

# Un modelo del tránsito de los estudiantes a través del plan de estudios

Oscar Duarte  
Vicedecanatura Académica  
Facultad de Ingeniería

13 de diciembre de 2013

## Resumen

Este documento presenta un modelo matemático del tránsito de los estudiantes de un programa curricular a través del plan de estudios. A partir de un modelo simplificado del plan de estudios se modelan los fenómenos de cancelación de asignaturas, repitencia, aprobación, ingresos, traslados (y dobles titulaciones), pérdida de calidad de estudiante y graduación. El modelo ha sido validado con datos históricos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia. El análisis del modelo y varias simulaciones permiten entender los efectos de los fenómenos modelados sobre el número total de estudiantes de un programa curricular y sobre los tiempos de graduación. Utilizando el modelo se logra también una explicación parcial del incremento en el número de estudiantes de la facultad de ingeniería registrado desde el año 2009.

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. El modelo matemático</b>	<b>4</b>
2.1. Modelo reducido . . . . .	7
<b>3. Validación del modelo</b>	<b>7</b>
3.1. Información primaria . . . . .	11
3.2. Obtención de los parámetros y variables de entrada . . . . .	12
3.2.1. Tasas de aprobación . . . . .	12
3.2.2. Tasas de cancelación . . . . .	12
3.2.3. Tasas de pérdida de calidad de estudiante . . . . .	13
3.2.4. Ingresos . . . . .	13
3.2.5. Traslados . . . . .	13
3.2.6. Condiciones iniciales . . . . .	14
3.2.7. Número real de estudiantes . . . . .	14

3.2.8. Condiciones iniciales para la facultad . . . . .	14
3.2.9. Tasas de aprobación para la facultad . . . . .	14
3.2.10. Tasas de cancelación para la facultad . . . . .	15
<b>4. Análisis del modelo reducido</b>	<b>15</b>
4.1. Evolución del número de estudiantes . . . . .	15
4.1.1. Ejemplo . . . . .	16
4.2. Número esperado de estudiantes . . . . .	16
4.2.1. Caso sin pérdida de calidad de estudiante . . . . .	17
4.2.2. Caso de referencia . . . . .	17
4.3. Efecto de los parámetros sobre el número esperado de estudiantes	17
4.3.1. Valor esperado y valor de referencia . . . . .	18
4.4. Tiempos de graduación . . . . .	19
4.4.1. Indicadores de los tiempos de graduación . . . . .	20
4.4.2. Ejemplo . . . . .	21
4.5. Efecto de los parámetros sobre los tiempos de graduación . . . . .	21
<b>5. Análisis del incremento de estudiantes de la Facultad de Ingeniería</b>	<b>23</b>
<b>6. Conclusiones</b>	<b>25</b>
<b>A. Demostraciones</b>	<b>26</b>
A.1. Obtención del modelo detallado . . . . .	26
A.1.1. Cambio de parámetros . . . . .	29
A.2. Obtención del modelo reducido . . . . .	29
A.3. Función de transferencia del número total de estudiantes . . . . .	30
A.4. Valor de estado estacionario ante un escalón en el modelo mínimo	31
A.4.1. Caso sin pérdida de la calidad de estudiante . . . . .	31
A.4.2. curvas de $y_{ee}$ constante . . . . .	31
A.5. Respuesta al impulso de la graduación en el modelo reducido . . . . .	32
A.5.1. Tiempo medio de graduación . . . . .	34
<b>B. Tablas de datos</b>	<b>34</b>
B.1. Parámetros de simulación para validación . . . . .	34
B.2. Resultados de la simulación para validación . . . . .	39

## 1. Introducción

La Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia ha tenido un crecimiento continuado en su oferta de servicios académicos. La figura 1 muestra la evolución del número de programas ofertados por la facultad desde 1980. Relacionado con el crecimiento de la oferta académica está el crecimiento del número de estudiantes activos. La figura 2 muestra la evolución del número de estudiantes de la Facultad de Ingeniería desde el 2009 al 2013. En la figura 2a se observa un crecimiento de aproximadamente 1000 estudiantes en 4 años.

