Sobre el orden inferior esférico

por

Jheison Alfonso Rivera Serna

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al Título de

Magíster en Ciencias Matemáticas

Director: Diego Mejía Duque

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Noviembre de 2013

Agradecimientos

Quisiera agradecer a toda mi familia por su constante e incondicional apoyo, por comprender el hecho de no poder estar a su lado en momentos importantes para poder hacer avances en este trabajo. En especial a mis padres por ser el pilar fundamental en todo lo que soy, en toda mi educación, tanto académica, como de la vida, por su incondicional apoyo perfectamente mantenido a través del tiempo.

Al profesor Diego Mejía, quien como mi director de tesis, me brindó gran apoyo y motivación para la culminación de mis estudios profesionales y para la elaboración de esta tesis. Además, quiero dar las gracias a los profesores Juan Humberto Arango y Hugo Javier Arbeláz que aparte de ser jurados de esta tesis, dedicaron valioso tiempo a escucharme hablar de mis avances y me dieron sugerencias significativas para su desarrollo.

Finalmente, a todos los profesores que de una u otra forma contribuyeron a mi formación profesional; así como a los compañeros y amigos con los que siempre compartí, apoyándonos mutuamente en nuestra formación profesional y que hasta ahora, seguimos siendo amigos.

Índice general

Resumen

En 1964 Christian Pommerenke comenzó con el estudio de las familias de funciones analíticas localmente inyectivas definidas en el disco unitario (véase [Po64]), definiendo el orden (superior) de una función analítica localmente inyectiva definida en $\mathbb{D}$. Más adelante, William Ma y David Minda hicieron algo similar a lo que hizo Pommerenke, pero esta vez para familias de funciones meromorfas localmente inyectivas definidas en $\mathbb{D}$, entrando a definir esta vez en [MaMi92] el orden (superior) esférico de una función en dichas familias.

Luego, Pommerenke junto con Lorena Cruz en su estudio de las funciones concavas univalentes [CrPo07], definió el orden inferior de una función analítica localmente inyectiva definida en $\mathbb{D}$. Basado en lo anterior, Hugo Arbeláez en su tesis de doctorado [Ar11] definió el orden inferior esférico de una función meromorfa localmente inyectiva definida en $\mathbb{D}$.

En este trabajo se busca profundizar más sobre este concepto, es decir, queremos hacer un estudio sistemático de la noción de orden inferior para funciones meromorfas localmente inyectivas definidas en el disco unitario $\mathbb{D}$, puesto que el estudio que se ha hecho hasta ahora sobre el orden inferior esférico no es muy amplio. En el primer capítulo se introducen algunas de las definiciones y resultados fundamentales para el desarrollo de este trabajo, empezando con un poco de teoría básica de la geometría hiperbólica, luego un poco de geometría esférica y por último algunos resultados generales.

En el segundo capítulo se hace una definición general de la conexión para métricas conformes, viendo cómo ésta sirve para darle a todos los casos estudiados hasta ahora, en particular al esférico, una apariencia similar al caso euclidiano; para luego centrarnos en la conexión esférica sobre el disco unitario, viendo cómo ésta es continua y no meromorfa. Además, vemos algunos teoremas de crecimiento y distorsión para este operador, y definimos sobre él una norma que posee una importante propiedad de invariancia. Finalizamos el capítulo con algunas generalizaciones de trabajos hechos en los casos hiperbólico y esférico.

Finalmente, en el tercer capítulo se desarrollan algoritmos en MatLab para calcular los órdenes esféricos inferior y superior, para ver luego ejemplos de éstos con ayuda de una regla de composición para $A_f^\#$ que involucra el operador conexión esférica, y concluyendo con algunas propiedades en torno a acotar los órdenes esféricos, en especial el inferior, usando hipótesis lo más débiles posibles.

Introducción

En el contexto de familias linealmente invariantes [Po64, p. 115], el orden (superior) de una función f, analítica y localmente inyectiva en el disco unitario $\mathbb{D}$, fue definido por

$$\alpha(f) := \sup\left\{|A_f(z)| : z \in \mathbb{D}\right\},$$

donde

$$A_f(z) := \frac{(1-|z|^2)}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)} - \overline{z}.$$

Luego, basados en lo anterior, L. Cruz y Ch. Pommerenke en [CrPo07] definieron el orden inferior de f por

$$\mu(f) := \text{ínf}\left\{|A_f(z)| : z \in \mathbb{D}\right\},$$

y demostraron que

$$0 \leqslant \mu(f) \leqslant 1 \leqslant \alpha(f) \leqslant \infty.$$

Poco tiempo después, Ch. Pommerenke hizo un estudio más amplio del concepto de orden inferior en [Po08].

Aprovechando el concepto de familia linealmente invariante de funciones analíticas y localmente inyectivas en $\mathbb{D}$, que definió Pommerenke en 1964, se introdujo la noción de familia esféricamente invariante de funciones meromorfas localmente inyectivas definidas en $\mathbb{D}$, que fue estudiada inicialmente por W. Ma y D. Minda en [MaMi92], en el contexto de las funciones esféricamente convexas. En dicho artículo ellos definieron el orden (superior) esférico de una función $f : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ meromorfa localmente inyectiva por

$$\alpha_s(f) := \sup_{z\in\mathbb{D}}\left|A_f^{\#}(z)\right|,$$

donde

$$A_f^{\#}(z) := \frac{\left(1-|z|^2\right)}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)} - \overline{z} - \frac{\left(1-|z|^2\right)\overline{f(z)}f'(z)}{1+|f(z)|^2},$$

y mostraron algunas propiedades para las funciones con orden esférico finito. Además, probaron que dicho orden no puede ser inferior a 1, llegando a ser 1 únicamente cuando la función es esféricamente convexa.

A partir de estos conceptos, H. Arbeláez en su tesis doctoral [Ar11] definió en forma análoga a lo hecho por L. Cruz y Ch. Pommerenke en [CrPo07] para el caso euclidiano, el orden inferior esférico de una función $f : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ meromorfa localmente inyectiva; así:

$$\mu_s(f) := \inf_{z \in \mathbb{D}} \left| A_f^{\#}(z) \right|$$

y mostró que existen ejemplos de funciones con orden inferior esférico positivo.

De allí surgen algunas preguntas en torno a las cuales se hacen adelantos en este trabajo en busca de resolverlas:
¿Existe $f : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ meromorfa localmente inyectiva tal que $0 < \mu_s(f) \leqslant \alpha_s(f) < \infty$?.
¿Si $f : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es meromorfa localmente inyectiva, entonces $\mu_s(f) \leqslant 1$?.
Se logró contestar afirmativamente esta última al considerar cierta hipótesis adicional.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos algunas definiciones y resultados importantes, los cuales nos ayudarán en el desarrollo de la tesis. En la primera sección veremos un poco de geometría hiperbólica , en la segunda miraremos algunas definiciones básicas de geometría esférica, y por último citamos algunos resultados conocidos de la teoría geométrica de funciones que serán usados luego.

1.1. Geometría hiperbólica

El disco unitario $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$ se dota con la *métrica hiperbólica*

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z)|dz| := \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Para un camino suave γ contenido en $\mathbb{D}$, definimos la *longitud hiperbólica de* γ por

$$l_{\mathbb{D}}(\gamma) = \int_\gamma \lambda_{\mathbb{D}}(z)|dz|.$$

La *distancia hiperbólica* inducida por esta métrica está dada por

$$d_h(a, b) := \inf_\gamma l_{\mathbb{D}}(\gamma), \text{ para } a, b \in \mathbb{D},$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los caminos suaves γ contenidos en $\mathbb{D}$ con extremos a y b. Puede probarse que este ínfimo es en realidad un mínimo que se alcanza cuando γ es el *segmento hiperbólico* entre a y b; esto es, si C es la circunferencia que pasa por a y b, y es ortogonal a $\partial\mathbb{D}$, entonces γ es el arco de C con extremos a y b, contenido en el interior de $\mathbb{D}$. Además, se tiene la siguiente fórmula para la distancia hiperbólica:

$$d_h(a, b) = \tanh^{-1} \left| \frac{a - b}{1 - \overline{a}b} \right|.$$

La distancia hiperbólica es invariante bajo el grupo de automorfismos conformes del disco unitario, $\text{Möb}(\mathbb{D}) := \left\{ z \longmapsto \lambda \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \;\Big/\; |\lambda| = 1, \; a \in \mathbb{D} \right\}$; esto es, si $\varphi \in \text{Möb}(\mathbb{D})$ entonces

$d_h(a, b) = d_h(\varphi(a), \varphi(b))$.

El siguiente lema, debido a Gehring y Pommerenke [GePo84], será muy útil en la prueba de algunos resultados (ver también [Ar04], pág. 4).

Lema 1.1.1. *Para $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, sea γ el segmento hiperbólico que une a z_1 con z_2. Entonces:*
i) *γ tiene longitud euclidiana $l \leqslant \frac{\pi}{2}|z_1 - z_2|$ y*
ii) *Para cada ξ en γ, si s es la longitud de arco euclidiana de la parte de γ entre z_1 y ξ entonces* $\min\{s, l - s\} \leqslant \frac{\pi}{2}(1 - |\xi|)$.

Para una función $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ analítica y localmente inyectiva se define la *derivada hiperbólica de f* por

$$f^h(z) = \frac{f'(z)}{1 - |f(z)|^2}, \ z \in \mathbb{D}.$$

Es importante observar que el módulo de la derivada hiperbólica es invariante si cambiamos f por $\varphi \circ f$, con $\varphi \in$ Möb($\mathbb{D}$).

Para obtener mas información sobre la métrica hiperbólica véase [BeMi07].

1.2. Geometría esférica

El plano complejo extendido o esfera de Riemann, denotada por $\widehat{\mathbb{C}}$, está dotada, vía la proyección estereográfica, con la *métrica esférica*

$$\lambda_{\widehat{\mathbb{C}}}(z)|dz| := \frac{|dz|}{1 + |z|^2}.$$

Para un camino rectificable γ contenido en $\widehat{\mathbb{C}}$, definimos la *longitud esférica de* γ por

$$l^{\#}(\gamma) = \int_\gamma \lambda_{\widehat{\mathbb{C}}}(z)|dz|.$$

La métrica esférica permite definir la *distancia esférica* entre dos puntos $a, b \in \widehat{\mathbb{C}}$ por:

$$d^{\#}(a, b) := \inf_\gamma l^{\#}(\gamma),$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los caminos rectificables γ contenidos en $\widehat{\mathbb{C}}$ con extremos a y b. Además, puede mostrarse que

$$d^{\#}(a, b) = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\left|\dfrac{a - b}{1 + \overline{a}b}\right|\right) & si\ a, b \in \mathbb{C}. \\ \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{|a|}\right) & si\ a \in \mathbb{C},\ b = \infty. \end{cases}$$

Nótese que $d^{\#}(a,b) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Además, la métrica esférica y la distancia esférica son invariantes bajo el grupo de rotaciones de la esfera

$$\mathrm{Rot}(\widehat{\mathbb{C}}) := \left\{ z \longmapsto e^{i\theta} \frac{z-a}{1+\overline{a}z} \Big/ \ a \in \widehat{\mathbb{C}},\ \theta \in \mathbb{R} \right\} \bigcup \left\{ z \longmapsto \frac{e^{i\theta}}{z} \Big/ \ \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

De lo anterior, se puede mostrar que el camino de menor longitud esférica que une a dos puntos $a, b \in \widehat{\mathbb{C}}$, conocido como *segmento esférico*, es el arco más pequeño del círculo maximal (en la esfera de Riemann) que pasa a través de a y b.

Un dominio D en $\widehat{\mathbb{C}}$ es llamado *esféricamente convexo* si para cualquier par de puntos $a, b \in D$, el segmento esférico que une a y b está contenido en D. Una función meromorfa univalente definida en $\mathbb{D}$ es llamada *esféricamente convexa* o *s-convexa*, si $f(\mathbb{D})$ es un dominio esféricamente convexo en $\widehat{\mathbb{C}}$.

En $\widehat{\mathbb{C}}$ también se define la distancia cordal, vía la proyección estereográfica, como

$$\chi(a,b) = \begin{cases} \dfrac{|a-b|}{\sqrt{1+|a|^2}\sqrt{1+|b|^2}} & si\ a, b \in \mathbb{C}. \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+|a|^2}} & si\ a \in \mathbb{C},\ b = \infty. \end{cases}$$

Es fácil verificar que para todo $a, b \in \widehat{\mathbb{C}}$ se tiene que

$$\frac{2}{\pi} d^{\#}(a,b) \leqslant \chi(a,b) \leqslant d^{\#}(a,b),$$

y por lo tanto, las dos distancias inducen la misma topología en $\widehat{\mathbb{C}}$.

1.2.1. La derivada esférica

Sean D un dominio en $\widehat{\mathbb{C}}$ y $f : D \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función meromorfa localmente inyectiva. Sea $z_0 \in D$ y consideremos cuatro casos posibles:

Caso 1. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $f(z_0) \in \mathbb{C}$, definimos la *derivada esférica* de f en z_0 por

$$f^{\#}(z_0) = \frac{f'(z_0)}{1+|f(z_0)|^2}.$$

Claramente $f^{\#}$ es continua en z_0.

Caso 2. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ y f tiene un polo en z_0, definimos φ en una vecindad de ∞ por $\varphi(z) = 1/z$. Luego $g := \varphi \circ f$ es analítica en una vecindad de z_0; más aun, para todo z en una vecindad agujereada de z_0

$$|g^{\#}(z)| = \frac{|g'(z)|}{1+|g(z)|^2} = \frac{\dfrac{|f'(z)|}{|f(z)|^2}}{1+\dfrac{1}{|f(z)|^2}} = \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} = |f^{\#}(z)|.$$

Definimos $f^{\#}(z_0) := g^{\#}(z_0)$, y así

$$\lim_{z\to z_0} |f^{\#}(z)| = \lim_{z\to z_0} |g^{\#}(z)| = |g^{\#}(z_0)| = |f^{\#}(z_0)|;$$

es decir, $|f^{\#}|$ es continua en z_0.

Caso 3. Supongamos que $z_0 = \infty$ y que $f(z_0) \in \mathbb{C}$. Sea ψ una función definida en una vecindad agujereada de 0 por $\psi(z) = 1/z$. Luego, si consideramos una vecindad de ∞ la cual es enviada por f en un dominio acotado, entonces $h := f \circ \psi$ resulta acotada en una vecindad agujereada de 0 y allí

$$h^{\#}(z) = (f\circ\psi)^{\#}(z) = \frac{(f\circ\psi)'(z)}{1+|(f\circ\psi)(z)|^2} = \frac{f'(\psi(z))\psi'(z)}{1+|f(\psi(z))|^2} = -\frac{1}{z^2}f^{\#}\left(\frac{1}{z}\right),$$

de donde $f^{\#}(1/z) = -z^2h^{\#}(z)$. Además, podemos definir $h(0) = f(z_0) \in \mathbb{C}$ de forma continua, siendo $h^{\#}$, de acuerdo al caso 1, continua en 0 y $h^{\#}(0) \neq \infty$. Definimos entonces

$$f^{\#}(\infty) = \lim_{z\to 0} f^{\#}(1/z) = -\lim_{z\to 0} z^2h^{\#}(z) = 0.$$

Caso 4. Supongamos que $z_0 = \infty$ y que f tiene un polo en ∞. Escogiendo vecindades apropiadas de 0 e ∞, podemos mostrar que la función $s = \varphi\circ f\circ\psi$, en donde φ y ψ están definidas como en los casos 2 y 3, respectivamente, resulta ser acotada en una vecindad de 0. Además,

$$\begin{aligned} |s^{\#}(z)| &= |(\varphi\circ f\circ\psi)^{\#}(z)| = \frac{|(\varphi\circ f\circ\psi)'(z)|}{1+|(\varphi\circ f\circ\psi)(z)|^2} = \frac{|\varphi'(f(\psi(z)))f'(\psi(z))\psi'(z)|}{1+|1/f(\psi(z))|^2} \\ &= \frac{\left|\dfrac{f'(\psi(z)}{z^2f(\psi(z))^2}\right|}{\dfrac{1+|f(\psi(z))|^2}{|f(\psi(z))|^2}} = \frac{|f'(\psi(z))|}{|z|^2(1+|f(\psi(z))|^2)} = \frac{1}{|z|^2}\left|f^{\#}\left(\frac{1}{z}\right)\right|, \end{aligned}$$

y por lo tanto $|f^{\#}(1/z)| = |z|^2|s^{\#}(z)|$. Podemos definir $s(0) = 0$ de forma continua, siendo $s^{\#}$, de acuerdo al caso 1, continua en 0 y $s^{\#}(0) \neq \infty$. Así,

$$\lim_{z\to 0} |f^{\#}(1/z)| = \lim_{z\to 0} |z|^2|s^{\#}(z)| = 0.$$

De esta forma, definimos como en el caso anterior $f^{\#}(\infty) = \lim\limits_{z\to 0} f^{\#}(1/z) = 0$, con lo cual concluimos que en cualquier caso $f^{\#}$ es continua en ∞.

