivo de grados de libertad, con $g_b = \sum_i g_i$ para bosones relativísticos y $g_f = \sum_i g_i$ para fermiones relativísticos.

Reemplazando (1.32) en (1.9), con $k = 0$ y para periodos en los que g_* sea constante, se obtiene

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho(T)} = \sqrt{\frac{4\pi^3}{45}} \sqrt{g_*} \frac{T^2}{M_P}, \quad (1.34)$$

con $G = M_P^{-2}$, donde M_P es la masa de Planck (D.7).

1.4. Naturaleza, evidencia y detección de materia oscura

Evidencias experimentales refieren que de nuestro universo solo conocemos un 4,9% (hidrógeno, helio, estrellas, neutrinos y elementos pesados), y el restante, llamado componente oscura, aun es de naturaleza desconocida. Podría indicarse que la componente oscura se divide en **energía oscura** y materia oscura.

La primera, de un 68,3%, parece estar distribuida uniformemente por todo el universo y responde de forma antigravitatoria, esto es, la consideración de una presión negativa y por ende el hecho de que nuestro universo está en expansión acelerada. Dicho de una manera mas explícita, ya que la aceleración de la expansión del universo, en el marco de la relatividad general, está controlada por $(\rho + 3P)$, con ρ como la densidad y P la presión, cuando $(\rho + 3P) > 0$, la gravedad total resultante es atractiva y la expansión se desacelera. Por el contrario, cuando $(\rho + 3P) < 0$ la gravedad muestra efectos repulsivos y la expansión del universo se acelera. Es así como la energía oscura, genera suficiente presión negativa para que el universo acelere su expansión. Este es el resultado experimental observado por el corrimiento al rojo del espectro de las supernovas tipo I_a , las cuales superan en brillo al conjunto de estrellas de su galaxia de origen, lo que resulta una de las pocas formas que tenemos de conocer a qué distancia se encuentran las galaxias más lejanas.

Con las observaciones a un conjunto de supernovas tipo I_a , ocurrió que al medir la distancia por medio del corrimiento al rojo observado, se obtenía una distancia menor de la que debería ser a juzgar por la intensidad de la luz recibida, este resultado solo podía interpretarse de manera que la energía oscura fuera la causa de la expansión acelerada del universo, más lenta en el pasado que en la actualidad, con lo que el universo necesitó más tiempo para alcanzar la separación actual de objetos y por tanto la luz de la supernova tardó más tiempo en llegar hasta nosotros, implicando una mayor distancia aparente y consecuentemente un menor brillo aparente.

Otras observaciones indican la existencia de la energía oscura, como son las anisotropías de la radiación cósmica de fondo⁷ y las lentes gravitatorias, adicionalmente se considera una constante cosmológica en las ecuaciones de Einstein que logra explicar la energía oscura, dicha constante actúa en algunas ecuaciones como un fluido con presión negativa, siendo compatible con las observaciones.

La segunda, de un 26,8%, se conoce como **materia oscura**, y a diferencia de la energía oscura suele ser responsable de la formación de la estructura cósmica de gran escala en el universo. La dinámica del universo, y de sus objetos, es afectada por este tipo de materia, la cual es detectada por sus efectos gravitacionales, en oposición a la materia luminosa que puede detectarse por las ondas electromagnéticas que emite.

La materia oscura mantiene bariones juntos para formar galaxias, grupos y cúmulos de galaxias, estas contienen insuficiente masa para proporcionar la intensidad gravitacional que las mantenga juntas, así que la materia oscura proporciona la fuerza gravitacional necesaria para esto.

La naturaleza de la materia oscura suele ser objeto de estudio y se han presentado diferentes modelos a fin de conocer su contenido. Entre las categorías de la materia oscura está la de naturaleza bariónica, cuyos candidatos podrían ser los gases luminosos, planetas (“Júpiter”), las enanas marrones y negras, agujeros negros, objetos compactos y masivos de los halos galácticos, llamados MACHOs (massive astrophysical compact halo object), entre otros. Sin embargo, hasta el momento los resultados obtenidos pa-

⁷Debido a que la radiación y la materia en el universo temprano estaban en equilibrio térmico, las fluctuaciones en la materia necesariamente producían fluctuaciones en la radiación o anisotropías en su temperatura.

recen indicar que incluso sumando la masa estimada de todos los MACHOs existentes alrededor de nuestra galaxia, ese valor sería suficiente para dar cuenta de apenas un 20 % de toda la materia oscura presente en la Vía Láctea. Otras contrariedades de la materia oscura bariónica sucede de la diferencia radical de la radiación cósmica de fondo de acuerdo con las observaciones, o de la observación de la proporción de 20 % en helio y 80 % en hidrógeno en el universo que sólo puede darse si la cantidad de bariones no es mayor a un 20 % de la densidad crítica del universo, estos tropiezos han llevado a indicar que la materia oscura no puede ser de naturaleza bariónica y considerar su naturaleza de tipo no bariónica.

Los candidatos de materia oscura no bariónica, pueden ser, por ejemplo, los neutrinos masivos. Los neutrinos y antineutrinos se desacoplaron de la materia en la época temprana del universo. La densidad esperada de energía es el 70 % de los fotones, es decir, despreciable comparada con la materia de la época actual. Pero el flujo de neutrinos es indetectable con las técnicas presentes, sin embargo, los neutrinos podrían hacer una contribución dominante a la materia del universo si tuvieran una masa diferente de cero, aspecto que en la actualidad, de los tres neutrinos distintos, se sabe con certeza que dos tienen masa. Otros candidatos son las partículas masivas débilmente interactuantes (WIMPs). Una fracción significativa de la materia oscura podría estar en forma de materia oscura fría (CDM) probablemente en forma de WIMPs que no interactúan con la fuerza electromagnética o con la fuerza nuclear fuerte.



Figura 1.1: Rayos X, obtenidos por el satélite ROSAT, de las galaxias en el cúmulo de Virgo, en el grupo de galaxias NGC 2300. Créditos: NASA.

Por otro lado, la primera evidencia de la materia oscura surge del movimiento de algunos objetos luminosos, como las estrellas, que se mueven más rápido de lo esperado si estos sólo sintieran la atracción gravitatoria de los cuerpos visibles. Un caso, por ejemplo, que requiere la existencia de materia oscura, se basa en la dinámica de las galaxias espirales (como la galaxia Andrómeda), en las que la cantidad de masa necesaria para producir su movimiento de rotación resulta mayor que la masa observada por los instrumentos astronómicos, así que debe existir en el centro de la galaxia alguna forma de masa que contribuya gravitacionalmente a mantener a la materia en órbita, de lo contrario sus estrellas saldrían por la tangente.

Una manera de evidenciar materia oscura, está en comparar el tamaño de una galaxia observada en luz visible con el tamaño de la materia oscura asociada observada en rayos-X. La imagen en rayos-X de la Figura (1.1), obtenida por el satélite ROSAT, muestra un pequeño grupo de galaxias conocido como NGC 2300 inmerso en una enorme nube de gas caliente (color púrpura) alrededor de 1,3 millones de años luz de diámetro. Esta observación implica que la mayor parte de la materia oscura se concentra en torno a grupos pequeños de galaxias.

Otro modo se presenta al estudiar la forma de las galaxias que tienen características explicables por la existencia de materia oscura, tal como la galaxia MGC 720, a una distancia de 800 millones de años-luz, que observada en luz visible tiene forma elíptica aplanada, mientras que en rayos-X muestra un halo que rodea a la galaxia con materia distribuida esféricamente, también está el cúmulo Abel 2029, a 1,000 millones de años-luz, que en rayos-X muestra una masa central radiante (supergalaxia elíptica) y un resplandor masivo de gas caliente que podría interpretarse como materia oscura.

Algunas observaciones de fenómenos físicos tales como lentes gravitatorias, las curvas de rotación de galaxias, la formación de estructuras, las anisotropías de la radiación cósmica de fondo, choques de cúmulos de galaxias, entre otros, hacen que la existencia de materia oscura sea aceptada, revisemos un par de estas:

1.4.1. Lentes gravitatorias

El efecto de distorsión que se produce cuando una masa concentrada se encuentra a lo largo de la línea de visión de un observador y una fuente de luz (que se encuentra a una gran distancia), es conocido como *lentes gravitatorias*. Por lo general, la fuente es un cuásar distante y la masa es una galaxia que se encuentra entre el cuásar y la Tierra. Las lentes gravitatorias se derivan de la curvatura del espacio-tiempo alrededor de un objeto masivo, como se describe en la Teoría General de la Relatividad. Los rayos de luz, siguiendo el camino más corto se ven afectados por los campos gravitatorios, curvándose cuando pasan cerca de masas muy grandes. Pero el efecto no es tan simple como el producido por una lente de cristal ordinaria, sino que es comparable a la distorsión producida al mirar a través de la base de una copa de vino. Dependiendo de la geometría de la lente gravitacional, la imagen resultante del objeto puede ser un arco, un círculo completo (conocida como el anillo de Einstein), o una serie de imágenes múltiples.

Para ver la geometría de un sistema de lentes en general presentamos la Figura (1.2), esta introduce el ángulo de deflexión reducido α , que está relacionada con la deflexión de un rayo de luz $\hat{\alpha}$ como [25]

$$\alpha = \frac{D_{ds}}{D_s} \hat{\alpha}. \quad (1.35)$$

En el diagrama, suponiendo ángulos pequeños, se obtiene

$$\theta D_s = \beta D_s - \hat{\alpha} D_{ds}, \quad (1.36)$$

de modo que

$$\beta = \theta - \alpha(\theta). \quad (1.37)$$

La cual se conoce como la ecuación de lentes, que relaciona la posición angular de la imagen y la fuente.

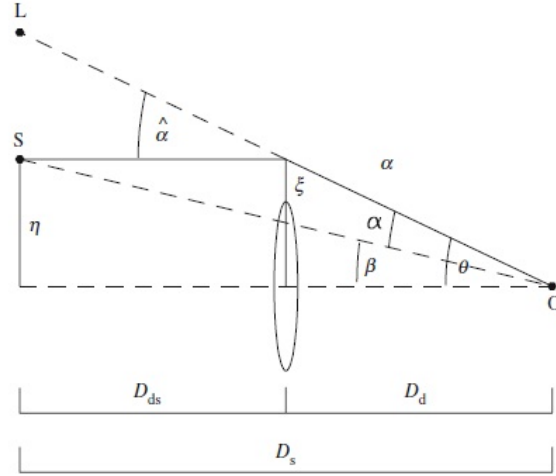


Figura 1.2: Esquema del efecto de lentes gravitatorias. Un rayo de luz viaja desde la fuente S al observador O pasando la lente en un parámetro de impacto ξ . La distancia transversal entre el eje óptico es η . El rayo de luz se desvía a través de un ángulo $\hat{\alpha}$, las separaciones angulares de la fuente y la imagen desde el eje óptico se denotan por β y θ , respectivamente. Las distancias entre, observador y la fuente, observador y la lente y la lente y la fuente son D_s , D_d y D_{ds} , respectivamente. Imagen cortesía de Mathias Bartelmann

Como ejemplo veamos un caso general de una lente circular con masa arbitraria. La ecuación de lentes (1.36) se transforma en

$$\beta = \theta - \frac{D_{ds}}{D_d D_s} \frac{4GM(\theta)}{\theta}. \quad (1.38)$$

Cuando la fuente se encuentre exactamente alineada con el deflector de masa $M(\theta)$, es decir $\beta = 0$, la imagen será la de un anillo con radio θ_E , donde

$$\theta_E^2 = \frac{4GM(\theta_E)}{D}, \quad \text{con } D = \frac{D_d D_s}{D_{ds}}, \quad (1.39)$$

es llamado *el anillo de Einstein*.

Una imagen de rayos X en la Figura (1.3) obtenida por los telescopios espaciales Hubble y Chandra X-Ray, usando el método de lentes gravitatorias, expone la presencia de materia oscura (azul). Se puede ver que tras la colisión de dos galaxias, hay una separación entre la materia oscura y la ordinaria.