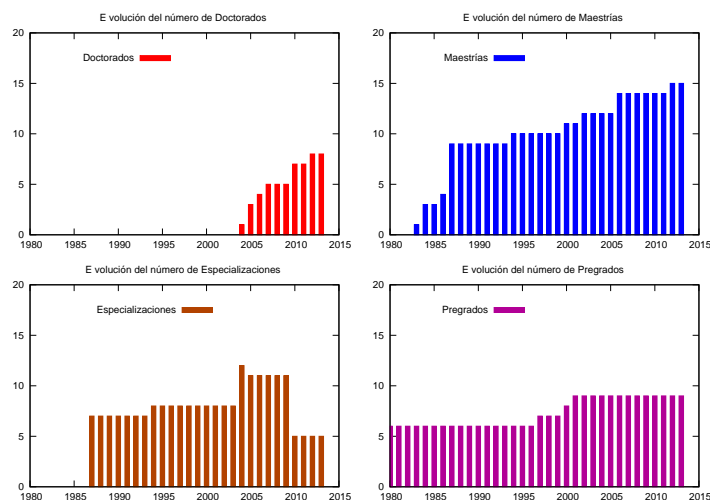


Figura 1: Evolución del número de programas académicos ofertados por la Facultad de Ingeniería.

La figura 2b muestra que este crecimiento se debe mayoritariamente al aumento en el número de estudiantes de Pregrado.

Este crecimiento trae aparejado una presión sobre la demanda de cursos, espacios de trabajo, docentes, etc. que la facultad debe cubrir. Por esta razón, se hace necesario contar con un modelo que ayude a predecir cuál será a futuro la demanda a cubrir.

Por otra parte, cinco años después de implementada la Reforma Académica que se plasmó en el Acuerdo 033 de 2008, es importante evaluar sus efectos. Una de las varias perspectivas desde la que se debe evaluar es determinar si ha tenido o no impacto en el número de estudiantes y sus tiempos de permanencia en la universidad.

Este trabajo presenta un modelo matemático del tránsito de los estudiantes de un programa curricular a través del plan de estudios. Se ha diseñado para intentar entender el comportamiento mostrado en la figura 2. El modelo permite simular el impacto de varios aspectos académicos que cambiaron en la reforma del 2008. El modelo se ha construido utilizando las herramientas del modelamiento, análisis y simulación de sistemas dinámicos discretos. Este documento presenta los siguientes resultados obtenidos:

- Un modelo que cuantifica el efecto sobre el *número de estudiantes* y el *tiempo de graduación* de:
  - La tasa de cancelación.
  - La tasa de aprobación.
  - La tasa de pérdida de calidad de estudiantes.

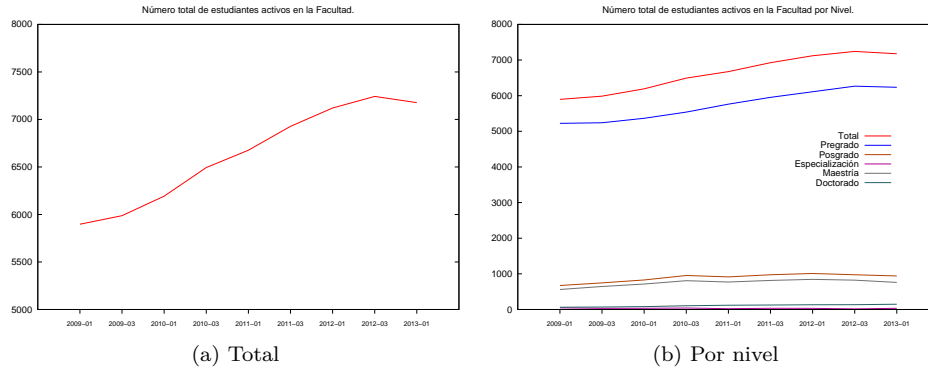


Figura 2: Evolución del número de estudiantes en la Facultad de Ingeniería

- Los ingresos.
- Los traslados (y las dobles titulaciones).
- Los parámetros asociados a ese modelo ajustados para el caso de la Facultad de Ingeniería.
- Una explicación parcial ( $\approx 85\%$ ) de las causas del aumento del número de estudiantes en pregrado de la Facultad.