Nótese que el módulo de la derivada esférica de f permanece invariante si cambiamos f por $\varphi\circ f$, con $\varphi \in \mathrm{Rot}(\widehat{\mathbb{C}})$.

1.3. Resultados generales

En esta parte citamos algunos resultados generales del análisis complejo, los cuales se usarán en el desarrollo del trabajo.

Teorema 1.3.1. *Sean X un espacio métrico, Y un espacio métrico completo y A un subespacio denso en X. Si f es una función uniformemente continua de A en Y, entonces f puede ser extendida de forma única a una función uniformemente continua g de X en Y. (Véase [Si63], pág. 78).*

Lema 1.3.2. *Sea f una función analítica y localmente inyectiva definida en $\mathbb{D}$ con $f(0) = 0$. Supongamos que el mínimo de $|f|$ sobre el círculo $|z| = r < 1$ es asumido en un punto z_1. Sea I el segmento de recta que une 0 con $\zeta_1 = f(z_1)$. Entonces existe una trayectoria J en el disco $|z| \leqslant r$ que une 0 con z_1 tal que $I = f(J)$. (Véase [Ar04], pág. 3).*

Definición 1.3.1. Sea Ω un dominio simplemente conexo conformemente equivalente a $\mathbb{D}$ y sea f un mapeo conforme de Ω sobre $\mathbb{D}$. La función *densidad de Poincaré* de Ω está definida por

$$\eta_\Omega(z) := \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2}.$$

Esta función está bien definida porque no depende de la escogencia particular del mapeo f.

Algunas de las propiedades mas importantes de η_Ω (véase [Le87], pág. 5) son:

- Si Ω_1 y Ω_2 son dominios conformemente equivalentes a un disco, con $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, entonces

$$\eta_{\Omega_2}(z) \leqslant \eta_{\Omega_1}(z) \text{ para todo } z \in \Omega_1. \tag{1.1}$$

- Si $g : \Omega_2 \longrightarrow \Omega_1$ es un mapeo conforme y sobreyectivo entonces

$$\eta_{\Omega_2}(z) = \eta_{\Omega_1}(g(z))|g'(z)| \text{ para todo } z \in \Omega_2. \tag{1.2}$$

Teorema 1.3.3. *(Principio de continuación única) Sea Ω un subconjunto abierto y conexo del plano complejo, y sean f y g holomorfas en Ω.*
i) *Si el conjunto de puntos $z \in \Omega$, donde $f(z) = g(z)$, tiene un punto límite en Ω, entonces $f = g$.*
ii) *En particular, los ceros de f no tienen puntos límite en Ω, a menos que f sea idénticamente 0. (Véase [RaSt91], pág. 51).*

Teorema 1.3.4. *(Lema de Schwarz-Pick) Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ analítica. Entonces*

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leqslant \frac{1}{1 - |z|^2}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. La igualdad se cumple en algún punto si y solo si f es un automorfismo conforme del disco unitario. (Véase [Di89], pág. 5).

Teorema 1.3.5. *Sea f holomorfa en un conjunto abierto Ω del plano complejo y sea $z_0 \in \Omega$. Entonces, existe una vecindad de z_0 sobre la cual f es univalente si y solo si $f'(z_0) \neq 0$. (Véase [RaSt91], pág. 58).*

Definición 1.3.2. Una *semimétrica conforme* en un dominio $\Omega \in \mathbb{C}$ es $\rho(z)|dz|$, donde $\rho : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$ es una función continua y $\{z/\rho(z) = 0\}$ es un subconjunto discreto de Ω. Si $\rho(z) > 0$ para todo $z \in \Omega$ diremos que $\rho(z)|dz|$ es una *métrica conforme*.

La operación *"Pull-back"*: Suponga que $\rho(w)|dw|$ es una semimétrica conforme en una región Ω y sea $f : G \longrightarrow \Omega$ una función holomorfa. El *Pull-back* de $\rho(w)|dw|$ por f es $f(\rho(w)|dw|) = \rho(f(z))|f'(z)||dz|$.
Si f no es constante entonces $f(\rho(w)|dw|)$ es una semimétrica conforme en G.

Lema 1.3.6. *Sea f meromorfa localmente inyectiva definida en Ω. Entonces $f = \tilde{f}|_\Omega$ con $\tilde{f} \in \mathrm{Rot}(\widehat{\mathbb{C}})$ si y solo si existe una constante positiva c tal que para todo $z \in \Omega$*

$$(1 + |z|^2)|f'(z)| = c(1 + |f(z)|^2).$$

(Véase [Ar11], pág. 10).

Las dos proposiciones siguientes (véase [Ar96], pág. 6-8) resumen las propiedades fundamentales de los operadores diferenciales

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Proposición 1.3.7. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ y $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ son funciones continuamente $\mathbb{R}$-diferenciables, entonces:*

(i) $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = \overline{\dfrac{\partial f}{\partial z}}$ *y* $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial z} = \overline{\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}}$.

(ii) (Homogeneidad) *Para todo $c \in \mathbb{C}$,* $\dfrac{\partial (cf)}{\partial z} = c\dfrac{\partial f}{\partial z}$ *y* $\dfrac{\partial (cf)}{\partial \overline{z}} = c\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$.

(iii) (Aditividad) $\dfrac{\partial (f+g)}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial g}{\partial z}$ *y* $\dfrac{\partial (f+g)}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}}$.

(iv) (Regla del producto) $\dfrac{\partial (fg)}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial z}g + \dfrac{\partial g}{\partial z}f$ *y* $\dfrac{\partial (fg)}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}g + \dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}}f$.

(v) *f es analítica en Ω si y solo si* $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$*. En este caso,* $f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z)$ *para todo $z \in \Omega$.*

(vi) *Si f es analítica en Ω entonces* $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(z) = \overline{f'(z)}$ *y* $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial z} = 0$.

(vii) *Si adicionalmente f es de clase $C^2(\Omega)$, entonces* $\Delta f = 4\dfrac{\partial^2 f}{\partial \overline{z}\partial z}$.

Proposición 1.3.8. *(Regla de la cadena) Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y $G \subseteq \mathbb{C}$ conjuntos abiertos. Sean $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ y $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ funciones continuamente $\mathbb{R}$-diferenciables, con $g(G) \subseteq \Omega$. Entonces, para cada $z \in G$,*

(i) $$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f \circ g)(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z))\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g(z))\frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{z}}(z).$$

(ii) $$\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g)(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z))\frac{\partial g}{\partial z}(z) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g(z))\frac{\partial \overline{g}}{\partial z}(z).$$

Capítulo 2

El operador conexión para métricas conformes

Como herramienta para el estudio de funciones meromorfas localmente inyectivas $f : \Omega \longrightarrow D$, donde Ω y D son regiones en $\widehat{\mathbb{C}}$, introducimos el operador Γ_f^τ con $\tau(z)|dz|$ una métrica conforme diferenciable en D, el cual generaliza el operador preschwarziano $P_f = \dfrac{1}{2}\dfrac{f''}{f'}$ que aparece en el caso de las funciones analíticas localmente inyectivas $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ desarrollado por Pommerenke. Además, este nuevo operador permite escribir de manera completamente análoga al caso euclidiano los operadores A_f^h y $A_f^\#$, de los casos hiperbólico y esférico respectivamente.
Finalmente, para facilitar el análisis del orden inferior esférico en el capítulo siguiente, nos enfocamos en el estudio del operador $\Gamma_f^\#$, el cual posee importantes propiedades de invariancia esférica, y probamos algunos teoremas de crecimiento y distorsión.

2.1. Motivación

En el estudio de las familias linealmente invariantes de funciones analíticas $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ localmente inyectivas, desempeña un papel crucial el operador

$$A_f(z) = \frac{(1-|z|^2)}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)} - \overline{z},$$

que fue definido por Pommerenke cuando introdujo la noción de invariancia euclidiana en [Po64]. Nótese que

$$A_f(z) = (1-|z|^2)P_f(z) - \overline{z}, \tag{2.1}$$

donde $P_f(z) := \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(z)}{f'(z)}$ es el conocido *operador preschwarziano*, indispensable para el estudio de las familias euclidianamente invariantes.
Para funciones meromorfas $f : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ localmente inyectivas, el operador análogo, introducido por Ma y Minda en [MaMi92], es

$$A_f^\#(z) = \frac{(1-|z|^2)}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)} - \overline{z} - \frac{(1-|z|^2)\overline{f(z)}f'(z)}{1+|f(z)|^2},$$

el cual puede escribirse como

$$A_f^{\#}(z) = (1-|z|^2)\left(\frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{\overline{f(z)}f'(z)}{1+|f(z)|^2}\right) - \overline{z}. \tag{2.2}$$

Para funciones analíticas $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ localmente inyectivas, el operador introducido por Ma y Minda en [MaMi94] fue

$$A_f^h(z) = \frac{(1-|z|^2)}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)} - \overline{z} + \frac{(1-|z|^2)\overline{f(z)}f'(z)}{1-|f(z)|^2},$$

que puede ser escrito de la siguiente manera:

$$A_f^h(z) = (1-|z|^2)\left(\frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)} + \frac{\overline{f(z)}f'(z)}{1-|f(z)|^2}\right) - \overline{z}. \tag{2.3}$$

Tanto en (2.1) como en (2.2) y en (2.3) podemos notar la presencia de la métrica hiperbólica de $\mathbb{D}$

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z)|dz| = \frac{|dz|}{1-|z|^2}.$$

Así, definiendo para una función meromorfa localmente inyectiva $f : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ el operador

$$\Gamma_f^{\#}(z) := \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{\overline{f(z)}f'(z)}{1+|f(z)|^2},$$

cuando z no es un polo de f, y definiendo para una función analítica localmente inyectiva $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ el operador

$$\Gamma_f^h(z) := \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)} + \frac{\overline{f(z)}f'(z)}{1-|f(z)|^2},$$

podemos escribir (2.2) y (2.3) en la forma

$$A_f^{\#}(z) = \frac{\Gamma_f^{\#}(z)}{\lambda_{\mathbb{D}}(z)} - \overline{z} \qquad \text{y} \qquad A_f^h(z) = \frac{\Gamma_f^h(z)}{\lambda_{\mathbb{D}}(z)} - \overline{z}$$

cuya apariencia contrasta con el caso euclidiano, ecuación (2.1), la cual podemos escribir así

$$A_f(z) = \frac{\Gamma_f(z)}{\lambda_{\mathbb{D}}(z)} - \overline{z},$$

donde identificamos a $\Gamma_f(z)$ como $P_f(z)$.

2.2. Definición y ejemplos

Definición 2.2.1. Sea $\rho(w)|dw|$ una métrica conforme en una región Ω con $\rho(w)$ diferenciable. Se define *la conexión* asociada a $\rho(w)|dw|$ como

$$\Gamma_\rho(w) := \frac{\partial \log \rho(w)}{\partial w} = \frac{1}{\rho(w)}\frac{\partial \rho(w)}{\partial w}.$$

Nota: Puesto que por definición una función f se dice ser univalente si ésta es analítica e inyectiva, usaremos indistintamente las expresiones *localmente univalente* y *analítica localmente inyectiva.*

Ejemplo 2.2.1. Sea Ω una región en $\mathbb{C}$ y supongamos que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es localmente univalente. Si $\rho(z)|dz|$ es el *pull-back* de $|dw|$ por f, es decir,

$$\rho(z)|dz| = f^*(|dw|) = |f'(z)||dz|,$$

entonces,

$$\Gamma_\rho(z) = \frac{\partial}{\partial z}\log|f'(z)| = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{2}\log f'(z) + \frac{1}{2}\log\overline{f'(z)}\right] = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

♦

En el ejemplo anterior $\Gamma_\rho(z) = \Gamma_f(z)$ para todo $z \in \Omega$, es decir, Γ_ρ es el operador preschwarziano euclidiano P_f.

Ejemplo 2.2.2. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{D}$ analítica localmente inyectiva. Si

$$\rho(z)|dz| = f^*(\lambda_{\mathbb{D}}(w)|dw|) = \frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}|dz|,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\Gamma_\rho(z) &= \frac{\partial}{\partial z}\log\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = \frac{1-|f(z)|^2}{|f'(z)|}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\right)\\
&= \frac{1-|f(z)|^2}{|f'(z)|}\left[\frac{1}{(1-|f(z)|^2)^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\overline{f'(z)}f''(z)}{|f'(z)|}(1-|f(z)|^2) - |f'(z)|(-\overline{f(z)}f'(z))\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\frac{\overline{f'(z)}f''(z)}{|f'(z)|^2} + \frac{\overline{f(z)}f'(z)}{1-|f(z)|^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)} + \frac{\overline{f(z)}f'(z)}{1-|f(z)|^2} = \Gamma_f^h(z).
\end{aligned}$$

♦

Del ejemplo anterior podemos decir entonces que $\Gamma_f^h(z) = \dfrac{\partial}{\partial z}\log|f^h(z)|$, donde $f^h(z) = \dfrac{f'(z)}{1-|f(z)|^2}$ es la derivada hiperbólica de f.

Ejemplo 2.2.3. Sean $f : \Omega \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ meromorfa localmente inyectiva y $\rho(z)|dz| = f^*(\lambda_{\widehat{\mathbb{C}}}(w)|dw|)$, es decir,

$$\rho(z)|dz| = \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}|dz|,$$

entonces

$$\Gamma_\rho(z) = \frac{\partial}{\partial z}\log\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{\overline{f(z)}f'(z)}{1+|f(z)|^2} = \Gamma_f^{\#}(z).$$

♦

De este último ejemplo podemos observar que $\Gamma_f^{\#}(z) = \dfrac{\partial}{\partial z}\log|f^{\#}(z)|$, donde $f^{\#}(z) = \dfrac{f'(z)}{1+|f(z)|^2}$ es la derivada esférica de f.

Definición 2.2.2. Sean Ω y D regiones en $\widehat{\mathbb{C}}$. Sean $\sigma(z)|dz|$ y $\tau(z)|dz|$ métricas conformes diferenciables en Ω y D, respectivamente. Para una función $f:\Omega \longrightarrow D$ meromorfa localmente inyectiva definimos la derivada de f respecto a τ en z, cuando $z \in \Omega \setminus \{\infty\}$ no es un polo de f, como

$$f^\tau(z) := \tau(f(z))f'(z).$$

También definimos el operador $\Gamma_f^\tau(z)$ en la forma

$$\Gamma_f^\tau(z) := \frac{\partial}{\partial z}\log|f^\tau(z)|.$$

De donde, podemos definir el operador diferencial

$$A_f^\tau(z) := \frac{\Gamma_f^\tau(z)}{\sigma(z)} - \overline{z}. \tag{2.4}$$

Esta última definición fue motivada por los ejemplos anteriores y las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3), que tienen exactamente la misma forma de la ecuación (2.4), aunque en el caso esférico hay que estudiar si $\Gamma_f^{\#}(z)$ se puede definir continuamente cuando z es un polo de f y en $z=\infty$, lo cual haremos en la próxima sección.