1.4.2. Curvas de rotación de galaxias

La velocidad de rotación de una estrella o nube de gas a una distancia R (llamado radio galactocéntrico) del centro de la galaxia, suponiendo que nos encontramos en las partes externas del disco de una galaxia espiral, está relacionada con la masa contenida en la galaxia dentro de su órbita, es decir para un $r < R$, como

$$V_{rot}^2 = \frac{GM(< R)}{R}, \quad (1.40)$$



Figura 1.3: Presencia de materia oscura. Grupo de galaxias conocido como MACSJ0025.4-1222. Explosión de las galaxias. Créditos: NASA.

cuya relación no solo se cumple para una simetría esférica, sino también para potencial de disco o disco mas bulbo. Según la rotación Kepleriana, lejos del disco se debería

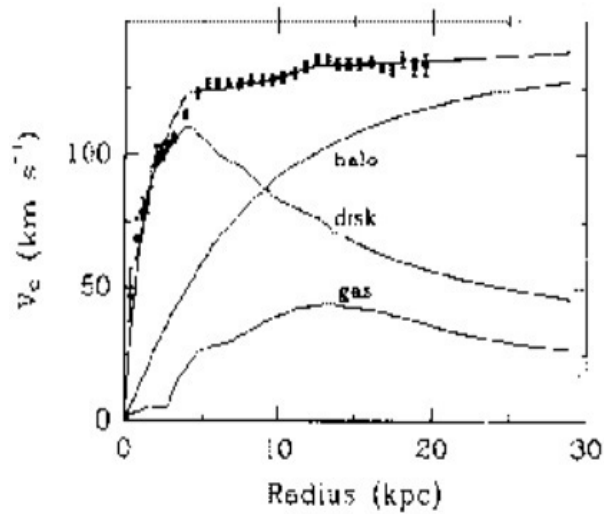


Figura 1.4: Curva de rotación observada de NGC 2403 (puntos) y las curvas de rotación de los componentes de masa (líneas). De Begeman (1987).[29]

observar que $V_{rot} \sim R^{-1/2}$, sin embargo no se observa que la velocidad de rotación decrezca con R en la mayoría de las galaxias espirales, a pesar de que R sea lo suficientemente grande como para que no se vea masa, es decir, a pesar de que no se detecte emisión del gas o de las estrellas de la galaxia a dicha distancia. En contradicción, la masa de la galaxia sigue aumentando con R , casi linealmente como se puede apreciar en la línea a trazos de la Figura (1.4) hasta radios galactocéntricos mucho mayores que el tamaño óptico de las galaxias. Esto daría lugar, a distancias mucho mayores del centro galáctico a un comportamiento kepleriano de la curva de rotación. Es así como se suele suponer la existencia de un halo esférico de materia oscura, contribuyendo de manera gravitacional, para solucionar esta contrariedad, ya que si su distribución es

esférica, un modelo de densidad de materia oscura estaría dado por:

$$\rho(R) = \frac{V^2(R)}{4\pi GR^2}, \quad (1.41)$$

implicando que $M(R) \propto R$.

El modo más directo de determinar la cantidad de materia oscura en las galaxias es comparar su luminosidad con la masa, deducida ésta última a partir de la curva de rotación.

Capítulo 2

Modelos de materia oscura.

Se encontrará en este capítulo las categorías de la materia oscura, algunos de los modelos propuestos y los problemas que presenta cada modelo considerado. También el hecho de preferir la materia oscura de naturaleza no bariónica, es decir materia oscura caliente y materia oscura fría, siendo esta última la favorita por presentar menores inconsistencias con las observaciones cosmológicas. Finalmente, encontraremos el modelo de gran éxito llamado *materia oscura escalar autointeractuante* el cual pretende corregir algunos impasses presentados en el modelo de materia oscura fría, así como sus predicciones en concordancia con lo observado.

2.1. Materia oscura bariónica

Como ya se había mencionado en la sección anterior, los candidatos a materia oscura bariónica (BDM), incluye MACHOs (a modo de comparar con los WIMPs) en el espacio interestelar y gas intergaláctico (o plasma). Una forma de detectar un objeto compacto oscuro, con masas inferiores a $0,08M_{\odot}$, es con el método de microlentes gravitatorias: si el objeto masivo pasa cerca de la línea de visión entre nosotros y una estrella distante, su gravedad enfoca la luz de esa estrella hacia nosotros, y la estrella parece brillar por un rato. Este brillo, que tiene un tiempo característico y es independiente de la longitud de onda, dependerá del valor de θ_E de (1.39). Una observación con este método da una estimación de la masa, la distancia y velocidad del MACHO, los cuales suelen considerárseles como objetos ordinarios subestelares. Las enanas blancas (muy densas), las enanas marrones, las estrellas de neutrones y los agujeros negros, caen en la categoría de objetos pesados. Estos últimos son luminosos y si son muy grandes pueden tener un periodo de vida alto. Aunque no todos los agujeros negros pueden tomarse como objetos pesados, por ejemplo aquellos que provienen del colapso de estrellas con masas ligeramente superiores a $8M_{\odot}$, son descartados debido a que durante su proceso de formación habrían producido cantidades de metales inobservados [30].

Por otro lado, una estrella requiere una masa de alrededor de $0,07M_{\odot}$ para iniciar su fusión termonuclear y comenzar a brillar como una estrella. Las enanas marrones contienen los mismos materiales que una estrella como el sol, pero tiene muy poca masa y por tanto no brillan, aunque no son oscuras en totalidad. Estas son bolas de gas caliente que irradian radiación térmica débil y se clasifica, al igual que con planetas grandes, como Júpiter, en MACHOs.

Sin embargo, a partir de las observaciones se ha llegado a creer que la materia oscura no es de tipo bariónica, a menos de que se considere que la BDM en nuestro universo está dominada por el fino gas ionizado intergaláctico, visto en grandes cúmulos de

galaxias. Es el caso, por ejemplo, de los resultados de estudios en efecto de microlentes en la Gran Nube de Magallanes, que indican que no más del 19% de la masa de la materia oscura en nuestra galaxia puede estar bajo la forma de enanas marrones, agujeros negros estelares masivos o enanas blancas en el halo. Otra contrariedad, es que si la materia oscura está formada por MACHOs, debería ser posible observar su presencia mediante el efecto de lentes gravitatorias, entonces se han observado 11.9 millones de objetos estelares, encontrándose que sólo 13 o 17 eran posibles lentes gravitatorias. A esto se le suma el experimento EROS-2, en el cual se observaron 7 millones de estrellas con un sólo candidato para ser lente gravitatoria. Así que, como no existe ningún otro tipo de objeto estelar hecho de materia bariónica que pueda explicar la materia oscura, esta cantidad de datos rechaza la idea de que la materia oscura esté formada por MACHOs, quedando por lo tanto la idea de que la materia oscura de naturaleza no bariónica es la mas adecuada.

2.2. Materia oscura no bariónica

Basado en las velocidades de las partículas, la materia oscura no bariónica se divide en materia oscura caliente (HDM), materia oscura tibia (WDM) y materia oscura fría (CDM). La HDM contiene partículas ligeras que se mueven a velocidades relativistas, las cuales se desacoplaron de la materia mientras eran relativistas, como es el caso del neutrino. Este modelo soporta la idea de que las primeras estructuras en formarse fueron de grandes dimensiones (supercúmulos), los cuales se fragmentaron formando otras estructuras, hecho que no está en concordancia con lo observado. La CDM por su parte, contiene partículas pesadas que se mueven lentamente, las cuales se desacoplaron cuando ya no eran relativistas, y a diferencia de la HDM la materia colapsa por pequeñas escalas y luego a escalas cada vez mayores, formando estructuras de galaxias desde lo mas pequeño, que sí está en concordancia con las observaciones. Sin embargo, la CDM no está exenta de problemas, por ejemplo las galaxias enanas observadas en los halos galácticos son menos masivas y menos numerosas de lo que esta predice, y ya que los modelos que contienen sólo materia oscura caliente tampoco las explican por razones opuestas, se proponen fuertes autointeracciones entre las partículas oscuras o incluso la idea de que coexistan ambos tipos de materia oscura, la fría y la caliente, es decir la WDM, pero esta también resulta poco consistente con las observaciones. Aun así, los modelos mas estudiados apuntan a CDM como la mas apropiada, añadiendo algunas consideraciones.

Por último, un muy favorable candidato a materia oscura no bariónica es llamado WIMP (partículas masivas que interactúan débilmente). Estos no han sido detectados debido a su naturaleza neutra, son similares a los neutrinos pero muy pesados, lo que los vuelve una forma de CDM. Además encontramos otros candidatos tales como las partículas masivas cargadas, los gravitinos, la materia oscura auto interactuante, entre otros.

2.2.1. Materia oscura caliente

El candidato para la HDM es el neutrino. Actualmente la densidad total de los neutrinos que forman HDM es [28]

$$\Omega_{\nu 0} h^2 = \frac{\sum m_{\nu}}{94,14 eV}, \quad (2.1)$$

el cual se aplica si las masas de los neutrinos están por debajo de la temperatura de desacoplamiento, $T \sim 1 MeV$. El actual límite superior para HDM en forma de

neutrinos es $\Sigma m_\nu \leq 2,0$ eV, siendo por ende $\Omega_{\nu 0} h^2 \leq 0,02$ la máxima contribución de neutrinos, una contribución similar a la que aporta la materia visible, pero insuficiente para hacer una contribución significativa a la densidad cósmica. Esto y el hecho de que los neutrinos, al ser partículas relativistas, borran las fluctuaciones de escalas por debajo de $\sim 40 Mpc$, esto es, que la formación de estructuras galácticas se lleve de las mas grandes estructuras a las mas pequeñas por medio de la fragmentación, evento que no está acorde con lo observado, hace que la HDM sea descartada.

2.2.2. Materia oscura fría

Los datos sobre la estructura a gran escala combinada con la teoría de formación de galaxias, indican que la mayoría de la materia en el universo es CDM. Este cuenta con bastantes aciertos, como son la predicción de las densidades cósmicas de todas las especies del universo, el ajuste de las curvas de rotación planas de las galaxias espirales, el ajuste de las anisotropías de la CMB, las simulaciones numéricas de N-cuerpos acorde a las observaciones de la estructura a gran escala, entre otros. Sin embargo, aunque sus predicciones se encuentran en concordancia con las observaciones a grandes escalas ($\sim Mpc$) y logra explicar diversas propiedades de las galaxias y cúmulos de galaxias, no ocurre igual para escalas menores ($\sim kpc$). Un ejemplo, es que predice perfiles de densidad que son demasiado densos en el centro de las galaxias, mientras las observaciones muestran que las galaxias, sobre todo las enanas o las de muy bajo brillo, tienen densidades con un perfil plano o casi plano¹, asimismo sostiene que la formación de estructuras es de una manera jerárquica, es decir que la estructura surge de pequeñas semillas de excesos de densidad de materia oscura, de masas como del tamaño de la tierra o del sistema solar [32]. Estas semillas se fusionan por su propia gravitación, pero al ser el universo primitivo tan denso, las semillas chocan con otras a su alrededor y muchas veces se fusionan con otras para formar halos mas grandes. Estos halos mayores continúan chocando con otros hasta formar los halos que ahora conocemos. Con el propósito de corroborar el modelo jerárquico se analizaron cientos de galaxias, encontrándose que seis de estas tenían características similares, observación que puso en jaque al modelo jerárquico, en el que estas semejanzas son difíciles de explicar ya que no hay manera de obtener galaxias como las que se observaron, despues de una serie de choques y fusiones de halos de forma practicamente aleatoria. Otras simulaciones incluían la existencia de un gran número de halos pequeños, opuesto al número de galaxias pequeñas observadas localmente.

Las anteriores y demás inconsistencias no impiden seguir buscando el contenido de CDM, aunque no se haya podido detectar por medio de aceleradores de partículas, ni observaciones astronómicas la evidencia de las partículas oscuras que conformarían la CDM, lo que sí se conoce, a partir de las observaciones cosmológicas, es que ninguna partícula del ME puede ser candidato a materia oscura fría, es así como modelos mas allá del ME presentan candidatos a CDM. Por ejemplo un candidato favorito para esta clase de materia oscura surge de la supersimetría, el WIMP². Estas clases de partículas pueden ser definidas como partículas que fueron creadas térmicamente en el universo temprano, encontrándose en equilibrio térmico y desacoplándose una vez que sus interacciones fueron débiles para mantenerlos en tal equilibrio. Si una nueva partícula con interacciones débiles existe en la naturaleza, su sección transversal sería $\sigma \approx \alpha^2/m^2$, donde $\alpha \cong O(10^{-2})$ es la constante de acoplamiento débil y $m \cong O(100 GeV)$ es del orden de la masa del boson W, asociado al grupo SU(2) del ME[33]. También se puede obtener $\sigma \sim 10^{-9} GeV^{-2}$, y en temperaturas muy bajas v es muy

¹esta contrariedad se conoce como el problema de los halos picudos.

²El neutralino, del orden de $\sim 150 GeV$, es el WIMP mas aceptado

cercana a la velocidad de la luz, por tanto las masas de los WIMPs están entre 10 GeV y pocos TeV y su densidad cósmica es: [31]

$$\Omega_{WIMP} h^2 \approx \frac{10^{-26} \text{cm}^3 \text{s}^{-1}}{\langle \sigma v \rangle}, \quad (2.2)$$

donde $\langle \sigma v \rangle$ es el promedio térmico de la sección eficaz para la aniquilación de pares de WIMPs en partículas del ME y v la velocidad relativa entre los dos WIMPs. Se estima que $\Omega \sim 1$, resultando que los WIMPs sean buenos candidatos a CDM, además si las partículas interactúan a través de fuerzas débiles, para la sección transversal de la fuerza débil, el valor esperado de la densidad actualmente se encuentra en el rango que abarca de 20 – 30 % del total de densidad de energía del universo, consecuente con las observaciones.