Ejemplo 2.2.4. De acuerdo a la definición anterior, para una función meromorfa $f:\mathbb{C}\longrightarrow\widehat{\mathbb{C}}$ localmente inyectiva, siendo $\sigma(z)|dz| = |dz|$ y $\tau(z)|dz| = \frac{|dz|}{1+|z|^2}$, se tiene que

$$f^\tau(z) = \frac{f'(z)}{1+|f(z)|^2} \qquad \text{y} \qquad \Gamma_f^\tau(z) = \frac{\partial}{\partial z}\log\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{\overline{f(z)}f'(z)}{1+|f(z)|^2}.$$

Así,

$$A_f^\tau(z) = \frac{\Gamma_f^\tau(z)}{\sigma(z)} - \overline{z} = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{\overline{f(z)}f'(z)}{1+|f(z)|^2} - \overline{z}.$$

♦

Ejemplo 2.2.5. Sea $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ una función localmente univalente, en la cual definimos $\tau(z)|dz| = \sigma(z)|dz| = |dz|$, entonces

$$f^\tau(z) = f'(z) \qquad \text{y} \qquad \Gamma_f^\tau(z) = \frac{\partial}{\partial z}\log|f'(z)| = \frac{f''(z)}{2f'(z)}$$

y por lo tanto

$$A_f^\tau(z) = \frac{f''(z)}{2f'(z)} - \overline{z}.$$

♦

2.3. El operador conexión esférica

El objetivo de profundizar en este operador en particular es conocer más acerca de sus propiedades, para utilizarlo como herramienta en el estudio del orden inferior esférico de funciones meromorfas localmente inyectivas, ya que como vimos antes, este nos brinda una apariencia similar al caso euclidiano.
Para empezar, haremos una definición mas amplia de este operador y veremos que se puede definir continuo en todo su dominio, en particular en los polos de f.

2.3.1. Definición y propiedades básicas

Sean D un dominio en $\widehat{\mathbb{C}}$ y $f : D \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función meromorfa localmente inyectiva. Sea $z_0 \in D$ y consideremos cuatro casos posibles:

Caso 1. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $f(z_0) \in \mathbb{C}$ definimos el operador

$$\begin{aligned} \Gamma_f^{\#}(z_0) &= \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\bigg|_{z=z_0} \\ &= \frac{1}{2}\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{\overline{f(z_0)}f'(z_0)}{1+|f(z_0)|^2}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

que claramente resulta continuo en dicho punto.

Caso 2. Supongamos que $z_0 \in \mathbb{C}$ y que f tiene un polo en z_0. Sea φ definida en una vecindad de ∞ por $\varphi(z) = 1/z$. Luego, $g := \varphi \circ f$ es analítica en una vecindad de z_0, más aun, para todo z en una vecindad agujereada de z_0

$$\begin{aligned} \Gamma_f^{\#}(z) &= \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} = \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{\left|\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{g(z)}\right|}{1+\frac{1}{|g(z)|^2}} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{\frac{|g'(z)|}{|g(z)|^2}}{\frac{1+|g(z)|^2}{|g(z)|^2}} = \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{|g'(z)|}{1+|g(z)|^2} = \Gamma_g^{\#}(z). \end{aligned}$$

Definimos $\Gamma_f^{\#}(z_0) := \Gamma_g^{\#}(z_0)$, con lo cual

$$\lim_{z\to z_0} \Gamma_f^{\#}(z) = \lim_{z\to z_0} \Gamma_g^{\#}(z) = \Gamma_g^{\#}(z_0) = \Gamma_f^{\#}(z_0);$$

así, $\Gamma_f^{\#}$ es continua en z_0.

Resaltamos que del desarrollo del caso anterior, se puede concluir que para todo $z \in D \setminus \{\infty\}$ que no sea un cero de f, se tiene que

$$\Gamma_f^{\#}(z) = \Gamma_{\varphi\circ f}^{\#}(z), \tag{2.6}$$

donde $\varphi(w) = 1/w$ para todo $w \in f(D \setminus \{\infty\}) \setminus \{0\}$.

Antes de seguir con el caso 3 debemos ver primero una importante propiedad, la regla de la cadena para el operador $\Gamma_f^{\#}$:

- **(Regla de la cadena)** Sean g una función analítica localmente inyectiva definida en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y f una función meromorfa localmente inyectiva definida en $g(\Omega)$. Entonces

$$\Gamma_{f\circ g}^{\#} = \Gamma_f^{\#}(g)g' + \Gamma_g. \tag{2.7}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{f\circ g}^{\#} &= \frac{1}{2}\frac{(f\circ g)''}{(f\circ g)'} - \frac{(f\circ g)'\overline{(f\circ g)}}{1+|f\circ g|^2} = \frac{1}{2}\frac{(f'(g)g')'}{f'(g)g'} - \frac{f'(g)g'\overline{f(g)}}{1+|f(g)|^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{f''(g)(g')^2 + f'(g)g''}{f'(g)g'} - \frac{f'(g)\overline{f(g)}}{1+|f(g)|^2}g' \\
&= \frac{1}{2}\frac{f''(g)}{f'(g)}g' - \frac{f'(g)\overline{f(g)}}{1+|f(g)|^2}g' + \frac{1}{2}\frac{g''}{g'} = \Gamma_f^{\#}(g)g' + \Gamma_g.
\end{aligned}$$

Caso 3. Supongamos que $z_0 = \infty$ y que $f(z_0) \in \mathbb{C}$. Sea ψ una función definida en una vecindad agujereada de 0 por $\psi(z) = 1/z$. Luego, si consideramos una vecindad de ∞ la cual es enviada por f en un dominio acotado, entonces $h := f \circ \psi$ resulta acotada en una vecindad V agujereada en 0, por lo tanto, h, h' y h'' no tienen polos en V, y también $h'(z) \neq 0$ para todo $z \in V$, pues h es localmente univalente en V, por ende $\Gamma_h^{\#}$ es acotado en V. Se sigue de (2.7) que en dicha vecindad

$$\begin{aligned}
\Gamma_h^{\#}(z) &= \Gamma_{f\circ\psi}^{\#}(z) = \Gamma_f^{\#}(\psi(z))\psi'(z) + \Gamma_\psi(z) = -\frac{1}{z^2}\Gamma_f^{\#}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2}\frac{\psi''(z)}{\psi'(z)} \\
&= -\frac{1}{z^2}\Gamma_f^{\#}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2}\frac{(2/z^3)}{(-1/z^2)} = -\frac{1}{z^2}\Gamma_f^{\#}\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z},
\end{aligned}$$

de donde, $\Gamma_f^{\#}(1/z) = -z^2\Gamma_h^{\#}(z) - z$. Definimos entonces

$$\Gamma_f^{\#}(\infty) = \lim_{z\to 0}\Gamma_f^{\#}(1/z) = -\lim_{z\to 0}(z^2\Gamma_h^{\#}(z) + z) = 0.$$

Caso 4. Supongamos que $z_0 = \infty$ y que f tiene un polo en ∞. Escogiendo vecindades apropiadas de 0 e ∞, podemos mostrar que la función $s = \varphi\circ f\circ\psi$, en donde φ y ψ están definidas como en los casos 2 y 3, respectivamente, resulta ser acotada en una vecindad de 0, en la cual $\Gamma_s^{\#}$ también resulta acotada. Además, por (2.6) y (2.7)

$$\begin{aligned}
\Gamma_s^{\#}(z) &= \Gamma_{(\varphi\circ f)\circ\psi}^{\#}(z) = \Gamma_{\varphi\circ f}^{\#}(\psi(z))\psi'(z) + \Gamma_\psi(z) \\
&= \Gamma_f^{\#}(\psi(z))\psi'(z) + \frac{1}{2}\frac{\psi''(z)}{\psi'(z)} = -\frac{1}{z^2}\Gamma_f^{\#}\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z};
\end{aligned}$$

así, $\Gamma_f^{\#}(1/z) = -z^2\Gamma_s^{\#}(z) - z$. Definimos, como en el caso anterior,

$$\Gamma_f^{\#}(\infty) = \lim_{z\to 0}\Gamma_f^{\#}(1/z) = -\lim_{z\to 0}(z^2\Gamma_s^{\#}(z) + z) = 0,$$

con lo cual concluimos que en cualquier caso $\Gamma_f^{\#}$ es continuo en ∞.

Una de las propiedades más relevantes del operador $\Gamma_f^{\#}$ es el hecho de que $\Gamma_f^{\#}(z) = -\dfrac{\overline{z}}{1+|z|^2}$ si y solo si $f \in \mathrm{Rot}(\widehat{\mathbb{C}})$. Para mostrar esto usamos el lema 1.3.6.

Teorema 2.3.1. *Sea $f : \Omega \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función meromorfa localmente inyectiva. Entonces, $f = \tilde{f}|_{\Omega}$ con $\tilde{f} \in \mathrm{Rot}(\widehat{\mathbb{C}})$ si y solo si para todo $z \in \Omega$*

$$\Gamma_f^{\#}(z) = -\frac{\overline{z}}{1+|z|^2}. \tag{2.8}$$

Demostración. "$\Longrightarrow$" Si $f(z) = \dfrac{e^{i\theta}}{z}$, $\theta \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\Gamma_f^{\#}(z) = \frac{\partial}{\partial z}\log\left(\frac{1}{|z|^2}\frac{|z|^2}{1+|z|^2}\right) = \frac{\partial}{\partial z}[-\log(1+z\overline{z})] = -\frac{\overline{z}}{1+|z|^2}.$$

Si para todo $z \in \Omega$ se tiene que $f(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1+\overline{a}z}$ con $\theta \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{C}$ constantes fijas, entonces $f'(z) = e^{i\theta}\dfrac{1+|a|^2}{(1+\overline{a}z)^2}$. Así,

$$\begin{aligned}
\Gamma_f^{\#}(z) &= \frac{\partial}{\partial z}\log\left[\frac{1+|a|^2}{|1+\overline{a}z|^2}\frac{|1+\overline{a}z|^2}{|1+\overline{a}z|^2+|z-a|^2}\right] = \frac{\partial}{\partial z}\log\frac{1+|a|^2}{1+|az|^2+|z|^2+|a|^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\log\frac{1+|a|^2}{(1+|z|^2)(1+|a|^2)} = \frac{\partial}{\partial z}[-\log(1+z\overline{z})] = -\frac{\overline{z}}{1+|z|^2}.
\end{aligned}$$

"$\Longleftarrow$" Supongamos que para todo $z \in \Omega$, $\Gamma_f^{\#}(z) = -\dfrac{\overline{z}}{1+|z|^2}$, entonces si $z \in \Omega \setminus \{\infty\}$ y $f(z) \in \mathbb{C}$ (caso 1), se tiene que $\dfrac{1}{2}\dfrac{f''(z)}{f'(z)} - \dfrac{\overline{f(z)}f'(z)}{1+|f(z)|^2} + \dfrac{\overline{z}}{1+|z|^2} = 0$, pero

$$\frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{\overline{f(z)}f'(z)}{1+|f(z)|^2} + \frac{\overline{z}}{1+|z|^2} = \frac{1+|f(z)|^2}{(1+|z|^2)|f'(z)|}\frac{\partial}{\partial z}\frac{(1+|z|^2)|f'(z)|}{1+|f(z)|^2},$$

lo que significa que $\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{(1+|z|^2)|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} = 0$, es decir, $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}\right] = 0$, donde $u(z) = \dfrac{(1+|z|^2)|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$, y como u es de valor real entonces $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$, y por lo tanto u es constante (por continuidad, en todo Ω). En consecuencia, por el lema 1.3.6. $f = \tilde{f}|_{\Omega}$ con $\tilde{f} \in \mathrm{Rot}(\widehat{\mathbb{C}})$. □

Corolario 2.3.2. *Sean $f : \Omega \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ y $\varphi : f(\Omega) \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ funciones meromorfas localmente inyectivas. Entonces, $\Gamma_{\varphi\circ f}^{\#} = \Gamma_f^{\#}$ si y solo si $\varphi = \tilde{\varphi}|_{f(\Omega)}$ con $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Rot}(\widehat{\mathbb{C}})$.*

Demostración. "$\Longrightarrow$" Si $\Gamma_{\varphi\circ f}^{\#} = \Gamma_f^{\#}$, por la regla de la cadena para $\Gamma^{\#}$, se tiene que $\Gamma_{\varphi}^{\#}(f)f' + \Gamma_f = \Gamma_f^{\#}$, esto es, $\Gamma_{\varphi}^{\#}(f)f' + \dfrac{1}{2}\dfrac{f''}{f'} = \dfrac{1}{2}\dfrac{f''}{f'} - \dfrac{\overline{f}f'}{1+|f|^2}$, de donde, $\Gamma_{\varphi}^{\#}\circ f = -\dfrac{\overline{f}}{1+|f|^2}$. Ahora bien, dado $z \in f(\Omega)$, existe $w \in \Omega$ tal que $f(w) = z$, luego

$$\Gamma_{\varphi}^{\#}(z) = \Gamma_{\varphi}^{\#}(f(w)) = (\Gamma_{\varphi}^{\#}\circ f)(w) = -\frac{\overline{f(w)}}{1+|f(w)|^2} = -\frac{\overline{z}}{1+|z|^2}.$$

Así, por el teorema anterior, $\varphi = \tilde{\varphi}|_{f(\Omega)}$ con $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Rot}(\widehat{\mathbb{C}})$.
" $\Longleftarrow$ " Supongamos que $\varphi = \tilde{\varphi}|_{f(\Omega)}$ con $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Rot}(\widehat{\mathbb{C}})$. Por la regla de la cadena para $\Gamma^{\#}$ y el teorema anterior tenemos que

$$\Gamma^{\#}_{\varphi\circ f} = \Gamma^{\#}_{\varphi}(f)f' + \Gamma_f = \frac{1}{2}\frac{f''}{f'} - \frac{\overline{f}f'}{1+|f|^2} = \Gamma^{\#}_f.$$

□

Notemos que, dado un dominio Ω en $\widehat{\mathbb{C}}$, si $f : \Omega \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es una función meromorfa localmente inyectiva, entonces $\Gamma^{\#}_f$ no es meromorfa. En efecto, si $\Gamma^{\#}_f$ fuera meromorfa, dado $z \neq \infty$ un punto de Ω que no es un polo de f (como en el caso 1), entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\Gamma^{\#}_f(z) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{\overline{f(z)}f'(z)}{1+|f(z)|^2}\right) \\ &= 0 - \frac{\overline{f'(z)}f'(z)(1+|f(z)|^2) - \overline{f'(z)}f(z)\overline{f(z)}f'(z)}{(1+|f(z)|^2)^2} \\ &= -\frac{|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2}, \end{aligned}$$

de donde, $|f'(z)| = 0$. Tenemos entonces que $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega \setminus \{\infty\}$ que no sea un polo de f, lo que contradice el hecho de que f sea localmente inyectiva. De este modo, $\Gamma^{\#}_f$ no puede ser meromorfa.

2.3.2. Teoremas de crecimiento y distorsión

Para empezar, probaremos un lema que nos permitirá, siguiendo las mismas ideas que en la sección 2.3 del libro de P. Duren [Du83], mostrar un primer resultado de crecimiento para la derivada esférica, el cual tiene consecuencias tales como el hecho de que si f está definida en $\mathbb{D}$ y si existe $c > 0$ tal que para todo $z \in \mathbb{D}$, $|\Gamma^{\#}_f(z)| \leqslant c$, entonces f se puede extender continuamente a $\overline{\mathbb{D}}$.

Recordemos que para toda función compleja g se tiene que

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{z}}{\partial r} = e^{i\theta}\frac{\partial g}{\partial z} + e^{-i\theta}\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}, \tag{2.9}$$

donde $z = re^{i\theta}$ y $\overline{z} = re^{-i\theta}$.

Lema 2.3.3. *Sean Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica localmente inyectiva. Entonces, para todo $z \in \Omega$*

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2zf'(z)\overline{f(z)}}{1+|f(z)|^2}\right\} = r\frac{\partial}{\partial r}\mathrm{Re}\log\frac{f'(re^{i\theta})}{1+|f(re^{i\theta})|^2},$$

donde $r > 0$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ son variables tales que $z = re^{i\theta}$.

Demostración. Como f es localmente inyectiva, $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Por lo tanto, al considerar $z = re^{i\theta}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\mathrm{Re}\log\frac{f'(re^{i\theta})}{1+|f(re^{i\theta})|^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\log\frac{|f'(re^{i\theta})|}{1+|f(re^{i\theta})|^2} = \frac{1+|f(z)|^2}{|f'(z)|}\frac{\partial}{\partial r}\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\\
&\overset{(2.9)}{=} \frac{1+|f(z)|^2}{|f'(z)|}\left(e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial z}\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} + e^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\right)\\
&= \frac{1+|f(z)|^2}{|f'(z)|}\left(e^{i\theta}\frac{\frac{1}{2}\frac{f''(z)\overline{f'(z)}}{|f'(z)|}(1+|f(z)|^2) - |f'(z)|f'(z)\overline{f(z)}}{(1+|f(z)|^2)^2} + \right.\\
&\qquad \left. e^{-i\theta}\frac{\frac{1}{2}\frac{\overline{f''(z)}f'(z)}{|f'(z)|}(1+|f(z)|^2) - |f'(z)|f(z)\overline{f'(z)}}{(1+|f(z)|^2)^2}\right)\\
&= \frac{e^{i\theta}f''(z)\overline{f'(z)}}{2|f'(z)|^2} - \frac{e^{i\theta}f'(z)\overline{f(z)}}{1+|f(z)|^2} + \frac{e^{-i\theta}\overline{f''(z)}f'(z)}{2|f'(z)|^2} - \frac{e^{-i\theta}f(z)\overline{f'(z)}}{1+|f(z)|^2}\\
&= \frac{e^{i\theta}f''(z)}{2f'(z)} - \frac{e^{i\theta}f'(z)\overline{f(z)}}{1+|f(z)|^2} + \frac{e^{-i\theta}\overline{f''(z)}}{2\overline{f'(z)}} - \frac{e^{-i\theta}\overline{f'(z)}f(z)}{1+|f(z)|^2}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
r\frac{\partial}{\partial r}\mathrm{Re}\log\frac{f'(re^{i\theta})}{1+|f(re^{i\theta})|^2} &= \frac{zf''(z)}{2f'(z)} - \frac{zf'(z)\overline{f(z)}}{1+|f(z)|^2} + \frac{\overline{z}\overline{f''(z)}}{2\overline{f'(z)}} - \frac{\overline{z}\overline{f'(z)}f(z)}{1+|f(z)|^2}\\
&= \mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \mathrm{Re}\frac{2zf'(z)\overline{f(z)}}{1+|f(z)|^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2zf'(z)\overline{f(z)}}{1+|f(z)|^2}\right).
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.3.4. *Sean Ω un dominio en $\mathbb{C}$ con $0 \in \Omega$, Ω estelar respecto al 0, y $f : \Omega \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función meromorfa localmente inyectiva. Si existe una función integrable no negativa $g : \{|z|/z \in \Omega\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $z \in \Omega$, $|\Gamma_f^{\#}(z)| \leqslant g(|z|)$, entonces*

$$e^{-2\int_0^{|z|} g(r)\,dr} \leqslant \frac{|f^{\#}(z)|}{|f^{\#}(0)|} \leqslant e^{2\int_0^{|z|} g(r)\,dr} \tag{2.10}$$

para todo $z \in \Omega$.

Demostración. Fijemos $z \in \Omega$ de forma tal que z no sea un polo de f. Por la definición de $\Gamma_f^{\#}$ en el caso 1, la condición $|\Gamma_f^{\#}(z)| \leqslant g(|z|)$ implica que

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2zf'(z)\overline{f(z)}}{1+|f(z)|^2}\right| \leqslant 2|z|g(|z|),$$

por lo tanto,

$$-2|z|g(|z|) \leqslant \mathrm{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2zf'(z)\overline{f(z)}}{1+|f(z)|^2}\right\} \leqslant 2|z|g(|z|).$$

Como z no es un polo de f, al considerar $z = re^{i\theta}$ se tiene por el lema anterior

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2zf'(z)\overline{f(z)}}{1+|f(z)|^2}\right\} = r\frac{\partial}{\partial r}\operatorname{Re}\log\frac{f'(re^{i\theta})}{1+|f(re^{i\theta})|^2}.$$

Se sigue que,

$$-2g(|z|) \leqslant \frac{\partial}{\partial r}\log\frac{|f'(re^{i\theta})|}{1+|f(re^{i\theta})|^2} \leqslant 2g(|z|).$$

Si en el segmento euclidiano que une a 0 con z no hay polos de f (excepto posiblemente en 0), entonces al fijar θ e integrar respecto a r desde 0 hasta $|z|$ nos queda que

$$-2\int_0^{|z|} g(r)\,dr \leqslant \log|f^{\#}(z)| - \log|f^{\#}(0)| \leqslant 2\int_0^{|z|} g(r)\,dr$$

y tomando exponencial obtenemos,

$$e^{-2\int_0^{|z|} g(r)\,dr} \leqslant \frac{|f^{\#}(z)|}{|f^{\#}(0)|} \leqslant e^{2\int_0^{|z|} g(r)\,dr}.$$

Si por el contrario hay polos de f en dicho segmento, tal vez en z, como los polos de una función meromorfa son aislados, la distancia entre el conjunto de polos que no están en el segmento y el segmento es mayor que cero, llamémosla d. En este caso, los segmentos que unen al 0 con cualquier punto de Ω que no esté en la recta que pasa por 0 y z, y que esté a una distancia de z menor que d, no tienen polos de f (excepto posiblemente en 0), y por lo tanto dichos puntos satisfacen la ecuación anterior. Luego, por continuidad, z satisface también dicha ecuación.

□

Corolario 2.3.5. *Sean Ω un dominio en $\mathbb{C}$ con $0 \in \Omega$, Ω estelar respecto al 0, y $f : \Omega \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función meromorfa localmente inyectiva. Si existe $c > 0$ tal que para todo $z \in \Omega$, $|\Gamma_f^{\#}(z)| \leqslant c$, entonces*

$$e^{-2|z|c} \leqslant \frac{|f^{\#}(z)|}{|f^{\#}(0)|} \leqslant e^{2|z|c} \tag{2.11}$$

para todo $z \in \Omega$.

Demostración. Basta tomar en el teorema anterior $g(r) = c$ para todo $r \geqslant 0$.

□

En [GePo84], Gehring y Pommerenke obtuvieron información sobre extensiones al disco cerrado de funciones analíticas que satisfacen cierta condición de Nehari sobre la derivada Schwarziana. Luego, Chuaqui y Osgood en [ChOs93] mostraron que una función normalizada que satisface una condición (de Ahlfors-Weill) similar pero mas fuerte sobre la derivada Schwarziana, tiene una extensión Hölder continua al disco cerrado. Aquí se está haciendo algo similar que en [GePo84] con el teorema anterior y la siguiente proposición, pero para funciones meromorfas localmente inyectivas que satisfacen cierta condición sobre la conexión esférica.

Proposición 2.3.6. *Sea* $f : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ *una función meromorfa localmente inyectiva, tal que para todo* $z \in \mathbb{D}$, $|\Gamma_f^{\#}(z)| \leqslant g(|z|)$, *donde* $g : [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función no negativa.*
i) *Si* $g \in L^1([0,1))$ *y* $\beta = |f^{\#}(0)|$, *entonces para todo par de elementos* $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$

$$d^{\#}(f(z_1), f(z_2)) \leqslant \frac{\pi}{2}\beta e^{2\int_0^1 g(r)\,dr}|z_1 - z_2|.$$

Se sigue que f *tiene una extensión a* $\overline{\mathbb{D}}$ *Lipschitz continua.*
ii) *Si* $g(|z|) = \dfrac{\alpha/2}{1-|z|^2}$, $0 < \alpha < 1$, *y* $\beta = |f^{\#}(0)|$, *entonces*

$$d^{\#}(f(z_1), f(z_2)) \leqslant \frac{\pi\beta}{2^{1-\alpha}(1-\alpha)}|z_1 - z_2|^{1-\alpha}$$

para todo par $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. *Y por lo tanto* f *tiene una extensión a* $\overline{\mathbb{D}}$ *Hölder continua.*

Demostración. Para la prueba de esta proposición, siempre que tomemos un par de elementos $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, consideraremos que γ es el segmento hiperbólico que une a z_1 con z_2. Así, dados $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, se tiene por el lema 1.1.1 que la longitud euclidiana l de γ es tal que

$$l \leqslant \frac{\pi}{2}|z_1 - z_2| \tag{2.12}$$

y que además para cada ξ en γ, si s es la longitud euclidiana de la parte de γ comprendida entre z_1 y ξ entonces

$$\min\{s, l - s\} \leqslant \frac{\pi}{2}(1 - |\xi|). \tag{2.13}$$

Tengamos también en cuenta que, por definición

$$d^{\#}(f(z_1), f(z_2)) \leqslant l^{\#}(f(\gamma)) = \int_\gamma \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\,|dz|. \tag{2.14}$$

i) Si $g \in L^1([0,1))$, se sigue del teorema anterior que para todo $z \in \mathbb{D}$,

$$|f^{\#}(z)| \leqslant |f^{\#}(0)|e^{2\int_0^{|z|} g(r)\,dr} \leqslant \beta e^{2\int_0^1 g(r)\,dr} \tag{2.15}$$

por ser g una función no negativa. Así, se sigue de (2.14), (2.15) y (2.12) que para todo par de elementos $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} d^{\#}(f(z_1), f(z_2)) &\leqslant \int_\gamma |f^{\#}(z)|\,|dz| \leqslant \beta e^{2\int_0^1 g(r)\,dr}\int_\gamma |dz| \\ &\leqslant \frac{\pi}{2}\beta e^{2\int_0^1 g(r)\,dr}|z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

De esta manera, f es uniformemente continua en sentido euclidiano-esférico, y así, por el teorema 1.3.1 f puede ser extendida de forma única a una función uniformemente continua de $\overline{\mathbb{D}}$ en $\widehat{\mathbb{C}}$, y dicha extensión, por continuidad, satisface la misma condición de Lipschitz.

ii) Si $g(|z|) = \dfrac{\alpha/2}{1-|z|}$, $0<\alpha<1$, se sigue del teorema anterior que para todo $z \in \mathbb{D}$,

$$|f^{\#}(z)| \leqslant \beta e^{2\int_0^{|z|} g(r)\,dr} = \beta e^{\alpha[-\ln(1-r)]_0^{|z|}} = \frac{\beta}{(1-|z|)^{\alpha}}$$

de donde, por (2.14), para todo par de elementos $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$

$$d^{\#}(f(z_1), f(z_2)) \leqslant \int_{\gamma} |f^{\#}(\xi)|\,|d\xi| \leqslant \beta \int_{\gamma} \frac{|d\xi|}{(1-|\xi|)^{\alpha}}.$$

Sea $z_0 \in \gamma$ tal que la longitud euclidiana de la parte de γ entre z_1 y z_0 es $l/2$. Llamemos γ_1 a la parte de γ entre z_1 y z_0, y γ_2 a la parte de γ entre z_0 y z_2; así, tanto la longitud de γ_1 como la de γ_2 es $l/2$ y $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$. Entonces, si s es la longitud euclidiana de la parte de γ comprendida entre z_1 y ξ, de (2.13), cuando $\xi \in \gamma_1$, $\dfrac{1}{(1-|\xi|)^{\alpha}} \leqslant \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\alpha} \dfrac{1}{s^{\alpha}}$, y cuando $\xi \in \gamma_2$, $\dfrac{1}{(1-|\xi|)^{\alpha}} \leqslant \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\alpha} \dfrac{1}{(l-s)^{\alpha}}$. Por lo tanto,

$$\int_{\gamma_1} \frac{|d\xi|}{(1-|\xi|)^{\alpha}} \leqslant \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha} \frac{ds}{s^{\alpha}} \quad \text{y} \quad \int_{\gamma_2} \frac{|d\xi|}{(1-|\xi|)^{\alpha}} \leqslant \int_{\frac{l}{2}}^{l} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha} \frac{ds}{(l-s)^{\alpha}} = \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha} \frac{d\zeta}{\zeta^{\alpha}},$$

haciendo en ésta última el cambio de variable $\zeta = l - s$. De este modo, como

$$\int_{\gamma} \frac{|d\xi|}{(1-|\xi|)^{\alpha}} = \int_{\gamma_1} \frac{|d\xi|}{(1-|\xi|)^{\alpha}} + \int_{\gamma_2} \frac{|d\xi|}{(1-|\xi|)^{\alpha}}$$

se tiene, usando (2.12), que

$$\begin{aligned}
d^{\#}(f(z_1), f(z_2)) &\leqslant \beta \left(\int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha} \frac{ds}{s^{\alpha}} + \int_{\frac{l}{2}}^{l} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha} \frac{ds}{(l-s)^{\alpha}} \right) = 2\beta \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha} \frac{ds}{s^{\alpha}} \\
&= 2\beta \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha} \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{l}{2}\right)^{1-\alpha} = \frac{2\beta\pi^{\alpha}}{2^{\alpha+1-\alpha}(1-\alpha)} l^{1-\alpha} \\
&\leqslant \frac{\beta\pi^{\alpha}}{1-\alpha} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-\alpha} |z_1 - z_2|^{1-\alpha} = \frac{\pi\beta}{2^{1-\alpha}(1-\alpha)} |z_1 - z_2|^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Y concluimos, de manera completamente análoga a como se hizo en la parte ***i)***, que f tiene una extensión continua a $\overline{\mathbb{D}}$, la cual, por continuidad, satisface la misma condición de Hölder. □

Observación: Si en la proposición anterior suponemos además que f es analítica y acotada, entonces dado que

$$\chi(f(z_1), f(z_2)) = \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{\sqrt{1+|f(z_1)|^2}\sqrt{1+|f(z_2)|^2}} \leqslant d^{\#}(f(z_1), f(z_2)),$$

podemos concluir que f es Lipschitz en sentido euclidiano y por tanto tiene una extensión continua a $\overline{\mathbb{D}}$, lo cual no se tiene en general para funciones analíticas acotadas (véase [Po92], pag. 18).

Corolario 2.3.7. *Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica localmente inyectiva con $f(0) = 0$ y $|f^{\#}(0)| = \beta > 0$. Si existe $c > 0$ tal que para todo $z \in \mathbb{D}$, $|\Gamma_f^{\#}(z)| \leqslant c$, entonces*

$$d^{\#}(0, f(\partial\mathbb{D})) \geqslant \int_0^1 \beta e^{-2ct}\, dt = \frac{\beta}{2c}(1 - e^{-2c}).$$

En donde $f(\partial\mathbb{D})$ tiene sentido por la proposición anterior.