Otros candidatos posibles a considerar surgen de las extensiones al ME, tal como se presenta en este trabajo, con el modelo 3-4-1, como veremos en el capítulo siguiente.

2.3. Materia oscura escalar autointeractuante

De acuerdo a las inconsistencias que presenta la CDM, surge la necesidad de proponer ajustes al modelo. Así pues una alternativa viable es conocida como *materia oscura escalar autointeractuante*, en la que por sus fuertes interacciones entre las partículas oscuras, puede llegar a corregir algunas discrepancias. Este modelo cuenta con hipótesis similares al modelo CDM a escalas cosmológicas, pero grandes diferencias a escalas galácticas. Entre sus aciertos a escalas cosmológicas están: La evolución cosmológica del universo que es similar a la del paradigma estándar y las densidades de las diferentes especies cosmológicas consistentes con las estimaciones de las observaciones. El espectro de potencias de masas con un corte natural a escalas pequeñas, evitando así el problema del exceso de galaxias satélites y el ajuste, con muy buena precisión, del espectro de temperaturas de las anisotropías de la CMB. A escalas galácticas por su parte, se ajustan con muy buena precisión las curvas de rotación de galaxias de baja masa y de bajo brillo superficial.

Diversos estudios se han llevado a cabo en materia oscura escalar autointeractuante, tal es el caso de Spergel y Steinhardt [8], quienes propusieron materia oscura fría autointeractuante con una gran sección transversal de dispersión pero con aniquilación o disipación despreciable. Esta sección transversal de dispersión puede ser debida a fuertes interacciones de corto rango, similares a la dispersión neutrón-neutrón a bajas energías, o a interacciones débiles mediadas por el intercambio de partículas ligeras. Dependiendo de las interacciones y del camino libre medio, el requisito de masa para la materia oscura se encuentra en el rango entre 1 MeV a 10 GeV.

Asimismo sugieren que las partículas de materia oscura deben tener un camino libre medio entre 1kpc hasta 1 Mpc en los radios solares de una galaxia típica (densidad promedio $0,4 \text{GeV}/\text{cm}^3$). Para una partícula de masa m_x esto implica una dispersión elástica con sección transversal de

$$\sigma_{XX} = 8,1 \times 10^{-25} \text{cm}^{-2} \left(\frac{m_x}{\text{GeV}} \right) \left(\frac{\lambda}{1 \text{Mpc}} \right)^{-1}, \quad (2.3)$$

similar a un hadrón ordinario. Si las partículas de materia oscura se dispersan a través de interacciones fuertes similares a la dispersión de baja energía neutrón-neutrón, entonces la sección transversal es $\sigma = 4\pi a^2$, donde a es la longitud de dispersión. Para neutrones, la longitud de dispersión es mayor a 100 veces su longitud de onda de Compton. Usando la estimación $a \approx 100 f m_x^{-1}$, se obtiene

$$m_x = 4 \left(\frac{\lambda}{1\text{Mpc}} \right)^{1/3} f^{2/3} \text{GeV}. \quad (2.4)$$

Contrario a esto, la autointeracción puede ser débil pero de largo alcance, como en el caso del intercambio de un vector bosónico ligero de masa m_y , cuya sección transversal es $\sigma \approx \alpha_y m_x^2 / m_y^4$. La masa del vector bosónico debe ser muy grande para que no haya disipación cuando las partículas de materia oscura se dispersan; esto requiere que $m_y > 450 \text{eV} (m_x / \text{GeV}) (v / 200 \text{km/s})^2$, donde v es la velocidad típica de las partículas de materia oscura en el halo. La escala de masa para m_y corresponde a una fuerza que es de corto rango comparada con el espacio entre partículas de materia oscura (alrededor de 1 cm en el halo). Por tanto, solo se necesita considerar dos cuerpos interactuando. Si $m_y = gm_x$ y $\alpha_y = O(1)$, entonces la máxima cantidad de materia oscura es

$$m_x < 80 \left(\frac{\lambda}{1\text{Mpc}} \right)^{1/3} g^{-4/3} \text{MeV}. \quad (2.5)$$

Lo que indica que no hay restricciones sobre la naturaleza de las partículas ligeras de materia oscura.

Por otra parte, considerando que el camino libre medio de las partículas de materia oscura fuera mucho mayor que ~ 1 Mpc, estas no experimentarían alguna interacción al moverse a través del halo, lo que indica que se formarían halos de materia oscura con núcleos densos debido al colapso gravitacional. Ahora considerando el camino libre medio menor que 1 kpc, la materia oscura se comportaría como un gas colisionante y este alteraría la evolución del halo. La materia oscura chocaría, por lo que se calentaría el material de baja entropía, que usualmente se colapsaría para formar un núcleo y produciría perfiles de densidad menos profundos.

Si la materia oscura no se disipa, entonces se formarían halos oscuros con poco momento angular, y por tanto todos los halos serían casi esféricos, contrariando las observaciones de cúmulos de galaxias en rayos X, cuyos resultados para la mayoría de los halos son casi elipsoidales. Esto implica que la escala temporal de colisiones entre materia oscura dentro del radio donde se encuentra aproximadamente la mitad de masa, debe ser más grandes que el *tiempo de Hubble*. Una de las restricciones más fuertes en este modelo.

Para el límite inferior del rango de la sección transversal, la probabilidad típica que una partícula experimente una colisión durante el tiempo de Hubble, se aproxima a la unidad solo para galaxias que caen en las profundidades del núcleo del cúmulo. Para el límite superior, las galaxias son opacas a la materia oscura y los productos son parecidos al experimentar múltiples colisiones dentro del halo de una galaxia masiva. Debido a las múltiples colisiones, resulta improbable que aquellos productos se escapen de la galaxia, además la presencia de estas colisiones conducirá al transporte de energía dentro del halo de materia oscura, el cual eventualmente conduce al colapso del núcleo.

En función de las anteriores consideraciones, Spergel y Steindhardt estimaron el rango de σ/m para la materia oscura entre $0,45 - 450 \text{cm}^2/g$ o equivalentemente:

$$2 \times 10^3 \text{GeV}^{-3} \leq \frac{\sigma}{m} \leq 3 \times 10^4 \text{GeV}^{-3}, \quad (2.6)$$

de manera que varias predicciones para las propiedades de las galaxias teniendo en cuenta solo materia oscura autointeractuante, se generaron. Los centros de los halos son esféricos, los halos de materia oscura tienen centro, hay pocas galaxias enanas

en grupos y estas permanecen en medios de baja densidad, fueron algunas de sus predicciones, las que fueron corroboradas a través de simulaciones numéricas y por supuesto consistentes con las observaciones.

Por otro lado, en el modelo de materia oscura escalar generalmente se propone que la materia oscura del universo se puede describir por un campo escalar cosmológico real (o complejo) Φ , con un potencial escalar $V(\Phi)$. Diversos autores como McDonald [5] han mostrado que uno o mas singletes escalares gauge, generados térmicamente, pueden ser materia oscura escalar autointeractuante. Este muestra que un singlete escalar S tiene una densidad reliquia de $\Omega_S \approx 0,3$ si la masa $m_S \approx (2,9 - 10,5)(\Omega_S/0,3)^{1/5}(h/0,7)^{2/5} MeV$.

Primero considera uno de los dos procesos que pueden producir una densidad de escalares S , es decir, procesos de aniquilación $2 \leftrightarrow 2$. La densidad reliquia de procesos de dispersión en un universo dominado por la radiación se encuentra solucionando la ecuación de Boltzmann [5]

$$\frac{df}{dT} = \frac{\langle \sigma_{ann} v_{rel} \rangle}{K} (f^2 - f_\circ^2); \quad K = \left[\frac{4\pi^3 g(T)}{45 M_{Pl}^2} \right]^{1/2}, \quad (2.7)$$

donde $f = n_S/T^3$, $f_\circ = n_\circ/T^3$ y $g(T)$ está dado por (1.33). n_S es la densidad numérica de escalares S y n_\circ es la densidad numérica del equilibrio término del escalar, el cual está dado para escalares relativísticos por

$$n_\circ = \left(\frac{1,2}{\pi^2} \right) T^3. \quad (2.8)$$

La densidad numérica n_S del decaimiento de los escalares $h^{\circ 3}$ a una temperatura menor que la transición de fase electrodébil (donde $T_{EW} \geq 1,5m_h$) es

$$\frac{dn_S}{dt} + 3Hn_S = \langle \Gamma_{h^\circ} \rangle n_{h^\circ eq}, \quad (2.9)$$

donde H es la tasa de expansión y la densidad de equilibrio térmico de los h° , $n_{h^\circ eq}$, es dada por

$$n_{h^\circ eq} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{m_h}^{\infty} \frac{E(E^2 - m_h^2)^{1/2}}{(e^{E/T} - 1)} dE \quad (2.10)$$

y la tasa de decaimiento para escalares h^0 con energía E es

$$\Gamma_{h^\circ} = \frac{\lambda_S^2 v^2}{16\pi E}. \quad (2.11)$$

Entonces el promedio térmico de la tasa de decaimiento es

$$\langle \Gamma_{h^\circ} \rangle = \frac{1}{n_{h^\circ eq}} \frac{\lambda_S^2 v^2 T^2 e^{-m_h/T} \eta(m_h/T)}{32\pi^3}; \quad \eta(a) = \int_0^{\infty} \frac{t^{1/2}(t+2a)^{1/2}}{(e^t - e^{-a})} dt. \quad (2.12)$$

$\eta(a)$ es una función de a que varía lentamente, con $\eta(0) = 1,64$, $\eta(1) = 1,87$ y $\eta(5) = 3,00$.

Por lo que la densidad del escalar S mas S^\dagger , como la suma de la dispersión y el decaimiento, es

$$\Omega_S = \frac{2m_S}{\rho_c} g(T_\gamma) T_\gamma^3 \Sigma \frac{f_i}{g(T_i)}, \quad (2.13)$$

donde ρ_c es la densidad crítica, T_γ es la temperatura del fotón presente y $T_i \approx m_i$.

Un proceso similar se sigue en el siguiente capítulo para corroborar que nuestros escalares son candidatos reales a materia oscura escalar autointeractuante.

³denota la partícula del ME en cuestión.

Capítulo 3

Candidatos a Materia Oscura a partir del sector escalar de Modelos 3 – 4 – 1

El objetivo central del siguiente capítulo es demostrar la existencia de candidatos realistas a materia oscura escalar autointeractuante que surgen, sin la necesidad de imponer una simetría extra o introducir una nueva escala de masa, del sector escalar del modelo $SU(3)_c \otimes SU(4)_L \otimes U(1)_x$, (modelo 3-4-1) el cual es una extensión de la simetría gauge del Modelo Estándar de las interacciones fundamentales: $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_x$ (véase A). Se considerarán solo Modelos 3-4-1 sin cargas eléctricas exóticas.

El capítulo está desarrollado inicialmente con la presentación de la simetría gauge $SU(3)_c \otimes SU(4)_L \otimes U(1)_x$, su potencial escalar y sector escalar, en el cual se logran identificar candidatos a materia oscura escalar autointeractuante. Luego se presentan las condiciones que debe cumplir estas partículas para que sean candidatos realistas a materia oscura, tales como que satisfagan la llamada Cota de Spergel-Steinhardt y que no sobrepueblen el universo.

3.1. Simetría gauge $SU(3)_c \otimes SU(4)_L \otimes U(1)_x$

La extensión $SU(3)_c \otimes SU(4)_L \otimes U(1)_x$ ha sido estudiada por diversos autores (véase B), en particular, en la referencia [2] se llevó a cabo un estudio sistemático de la simetría gauge 3-4-1 caracterizando los modelos sin cargas eléctricas exóticas mediante un conjunto de parámetros libres que aparecen en el generador de carga eléctrica Q (B.1). Estos parámetros, denotados como a , b y c , pueden tomar sólo ciertos valores simultáneos si se consideran modelos libres de anomalías y con contenido fermiónico, bosones de gauge y partículas del sector escalar, sin cargas eléctricas exóticas. Es claro que si se acomodan los fermiones del ME en las representaciones 4 o $\bar{4}$ de $SU(4)_L$ y se asume que el isospín convencional del ME es tal que $SU(2)_L \subset SU(4)_L$, entonces $a = 1$ y de esta manera quedan b y c como parámetros libres, evidenciando, por las ecuaciones (B.1) y (B.5), la posibilidad de un número infinito de modelos. Sin embargo, como la extensión 3-4-1 se construye libre de anomalías, lo cual es necesario para conservar la validez del principio gauge y garantizar la renormalización, se exige cancelación de todos los posibles diagramas triangulares. Adicionalmente, se encuentra una particularidad en la extensión 3-4-1, y es que mientras que en el ME la cancelación de las anomalías se da familia por familia (véase C1), es decir, se

cancelan independientemente para las tres familias, en el modelo 3-4-1 la cancelación de anomalías puede darse entre familias de fermiones elementales, y no familia por familia, revelando que el número de esas familias en la naturaleza debe ser un múltiplo del número de colores (tres). Esto, unido al hecho de que la libertad asintótica de la interacción fuerte conduce a que ese número debe ser menor que cinco, da lugar al número correcto de familias fermiónicas: tres (véase C2). De esta manera el modelo proporciona una posible respuesta a la pregunta del número de familias de fermiones en la naturaleza.