Demostración. Supongamos que el mínimo de $|f|$ en el círculo $C_r := \{z/|z| = r\}$, $r \in (0, 1)$, es tomado en un punto z_1. Sea σ la geodésica esférica que une a 0 con $\zeta_1 = f(z_1)$ y sea $s = d^{\#}(0, \zeta_1)$. Luego, por el lema 1.3.2, existe una curva γ en el disco $|z| \leqslant r$ que une a 0 con z_1 tal que $f(\gamma) = \sigma$. Por lo tanto, usando la cota inferior de la desigualdad (2.11) del corolario 2.3.6 obtenemos que

$$s = \int_\sigma \frac{|dw|}{1 + |w|^2} = \int_\gamma \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}\, |dz| \geqslant \int_\gamma \beta e^{-2c|z|}\, |dz| \geqslant \int_0^{|z_1|} \beta e^{-2ct}\, dt = \int_0^r \beta e^{-2ct}\, dt.$$

Se sigue que

$$d^{\#}(0, f(C_r)) \geqslant \int_0^r \beta e^{-2ct}\, dt.$$

En esta última desigualdad, las dos cantidades involucradas son claramente funciones continuas en $r \in (0, 1)$, por lo tanto, al hacer que $r \longrightarrow 1^-$ obtenemos el resultado. $\square$

Observaciones:

- Es importante observar que este corolario proporciona una cota de cubrimiento esférico para el rango de f.

- Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica localmente inyectiva. Si existe $c > 0$ tal que para todo $z \in \mathbb{D}$, $|\Gamma_f^{\#}(z)| \leqslant c$, y si $|f^{\#}(0)| = \beta > 0$, puesto que para todo $z \in \mathbb{D}$

$$|f^{\#}(z)| = \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \leqslant |f'(z)|,$$

  por el corolario 2.3.5, para todo $z \in \mathbb{D}$

$$|f'(z)| \geqslant \beta e^{-2c|z|}. \tag{2.16}$$

- Si además $f(0) = 0$, usando un argumento geométrico completamente análogo al del último corolario (véase [GrKo03], pág. 17), obtenemos también una cota inferior para $|f(z)|$. En efecto, supongamos que el mínimo de $|f|$ en el círculo $C_r := \{z/|z| = r\}$, $r \in (0, 1)$, es tomado en un punto z_1. Sea σ el segmento que une a 0 con $f(z_1)$.

Por el lema 1.3.2, existe una curva γ en el disco $|z| \leqslant r$ que une a 0 con z_1 tal que $f(\gamma) = \sigma$. Luego, usando (2.16) obtenemos que para todo $z \in C_r$

$$\begin{aligned} |f(z)| \;&\geqslant\; |f(z_1)| \;=\; \int_\sigma |dw| \;=\; \int_\gamma |f'(\xi)|\,|d\xi| \;\geqslant\; \int_\gamma \beta e^{-2c|\xi|}\,|d\xi| \\ &\geqslant\; \int_\gamma \beta e^{-2c}\,|d\xi| \;=\; \beta e^{-2c}\int_\gamma |d\xi| \;\geqslant\; \beta r e^{-2c} \;=\; \beta |z| e^{-2c}, \end{aligned}$$

porque para $\xi \in \gamma$, $|\xi| \leqslant r < 1$, de donde, $-2c|\xi| \geqslant -2c$, y por lo tanto $\beta e^{-2c|\xi|} \geqslant \beta e^{-2c}$. Además, como γ une a 0 con z_1 y $|z_1| = r$, la longitud euclidiana de γ, $\int_\gamma |d\xi|$, no puede ser menor que r.
Así, como $r \in (0,1)$ es arbitrario, se sigue que $|f(z)| \geqslant \beta|z|e^{-2c}$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

- Nótese que del item anterior se deduce que el rango de f cubre un disco centrado en el origen y de radio por lo menos βe^{-2c}.
- Cabe resaltar que aquí se obtienen resultados "similares" a los conseguidos en [MePo00], teorema 5, pero bajo unas hipótesis distintas.

2.3.3. La norma de la conexión esférica

De forma completamente análoga a como definió H. Arbeláez en su tesis de doctorado [Ar11] la norma del operador preschwarziano esférico T_f, definimos la norma del operador $\Gamma_f^{\#}$ usando la función densidad de Poincaré η_Ω (véase definición pág. 8).

Definición 2.3.1. Sean Ω un dominio simplemente conexo y $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Definimos

$$\|\varphi\|_\Omega := \sup_{z\in\Omega} \frac{\varphi(z)}{\eta_\Omega(z)},$$

donde η_Ω es la función densidad de Poincaré de Ω (ver definición 1.3.1.).
En particular, si $f : \Omega \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es meromorfa y localmente inyectiva

$$\|\Gamma_f^{\#}\|_\Omega = \sup_{z\in\Omega} \frac{|\Gamma_f^{\#}(z)|}{\eta_\Omega(z)}.$$

Esta norma es mejor que la norma usual $\sup_{z\in\Omega} |\Gamma_f^{\#}(z)|$ por sus propiedades de invariancia, como lo muestra el siguiente teorema, el cual es completamente análogo a un resultado para el orden schwarziano que aparece en [Le87], página 55.

Teorema 2.3.8. *Sean f y g funciones meromorfas localmente inyectivas en un dominio Ω_1 simplemente conexo. Si $h : \Omega_2 \longrightarrow \Omega_1$ es un mapeo conforme sobreyectivo entonces*

$$\|\Gamma_f^{\#} - \Gamma_g^{\#}\|_{\Omega_1} = \|\Gamma_{foh}^{\#} - \Gamma_{goh}^{\#}\|_{\Omega_2}. \tag{2.17}$$

Demostración. A partir de la regla de la cadena para el operador $\Gamma_f^{\#}$ (ecuación 2.7) se tiene que

$$\Gamma_{f\circ h}^{\#} - \Gamma_{g\circ h}^{\#} = \big((\Gamma_f^{\#}\circ h)h' + \Gamma_h\big) - \big((\Gamma_g^{\#}\circ h)h' + \Gamma_h\big) = (\Gamma_f^{\#}\circ h - \Gamma_g^{\#}\circ h)h',$$

lo cual, junto con la ecuación (1.2), implica que

$$\frac{\Gamma_{f\circ h}^{\#} - \Gamma_{g\circ h}^{\#}}{\eta_{\Omega_2}} = \frac{(\Gamma_f^{\#}\circ h - \Gamma_g^{\#}\circ h)h'}{(\eta_{\Omega_1}\circ h)|h'|},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_{f\circ h}^{\#} - \Gamma_{g\circ h}^{\#}\|_{\Omega_2} &= \sup_{z\in\Omega_2} \frac{|\Gamma_{f\circ h}^{\#}(z) - \Gamma_{g\circ h}^{\#}(z)|}{\eta_{\Omega_2}(z)} = \sup_{z\in\Omega_2} \frac{|\Gamma_f^{\#}(h(z)) - \Gamma_g^{\#}(h(z))|}{\eta_{\Omega_1}(h(z))} \\
&= \sup_{z\in\Omega_1} \frac{|\Gamma_f^{\#}(z) - \Gamma_g^{\#}(z)|}{\eta_{\Omega_1}(z)} = \|\Gamma_f^{\#} - \Gamma_g^{\#}\|_{\Omega_1}.
\end{aligned}$$

$\square$

Corolario 2.3.9. *Sean f y g funciones meromorfas localmente inyectivas en un dominio Ω_1 simplemente conexo.*

i) *Si g es univalente entonces* $\|\Gamma_f^{\#} - \Gamma_g^{\#}\|_{\Omega_1} = \left\|\Gamma_{f\circ g^{-1}}^{\#} + \frac{\overline{z}}{1+|z|^2}\right\|_{g(\Omega_1)}$ *y* $\left\|\Gamma_g^{\#} + \frac{\overline{z}}{1+|z|^2}\right\|_{\Omega_1} = \left\|\Gamma_{g^{-1}}^{\#} + \frac{\overline{z}}{1+|z|^2}\right\|_{g(\Omega_1)}$.

ii) *Si $g \in \mathrm{Rot}(\widehat{\mathbb{C}})$ entonces* $\left\|\Gamma_f^{\#} + \frac{\overline{z}}{1+|z|^2}\right\|_{\Omega_1} = \left\|\Gamma_{f\circ g^{-1}}^{\#} + \frac{\overline{z}}{1+|z|^2}\right\|_{g(\Omega_1)}$.

Demostración. Recordemos que $\Gamma_{Id}^{\#}(z) = -\frac{\overline{z}}{1+|z|^2}$.

i) Si en (2.17) hacemos $h = g^{-1}$ y $\Omega_2 = g(\Omega_1)$, con g univalente, nos queda que $\|\Gamma_f^{\#} - \Gamma_g^{\#}\|_{\Omega_1} = \left\|\Gamma_{f\circ g^{-1}}^{\#} + \frac{\overline{z}}{1+|z|^2}\right\|_{g(\Omega_1)}$, y si en esta última igualdad tomamos $f = Id$ obtenemos $\left\|-\frac{\overline{z}}{1+|z|^2} - \Gamma_g^{\#}\right\|_{\Omega_1} = \left\|\Gamma_{g^{-1}}^{\#} + \frac{\overline{z}}{1+|z|^2}\right\|_{g(\Omega_1)}$.

ii) Basta con reemplazar en (2.17) a h por g^{-1} y a Ω_2 por $g(\Omega_1)$, teniendo en cuenta que si $g \in \mathrm{Rot}(\widehat{\mathbb{C}})$ entonces $\Gamma_g^{\#}(z) = -\frac{\overline{z}}{1+|z|^2}$. $\square$

2.4. Los operadores diferenciales linealmente invariantes D_{*1} y D_{*2}

Ma y Minda, en [MaMi92], introdujeron los siguientes operadores diferenciales para funciones holomorfas $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$D_1 f(z) = (1-|z|^2)f'(z) \quad \text{y} \quad D_2 f(z) = (1-|z|^2)^2 f''(z) - 2\overline{z}(1-|z|^2)f'(z),$$

a partir de los cuales se puede definir $A_f(z)$ como

$$A_f(z) = \frac{D_2 f(z)}{2D_1 f(z)}.$$

De igual forma, usaron para las funciones meromorfas $f : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ los operadores

$$\begin{aligned}
D_{s1}f(z) &= \frac{(1-|z|^2)f'(z)}{1+|f(z)|^2} \qquad \text{y} \\
D_{s2}f(z) &= \frac{(1-|z|^2)^2 f''(z)}{1+|f(z)|^2} - \frac{2\overline{z}(1-|z|^2)f'(z)}{1+|f(z)|^2} - \frac{2(1-|z|^2)^2\overline{f(z)}f'(z)^2}{(1+|f(z)|^2)^2}
\end{aligned}$$

de donde, obtenemos $A_f^{\#}(z)$ en la forma

$$A_f^{\#}(z) = \frac{D_{s2}f(z)}{2D_{s1}f(z)}.$$

En términos generales daremos la siguiente definición.

Definición 2.4.1. Sean Ω y D regiones en $\widehat{\mathbb{C}}$. Sean $\sigma(z)|dz|$ y $\tau(z)|dz|$ métricas conformes diferenciables en Ω y D, respectivamente. Dada una función meromorfa $f : \Omega \longrightarrow D$ localmente univalente, definimos

$$\begin{aligned}
D_{\tau 1}f(z) &= \frac{f^\tau(z)}{\sigma(z)} \qquad \text{y} \\
D_{\tau 2}f(z) &= 2D_{\tau 1}f(z)A_f^\tau(z) = \frac{2f^\tau(z)}{\sigma^2(z)}\Gamma_f^\tau(z) - \frac{2\overline{z}f^\tau(z)}{\sigma(z)}
\end{aligned}$$

en cualquier $z \in \Omega \setminus \{\infty\}$ que no sea un polo de f.

Ejemplo 2.4.1. Para una función holomorfa $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ localmente univalente, se tiene que los dos operadores definidos anteriormente están dados por

$$\begin{aligned}
D_{h1}f(z) &= \frac{(1-|z|^2)f'(z)}{1-|f(z)|^2} \qquad \text{y} \\
D_{h2}f(z) &= \frac{(1-|z|^2)^2 f''(z)}{1-|f(z)|^2} - \frac{2\overline{z}(1-|z|^2)f'(z)}{1-|f(z)|^2} + \frac{2(1-|z|^2)^2\overline{f(z)}f'(z)^2}{(1-|f(z)|^2)^2}
\end{aligned}$$

que claramente coinciden con los definidos por Ma y Minda en [MaMi95], y son tales que

$$A_f^h(z) = \frac{D_{h2}f(z)}{2D_{h1}f(z)}.$$

♦

Definición 2.4.2. Sean Ω y D regiones en $\widehat{\mathbb{C}}$. Sean $\sigma(z)|dz|$ y $\tau(z)|dz|$ métricas conformes diferenciables en Ω y D, respectivamente. Dada una función meromorfa $f : \Omega \longrightarrow D$ localmente univalente, definimos la norma $\|f\|_\sigma^\tau$ por:

$$\|f\|_\sigma^\tau = \sup\{|D_{\tau 1}f(z)| : z \in \Omega\}.$$

Decimos que f es σ, τ***-finita*** si $\|f\|_\sigma^\tau < \infty$.

Observaciones: Si en la definición anterior tenemos que:

1. $\Omega = \mathbb{D},\ D = \mathbb{C},\ \sigma(z)|dz| = \lambda_{\mathbb{D}}(z)|dz|$ y $\tau(z)|dz| = |dz|$, que f sea σ,τ-finita es lo que conocemos como una función de Bloch.
2. $\Omega = \mathbb{D},\ D = \widehat{\mathbb{C}},\ \sigma(z)|dz| = \lambda_{\mathbb{D}}(z)|dz|$ y $\tau(z)|dz| = \lambda_{\widehat{\mathbb{C}}}(z)|dz|$, que f sea σ,τ-finita es lo que conocemos como una función normal.
3. $\Omega = \mathbb{C},\ D = \widehat{\mathbb{C}},\ \sigma(z)|dz| = |dz|$ y $\tau(z)|dz| = \lambda_{\widehat{\mathbb{C}}}(z)|dz|$, que f sea σ,τ-finita es lo que conocemos como una función Yosida.

Definición 2.4.3. Sean Ω y D regiones en $\widehat{\mathbb{C}}$. Sean $\sigma(z)|dz|$ y $\tau(z)|dz|$ métricas conformes diferenciables en Ω y D, respectivamente. Definimos el orden (superior) de una función $f : \Omega \longrightarrow D$ meromorfa y localmente inyectiva por

$$\alpha_\tau(f) := \sup\{|A_f^\tau(z)| : z \in \Omega\}.$$

De forma similar, definimos el orden inferior de f por

$$\mu_\tau(f) := \text{ínf}\{|A_f^\tau(z)| : z \in \Omega\}.$$

Las definiciones anteriores fueron concebidas por analogía a lo hecho por Pommerenke para A_f en [Po64], y a lo hecho por Arbeláez para $A_f^\#$ y A_f^h en [Ar11]. Ambos encontraron cotas para los órdenes de dichos operadores; sin embargo en [Po64] las cotas para el caso euclidiano fueron encontradas usando el comportamiento que tiene el operador preschwarziano en las proximidades de la frontera de $\mathbb{D}$, así que siguiendo esas mismas ideas probaremos el siguiente teorema para los órdenes recién definidos.