En la extensión 3-4-1, $SU(4)_L$ and $U(1)_X$ son anómalos, mientras que el factor $SU(3)_c$ no lo es por ser vectorial. Esto indica que se pueden tener solo algunas combinaciones de multipletes de $[SU(4)_L]$ para cada modelo en consideración para cancelar las anomalías, estas anomalías son: $[SU(3)_c]^2U(1)_X$, $[SU(4)_L]^2U(1)_X$, $[U(1)_X]^3$ y la anomalía gravitacional $[grav]^2U(1)_X$ (véase C2).

Concretamente en [2] se encuentra que sólo son posibles dos valores simultáneos para b y c si se imponen las restricciones ya mencionadas. Estos son:

1. $b = c = 1$, caso en el cual existen dos modelos, de tres familias libres de anomalías, denotados como Modelo A y Modelo B [2, 13].
2. $b = 1, c = -2$, caso para el cual hay otros dos modelos de tres familias llamados Modelo E y Modelo F [14, 15].

3.2. Modelo A: Potencial escalar

El esquema de rompimiento de la simetría 3-4-1 es:

$$\begin{aligned}
 SU(3)_c \otimes SU(4)_L \otimes U(1)_x & \xrightarrow{U} SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_z \\
 & \xrightarrow{V} SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \\
 & \xrightarrow{u} SU(3)_c \otimes U(1)_Q,
 \end{aligned}$$

donde $SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_z$, ampliamente estudiado en [16, 17], es la simetría 3-3-1, y V , U y u son los valores esperados en el vacío (VEV) asociados al conjunto de campos escalares requeridos.

En $SU(3)_c \otimes SU(4)_L \otimes U(1)_x$ hay un total de 24 bosones gauge: un campo gauge B_μ asociado con $U(1)_X$, 8 campos gluónicos asociados con el grupo $SU(3)_c$ que permanecen sin masa después del rompimiento espontáneo de simetría, y otros 15 bosones gauge asociados a $SU(4)_L$ los cuales, a partir de la ruptura espontánea, adquieren masa. Para que esto sea un hecho, introducimos los siguientes 3 cuadrupletes de Higgses (B.6) con sus VEV:

$$\begin{aligned}
 \Phi(1, 4^*, \frac{3}{4}) &= (\phi, \phi^+, \phi'^+, \phi''^+), & \langle \Phi \rangle^T &= (u, 0, 0, 0) \\
 \Psi(1, 4^*, -\frac{1}{4}) &= (\psi^-, \psi, \psi', \psi''), & \langle \Psi \rangle^T &= (0, 0, V, 0) \\
 \Theta(1, 4^*, -\frac{1}{4}) &= (\theta^-, \theta, \theta', \theta''), & \langle \Theta \rangle^T &= (0, 0, 0, U)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Como los VEV U , V dan masa a los campos exóticos, se impone la jerarquía $V \sim U \gg u \approx 174 \text{Gev}$, la escala de masa electrodébil.

Para simplificar asumimos que los VEV son reales (el sector escalar conserva CP) y, por conveniencia en la lectura, escribimos los campos escalares neutros como:

$$\begin{aligned}\phi &= u + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_r + i\phi_i), & \psi &= V + \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi'_r + i\psi'_i) \\ \theta &= U + \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta''_r + i\theta''_i)\end{aligned}\quad (3.2)$$

Se acostumbra llamar la parte real como escalar CP-par o escalar puro y la parte imaginaria como escalar CP-impar o campo pseudoescalar.

Ahora, el potencial renormalizable más general que incluye Φ , Ψ y Θ es ¹:

$$\begin{aligned}V(\Phi, \Psi, \Theta) &= \mu_1^2(\Phi^\dagger \cdot \Phi) + \mu_2^2(\Psi^\dagger \cdot \Psi) + \mu_3^2(\Theta^\dagger \cdot \Theta) + Re\{\mu_4^2(\Psi^\dagger \Theta)\} + \lambda_1(\Phi^\dagger \cdot \Phi)^2 \\ &+ \lambda_2(\Psi^\dagger \cdot \Psi)^2 + \lambda_3(\Theta^\dagger \cdot \Theta)^2 + Re\{\lambda_4(\Psi^\dagger \Theta)^2\} + \lambda_5(\Phi^\dagger \cdot \Phi)(\Psi^\dagger \cdot \Psi) + \\ &\lambda_6(\Phi^\dagger \cdot \Phi)(\Theta^\dagger \cdot \Theta) + \lambda_7(\Psi^\dagger \cdot \Psi)(\Theta^\dagger \cdot \Theta) + \lambda_8(\Phi^\dagger \cdot \Psi)(\Psi^\dagger \cdot \Phi) + \\ &\lambda_9(\Phi^\dagger \cdot \Theta)(\Theta^\dagger \cdot \Phi) + \lambda_{10}(\Psi^\dagger \cdot \Theta)(\Theta^\dagger \cdot \Psi) + Re\{\lambda_{11}(\Phi^\dagger \cdot \Phi)(\Psi^\dagger \cdot \Theta)\} \\ &+ \lambda_{12}((\Psi^\dagger \cdot \Psi)(\Psi^\dagger \cdot \Theta) + \lambda_{13}(\Theta^\dagger \cdot \Theta)(\Psi^\dagger \cdot \Theta) + \lambda_{14}(\Phi^\dagger \cdot \Theta)(\Psi^\dagger \cdot \Psi),\end{aligned}\quad (3.3)$$

donde los μ son constantes de acople con dimensiones de masa y los λ son adimensionales de tal manera que el potencial es de dimensión 4 (renormalizable).

En la siguiente sección presentaremos los resultados de expandir cada término de este potencial para construir 3 matrices de masa (véase Apéndice B). La primera es construída para los escalares neutros CP-par, la segunda para los escalares neutros CP-impar y la tercera es construída para los campos escalares cargados.

3.3. Sector Escalar mínimo

En la referencia [1] se ha hecho un estudio del sector escalar de la extensión 3-4-1 para modelos A y B. Nuestro estudio se concentra en el modelo A, en el caso $V \approx U$ y $U \gg u$. En este límite los acoples de uno de los escalares CP-par a los fermiones de ME y bosones gauge se vuelven idénticos a los acoples del Higgs del ME . El espectro de masas para el campo escalar, tanto cargado como neutro (CP-par y CP-impar) se muestra en el apéndice B, en donde se ha calculado para cada matriz de masa (B.7), (B.8), (B.9) el espacio nulo, lo cual da en total 15 bosones de Goldstone, necesarios para darle masa a los 15 bosones gauge en $SU(4)_L \otimes U(1)_X$.

De la matriz de masa para el sector escalar real se obtienen 3 bosones de Goldstone que normalizados son:

$$\begin{aligned}g_{1r} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\psi''_r + \frac{1}{\sqrt{2}}\theta'_r \\ g_{2r} &= \theta_r \\ g_{3r} &= \psi_r\end{aligned}\quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}\text{Ahora, con } C_\eta \equiv \text{Cos}\eta &= \frac{\beta}{\sqrt{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}, \quad S_\eta \equiv \text{Sin}\eta = \frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}, \\ C_\rho \equiv \text{Cos}\rho &= \frac{\beta}{\sqrt{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}} \text{ y } S_\rho \equiv \text{Sin}\rho = \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}, \text{ donde } \gamma =\end{aligned}$$

¹El potencial escalar del ME es $V(\phi) = \mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$

$2\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_7 + \lambda_{10}$, $\alpha = 2\lambda_2 - \lambda_4 + \lambda_7 - \lambda_{10}$, $\beta = 2\lambda_{12}$ y en el límite $V \approx U$ y $U \gg u$, los escalares físicos y sus masas son:

$$\begin{aligned}
 H_1^0 &\approx \phi_r, & m_{H_1^0}^2 &\approx 2u^2\lambda_1. \\
 H_2^0 &\approx -\frac{1}{\sqrt{2}}\psi'_r + \frac{1}{\sqrt{2}}\theta''_r, & m_{H_2^0}^2 &\approx (2\lambda_2 - \lambda_7)U^2. \\
 H_3^0 &\approx \frac{\text{Cos}\eta}{\sqrt{2}}\theta'_r + \frac{\text{Sin}\eta}{\sqrt{2}}\psi'_r + \frac{\text{Sin}\eta}{\sqrt{2}}\theta''_r + \frac{\text{Cos}\eta}{\sqrt{2}}\psi''_r, & m_{H_3^0}^2 &\approx \frac{1}{2}(\gamma - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})U^2. \\
 H_4^0 &\approx \frac{\text{Cos}\rho}{\sqrt{2}}\theta'_r + \frac{\text{Sin}\rho}{\sqrt{2}}\psi'_r + \frac{\text{Sin}\rho}{\sqrt{2}}\theta''_r + \frac{\text{Cos}\rho}{\sqrt{2}}\psi''_r, & m_{H_4^0}^2 &\approx \frac{1}{2}(\gamma + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})U^2.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

La matriz de masa para el sector escalar imaginario posee 6 autovalores cero asociados a 6 bosones de Goldstone que normalizados son:

$$\begin{aligned}
 g_{1i} &= \theta''_i \\
 g_{2i} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\psi''_i + \frac{1}{\sqrt{2}}\theta'_i \\
 g_{3i} &= \theta_i \\
 g_{4i} &= \psi'_i \\
 g_{5i} &= \psi_i \\
 g_{6i} &= \phi_i
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Se obtiene, además, un escalar físico CP-impar el cual, por ser combinación lineal de singletes de $SU(2)_L$, debe tener acoples débiles a la materia ordinaria y es, por tanto, un candidato a materia oscura. Este campo y su masa al cuadrado es:

$$h_i^0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\psi''_i + \frac{1}{\sqrt{2}}\theta'_i, \quad m_{h_i^0}^2 \approx (\lambda_{10} - \lambda_4)U^2 \tag{3.7}$$

Se muestra en [1] que H_1^0 ha de ser identificado como el Higgs del ME , mientras que H_2^0 , H_3^0 , H_4^0 y h_i^0 son también candidatos a materia oscura ya que son, mayormente, combinación de singletes de $SU(2)$ y sus masas dependen de las combinaciones de γ , α , β que no están fijados por el experimento. Así que en principio $m_{H_2^0}$, $m_{H_3^0}$, $m_{H_4^0}$ y $m_{h_i^0}$, pueden ser ajustadas para tener escalares ligeros CP-par y CP-impar en el espectro de baja energía del modelo.

Finalmente, en el sector escalar cargado se obtienen 6 bosones de Goldstone:

$$\begin{aligned}
 G_{c1}^\pm &= \phi^\pm \\
 G_{c2}^\pm &= \left(\frac{1}{\sqrt{u^2 + V^2}}\right)(u\phi''^\pm - U\theta^\pm) \\
 G_{c3}^\pm &= \left(\frac{1}{\sqrt{u^2 + V^2}}\right)(u\phi'^\pm - U\psi^\pm),
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

4 escalares físicos cargados y sus respectivas masas:

$$\begin{aligned}
 H_1^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{u^2 + V^2}}(V\phi'^\pm - V\phi''^\pm + u\psi^\pm - u\theta^\pm) \\
 H_2^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{u^2 + V^2}}(V\phi'^\pm + V\phi''^\pm + u\psi^\pm + u\theta^\pm);
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$M_{H_1^\pm, H_2^\pm}^2 = (\lambda_8 \mp \lambda_{14})(u^2 + V^2). \tag{3.10}$$

En este sector no se obtienen candidatos a materia oscura debido a que ésta no interactúa con la materia ordinaria a través de la interacción electromagnética.

En síntesis, como es requerido por la consistencia del modelo, tenemos 15 bosones de Goldstone (9 eléctricamente neutros y 6 cargados) y 9 campos escalares físicos, 5 neutros y 4 cargados.