Teorema 2.4.1. *Sean Ω una región en $\widehat{\mathbb{C}}$, $\tau(z)|dz|$ una métrica conforme diferenciable en Ω y $f : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$ meromorfa localmente inyectiva. Si $\mathbb{D}$ está dotado de la métrica hiperbólica y si existe una sucesión $\{z_n\}$ en $\mathbb{D}$ con $|z_n| \to 1$ tal que $\Gamma_f^\tau(z_n)$ permanece acotado, entonces*

$$0 \leqslant \mu_\tau(f) \leqslant 1 \leqslant \alpha_\tau(f) \leqslant +\infty.$$

Demostración. Sea $\{z_n\}$ una suceción en $\mathbb{D}$ con $|z_n| \to 1$ tal que $\Gamma_f^\tau(z_n)$ permanece acotado. Se sigue de (2.4) que

$$\lim_{n\to\infty} |A_f^\tau(z_n)| = \lim_{n\to\infty} |(1 - |z_n|^2)\Gamma_f^\tau(z_n) - \overline{z_n}| = 1.$$

Pero claramente $\mu_\tau(f) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} |A_f^\tau(z_n)| \leqslant \alpha_\tau(f)$, siendo evidente el resultado pretendido. □

Ejemplo 2.4.2. Para el caso euclidiano, es decir, para $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica y localmente inyectiva, $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$, y por lo tanto $\Gamma_f(z) = \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(z)}{f'(z)}$ es analítica en $\mathbb{D}$. Veamos que ninguna función analítica g en un subconjunto denso de $\mathbb{D}$ puede tender a ∞ cuando $|z| \to 1$. En efecto, si por el contrario $g(z) \to \infty$ cuando $|z| \to 1$, se tendría que $h(z) := \dfrac{1}{g(z)} \to 0$ cuando $|z| \to 1$. Pero sabemos que si φ_0 es la reflexión (o inversión) respecto a la circunferencia con centro en i y radio $\sqrt{2}$, $C(i, \sqrt{2})$, y que si φ_1 es la reflexión respecto a la recta $\mathrm{Im}(z) = 0$, entonces la función $\psi := \varphi_0 \circ \varphi_1$ es un mapeo conforme que envía el semiplano superior H^2 de $\mathbb{C}$ sobre el disco unitario $\mathbb{D}$, o sea, $\psi(H^2) = \mathbb{D}$ (véase [Be83], pag. 36-37). Nótese que para todo $z \in H^2$,

$$\psi(z) = \varphi_0(\varphi_1(z)) = \varphi_0(\overline{z}) = i + \left(\frac{\sqrt{2}}{|\overline{z} - i|}\right)^2 (\overline{z} - i) = i + \frac{2(\overline{z} - i)}{(\overline{z} - i)(z + i)} = \frac{iz + 1}{z + i}.$$

Ahora bien, tenemos que $h(\psi(z)) \to 0$ cuando $|\psi(z)| \to 1^-$, pero $|\psi(z)| \to 1^-$ si y solo si $\mathrm{Im}(z) \to 0^+$. Luego, $h(\psi(z)) \to 0$ cuando $\mathrm{Im}(z) \to 0^+$. Definimos para todo $z \in \mathbb{C}$

$$F(z) := \begin{cases} h(\psi(z)) & si\ z \in H^2 \\ 0 & si\ \mathrm{Im}(z) = 0 \\ \overline{h(\psi(\overline{z}))} & si\ \mathrm{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

Claramente, para todo $z \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Im}(z) = 0$, F resulta analítica en una vecindad V de z. Luego, por el principio de continuación única, F es idénticamente 0 en dicha vecindad, por lo tanto $h(\psi(w)) = 0$ para todo $w \in V \cap H^2 \neq \phi$. De esta forma, $g(z) = \dfrac{1}{h(z)} = \infty$ para todo $z \in \psi^{-1}(V \cap H^2)$, pero $\psi^{-1}(V \cap H^2)$ es un abierto de $\mathbb{D}$, lo que contradice el hecho de que g es analítica en un subconjunto denso de $\mathbb{D}$.
Se concluye entonces que $\Gamma_f(z)$ no tiende a ∞ cuando $|z| \longrightarrow 1$, y en consecuencia, se cumplen las hipótesis del teorema anterior para el caso euclidiano, obteniéndose que

$$0 \leqslant \mu(f) \leqslant 1 \leqslant \alpha(f) \leqslant +\infty,$$

resultado ya establecido por Ch. Pommerenke y L. Cruz en [CrPo07].

♦

Capítulo 3

Orden inferior esférico

Es notable que en varios de los resultados de la penúltima sección del capítulo anterior, se pedía que el operador $\Gamma_f^{\#}$ fuera acotado en el dominio de f, en cuyo caso, si el dominio de f fuera el disco unitario $\mathbb{D}$, entonces se cumplirían todas las condiciones del teorema 2.4.1., y por ende tendríamos las siguientes desigualdades para los órdenes esféricos de f

$$0 \leqslant \mu_s(f) \leqslant 1 \leqslant \alpha_s(f) \leqslant +\infty.$$

Sin embargo, es demasiado pedir que $\Gamma_f^{\#}$ sea acotado para que estas desigualdades se cumplan (más que esto, quisiéramos no tener que pedir ninguna condición para que se den dichas desigualdades); por eso, vamos a explorar qué tipo de condiciones más débiles podemos exigir para obtener dicho resultado.

3.1. Algoritmo para calcular el orden inferior esférico

Para empezar nuestra exploración del orden inferior esférico de funciones meromorfas localmente inyectivas, vamos a elaborar un algoritmo en MatLab que nos permitirá calcular dicho orden computacionalmente.
Recordemos que MatLab considera como comentarios todo lo que va desde el caracter % hasta el final de la línea, por lo tanto, a medida que avanza el algoritmo se va escribiendo a forma de comentario la explicación de las acciones que se pide ejecutar al programa.
Tengamos en cuenta que para MatLab inf es ∞. El algoritmo es el siguiente:

```
%Empezamos definiendo una función en MatLab que recibirá como entrada la función meromorfa
%localmente inyectiva f, y que devolverá el orden inferior esférico de f en la variable o, y en la
%variable m un punto en el disco unitario donde es alcanzado el orden inferior esférico.
function [o,m] = ordinf(f)
%Ahora, se calcula la primera y segunda derivada de f.
df = diff(f);
ddf = diff(df);
%Se definen algunas variables con ciertos valores iniciales que eventualmente estarán
%siendo modificados, entre ellas se define la variable 'o' con valor inicial 0.
 O = inf; o = 0; k = -1-i; n = 0.2;
%Se ejecuta un ciclo while mientras que la diferencia entre O y o sea mayor que 10^-10.
```

```
while O - o > 1e-10
    %Creamos una matriz A de orden 11 cuyas entradas cubren el rectángulo [−1, 1] × [−i, i]
    %con 0.2 de espaciado entre cada una, empezando desde la esquina inferior izquierda del
    %rectángulo (k = −1 − i) y terminando en la esquina superior derecha (A(11, 11) = 1 + i).
    for r = 1:11
        for s = 1:11
            A(r,s) = k+(r-1)*n+i*(s-1)*n;
        end
    end
    %Y entonces creamos una matriz B de orden 11 con entradas igual a ∞ cuando las
    %respectivas entradas de A estén por fuera de 𝔻, y cuando las entradas de A se encuentren
    %al interior de 𝔻 evaluamos A_f^# en ellas y sacamos módulo, y estas corresponden a las
    %respectivas entradas de B.
    for r = 1:11
        for s = 1:11
            if abs(A(r,s)) < 1
                z = A(r,s);
                B(r,s) = abs(((1-(abs(z))^2)/2)*(eval(ddf)/eval(df))
                - conj(z) - ((1-(abs(z))^2)*conj(eval(f))*eval(df))
                /(1+(abs(eval(f)))^2));
            else
                B(r,s) = inf;
            end
        end
    end
    %Las siguientes tres líneas nos permiten encontrar el valor mínimo de la matriz B y la
    %posición en la que se encuentra, siendo:
    %o: valor mínimo de B.
    %fila: fila donde se encuentra el valor mínimo de B.
    %col: columna donde se encuentra el valor mínimo de B.
    [a,b] = min(B);
    [o,col] = min(a);
    fila = b(col);
    %Guardamos en m el valor donde se da el mínimo de B, y si este es de módulo menor
    %que 10^−10, hacemos m igual a 0.
   m = A(fila,col);
    if abs(m) < 1e-10
        m = 0;
    end
    %Si ‘o’ es menor que 10^−10 lo hacemos igual a 0 y retornamos al usuario.
    if o < 1e-10
        o = 0;
        return
    end
    %De lo contrario, guardamos en O el valor máximo de la matriz B
   O = max(max(B));
    %y se redefinen los valores de k y de n para comenzar de nuevo con el ciclo while en caso
    %de que O − o sea mayor que 10^−10, obteniendo esta vez la matriz A de forma tal que
```

```
        %cubre a un rectángulo mas pequeño y centrado en el valor actual de o.
        k = A(fila,col)-2*n*(1+i);
        n = 2*n/5;
end
%Cuando finalmente la diferencia entre O y o es menor que 10^-10, concluimos que el último
%valor guardado en o es una aproximación del orden inferior esférico de f con un error del
%orden de 10^-10, y guardamos en m el valor donde es alcanzado.
```

Como también nos es de utilidad calcular el orden superior esférico computacionalmente, aprovechamos para hacer un algoritmo similar al anterior que nos haga dicho cálculo. El siguiente algoritmo en MatLab nos sirve para calcular el orden superior esférico guardándolo en la variable O, y guardando en M un punto donde éste es alcanzado.

```
function [O,M] = ordsup(f)
df = diff(f);
ddf = diff(df);
O = inf; o = 0; k = -1-i; n = 0.2;
while O - o > 1e-10
    for r = 1:11
        for s = 1:11
            A(r,s) = k+(r-1)*n+i*(s-1)*n;
        end
    end
    for r = 1:11
        for s = 1:11
            if abs(A(r,s)) < 1
                z = A(r,s);
                B(r,s) = abs(((1-(abs(z))^2)/2)*(eval(ddf)/eval(df))
                - conj(z) - ((1-(abs(z))^2)*conj(eval(f))*eval(df))
                /(1+(abs(eval(f)))^2));
            else
                B(r,s) = 0;
            end
        end
    end
    [a,b] = max(B);
    [O,col] = max(a);
    fila = b(col);
    M = A(fila,col);
    if abs(M) < 1e-10
        M = 0;
    end
    if O > 1e10
        O = inf;
        return
    end
```

```
        o = min(min(B));
        k = A(fila,col)-2*n*(1+i);
        n = 2*n/5;
end
```

Para utilizar los algoritmos, primero hay que correrlos en el entorno de programación de MatLab y luego declarar a z como variable simbólica en su entorno de trabajo mediante el comando 'syms z'. Veamos por ejemplo lo que se produce en pantalla (en el entorno de trabajo de MatLab) con algunas funciones:

```
>> syms z
>> [o,m]=ordinf((z/(1-z))^(1+i))

o =
     0.4144

m =
     0.4325 - 0.0210i

>> [O,M]=ordsup((z/(1-z))^(1+i))

O =
     Inf

M =
     0
```

Los algoritmos también se pueden utilizar sin declarar variables, en cuyo caso MatLab arroja como resultado solo el orden pedido, por ejemplo:

```
>> ordinf(((1+z)/(1-z))^i)

ans =
      0

>> ordsup(((1+z)/(1-z))^i)

ans =
      1.2565
```

3.2. Ejemplos y una regla de composición para $A_f^{\#}$

En esta sección veremos ejemplos del cálculo de los órdenes esféricos (inferior y superior) de funciones meromorfas localmente inyectivas haciendo uso de la conexión esférica, para así observar qué relaciones puede haber entre éstos.

Ejemplo 3.2.1. Sea $f(z) = kz$, $k \neq 0$. Entonces, para todo $z \in \mathbb{C}$

$$\Gamma_f^{\#}(z) = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{\overline{f(z)}f'(z)}{1+|f(z)|^2} = \frac{1}{2}\frac{0}{k} - \frac{\overline{kz}k}{1+|kz|^2} = -\frac{|k|^2\overline{z}}{1+|k|^2|z|^2}$$

y por lo tanto, para todo $z \in \mathbb{C}$

$$A_f^{\#}(z) = (1-|z|^2)\Gamma_f^{\#}(z) - \overline{z} = -\left(\frac{|k|^2\overline{z} - |k|^2|z|^2\overline{z}}{1+|k|^2|z|^2} + \overline{z}\right) = -\overline{z}\frac{1+|k|^2}{1+|k|^2|z|^2}.$$

Luego, como $A_f^{\#}(0) = 0$, entonces $\mu_s(f) = 0$.
En cuanto al orden superior esférico, definiendo $h(t) := \dfrac{t}{1+|k|^2t^2}$, $0 \leqslant t < 1$; se tiene que $h'(t) = \dfrac{1-|k|^2t^2}{(1+|k|^2t^2)^2} = 0$ si $t = \dfrac{1}{|k|}$. Consideremos dos casos:
Si $|k| \leqslant 1$ entonces $h'(t) > 0$ para todo $t \in [0,1)$, esto es, h es creciente en $[0,1)$ y por lo tanto $\sup\limits_{0\leqslant t<1} h(t) = \lim\limits_{t\to 1^-} h(t) = \dfrac{1}{1+|k|^2}$. Así, $\alpha_s(f) = \sup\limits_{z\in\mathbb{D}}\left((1+|k|^2)\dfrac{|z|}{1+|k|^2|z|^2}\right) = (1+|k|^2)\sup\limits_{0\leqslant t<1} h(t) = 1$. En particular, f es esféricamente convexa (véase la página 2).
En cambio, si $|k| > 1$ entonces $\dfrac{1}{|k|} < 1$ y $h'\left(\dfrac{1}{|k|}\right) = 0$; de este modo, como $h''(t) = \dfrac{2|k|^2t(|k|^2t^2-3)}{(1+|k|^2t^2)^3}$ es tal que $h''\left(\dfrac{1}{|k|}\right) = -\dfrac{|k|}{2} < 0$, entonces h tiene un máximo en $t = \dfrac{1}{|k|}$, con lo cual $\alpha_s(f) = (1+|k|^2)h\left(\dfrac{1}{|k|}\right) = \dfrac{1+|k|^2}{2|k|}$.

♦

Ejemplo 3.2.2. Sea $f(z) = \dfrac{k}{z}$, $k \neq 0$. Entonces, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\Gamma_f^{\#}(z) = \frac{1}{2}\frac{\frac{2k}{z^3}}{-\frac{k}{z^2}} - \frac{\left(\overline{\frac{k}{z}}\right)\left(-\frac{k}{z^2}\right)}{1+\frac{|k|^2}{|z|^2}} = -\frac{1}{z} + \frac{|k|^2}{z(|k|^2+|z|^2)} = -\frac{|z|^2}{z(|k|^2+|z|^2)} = -\frac{\overline{z}}{|k|^2+|z|^2},$$

pero ésta última expresión tiene sentido en $z = 0$, y por lo tanto es válida en todo $\mathbb{C}$ por la continuidad de $\Gamma_f^{\#}$. De este modo, para todo $z \in \mathbb{C}$

$$A_f^{\#}(z) = -\frac{\overline{z}(1-|z|^2)}{|k|^2+|z|^2} - \overline{z} = -\frac{\overline{z}(1-|z|^2+|k|^2+|z|^2)}{|k|^2+|z|^2} = -\frac{\overline{z}(1+|k|^2)}{|k|^2+|z|^2}.$$

por ende, $|A_f^{\#}(z)| = (1+|k|^2)\dfrac{|z|}{|k|^2+|z|^2}$; así, $\mu_s(f) = |A_f^{\#}(0)| = 0$.
Para el orden superior, sea $h(t) := \dfrac{t}{|k|^2+t^2}$, $0 \leqslant t < 1$; entonces $h'(t) = \dfrac{|k|^2-t^2}{(|k|^2+t^2)^2} = 0$ si $t = |k|$. Luego, si $|k| < 1$, como $h''(t) = \dfrac{2t(t^2-3|k|^2)}{(|k|^2+t^2)^3}$ es tal que

$$h''(|k|) = \frac{2|k|(-2|k|^2)}{(2|k|^2)^3} = \frac{-4|k|^3}{8|k|^6} = -\frac{1}{2|k|^3} < 0,$$

entonces h tiene un máximo en $t = |k|$, con lo cual

$$\alpha_s(f) = \sup_{z\in\mathbb{D}}\left((1+|k|^2)\frac{|z|}{|k|^2+|z|^2}\right) = (1+|k|^2)\sup_{0\leqslant t<1}\frac{t}{|k|^2+t^2} = (1+|k|^2)h(|k|) = \frac{1+|k|^2}{2|k|}.$$

En cambio, si $|k| > 1$ entonces $h'(t) > 0$ para todo $t \in [0,1)$, esto es, h es creciente en $[0,1)$ y por lo tanto $\sup\limits_{0\leqslant t<1} h(t) = \lim\limits_{t\to 1^-} h(t) = \dfrac{1}{1+|k|^2}$. Así,

$$\alpha_s(f) = \sup_{z\in\mathbb{D}}\left((1+|k|^2)\frac{|z|}{|k|^2+|z|^2}\right) = (1+|k|^2)\sup_{0\leqslant t<1} h(t) = 1.$$

Luego, en este caso, f es esféricamente convexa.

♦

Ejemplo 3.2.3. Sea $f(z) = \tan(z)$, $z \in \mathbb{C}$; como $f'(z) = \sec^2 z$ y $f''(z) = 2\sec^2 z \tan z$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\Gamma_f^{\#}(z) &= \frac{1}{2}\frac{2\sec^2 z\tan z}{\sec^2 z} - \frac{\overline{\tan z}\sec^2 z}{1+|\tan z|^2} = \frac{\tan z + \tan^2 z\,\overline{\tan z} - \sec^2 z\,\overline{\tan z}}{1+|\tan z|^2}\\
&= \frac{\tan z - \overline{\tan z}(\sec^2 z - \tan^2 z)}{1+\tan z\,\overline{\tan z}} = \frac{\tan z - \tan\overline{z}}{1+\tan z\tan\overline{z}} = \tan(z-\overline{z}),
\end{aligned}$$

y con esto, $A_f^{\#}(z) = (1-|z|^2)\tan(z-\overline{z}) - \overline{z}$ para todo $z \in \mathbb{D}$. De este modo, $A_f^{\#}(0) = 0$ y por lo tanto $\mu_s(f) = 0$.
Mediante el algoritmo para el orden superior esférico de la sección anterior obtenemos que $\alpha_s(f) \approx 1{,}1516$.

♦

Regla de Composición: Usando la regla de composición (2.7) para $\Gamma_f^{\#}$, y el hecho de que $A_f^{\#}(z) = (1-|z|^2)\Gamma_f^{\#}(z) - \overline{z}$, obtenemos que si g es una función analítica localmente inyectiva definida en $\mathbb{D}$ y f una función meromorfa localmente inyectiva definida en $g(\mathbb{D})$, entonces

$$\begin{aligned}
A_{f\circ g}^{\#}(z) &= (1-|z|^2)\Gamma_{f\circ g}^{\#}(z) - \overline{z} = (1-|z|^2)[\Gamma_f^{\#}(g(z))g'(z) + \Gamma_g(z)] - \overline{z}\\
&= (1-|z|^2)\Gamma_f^{\#}(g(z))g'(z) + \frac{(1-|z|^2)}{2}\frac{g''(z)}{g'(z)} - \overline{z}\\
&= (1-|z|^2)\Gamma_f^{\#}(g(z))g'(z) + A_g(z),
\end{aligned}$$

es decir, se tiene la siguiente regla de composición para $A_f^\#$:

$$A_{f\circ g}^\# = (1-|z|^2)\Gamma_f^\#(g)g' + A_g. \tag{3.1}$$

Ejemplo 3.2.4. Sea $L(z) = \beta \log \dfrac{1+z}{1-z}$, $z \in \mathbb{D}$, $\beta \neq 0$, entonces $L(z) = (f\circ g)(z)$, donde $f(z) = \beta \log z$ y $g(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$. Ahora bien,

$$f'(z) = \frac{\beta}{z},\ f''(z) = -\frac{\beta}{z^2},\ g'(z) = \frac{2}{(1-z)^2} \text{ y } g''(z) = \frac{4}{(1-z)^3}.$$

Por lo tanto,

$$\Gamma_f^\#(z) = -\frac{1}{2z} - \frac{|\beta|^2\overline{\log z}}{z(1+|\beta\log z|^2)} = -\frac{1}{2z}\left(1 + \frac{2|\beta|^2\overline{\log z}}{1+|\beta\log z|^2}\right)$$

y

$$A_g(z) = \frac{(1-|z|^2)}{2}\frac{g''(z)}{g'(z)} - \overline{z} = \frac{(1-|z|^2)}{2}\frac{4(1-z)^2}{2(1-z)^3} - \overline{z} = \frac{1-|z|^2}{1-z} - \overline{z} = \frac{1-\overline{z}}{1-z}.$$

Con esto, por la regla de composición (3.1),

$$\begin{aligned}
A_L^\#(z) &= (1-|z|^2)\left(-\frac{1}{2\dfrac{1+z}{1-z}}\left(1 + \frac{2|\beta|^2\overline{\log \dfrac{1+z}{1-z}}}{1+\left|\beta\log\dfrac{1+z}{1-z}\right|^2}\right)\frac{2}{(1-z)^2}\right) + \frac{1-\overline{z}}{1-z} \\
&= -\frac{1-|z|^2}{1-z^2} - \frac{2|\beta|^2(1-|z|^2)\overline{\log\dfrac{1+z}{1-z}}}{(1-z^2)\left(1+\left|\beta\log\dfrac{1+z}{1-z}\right|^2\right)} + \frac{1-\overline{z}}{1-z} \\
&= \frac{1}{1-z^2}\left(z - \overline{z} - \frac{2|\beta|^2(1-|z|^2)\overline{\log\dfrac{1+z}{1-z}}}{1+\left|\beta\log\dfrac{1+z}{1-z}\right|^2}\right).
\end{aligned}$$

Nótese que $A_L^\#(0) = 1\left(0 - \dfrac{2|\beta|^2\overline{\log 1}}{1+|\beta\log 1|^2}\right) = 0$, de donde $\mu_s(L) = \inf\limits_{z\in\mathbb{D}} |A_L^\#(z)| = 0$.
El orden superior esférico de L lo hayamos con el algoritmo de la sección anterior para diferentes valores de β, por ejemplo $\alpha_s(L) \approx 1{,}4030$ para $\beta = 1$ y $\beta = i$, y $\alpha_s(L) \approx 1{,}7279$ para $\beta = 1+i$ y $\beta = \sqrt{2}$. Los resultados anteriores tienen sentido al observar que el operador $A_L^\#$ más que de β depende es de $|\beta|$.

♦

Ejemplo 3.2.5. Consideremos $f(z) = \tan(L(z))$ con L como en el ejemplo anterior, $z \in \mathbb{D}$. Luego,

$$A_f^{\#}(z) = (1-|z|^2)\Gamma_{\tan}^{\#}(L(z))L'(z) + A_L(z)$$

por la regla de composición (3.1). Ahora bien, del ejemplo 3.2.3.,

$$\Gamma_{\tan}^{\#}(L(z)) = \tan(L(z) - \overline{L(z)}) = \tan[2i\mathrm{Im}(L(z))].$$

Además,

$$L'(z) = \beta\frac{(1-z)}{(1+z)}\frac{(1-z+1+z)}{(1-z)^2} = \frac{2\beta}{1-z^2} \quad \text{y} \quad L''(z) = \frac{4\beta z}{(1-z^2)^2},$$

por lo tanto

$$A_L(z) = \frac{(1-|z|^2)}{2}\frac{L''(z)}{L'(z)} - \overline{z} = \frac{(1-|z|^2)}{2}\frac{4z(1-z^2)}{2(1-z^2)^2} - \overline{z} = \frac{z - z|z|^2 - \overline{z} + z|z|^2}{1-z^2} = \frac{z-\overline{z}}{1-z^2}$$

y así,

$$A_f^{\#}(z) = \frac{2\beta(1-|z|^2)}{1-z^2}\tan[2i\mathrm{Im}(L(z))] + \frac{z-\overline{z}}{1-z^2}.$$

Nótese que $A_f^{\#}(0) = 2\beta\tan[2i\mathrm{Im}(\beta\log 1)] + 0 = 0$, y por ende $\mu_s(f) = 0$.
Sin embargo, para el orden superior esférico, como para todo $z \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned}
|A_f^{\#}(z)| &= \left|\frac{2\beta(1-|z|^2)i\tanh[2\mathrm{Im}(L(z))]}{1-z^2} + \frac{z-\overline{z}}{1-z^2}\right| \\
&\leqslant \frac{2|\beta|(1-|z|^2)|\tanh[2\mathrm{Im}(L(z))]|}{|1-z^2|} + \left|\frac{z-\overline{z}}{1-z^2}\right| \\
&\leqslant \frac{2|\beta|(1-|z|^2)}{1-|z|^2} + \frac{|z-\overline{z}|}{|1-z^2|}
\end{aligned}$$

se tiene que $\alpha_s(f) \leqslant 2|\beta| + 1$, pues $|z|^4 - 2|z|^2 + 1 = (|z|^2-1)^2 \geqslant 0$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
|z-\overline{z}|^2 &= (z-\overline{z})(\overline{z}-z) = |z|^2 - z^2 - \overline{z}^2 + |z|^2 = 2|z|^2 - \overline{z}^2 - z^2 \\
&\leqslant 1 - \overline{z}^2 - z^2 + |z|^4 = (1-z^2)(1-\overline{z}^2) = |1-z^2|^2
\end{aligned}$$

♦

Según mostraron Ma y Minda en [MaMi92], si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ es meromorfa localmente inyectiva, entonces $\alpha_s(f) \geqslant 1$, con igualdad si y solo si f es esféricamente convexa.
Ahora bien, dado que la función $f(z) = \tan\left(\beta\log\frac{1+z}{1-z}\right)$, $z \in \mathbb{D}$, $\beta \neq 0$, no es univalente; y como es bien conocido que si f es esféricamente convexa entonces f es univalente, el último ejemplo nos permite concluir que una vez se pierde la convexidad esférica se puede perder la univalencia, ya que tomando en este ejemplo $\beta = \frac{\varepsilon}{2}$ con $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, obtenemos que f es una función no univalente tal que $\alpha_s(f) \leqslant \varepsilon + 1$.

Ejemplo 3.2.6. Para $f(z) = \tan\left(\dfrac{\beta z}{1-z}\right)$, $z \in \mathbb{D}$, $\beta > 0$, tenemos que $f(z) = \tan(g(z))$, donde $g(z) = \dfrac{\beta z}{1-z}$. Como $g'(z) = \dfrac{\beta}{(1-z)^2}$ y $g''(z) = \dfrac{2\beta}{(1-z)^3}$, entonces

$$A_g(z) = \frac{(1-|z|^2)}{2}\frac{2(1-z)^2}{(1-z)^3} - \overline{z} = \frac{1-\overline{z}}{1-z} = \frac{|1-z|^2}{(1-z)^2}.$$

Así,

$$\begin{aligned} A_f^{\#}(z) &= (1-|z|^2)\tan\left(2i\mathrm{Im}\frac{\beta z}{1-z}\right)\frac{\beta}{(1-z)^2} + \frac{|1-z|^2}{(1-z)^2} \\ &= \frac{1}{(1-z)^2}\left[(1-|z|^2)i\beta\tanh\left(2\mathrm{Im}\frac{\beta z}{1-z}\right) + |1-z|^2\right], \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$|A_f^{\#}(z)| = \left|1 + \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}i\beta\tanh\left(2\mathrm{Im}\frac{\beta z}{1-z}\right)\right| = |1+ih(z)| \geqslant 1,$$

siendo h una función compleja de valor real. Pero $|A_f^{\#}(0)| = |1 + i\beta\tanh(0)| = 1$ y en consecuencia $\mu_s(f) = 1$.

Para el orden superior esférico, como $\dfrac{z}{1-z} = \dfrac{z}{1-z}\dfrac{1-\overline{z}}{1-\overline{z}} = \dfrac{z-|z|^2}{|1-z|^2}$ entonces $2\mathrm{Im}\dfrac{\beta z}{1-z} = 2\beta\mathrm{Im}\dfrac{z-|z|^2}{|1-z|^2} = \dfrac{2\beta}{|1-z|^2}\mathrm{Im}(z)$. Así, tomando $z = x + iy$ y $x = 1-y$, en cuyo caso $z \in \mathbb{D}$ si y solo si $y \in (0,1)$, se tiene que $z \longrightarrow 1$ cuando $y \longrightarrow 0^+$; además, $|1-z|^2 = |1-(1-y+iy)|^2 = |y-iy|^2 = 2y^2$, con lo que $\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|1-z|^2} = \dfrac{y}{2y^2} = \dfrac{1}{2y} \longrightarrow +\infty$ cuando $y \longrightarrow 0^+$, de donde, $\tanh\left(2\mathrm{Im}\dfrac{\beta z}{1-z}\right) \longrightarrow 1$ cuando $y \longrightarrow 0^+$, por lo tanto, $\lim\limits_{y\to 0^+} h(1-y+iy) = \lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{1-|1-y+iy|^2}{|1-(1-y+iy)|^2}\beta = \beta\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{2y-2y^2}{2y^2} = \beta\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{1-y}{y} = +\infty$, y en consecuencia $\alpha_s(f) = +\infty$.

♦

3.3. Propiedades básicas

En los dos últimos ejemplos de la sección anterior se trabajó con funciones de la forma $f(z) = \tan(g(z))$, siendo g una función analítica y localmente inyectiva definida en $\mathbb{D}$. Vemos que en general para una función de este tipo se tiene que

$$|A_f^{\#}(z)| \leqslant |(1-|z|^2)\Gamma_{\tan}^{\#}(g(z))g'(z)| + |A_g(z)|.$$

Así,

$$\begin{aligned} \alpha_s(f) &\leqslant \sup_{z\in\mathbb{D}}\{|(1-|z|^2)i\tanh[2\mathrm{Im}(g(z))]g'(z)| + |A_g(z)|\} \\ &\leqslant \sup_{z\in\mathbb{D}}|A_g(z)| + \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|g'(z)| \;=\; \alpha(g) + \|g\|_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

donde $\alpha(g)$ es el orden euclidiano de g y $\|g\|_{\mathcal{B}}$ es la norma de Bloch de g (véase [Po92], pág. 72). Esta última desigualdad nos permite, por ejemplo, mostrar que si $f(z) = \tan\left(\beta \log \dfrac{1+z}{1-z}\right)$, $z \in \mathbb{D}$, $\beta \neq 0$, entonces $\alpha_s(f) \leqslant |\beta| + \sqrt{2}$, que para valores de $|\beta| \geqslant \sqrt{2} - 1$ es mejor que la cota obtenida en el ejemplo 3.2.5. para esta misma función. También es conocido (véase [Po64]) que si g es univalente entonces $\alpha(g) \leqslant 2$, con lo cual la desigualdad anterior se convierte en $\alpha_s(f) \leqslant \|g\|_{\mathcal{B}} + 2$.
De forma análoga, obtenemos que

$$|A_f^{\#}(z)| \ \geqslant \ |A_g(z)| - (1 - |z|^2)|g'(z)||\tanh[2\mathrm{Im}(g(z))]|$$

y por lo tanto,

$$\mu_s(f) \ \geqslant \ \inf_{z \in \mathbb{D}} |A_g(z)| - \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)|g'(z)| \ = \ \mu(g) - \|g\|_{\mathcal{B}}.$$

Notemos además, por simple curiosidad, que para una función f meromorfa localmente inyectiva se tiene que (ver definición 2.3.1.)