3.4. Acoples Trilineales entre escalares y Bosones Gauge

El término cinético del Lagrangiano de Higgs es:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\mathcal{H}} &= (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) \\
 &= \overbrace{(\partial^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) + (D^\mu \Phi)^\dagger (\partial_\mu \Phi) - (\partial^\mu \Phi)^\dagger (\partial_\mu \Phi)}^1 \\
 &+ \overbrace{\Phi^\dagger (g \mathbf{A}^\mu + g' B^\mu X_\Phi)^\dagger (g \mathbf{A}_\mu + g' B_\mu X_\Phi) \Phi}^2,
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

con la derivada covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_4 T_{iL}^T A_\mu^i + ig_x X B_\mu, \tag{3.12}$$

donde g_4 y g_x son las constantes de acople asociadas a $SU(4)_L$ y $U(1)_x$ respectivamente. Estas se relacionan con las constantes de acople del ME (g de $SU(2)_L$ y g' de $U(1)_Y$) en la forma [2]

$$g_4 = g, \quad y \quad \frac{1}{g'^2} = \frac{1}{g_x^2} + \frac{1}{2g^2}, \tag{3.13}$$

Como nuestros tres cuadripletos de Higgs en (3.1) transforman bajo la representación 4^* , la derivada covariante a usar es:

$$\bar{D}_\mu = \partial_\mu - ig_4 T_{iL}^T A_\mu^i + ig_x X B_\mu \tag{3.14}$$

El término 1 en (3.11) contiene acoples entre campos gauge y las derivadas de los campos escalares, $\partial_\mu \Phi$, de los que se obtiene información sobre cada uno de los que podrían ser bosones de Goldstone, los cuales fueron obtenidos en la diagonalización de cada matriz de masa en el sector escalar, así como también su correspondiente boson gauge que adquiere masa. El término 2 genera las masas de los bosones gauge y acoples cúbicos entre escalares y bosones gauge. Consideramos entonces estos acoples para los bosones del ME, W_μ^\pm , Z_μ y A_μ , con las masas:

$$\begin{aligned}
 M_{W^\pm} &= \frac{ug}{\sqrt{2}}, \\
 M_Z &= \frac{ug}{2C_W},
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

donde el ángulo de Weinberg θ_W es definido por $\tan \theta_W = T_W = \frac{\sqrt{2}g_x}{\sqrt{g_x^2 + 2g^2}}$, así que $\cos \theta_W = C_W = \frac{\sqrt{g_x^2 + 2g^2}}{\sqrt{3g_x^2 + 2g^2}}$.

Ahora los bosones gauge del modelo A, con $b = c = 1$, asociados al grupo $SU(4)_L$ transforman de acuerdo a la representación adjunta y se escriben como (véase B.3):

$$T_{iL}A_\mu^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} D_{1\mu}^0 & W_\mu^+ & K_\mu^+ & X_\mu^+ \\ W_\mu^- & D_{2\mu}^0 & K_{1\mu}^0 & V_\mu^0 \\ K_\mu^- & K_{1\mu}^0 & D_{3\mu}^0 & Y_\mu^0 \\ X_\mu^- & V_\mu^0 & Y_\mu^0 & D_{4\mu}^0 \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

con $D_{1\mu}^0 = \frac{A_{3\mu}}{\sqrt{2}} + \frac{A_{8\mu}}{\sqrt{6}} + \frac{A_{15\mu}}{\sqrt{12}}$, $D_{2\mu}^0 = -\frac{A_{3\mu}}{\sqrt{2}} + \frac{A_{8\mu}}{\sqrt{6}} + \frac{A_{15\mu}}{\sqrt{12}}$, $D_{3\mu}^0 = -2\frac{A_{8\mu}}{\sqrt{6}} + \frac{A_{15\mu}}{\sqrt{12}}$ y $D_{4\mu}^0 = -\frac{A_{15\mu}}{\sqrt{12}}$. y

$$B_\mu = IB_\mu = \begin{pmatrix} B_\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_\mu \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

donde la base electrodébil neutra es relacionada con los bosones físicos por:

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \\ Z'_\mu \\ Z''_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_W & \frac{1}{\sqrt{3}}S_W & \frac{1}{\sqrt{6}}S_W & C_W\sqrt{1 - \frac{T_W^2}{2}} \\ C_W & -\frac{1}{\sqrt{3}}S_W T_W & -\frac{1}{\sqrt{6}}S_W T_W & -S_W\sqrt{1 - \frac{T_W^2}{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2 - T_W^2}{3}} & \sqrt{\frac{2 - T_W^2}{6}} & -\frac{\sqrt{2}}{2}T_W \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu^3 \\ A_\mu^8 \\ A_\mu^{15} \\ B_\mu \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Con las anteriores herramientas construyamos la derivada covariante (3.14) para el primer campo Φ , con $X = 3/4$, en la base de los campos físicos:

$$\overline{D}_\mu = i\partial_\mu + i \begin{pmatrix} -a_4 Z_\mu + a_6 Z'_\mu & -\frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^- & -\frac{g}{\sqrt{2}}K_\mu^- & -\frac{g}{\sqrt{2}}X_\mu^- \\ -\frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^+ & -a_1 A_\mu - a_2 Z_\mu + a_6 Z'_\mu & -\frac{g}{\sqrt{2}}K_{1\mu}^0 & -\frac{g}{\sqrt{2}}V_\mu^0 \\ -\frac{g}{\sqrt{2}}K_\mu^+ & -\frac{g}{\sqrt{2}}K_{1\mu}^0 & -a_1 A_\mu + a_7 Z_\mu + a_8 Z'_\mu + \frac{g}{2}Z''_\mu & -\frac{g}{\sqrt{2}}Y_\mu^0 \\ -\frac{g}{\sqrt{2}}X_\mu^+ & -\frac{g}{\sqrt{2}}V_\mu^0 & -\frac{g}{\sqrt{2}}Y_\mu^0 & -a_1 A_\mu + a_7 Z_\mu + a_8 Z'_\mu - \frac{g}{2}Z''_\mu \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Y para los campos $\Phi = \Psi$ y Θ , con $X = -1/4$, la derivada covariante es:

$$\overline{D}_\mu = i\partial_\mu + i \begin{pmatrix} a_1 A_\mu + a_2 Z_\mu + a_3 Z'_\mu & -\frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^- & -\frac{g}{\sqrt{2}}K_\mu^- & -\frac{g}{\sqrt{2}}X_\mu^- \\ -\frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^+ & a_4 Z_\mu + a_3 Z'_\mu & -\frac{g}{\sqrt{2}}K_{1\mu}^0 & -\frac{g}{\sqrt{2}}V_\mu^0 \\ -\frac{g}{\sqrt{2}}K_\mu^+ & -\frac{g}{\sqrt{2}}K_{1\mu}^0 & a_5 Z'_\mu + \frac{g}{2}Z''_\mu & -\frac{g}{\sqrt{2}}Y_\mu^0 \\ -\frac{g}{\sqrt{2}}X_\mu^+ & -\frac{g}{\sqrt{2}}V_\mu^0 & -\frac{g}{\sqrt{2}}Y_\mu^0 & a_5 Z'_\mu - \frac{g}{2}Z''_\mu \end{pmatrix}$$

$$(3.20)$$

con

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -gS_W, & a_2 &= \frac{g}{2}C_W(T_W^2 - 1), \\
 a_3 &= \frac{g'}{2\sqrt{2}}\frac{(T_W^2 - 1)}{T_W}, & a_4 &= \frac{g}{2}\left(\frac{1}{C_W}\right), \\
 a_5 &= \frac{g'}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{T_W}\right), & a_6 &= -\frac{g'}{2\sqrt{2}}\frac{1}{C_W S_W}, \\
 a_7 &= -gS_W T_W, & a_8 &= \frac{g'}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1 - 2T_w^2}{T_w}\right).
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Como puede verse de (3.20), en la ecuación (3.11) no hay acoples cúbicos de bosones electrodébiles con los bosones escalares Ψ y Θ (cuyos VEV están en las direcciones tercera y cuarta de los respectivos cuádrupletes), ya que los bosones gauge de modelo estándar están en las entradas superiores (submatriz 2×2), mientras que las demás entradas (filas y columnas) corresponden a los bosones gauge exóticos, que adquieren masas proporcionales a V y U . Nos queda entonces la tarea de encontrar los acoples cúbicos del único contribuyente: Φ .

Usando las ecuaciones (3.19), (3.20) y (3.21) en (3.11) se encuentra el Lagrangiano de acoples cúbicos, en el que se han escogido los términos tales como ϕ_r y sus derivadas, puesto que éstos son los campos en la base débil. Los demás escalares son bosones Goldstone y por tanto se descartan². Así que el Lagrangiano trilineal es:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{trilineal}^{SM} &= \left(\frac{g^2}{\sqrt{2}}u\phi_r W^{\mu-} W_{\mu}^+ + \sqrt{2}a_4^2 u\phi_r Z^{\mu} Z_{\mu} \right) + \\
 &\left(\frac{g}{\sqrt{2}}a_1 u\phi^- A^{\mu} W_{\mu}^+ + \frac{g}{\sqrt{2}}(a_2 + a_4)u\phi^- Z^{\mu} W_{\mu}^+ + \right. \\
 &\left. \frac{ig}{2}\partial^{\mu}\phi^+ W_{\mu}^- \phi_r + \frac{ig}{2}\partial^{\mu}\phi_r W_{\mu}^+ \phi^- + h.c \right),
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

donde a_1 , a_2 y a_4 fueron definidos en (3.21). Los términos del anterior Lagrangiano están en la base débil, la cual se relaciona con la base física según (3.6). Reemplazando (3.21), (3.15) y considerando la base física, encontramos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{trilineal}^{SM} &= gM_{W\pm}W^{\mu-}W_{\mu}^+H_1^0 + \sqrt{2}\frac{g}{C_W}M_Z Z^{\mu}Z_{\mu}H_1^0 + eM_{W\pm}A^{\mu}W_{\mu}^+G_{c1}^- \\
 &+ \frac{ug^2}{\sqrt{2}}\left[\frac{1 - C_W^2}{C_W}\right]Z^{\mu}W_{\mu}^+G_{c1}^- + \frac{ig}{2}\partial^{\mu}G_{c1}^+W_{\mu}^-H_1^0 + \\
 &\frac{ig}{2}\partial^{\mu}H_1^0W_{\mu}^+G_{c1}^- + h.c,
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

donde la carga eléctrica se ha definido como $e = gS_W$. Se muestra que los acoples de H_1^0 coinciden con los del ME , así como también nuestros candidatos a materia oscura, H_2^0 , H_3^0 , H_4^0 y h_i^0 no están en el Lagrangiano, es decir que no interactúan con las partículas de ME , indicando que estos candidatos pueden ser partículas de materia oscura escalar autointeractuante.

²La escogencia de términos está ligada al hecho de que en el modelo estándar el Higgs, antes de aplicarle el gauge unitario, es : $\Phi = \begin{pmatrix} G_0 \\ \nu + h + IG_1 \end{pmatrix}$

3.5. Cota de Spergel-Steinhardt

La solución propuesta en [8] a las dificultades de modelos cosmológicos con materia oscura fría compuesta de partículas que interactúan débilmente, que como sabemos predicen núcleos densos en el centro de las galaxias y grupos de galaxias, además de un alto número de halos dentro del Grupo Local comparado con las observaciones, es que las partículas de materia oscura fría sean autointeractuantes con gran sección eficaz de dispersión, así como despreciable aniquilación o disipación. Se encuentra que un candidato realista a materia oscura escalar autointeractuante debe haber recorrido un camino libre Λ , en el radio solar en una galaxia típica, en el rango $1\text{Kpc} \leq \Lambda \leq 1\text{Mpc}$, donde $\Lambda = 1/n\sigma$, siendo σ la sección eficaz para auto-interacción y $n = \rho/m_h^0$ la densidad de número de un campo escalar singlete h^0 , con $\rho = 0,4\text{GeV}/\text{cm}^3$ la densidad media de una galaxia típica.

El límite sobre Λ es equivalente al límite sobre cociente σ/m_h^0 , dado por (2.6), donde la sección eficaz en la vecindad del umbral ($s \approx 4m_{h^0}^2$) se relaciona con la constante de acople de autointeracción λ_s en la forma:

$$\sigma = \frac{\lambda_s^2}{16\pi s} \approx \frac{\lambda_s^2}{64\pi m_h^0}, \quad (3.24)$$

Estos autoacoples cuárticos se obtienen del potencial escalar (3.3) en términos de campos físicos para cada uno de nuestros candidatos a materia oscura, H_2^0 , H_3^0 , H_4^0 y h_i^0 y están dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \lambda_{S_2} &= \frac{2\lambda_2 + \lambda_7}{64} \\ \lambda_{S_3} &= \frac{\lambda_2}{32} + \frac{\lambda_4}{16} \text{Cos}[\rho]^2 \text{Sin}[\rho]^2 + \frac{\lambda_7}{64} + \frac{\lambda_{10}}{16} \text{Cos}[\rho]^2 \text{Sin}[\rho]^2 - \\ &\quad \frac{\lambda_{12}}{16} (\text{Cos}[\rho]^3 \text{Sin}[\rho] + \text{Cos}[\rho] \text{Sin}[\rho]^3) \\ \lambda_{S_4} &= \frac{\lambda_2}{32} + \frac{\lambda_4}{16} \text{Cos}[\eta]^2 \text{Sin}[\eta]^2 + \frac{\lambda_7}{64} + \frac{\lambda_{10}}{16} \text{Cos}[\eta]^2 \text{Sin}[\eta]^2 - \\ &\quad \frac{\lambda_{12}}{16} (\text{Cos}[\eta]^3 \text{Sin}[\eta] + \text{Cos}[\eta] \text{Sin}[\eta]^3) \\ \lambda_{S_{h_i}} &= \frac{2\lambda_2 + \lambda_7}{64}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde se ha usado $\lambda_2 = \lambda_3$, $\lambda_5 = \lambda_6$, $\lambda_8 = \lambda_9$ y $\lambda_{12} = \lambda_{13}$, debido a que los cuádrupletes Ψ y Θ en (3.1) transforman igual bajo $SU(4) \times SU(3) \times U(1)$ y son intercambiables en el potencial escalar (3.3).