$$\alpha_s(f) = \sup_{z \in \mathbb{D}} |A_f^{\#}(z)| = \sup_{z \in \mathbb{D}} |(1-|z|^2)\Gamma_f^{\#}(z) - \overline{z}| \leqslant \sup_{z \in \mathbb{D}} |(1-|z|^2)\Gamma_f^{\#}(z)| + \sup_{z \in \mathbb{D}} |\overline{z}| \leqslant \|\Gamma_f^{\#}\|_{\mathbb{D}} + 1.$$

Similarmente,

$$\alpha_s(f) \geqslant \sup_{z \in \mathbb{D}} ((1 - |z|^2)|\Gamma_f^{\#}(z)| - |\overline{z}|) \geqslant \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)|\Gamma_f^{\#}(z)| - \sup_{z \in \mathbb{D}} |z| \geqslant \|\Gamma_f^{\#}\|_{\mathbb{D}} - 1.$$

Recogiendo lo anterior en una proposición, tenemos que

Proposición 3.3.1.
i) *Si $g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa localmente univalente, entonces la función $f : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ dada por $f(z) = \tan(g(z))$ es tal que*

$$\mu(g) - \|g\|_{\mathcal{B}} \leqslant \mu_s(f) \leqslant \alpha_s(f) \leqslant \alpha(g) + \|g\|_{\mathcal{B}}$$

ii) *Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ meromorfa localmente inyectiva. Entonces*

$$\|\Gamma_f^{\#}\|_{\mathbb{D}} - 1 \leqslant \alpha_s(f) \leqslant \|\Gamma_f^{\#}\|_{\mathbb{D}} + 1.$$

Sin embargo, como obviamente para cualquier función f meromorfa localmente inyectiva $\mu_s(f) \geqslant 0$, la primera parte de esta última proposición nos hace preguntarnos si realmente existe una función g localmente univalente tal que $\mu(g) > \|g\|_{\mathcal{B}}$, para que la cota inferior para $\mu_s(f)$ tenga algún sentido.
Para empezar, g no podría ser un automorfismo del disco unitario, pues éstos tienen la forma $g(z) = \lambda \varphi_a(z)$, donde $\varphi_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$, con $a \in \mathbb{D}$ y $|\lambda| = 1$; además, si $\|h\|_{\mathcal{B}} < \infty$ y $a \in \mathbb{D}$ entonces $\|h \circ \varphi_a\|_{\mathcal{B}} = \|h\|_{\mathcal{B}}$ (véase [Po92], sección 4.2), en particular $\|g\|_{\mathcal{B}} = \|\lambda Id \circ \varphi_a\|_{\mathcal{B}} = \|\lambda Id\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)|\lambda| = 1$, y $\mu(g) \leqslant 1$.
Además, de la misma fuente recién citada, $\|g\|_{\mathcal{B}} < \infty$ si y solo si existe una función h

univalente en $\mathbb{D}$ tal que $g = \log(h')$. De esta forma, $g' = \dfrac{h''}{h'}$ y $g'' = \dfrac{h'''h' - (h'')^2}{(h')^2}$, de donde

$$\begin{aligned}
\mu(g) - \|g\|_{\mathcal{B}} &= \inf_{z\in\mathbb{D}} \left| \frac{1-|z|^2}{2} \frac{g''(z)}{g'(z)} - \overline{z} \right| - \sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)|g'(z)| \\
&= \inf_{z\in\mathbb{D}} \left| \frac{1-|z|^2}{2} \left(\frac{h'''(z)}{h''(z)} - \frac{h''(z)}{h'(z)} \right) - \overline{z} \right| - \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)|h''(z)|}{|h'(z)|}.
\end{aligned}$$

De este modo, la única forma de que $\mu(g) - \|g\|_{\mathcal{B}}$ sea positiva, es cuando $g = \log(h')$ siendo h una función univalente en $\mathbb{D}$ tal que haga que sea positiva la última expresión. Queda entonces abierta la siguiente pregunta: ¿Si existirá tal función h con dichas características?.

Ahora probaremos una proposición que nos da cotas para los órdenes esféricos de una función meromorfa localmente inyectiva, que dependerán de una restricción sobre la conexión esférica de la función.

Proposición 3.3.2. *Sean $f : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función meromorfa localmente inyectiva y $\lambda \geqslant 0$. Si para todo $z \in \mathbb{D}$ que no sea un polo de f se cumple que*

$$\left| \Gamma_f^{\#}(z) - \frac{1}{1-z} \right| \leqslant \frac{\lambda}{1-|z|^2}$$

entonces

$$1 - \lambda \leqslant \mu_s(f) \leqslant \alpha_s(f) \leqslant 1 + \lambda.$$

Demostración. Supongamos que $z \in \mathbb{D}$ no es un polo de f. Entonces

$$\begin{aligned}
\left| A_f^{\#}(z) - \frac{1-\overline{z}}{1-z} \right| &= \left| (1-|z|^2)\Gamma_f^{\#}(z) - \overline{z} - \frac{1-\overline{z}}{1-z} \right| = \left| (1-|z|^2)\Gamma_f^{\#}(z) - \frac{1-|z|^2}{1-z} \right| \\
&= (1-|z|^2) \left| \Gamma_f^{\#}(z) - \frac{1}{1-z} \right| \leqslant \lambda, \qquad \text{(por hipótesis)}
\end{aligned}$$

de donde, $\left| |A_f^{\#}(z)| - \left| \dfrac{1-\overline{z}}{1-z} \right| \right| \leqslant \lambda$; es decir, $-\lambda \leqslant |A_f^{\#}(z)| - 1 \leqslant \lambda$.
Por la continuidad de $A_f^{\#}$, esta última desigualdad es válida aún en los polos de f.
Luego,

$$1 - \lambda \leqslant \inf_{z\in\mathbb{D}} |A_f^{\#}(z)| \leqslant \sup_{z\in\mathbb{D}} |A_f^{\#}(z)| \leqslant 1 + \lambda$$

□

Hasta el momento no se ha encontrado una función f que satisfaga las hipótesis de la proposición anterior para un $\lambda \in [0, 1]$, en cuyo caso la cota inferior para $\mu_s(f)$ tendría algún sentido. Sin embargo, en el siguiente ejemplo se muestran funciones que satisfacen dichas hipótesis con $\lambda > 1$.

Ejemplo 3.3.1. Sea $f(z) = \left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^a$, $z \in \mathbb{D}$, $a > 0$. Entonces

$$f'(z) = \frac{2a}{(1-z)^2}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{a-1} = \frac{2a}{(1-z^2)}\frac{(1+z)}{(1-z)}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{a-1} = \frac{2a}{1-z^2}f(z) \quad \text{y}$$

$$f''(z) = \frac{4az}{(1-z^2)^2}f(z) + \frac{2a}{1-z^2}f'(z) = \frac{4az}{(1-z^2)^2}f(z) + \frac{4a^2}{(1-z^2)^2}f(z) = \frac{4a(z+a)}{(1-z^2)^2}f(z).$$

De este modo,

$$\begin{aligned}
\left|\Gamma_f^{\#}(z) - \frac{1}{1-z}\right| &= \left|\frac{1}{2}\frac{4a(z+a)f(z)(1-z^2)}{2af(z)(1-z^2)^2} - \frac{2a}{1-z^2}\frac{f(z)\overline{f(z)}}{1+|f(z)|^2} - \frac{1}{1-z}\right| \\
&= \left|\frac{z+a}{1-z^2} - \frac{2a}{1-z^2}\frac{|f(z)|^2}{1+|f(z)|^2} - \frac{1+z}{1-z^2}\right| \\
&= \frac{1}{|1-z^2|}\left|(z+a) - \frac{2a|f(z)|^2}{1+|f(z)|^2} - (1+z)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{1-|z|^2}\left|\frac{2a|f(z)|^2}{1+|f(z)|^2} - a + 1\right| < \frac{a+1}{1-|z|^2},
\end{aligned}$$

ya que como $-\dfrac{1}{a}(1+|f(z)|^2) < |f(z)|^2 < 1+|f(z)|^2$, entonces $-2 < \dfrac{2a|f(z)|^2}{1+|f(z)|^2} < 2a$, y por lo tanto $-a-1 < \dfrac{2a|f(z)|^2}{1+|f(z)|^2} - a + 1 < a+1$; esto es, $\left|\dfrac{2a|f(z)|^2}{1+|f(z)|^2} - a + 1\right| < a+1$. Luego, por la proposición anterior $\alpha_s(f) \leqslant a+2$.

♦

Como los polos de una función meromorfa f son aislados, si f está definida en $\mathbb{D}$, el conjunto $\{z \in \mathbb{D}/f(z) \in \mathbb{C}\}$ no puede estar apartado de $\partial\mathbb{D}$, en el sentido de que debe existir una sucesión $\{z_n\}$ en $\mathbb{D}$ tal que $|z_n| \to 1$ cuando $n \to \infty$ y $f(z_n) \in \mathbb{C}$ para todo n, pues de lo contrario existiría un $r \in (0,1)$ tal que $f(z) = \infty$ para todo $z \in \mathbb{D}$ con $|z| > r$, lo que contradice la afirmación hecha al comienzo. Podemos considerar entonces a $f'(z)$ estando z arbitrariamente cerca de $\partial\mathbb{D}$, al sacar del dominio los polos de f.

Teorema 3.3.3. *Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función meromorfa localmente inyectiva y sea Ω el conjunto de puntos en $\mathbb{D}$ que no son polos de f. Si se tiene en Ω que $f'(z) = o(\lambda_{\mathbb{D}}(z))$ cuando $|z| \to 1$, entonces $0 \leqslant \mu_s(f) \leqslant 1 \leqslant \alpha_s(f) \leqslant +\infty$.*

Demostración. Como para todo $z \in \Omega$, $f(z) \in \mathbb{C}$, entonces $\Gamma_f^{\#}(z) = \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(z)}{f'(z)} - \dfrac{f'(z)\overline{f(z)}}{1+|f(z)|^2}$, de donde, $\Gamma_f^{\#}(z) + \dfrac{f'(z)\overline{f(z)}}{1+|f(z)|^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(z)}{f'(z)}$, y por lo tanto, $\dfrac{\Gamma_f^{\#}(z)}{f'(z)} + \dfrac{\overline{f(z)}}{1+|f(z)|^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(z)}{f'(z)^2}$. Pero al ser f meromorfa localmente inyectiva en $\mathbb{D}$ y no tener polos en Ω, f resulta ser localmente univalente en Ω, y por lo tanto $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. En consecuencia, $\dfrac{1}{2}\dfrac{f''}{(f')^2}$ es analítica en Ω, lo que implica por la ecuación anterior que $g := \dfrac{\Gamma_f^{\#}}{f'} + \dfrac{\overline{f}}{1+|f|^2}$

también es analítica en Ω, siendo Ω claramente denso en $\mathbb{D}$.
Luego, así como en el ejemplo 2.4.2., $g(z)$ no tiende a ∞ cuando $|z| \to 1$, y por lo tanto existe una sucesión $\{z_n\}$ en Ω con $|z_n| \to 1$ tal que $g(z_n)$ permanece acotado.
Sea $M > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|g(z_n)| \leqslant M - 1$, y nótese que $\left| \dfrac{\overline{f(z)}}{1+|f(z)|^2} \right| \leqslant 1$; desde luego, si $|f(z)| \leqslant 1$ obviamente $|f(z)| \leqslant 1 + |f(z)|^2$, y si por el contrario $|f(z)| > 1$ entonces $|f(z)| < |f(z)|^2 < 1 + |f(z)|^2$. De esta forma se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{\Gamma_f^{\#}(z_n)}{f'(z_n)} \right| - 1 \leqslant \left| \frac{\Gamma_f^{\#}(z_n)}{f'(z_n)} \right| - \left| \frac{\overline{f(z_n)}}{1+|f(z_n)|^2} \right| \leqslant \left| \frac{\Gamma_f^{\#}(z_n)}{f'(z_n)} + \frac{\overline{f(z_n)}}{1+|f(z_n)|^2} \right| \leqslant M - 1,$$

y por ende $|\Gamma_f^{\#}(z_n)| \leqslant M|f'(z_n)|$. En este orden de ideas, se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$|A_f^{\#}(z_n)| = |(1-|z_n|^2)\Gamma_f^{\#}(z_n) - \overline{z_n}| \leqslant (1-|z_n|^2)|\Gamma_f^{\#}(z_n)| + |\overline{z_n}| \leqslant (1-|z_n|^2)M|f'(z_n)| + |\overline{z_n}|,$$

y como por hipótesis $(1-|z|^2)|f'(z)| \to 0$ cuando $|z| \to 1$ se concluye que

$$\begin{aligned} \mu_s(f) &\leqslant \lim_{n\to+\infty} |A_f^{\#}(z_n)| \leqslant \lim_{n\to+\infty} [(1-|z_n|^2)M|f'(z_n)| + |\overline{z_n}|] \\ &= M \lim_{n\to+\infty} (1-|z_n|^2)|f'(z_n)| + \lim_{n\to+\infty} |\overline{z_n}| = M \cdot 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Además, de [MaMi92] tenemos que $\alpha_s(f) \geqslant 1$; y así, finalmente,

$$0 \leqslant \mu_s(f) \leqslant 1 \leqslant \alpha_s(f) \leqslant \infty.$$

□

Bibliografía

[Ar96] N. Arango, Funciones convexas de tipo acotado, Tesis de Especialización, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, 1996.

[Ar04] H. Arbeláez, Una familia de funciones meromorfas definidas a partir de un criterio de Nehari, Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, 2004.

[Ar11] H. Arbeláez, Familias esférica e hiperbólicamente invariantes, Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, 2011.

[Be83] Alan F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups,* Springer New York, 1983.

[BeMi07] A. Beardon and D. Minda, *The Hyperbolic Metric and Geometric Function Theory,* Quasiconformal Mappings and their Applications, S. Ponnusamy, T. Sugawa and M. Vuorinen (Eds.) (2007) Narosa Publishing House, 9-56.

[ChOs93] M. Chuaqui and B. Osgood, Sharp distortion-theorems associated with the schwarzian derivate., Journal of the London Mathematical Society-Second Series, vol.48(208): 289-298, 1993.

[CrPo07] L. Cruz and Ch. Pommerenke, On concave univalent functions, Complex Variables and Elliptic Equations, 52 (2007), 153-159.

[Di89] S. Dineen, *The Schwarz Lemma,* Oxford University Press, 1989.

[Du83] P. Duren, *Univalent Functions,* Grundlehren Math. Wiss. 259, Springer, New York, 1983.

[GePo84] F. W. Gehring and Ch. Pommerenke, *On the Nehari univalence criterion and quasicircles,* Comment. Math. Helv. 59 (1984) 226-242.

[GrKo03] I. Graham and G. Kohr, *Geometric function theory in one and higher dimensions,* Marcel Dekker, Inc., 2003

[Le87] O. Lehto, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces,* Springer-verlag, 1987.

[MaMi92] W. Ma and D. Minda, Spherical linear invariance and uniform local spherical convexity, Current Topics in Analytic Function Theory, World Scientific Publishing, River Edge, (1992), 148-170.

[MaMi95] W. Ma and D. Minda, Hyperbolic linear invariance and hyperbolic k-convexity, J. Austral. Math. Soc. Series A (58) (1995), 73-93.

[MePo00] D. Mejía and Ch. Pommerenke, On spherically convex univalent functions, Michigan Math. J. (47) (2000), 163-172.

[Po64] Ch. Pommerenke, Linear-invariante Familien analytischer Funktionen I, Math. Annalen 155 (1964), 108-154.

[Po92] Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Springer, Berlin 1992.

[Po08] Ch. Pommerenke, On the lower order of locally univalent functions, Computational Methods and Function Theory 8 N. 2, (2008), 373-384.

[RaSt91] M. Rao and H. Stetkaer, *Complex Analysis: An Invitation*, World Scientific, 1991.

[Si63] G. Simmons, *Introduction to Topology and Modern Analysis,* Mac. Graw. Hill., 1963.