Para comprobar si nuestros candidatos satisfacen la cota de **Spergel - Steinhardt** (cota S-S), hay que reconocer que en nuestro modelo $SU(4) \times SU(3) \times U(1)$, solo los parámetros λ en los acoples y en la masa del escalar real (CP-par) H_2^0 y el escalar imaginario (CP-impar) h_i^0 , pueden ajustarse sin dificultad para que satisfagan la cota S-S de la ecuación (2.6), así como también para que den una densidad cosmológica Ω_h^0 realista, como veremos en la siguiente sección. Para los escalares reales candidatos a materia oscura H_3^0 y H_4^0 , es necesario hacer un “fine-tuning” de los parámetros, por lo que solo se analizará al candidato CP-impar h_i^0 (o CP-par H_2^0).³ Veamos:

Para satisfacer la cota S-S sobre el cociente $\frac{\sigma}{M_{DM_i}}$ (2.6) y de (3.24) los valores de las masas, llamado el rango de masas S-S, depende del autoacople cuártico y está entre

³Ya que el autoacople cuártico λ_{S_2} es el mismo que $\lambda_{S_{h_i}}$ (3.25).

los valores $m_{h^0} = \lambda_S^{2/3}(5,78 - 13,43)MeV$. Para que se tenga una teoría perturbativa $\lambda_S \leq 1$, así que tomando $\lambda_S = 0,5$ que resulta natural comparado con el autoacople del Higgs del ME que es de 0,26, se obtiene que el rango de masas S-S toma los valores de $3,46MeV \leq m_i \leq 8,52MeV$, este rango es un valor típico para generar térmicamente escalares de materia oscura autointeractuante, dado por [5].

Para el límite inferior de la cota S-S, esto es cuando las partículas de materia oscura escalar autointeractuante no interactúan dentro de un halo galáctico típico durante un tiempo de Hubble, ajustamos los acoples λ_2 y λ_7 de (3.25), considerando el rango de masas S-S y que $U = 1TeV$, y obtenemos 8,00000000003311 y 15,9999999999338 respectivamente. Análogamente, para el límite superior de la cota S-S, en cuyo caso corresponde al límite en que los halos de las galaxias en los cúmulos se destruyen mediante la interacción con las partículas calientes en el halo (evaporación), obtenemos que los acoples λ_2 y λ_7 de (3.25) tienen valores 8,00000000017891 y 15,99999999964215 respectivamente. Por lo que nuestro escalar CP-impar (o CP-par) puede satisfacer la cota de Spergel-Steinhardt (2.6), requisito para que los candidatos a materia oscura sean de tipo escalar y autointeractuante.

3.6. Densidad cósmica

La mayor contribución del bosón de Higgs del ME, cuya masa es del orden de $125GeV$, a la densidad cósmica, proviene del decaimiento del escalar H_1^0 a pares de partículas de materia oscura $h_i^o h_i^o$ en temperaturas menores que la transición de fase electrodébil T_{EW} (D.6). Estos escalares (H_2^0 y h_i^0) tienen una masa de pocos MeV, son no relativistas en la era de desacoplamiento (D.5) y se producen cuando todavía el Higgs está en equilibrio térmico con las demás componentes del Universo, esto es que la mayor rata de producción se da en el momento en el que el Higgs se desacople. Estas partículas de materia oscura tienen acoples muy débiles con las partículas que están en equilibrio térmico con el Higgs y por supuesto son estables. Se han calculado por lo tanto los acoples trilineales de H_1^0 con H_2^0 y h_i^0 ($H_1^0 H_2^0 \equiv H_1^0 h_i^0$), llamados Γ , a partir de expandir los términos del potencial (3.3) en términos de los campos físicos. Los resultados obtenidos son:

$$\Gamma_2 \equiv \Gamma_i = \lambda_5 \frac{u}{2\sqrt{2}}, \quad (3.26)$$

por lo que el acople trilineal tanto para el escalar CP-par como para el CP-impar depende del acople λ_5 y, la escala electrodébil que le da masa al Higgs del ME, u . Tal como presentamos en la sección 2.3 la densidad cósmica de un gauge escalar singlete, con acoples a un doblete de Higgs, para el decaimiento $H_1^0 \rightarrow H_2^0 H_2^0$ o $H_1^0 \rightarrow H_i^0 H_i^0$, se encuentra en función de los acoples trilineales (acoples al Higgs del ME) de la siguiente manera [5]:

$$\Omega_{h^0} = 2g(T_\gamma) T_\gamma^3 \frac{\sum_i m_i \Theta_i}{\rho_{cg}(T)} \quad (3.27)$$

$$= \frac{2\eta g(T_\gamma) T_\gamma^3}{\rho_{cg}(T)} \frac{\sum_i m_i \Gamma_i^2}{4\pi^3 K m_{H_1^0}^3}, \quad (3.28)$$

donde hemos reemplazado $\Theta_i \equiv \frac{n_i}{T^3} = \frac{\eta \Gamma_i^2}{4\pi^3 K m_{H_1^0}^3}$.

Considerando que inicialmente el Universo tiene una alta T y el resultado de la densidad cósmica se calcula a medida que el Universo se enfría, la contribución de cada

Θ_i viene de $T \leq m_{H_i^0} < T_{EW}$ (D.6). Se considera que el mayor contribuyente para Θ es $m_{H_i^0}/T \sim 1$, así que $\eta(1) = 1,87$ con el fin de obtener una expresión analítica. Por otro lado, K (D.8) está definida por $g(T)$, los grados de libertad de los bosones y fermiones relativísticos (1.33), y la masa de Planck (D.7). Se considera también el valor típico de $g(m_{H_i^0})$ para un modelo 3-4-1 de 3 familias aproximadamente de 229,5 [9], aunque este puede depender del contenido de partículas del modelo en consideración. Consideremos m_i en (3.28) de un valor $5MeV$, la densidad crítica del Universo ρ_c (D.9), la temperatura de radiación $T_\gamma = 2,4 \times 10^{-13}GeV$, los grados de libertad en la temperatura de radiación $g(T_\gamma) = 2$.

De (3.26), teniendo en cuenta la escala electrodébil $u = 174,1054$, ajustamos el acople λ_5 , por lo que calculando obtenemos un valor de $\lambda_5 = 2,1 \times 10^{-8}$, y por tanto encontramos que el acople trilineal de nuestros candidatos a materia oscura tiene un valor de $\Gamma_{i,2} = 1,292 \times 10^{-6}GeV$, implicando que los escalares H_2^0 y h_i^0 se acoplan muy débilmente al sector del ME .

Finalmente, estos resultados son consistentes con las recientes observaciones del satélite Planck para la densidad cósmica, es decir que para (3.28) un valor para nuestra densidad cósmica es de $\Omega_{H_2^0, h_i^0} = 0,268$, indicando así que los 2 escalares ligeros, considerados como partículas de materia oscura, H_2^0 y h_i^0 , no sobrepueblan el universo.

Capítulo 4

Conclusiones

De acuerdo al análisis sistemático y exploración de los modelos 3-4-1 que surgen del grupo $SU(3)_c \times SU(4)_L \times U(1)_X$ realizadas en las referencias [1], [2], [3] y [4], se presentó en esta tesis una reproducción de sus aspectos mas significativos, con el único propósito de fortalecer las presunciones sobre la ligadura que hay entre la cosmología y las partículas subatómicas, es decir el posible hallazgo de partículas, pertenecientes a modelos de extensión del modelo estándar, que pueden llegar a componer el macrocosmos.

Se usaron los tres parámetros libres a , b y c asociados con el generador de carga eléctrica en $SU(4)_L \times U(1)_X$, de los cuales $a = 1$ cuando se considera que el $SU(2)_L$ del ME es subgrupo de $SU(4)_L$, permaneciendo como parámetros libres los valores b y c e implicando un número mayúsculo de modelos 3-4-1. Con la dirección puesta hacia un modelo de la extensión 3-4-1, se anunció el caso particular de que $b = c = 1$, en este caso los modelos correspondientes no poseen bosones gauge y fermiones con cargas eléctricas exóticas. Para este valor específico de b y c se encuentran un modelo de tres familias libres de anomalías, esto porque se debe conservar el principio gauge y asegurar la renormalización, y sin cargas eléctricas exóticas.

Se presentó el sector escalar del modelo con $b = c = 1$, con tres cuadrupletes de Higgses, identificándose así como un sector mas simple y económico, suficiente y consistente, puesto que al romper la simetría arroja 15 bosones gauge, los cuales son suficientes para darle masa a los 15 bosones gauge asociados a $SU(4)$. Seguidamente se reprodujo lo que constituye la piedra angular de este y anteriores trabajos, el potencial escalar del modelo, cuya expansión de cada uno de sus términos da cuenta de tres matrices de masa, CP-par, CP-impar y Cargada, así como también de los autoacoples cuárticos y acoples trilineales, los que fueron fundamentales para la realización de los cálculos que indicaran que alguna partícula escalar del espectro conformara una parte de todo nuestro universo, la llamada materia oscura.

En la matriz de masa CP-par se encontró un escalar que se identifica con el Higgs del modelo estandar y se identificaron inicialmente tres candidatos a materia oscura y para la matriz de masa CP-impar, solo un candidato. Hasta este punto el primer objetivo propuesto se cumplió, puesto que se estudió con detalle el sector de escalares físicos neutros, CP-par y CP-impar.

El segundo y mas importante objetivo de esta tesis fue el de analizar los cuatro candidatos antes mencionados, a fin de reconocerlos partículas realistas que conforman la materia oscura escalar autointeractuante. Esta clase de materia oscura soluciona el impasse del modelo de formación de galaxias, conocido como materia oscura fría, que predice regiones centrales de las galaxias que son muy densas en comparación con lo observado.

Los resultados más importantes de esta tesis se resumen a continuación:

- Los acoples de los Higgses con algunos bosones gauge, que permitieron relacionar de manera categórica un Higgs con el del ME.
- Los cuatro candidatos, H_2^0 , H_3^0 , H_4^0 y h_i^0 , identificados para constituir materia oscura escalar autointeractuante no interactúan con las partículas del ME, debido a que no se encuentran en el Lagrangiano de acoples cúbicos.
- El análisis de solo dos de los cuatro candidatos a materia oscura escalar autointeractuante, ya que a dos de estos se les debe hacer un ajuste fino de los parámetros λ en los acoples y en la masa del escalar real (o escalar CP-par).
- El escalar imaginario CP-impar h_i^0 , así como el escalar real CP-par H_2^0 , son candidatos realistas de materia oscura escalar autointeractuante ya que cumplieron con la cota Spergel-Steinhardt, no interactúan directamente con las partículas del ME, se obtuvo una densidad cósmica acorde a los resultados recientes del satélite Planck, por lo que no sobrepueblan el universo.

En síntesis, para modelos 3-4-1 sin cargas eléctricas exóticas, se consideró el sector escalar y se mostró que proporciona al menos 2 singletes ligero de $SU(2)$, CP-par y CP-impar, con una masa de pocos MeV, satisfaciendo las propiedades de un candidato generado térmicamente para materia oscura escalar autointeractuante. Esto debido a los ajustes en los valores de los parámetros del potencial escalar. Este escalar tiene interacciones débiles con la materia ordinaria, no sobrepueblan el universo y se mantiene estable sin la necesidad de una simetría discreta extra.

Apéndice A

El Mecanismo Higgs

El rompimiento espontáneo de la simetría (*RES*) se implementa en el *ME* introduciendo un campo escalar complejo, doblete de $SU(2)_L$, con valor esperado en el vacío (VEV) distinto de cero con el que se rompe la simetría gauge local $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Escribamos este campo de la siguiente manera:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^\dagger(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Ahora consideremos el Lagrangiano de dicho campo escalar ϕ de la forma [20]:

$$\mathcal{L}_S = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) + \mu^2 \phi^\dagger \phi - (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (h > 0, \mu^2 < 0), \quad (\text{A.2})$$

donde μ es un término masivo, ϕ y ϕ^\dagger son los campos escalares complejos independientes definidos por dos campos escalares reales y la derivada covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu^a T^a - ig'Y B_\mu, \quad Y = Q - T^3 = \frac{1}{2}, \quad (\text{A.3})$$

con

$$W_\mu^a T^a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}W_\mu^3 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & -\sqrt{2}W_\mu^3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

es invariante bajo transformaciones locales $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ y acopla multipletes escalares con los bosones gauge de $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. El valor de la hipercarga es fijado para tener el correcto acople entre $\phi(x)$ y $A^\mu(x)$, es decir que el fotón no se acople a $\phi^0(x)$. Mientras que la carga eléctrica es una cantidad conservada, solo puede actuar un VEV sobre los campos escalares neutros¹, así es que solo podemos escoger un estado base particular. La simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ se rompe por tanto espontáneamente al subgrupo electromagnético, que por construcción sigue siendo una simetría verdadera, así:

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{RES} U(1)_{em}, \quad (\text{A.7})$$

¹Es posible verificar que la escogencia del valor esperado del campo ϕ , (A.1) deja el vacío invariante bajo $U(1)_{em}$. Esta invarianza requiere que

$$e^{i\alpha Q} \langle \phi \rangle \approx (1 + i\alpha Q) \langle \phi \rangle = \langle \phi \rangle \quad (\text{A.5})$$

o que el operador Q aniquile el vacío, $Q \langle \phi \rangle = 0$, de esta manera,

$$Q \langle \phi \rangle = (T^3 + Y) \langle \phi \rangle = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A.6})$$

de donde vemos que la carga eléctrica del vacío es cero.

con $U(1)_{em}$ como la simetría remanente despues del *RES*.

De acuerdo al teorema de Goldstone, que por cada generador roto se tiene un bosón sin masa, hay 3 bosones que podrían aparecer tras la ruptura. Consideremos entonces el gauge unitario²:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

con 3 campos reales que son precisamente los que podrían ser los bosones de Goldstone asociados al mecanismo RES.

Ahora si tomamos (A.9), la porción del Lagrangiano cinético (A.2) toma la forma:

$$(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) \rightarrow \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H + (v + H)^2 \left\{ \frac{g^2}{4} W_\mu^+ W^\mu + \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu \right\}. \quad (\text{A.10})$$

El VEV del escalar neutro ha generado un término cuadrático para W^\pm y Z , es decir que los bosones gauge han adquirido masa [19]:

$$m_W = g \frac{v}{2} \quad \text{y} \quad m_Z = \sqrt{g^2 + g'^2} \left(\frac{v}{2} \right). \quad (\text{A.11})$$

El cuarto campo vectorial A_μ , ortogonal a Z_μ , permanece sin masa, este campo lo identificamos como el fotón. Los estados físicos, es decir los autoestados de masa, son entonces W^+ , W^- , Z^0 y A_μ .

Ahora definamos θ_W como el ángulo de mezcla electrodébil, que aparece relacionando la base neutra electrodébil con los bosones físicos, es decir:

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\text{sen} \theta_W \\ \text{sen} \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

con lo que

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \text{y} \quad \text{sen} \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (\text{A.13})$$

También podemos obtener la forma convencional del acople electromagnético en términos del ángulo de mezcla electrodébil. La carga e del electrón estará por tanto dada por

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad (\text{A.14})$$

así que

$$e = \frac{g}{\text{csc} \theta_W} \quad \text{o} \quad e = g \sin \theta_W \quad (\text{A.15})$$

Lo que nos indica que los acoples de todos lo bosones débiles están en función de dos parámetros: la carga del electrón e y el ángulo de mezcla θ_W .

²La forma general del doblete escalar es

$$\phi(x) = \exp \left\{ i \frac{\sigma_i}{2} \theta^i(x) \right\} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

con el gauge unitario $\theta^i(x) = 0$.

A.1. El bosón Higgs

En el Lagrangiano escalar (A.2) se introdujo una nueva partícula escalar en el modelo: el Higgs H. En términos de los campos físicos (gauge unitario) \mathcal{L}_S toma la forma [20]:

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{4}hv^4 + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{HG^2}, \quad (\text{A.16})$$

donde

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2}\partial_\mu H \partial^\mu H - \frac{1}{2}M_H^2 H^2 - \frac{M_H^2}{2v} H^3 - \frac{M_H^2}{8v^2} H^4, \quad (\text{A.17})$$

$$\mathcal{L}_{HG^2} = M_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu \left\{ 1 + \frac{2}{v}H + \frac{H^2}{v^2} \right\} + \frac{1}{2}M_Z^2 Z_\mu Z^\mu \left\{ 1 + \frac{2}{v}H + \frac{H^2}{v^2} \right\}, \quad (\text{A.18})$$

y la masa del Higgs es dada por

$$M_H = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{2}hv = 125,5\text{GeV} \quad (\text{A.19})$$

Las interacciones con el Higgs tienen la característica de proporcionar el cuadrado de las masas de los bosones acoplados. Todos los acoplamientos del Higgs son determinados por M_H , M_W , M_Z y el VEV v .

Apéndice B

Extensión $SU(3) \otimes SU(4) \otimes U(1)$

La expresión mas general del generador de carga eléctrica para el 3-4-1 es la siguiente combinación lineal de cuatro generadores

$$Q = aT_{3L} + \frac{1}{\sqrt{3}}bT_{8L} + \frac{1}{\sqrt{6}}cT_{15L} + XI_4 \quad (\text{B.1})$$

Para que esta extensión sea consistente se considera $a = 1$, lo cual hace que el isospín usual $SU(2)_L$ del ME sea tal que $SU(2)_L \subset SU(4)_L$, los parámetros b y c son libres e I_4 es la matriz unitaria 4×4 .

Para el grupo $SU(4)$ los generadores son matrices 4×4 y como el número de generadores del grupo $SU(n)$ es dado por $n^2 - 1$, se obtienen 15 matrices 4×4 para $SU(4)$. Las primeras 8 matrices son creadas por 8 generadores de $SU(3)$, estos generadores son $T_{iL} = \frac{\lambda_{iL}}{2}$, con λ_{iL} las matrices de Gell-Mann (B.2) para $SU(4)_L$ normalizadas como $Tr(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}$.

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{15} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Para fijar los parámetros b y c , se considera los 15 bosones de 3-4-1 que se pueden escribir como:

$$\frac{1}{2}\lambda_\alpha A_\mu^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} D_{1\mu}^0 & W_\mu^+ & K_\mu^{(b+1)/2} & X_\mu^{(3+b+2c)/6} \\ W_\mu^- & D_{2\mu}^0 & K_{1\mu}^{(b-1)/2} & V_\mu^{(-3+b+2c)/6} \\ K_\mu^{-(b+1)/2} & K_{1\mu}^{-(b-1)/2} & D_{3\mu}^0 & Y_\mu^{-(b-c)/3} \\ X_\mu^{-(3+b+2c)/6} & V_\mu^{(3-b-2c)/6} & Y_\mu^{(b-c)/3} & D_{4\mu}^0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

La primera y segunda componente de esta matriz corresponden a las cargas de las partículas del ME y las otras componentes a las cargas exóticas.

Se exige también acomodar cada familia de fermiones del ME bajo diferentes representaciones, 4 o $\bar{4}$. Ya que se tiene $a = 1$, (B.1) es válida para un número infinito de modelos, cada uno asociado a valores de b y c .

En la representación 4 :

$$Q[4] = Dg\left(\frac{1}{2} + \frac{b}{6} + \frac{c}{12} + x, -\frac{1}{2} + \frac{b}{6} + \frac{c}{12} + x, -\frac{b}{3} + \frac{c}{12} + x, -\frac{c}{4} + x\right) \quad (\text{B.4})$$

y en la representación $\bar{4}$:

$$Q[\bar{4}] = Dg\left(\frac{1}{2} + \frac{b}{6} + \frac{c}{12} + x, -\frac{1}{2} + \frac{b}{6} + \frac{c}{12} + x, -\frac{b}{3} + \frac{c}{12} + x, -\frac{c}{4} + x\right) \quad (\text{B.5})$$

Sin embargo, si se restringue el estudio a modelos que no contengan cargas eléctricas exóticas, $b = \pm 1/2$, entonces el número de modelos es finito. Así que si se tienen cargas eléctricas $0, \pm 1$ solamente, no son más de cuatro diferentes posibilidades para los valores simultáneos de b y c , que son: $b = c = 1$, $b = c = -1$; $b = 1, c = -2$ y $b = -1, c = 2$. Estos cuatro conjuntos de valores para b y c son necesarias y suficiente para excluir también cargas eléctricas exóticas en el sector fermionico. En adición, los modelos con $b = c = -1$ son equivalentes, a través de la conjugación de carga, a modelos con $b = c = 1$. Del mismo modo, los modelos con $b = -1, c = 2$ son equivalentes a los modelos con $b = 1, c = -2$. Por lo tanto, con las restricciones impuestas, sólo tenemos dos conjuntos diferentes de modelos: aquellos para $b = c = 1$, llamado modelo A, y los de $b = 1, c = -2$, llamado modelo B.

B.1. El sector escalar

Los siguientes son los Higgses y su respectivo valor esperado en consideración:

$$\begin{aligned} \Phi\left(1, 4^*, \frac{3}{4}\right) &= \begin{pmatrix} \phi \\ \phi^+ \\ \phi'^+ \\ \phi''^+ \end{pmatrix}, \quad VEV \langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \Psi\left(1, 4^*, -\frac{1}{4}\right) &= \begin{pmatrix} \psi^- \\ \psi \\ \psi' \\ \psi'' \end{pmatrix}, \quad VEV \langle \Psi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \Theta\left(1, 4^*, -\frac{1}{4}\right) &= \begin{pmatrix} \theta^- \\ \theta \\ \theta' \\ \theta'' \end{pmatrix}, \quad VEV \langle \Theta \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

con la jerarquía $V \sim U \gg u$. Los campos escalares neutros adquieren VEV y están escritos en términos de una parte real (CP-par) y una parte imaginaria (CP-impar).

Con todas las combinaciones adecuadas de los cuádrupletes de Higgses (B.6) se obtiene el potencial escalar general (3.3), invariante bajo la simetría gauge $3 - 4 - 1$. Cada término del potencial escalar (3.3) se expande hasta segundo orden, puesto que términos de orden superior corresponden a las interacciones. Podemos entonces obtener el potencial mínimo, derivando los 3 campos y exigiendo que los términos lineales,

a partir de la expansión, sean iguales a cero. Esto es:

$$\begin{aligned}\mu_1^2 + 2u^2\lambda_1 + (U^2 + V^2)\lambda_5 &= 0 \\ \mu_2^2 + 2V^2\lambda_2 + u^2\lambda_5 + U^2\lambda_7 &= 0 \\ \mu_3^2 + 2U^2\lambda_2 + u^2\lambda_5 + V^2\lambda_7 &= 0 \\ \mu_4^2 + u^2\lambda_{11} + (U^2 + V^2)\lambda_{12} &= 0\end{aligned}$$

Así que el **potencial mínimo**, considerando las anteriores restricciones, es:

$$V_{min} = -u^4\lambda_1 - (U^4 + V^4)\lambda_2 - u^2(U^2 + V^2)\lambda_5 - V^2U^2\lambda_7.$$

A partir de la expansión de todos los términos (los cuales serán las componentes de la matriz) del potencial, se construyen también 3 matrices de masa, CP-par a partir de 7 campos reales, CP-impar a partir de 7 campos imaginarios y una matriz Cargada a partir de 5 campos cargados, estas matrices se muestran a continuación:

Matriz de masa CP - PAR para escalares reales:

En la base: $\{\phi_r, \psi_r', \psi_r'', \theta_r', \theta_r''\}$.

$$CP_{even} = \begin{pmatrix} 2u^2\lambda_1 & uV\lambda_5 & \frac{uU}{2}\lambda_{11} & \frac{uV}{2}\lambda_{11} & uU\lambda_5 \\ uV\lambda_5 & 2V^2\lambda_2 & \frac{UV}{2}\lambda_{12} & \frac{V^2}{2}\lambda_{12} & UV\lambda_7 \\ \frac{uU}{2}\lambda_{11} & \frac{UV}{2}\lambda_{12} & \frac{(\lambda_4+\lambda_{10})}{2}U^2 & \frac{(\lambda_4+\lambda_{10})}{2}UV & \frac{U^2}{2}\lambda_{12} \\ \frac{uV}{2}\lambda_{11} & \frac{V^2}{2}\lambda_{12} & \frac{(\lambda_4+\lambda_{10})}{2}UV & \frac{(\lambda_4+\lambda_{10})}{2}V^2 & \frac{UV}{2}\lambda_{12} \\ uU\lambda_5 & UV\lambda_7 & \frac{U^2}{2}\lambda_{12} & \frac{UV}{2}\lambda_{12} & 2U^2\lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (B.7)$$

A esta matriz se le calcula el espacio nulo y obtenemos 3 bosones de Golstone.

Matriz de masa CP - IMPAR para escalares imaginarios:

En la base: $\{\psi_i'', \theta_i'\}$ y para $U = V$.

$$CP_{odd} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}V^2(-\lambda_4 + \lambda_{10}) & -\frac{1}{2}V^2(-\lambda_4 + \lambda_{10}) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}V^2(-\lambda_4 + \lambda_{10}) & \frac{1}{2}V^2(-\lambda_4 + \lambda_{10}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (B.8)$$

A esta matriz se le calcula el espacio nulo y obtenemos 6 bosones de Golstone.

Matriz de masa CARGADA para escalares cargados:

En la base: $\{\phi'^+, \phi''^+, \psi^+, \theta^+\}$.

$$Cargados = \begin{pmatrix} V^2\lambda_8 & V^2\lambda_{14} & uV\lambda_8 & uV\lambda_{14} \\ V^2\lambda_{14} & V^2\lambda_8 & uV\lambda_{14} & uV\lambda_8 \\ uV\lambda_8 & uV\lambda_{14} & u^2\lambda_8 & u^2\lambda_{14} \\ uV\lambda_{14} & uV\lambda_8 & u^2\lambda_{14} & u^2\lambda_8 \end{pmatrix}. \quad (B.9)$$

A esta matriz se le calcula el espacio nulo y obtenemos 6 bosones de Golstone.

Así que en total se obtienen 15 bosones de Goldstone, los cuales son suficientes para darle masa a los 15 bosones de Gauge.

Apéndice C

Anomalías en el 3-4-1

En general, para todos los modelos con $b = c = 1$ considerados en [4], se pueden definir los siguientes conjuntos completos de espinores de Weyl de espín 1/2,

$$\begin{aligned}
 S_1^q &= \left\{ (u, d, D, D')_L \sim \left[3, 4, -\frac{1}{12} \right], u_L^c \sim \left[3^*, 1, -\frac{2}{3} \right], d_L^c \sim \left[3^*, 1, \frac{1}{3} \right], \right. \\
 &\quad \left. D_L^c \sim \left[3^*, 1, \frac{1}{3} \right], D_L'^c \sim \left[3^*, 1, \frac{1}{3} \right] \right\}. \\
 S_2^q &= \left\{ (d, u, U, U')_L \sim \left[3, 4^*, \frac{5}{12} \right], u_L^c \sim \left[3^*, 1, -\frac{2}{3} \right], d_L^c \sim \left[3^*, 1, \frac{1}{3} \right], \right. \\
 &\quad \left. U_L^c \sim \left[3^*, 1, -\frac{2}{3} \right], U_L'^c \sim \left[3^*, 1, -\frac{2}{3} \right] \right\}. \\
 S_3^l &= \left\{ (\nu_e^0, e^-, E^-, E'^-)_L \sim \left[1, 4, -\frac{3}{4} \right], e_L^+ \sim [1, 1, 1], E_L^+ \sim [1, 1, 1], \right. \\
 &\quad \left. E_L'^+ \sim [1, 1, 1] \right\}. \\
 S_4^l &= \left\{ (E^+, N_1^0, N_2^0, N_3^0)_L \sim \left[1, 4, \frac{1}{4} \right], E_L^- \sim [1, 1, -1] \right\}. \\
 S_5^l &= \left\{ (e^-, \nu_e^0, N^0, N'^0)_L \sim \left[1, 4^*, -\frac{1}{4} \right], e_L^+ \sim [1, 1, -1] \right\}. \\
 S_6^l &= \left\{ (N^0, E_1^+, E_2^+, E_3^+)_L \sim \left[1, 4^*, \frac{3}{4} \right], E_{1L}^- \sim [1, 1, -1], E_{2L}^- \sim [1, 1, -1], \right. \\
 &\quad \left. E_{3L}^- \sim [1, 1, -1] \right\}.
 \end{aligned}$$

Las anomalías $[SU(3)_c]^2 U(1)_X$ y $[SU(3)_c]^3$ son nulas, debido a que el anterior conjunto contiene sus propias antipartículas cargadas y $SU(3)_c$ es vectorial. Por otro lado, un cálculo directo muestra que la anomalía $[grav]^2 U(1)_X$ también es nula, así que nos queda por encontrar las anomalías correspondientes a $[U(1)_X]^3$, $[SU(4)_L]^2 U(1)_X$ y $[SU(4)_L]^3$. Este cálculo se muestra en el cuadro C.1.

ANOMALÍA	S_1^q	S_2^q	S_3^l	S_4^l	S_5^l	S_6^l
$[U(1)_X]^3$	-9/16	-27/16	21/16	-15/16	15/16	-21/16
$[SU(4)_L]^2 U(1)_X$	-1/4	5/4	-3/4	1/4	-1/4	3/4
$[SU(4)_L]^3$	3	-3	1	1	-1	-1

Cuadro C.1: Anomalías para modelos con $b = c = 1$

A partir de este, se encuentra que sólo es posible construir dos modelos de tres familias libres de anomalías, los que regularmente son llamados en la literatura como modelo A y modelo B, estos son:

- Modelo $A_1 = 2S_1^q \oplus S_2^q \oplus 3S_5^l$
- Modelo $A_2 = S_1^q \oplus 2S_2^q \oplus 3S_5^l$

Note que, a diferencia del ME , la cancelación de anomalías se da entre familias y no familia por familia.

Apéndice D

Parámetros cosmológicos

D.1. Algunas constantes y parámetros en Cosmología

Constante de gravitación de Newton:

$$G_N = 6,673 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}. \quad (D.1)$$

Parámetro h en el parámetro de Hubble

$$h = \frac{H_0}{kms^{-1}Mpc^{-1}} = (0,703 \pm 0,03) kms^{-1}Mpc^{-1}. \quad (D.2)$$

donde H_0 es el valor presente del parámetro de Hubble.

Parámetro de desaceleración, en virtud de la magnitud de desaceleración $-\ddot{R}$:

$$q \equiv -\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} = \frac{4\pi G_N \rho}{3H^2} \quad (D.3)$$

Densidad de una galaxia típica:

$$\rho = 0,4 GeV/cm^3 \quad (D.4)$$

Temperatura de desacoplamiento (entre materia y radiación):

$$T_{dec} = 1eV \quad (D.5)$$

Temperatura de transición de fase electrodébil:

$$T_{EW} \geq 1,5 m_{H_0} \quad (D.6)$$

Masa de Planck:

$$M_{Pl} = 1,2 \times 10^{19} GeV. \quad (D.7)$$

Constante K

$$K = 1,57 \times 10^{-18} GeV^{-1} \quad (D.8)$$

Densidad media del universo o densidad crítica

$$\rho_c = 7,5 \times 10^{-47} h^2 GeV^4 \quad (D.9)$$

D.2. Algunas conversiones de unidades usadas:

- $1 \text{ parsec} \equiv 3,09 \times 10^{16} m, 1 Kpc = 3,09 \times 10^{21} cm$
- $10^{-13} cm = 5 GeV^{-1}$
- $1 GeV = 1,783 \times 10^{-27} Kg$

Bibliografía

- [1] M. L. Sánchez, L. A. Sánchez y W. A. Ponce, Minimal scalar sector of the 3-4-1 extension of the standard model.: en preparación.
- [2] W. A. Ponce and L. A. Sanchez, Mod. Phys. Lett. A 22, 435 (2007) [arXiv:hep-ph/0607175].
- [3] Fayyazuddin and Riazuddin, $SU(4)$ Unification of Electroweak Interactions. Phys. Rev. D, 30, 1041 (1984); R. Foot, H.N. Long and T.A. Tran, $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ and $SU(4)_L \otimes U(1)_N$ gauge models whit right-handed neutrinos. Phys. Rev. D, 50, R34 (1994); F. Pisano and V Pleitez, $SU(4)_L \otimes U(1)_N$ model for the electroweak interactions. Phys. Rev. D, 51, 3865 (1995); Fayyazuddin and Riazuddin, $SU(4)_L \otimes U(1)_N$ model for electroweak unification. Jhep, 0412, 013 (2004).
- [4] W.A. Ponce, D.A. Gutiérrez and L.A. Sánchez. $SU(3)_c \otimes SU(4)_L \otimes U(1)_x$ without exotic lectric charges. Phys. Rev. D, 69, 055007 (2004); L.A. Sánchez, F.A. Pérez and W.A. Ponce. $SU(3)_c \otimes SU(4)_L \otimes U(1)_x$ model for three families. Eur. Phys. Jour. C., 35, 259 (2004).
- [5] J. McDonald, Thermally Generated Gauge Singlet Scalars as Self-interacting Dark Matter. Phys. Rev. Lett., 88, 091304 (2002).
- [6] C. Boehm, D. Hooper, J. Silk and M. Casse, Phys. Rev. Lett., 92, 101301 (2004); C. Picciotto and M. Pospelov, Phys. Lett. B, 605, 15 (2005).
- [7] S. Ghigna, B. Moore, F. Governato, G. Lake, T. Quinn and J. Stadel, Density profiles and substructure of dark matter halos: converging results at ultra-high numerical resolution. Astrophys. J, 544, 616 (2000); A. Klypin, A. V. Kravtsov, O. Valenzuela and F. Prada, Where are the missing galactic satellites?. Astrophys. J., 522, 82 (1999); B. Moore et al., Dark Matter Substructure in Galactic Halos. Astrophys. J., 524, L 19 (1999).
- [8] D.N. Spergel and P.J. Steinhardt, Observational evidence for self-interacting cold dark matter. Phys. Rev. Lett., 84, 3760 (2000) [arXiv:astro-ph/9909386].
- [9] S. Fregolente and M.D. Tonasse, Self-interacting dark matter from an $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ electroweak model. Phys. Lett. B, 555, 7 (2003).
- [10] H. N. Long and N. Q. Lan, Self-interacting dark matter and Higgs bosons in the $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_N$ model with right-handed neutrinos. Europhys. Lett., 64, 571 (2003).
- [11] Filippi, W. A. Ponce, L. A. Sanchez *Dark matter from the scalar sector of 3–3–1 models without exotic electric charges*, Europhys. Lett., 73 (1), pp. 142 – 148 (2006).

- [12] M.C. Bento, O. Bertolami, R. Rosenfeld and L. Teodoro, Self-interacting Dark Matter and Invisibly Decaying Higgs. *Phys. Rev. D*, 62, 041302 (2000); C.P. Burgess, M. Pospelov and T. ter Veldhuis, The Minimal Model of Nonbaryonic Dark Matter: A Singlet scalar. *Nucl. Phys. B*, 619, 709 (2001); C. Boehm and P. Fayet, Scalar dark matter candidates, *Nucl. Phys. B*, 683, 219 (2004).
- [13] L. A. Sanchez, L. A. Wills-Toro and J. I. Zuluaga, *Phys. Rev. D* 77, 035008 (2008).
- [14] L. A. Sanchez, F. A. Perez and W. A. Ponce, *Eur. Phys. J. C* 35, 259 (2004).
- [15] S. Villada and L. A. Sanchez, *J. Phys. G* 36, 115002 (2009).
- [16] L. A. Sánchez, Local Gauge Symmetries and the 3-3-1 Extension of the Standard Model, Tesis Doctoral, Universidad de Antioquia (2003).
- [17] P. H. Frampton, J. T. Liu, B. C. Rasco. *Rev. D70*, 075021 (2004). SSC Phenomenology of the 331 Model of Flavor; arxiv.org/abs/hep-ph/9304294v1
- [18] Diaz R. A., Martínez R. and Ochoa F., *Phys. Rev. D*, 69 (2004) 095009.
- [19] D. Restrepo, “Hacia La Teoría Cuántica de Campos”.
- [20] Pich A. The standard Model of electroweak interactions. [(2005) <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0502010v1>].
- [21] W. Greiner, “Quantum Mechanics: Symmetries”.
- [22] P. D. B. Collins, A. D. Martin y E.J. Squires, “Particle physics and cosmology”.
- [23] S. Dodelson, “Modern Cosmology”, Academic press. Fermi national accelerator laboratory. University of Chicago (2003) .
- [24] M. E. Peskin y D. V. Schroeder, “An Introduction to quantum field theory”.
- [25] P. Coles y F. Lucchin, “COSMOLOGY The origin and evolution of cosmic structure”.
- [26] J. A. Peacock , “Cosmological physics”.
- [27] Jeremiah P. Ostriker and Paul Steinhardt. New light on Dark matter, *Science* vol 300 20 June 2003
- [28] Lectures Cosmology *I* and *II*, Syksy Räsänen.
<http://theory.physics.helsinki.fi/~cosmology/>
- [29] E. Battaner y E. Florido, The rotation curve of spiral galaxies and its cosmological implications [(2000) [http:// arXiv:astro-ph/0010475v1](http://arXiv:astro-ph/0010475v1)].
- [30] B.J. Carr, J.R. Bond, y W.D. Arnett, *Astrophys. J.* 277, 455 (1894)
- [31] <http://web.mit.edu/readingtn/www/netadv/specr/345/node2.html>
- [32] M.A. Rodríguez, A. Hernandez y T. Matos. Materia oscura escalar compleja (parte I): la version hidrodinámica.
- [33] S. Khalil y C. Muñoz. The Enigma of the Dark Matter.