El documento está organizado de la siguiente forma: la sección 2 muestra el modelo matemático desarrollado y un modelo reducido; la sección 3 presenta el ejercicio de validación del modelo con datos históricos reales asociados a la Facultad de Ingeniería; en la sección 4 se muestran varios ejercicios de análisis matemático y simulación numérica sobre el modelo reducido que permiten comprender la dinámica de los fenómenos modelados; en la sección 5 se utiliza el modelo para buscar las causas del crecimiento del número de estudiantes de pregrado que se muestran en la figura 2; las conclusiones se consignan en la sección 6.

## 2. El modelo matemático

Los planes de estudio de pregrado en la Facultad de Ingeniería constan de aproximadamente 60 asignaturas entre obligatorias, optativas y de libre elección. Los planes de estudio se organizan en mallas curriculares que distribuyen esas asignaturas a lo largo de 10 semestres académicos. El modelo matemático parte de una simplificación considerable de esos planes de estudio.

La figura 3 muestra el plan de estudios del modelo propuesto. Se trata de un plan de estudios de  $n$  semestres académicos, con una única asignatura en cada semestre, que es prerrequisito de la asignatura del siguiente semestre. Este

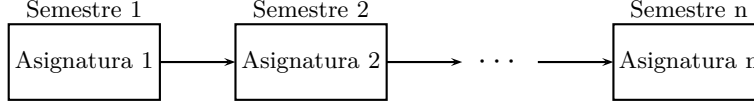


Figura 3: Plan de estudios del modelo mínimo

modelo puede interpretarse como la ‘columna vertebral’ de los planes de estudio reales.

Sobre el de estudios propuesto se formula el siguiente comportamiento dinámico que se ilustra en la figura 4:

- D.1. Se utiliza el subíndice  $j$  para diferenciar cada una de las  $n$  asignaturas del plan de estudio. Debido a que en cada semestre hay una única asignatura, el subíndice  $j$  también sirve para identificar el semestre.
- D.2. Se utiliza la variable  $k$  para referirse al periodo académico.  $k$  es una variable discreta que puede asimilarse a la secuencia de periodos (por ejemplo ‘2009-01’, ‘2009-03’, ‘2010-01’, etc.) o a los enteros ( $k = 1, 2, \dots$ )
- D.3. El número de estudiantes que inscriben la asignatura  $j$  en el periodo académico  $k$  se denota por  $x_j(k)$ .
- D.4. Al pasar de un periodo académico al siguiente, algunos estudiantes pasan a la asignatura del semestre siguiente; algunos estudiantes no lo logran, bien por que cancelan, o porque no aprueban (ver figura 4):

$$x_{j+1}(k+1) = x_{ap_j}(k) + x_{can_{j+1}}(k) + x_{nap_{j+1}}(k) + t_j(k) \quad (1)$$

En donde

- $x_{ap_j}(k)$ : Número de estudiantes que aprobaron la asignatura  $j$  en el periodo  $k$ .
- $x_{can_{j+1}}(k)$ : Número de estudiantes que cancelaron la asignatura  $j+1$  en el periodo  $k$ .
- $x_{nap_{j+1}}(k)$ : Número de estudiantes que inscribieron y que no cancelaron ni aprobaron la asignatura  $j+1$  en el periodo  $k$  y que tampoco perdieron la calidad de estudiante.
- $t_j(k)$ : Número de estudiantes que ingresan al programa por traslado o por autorización de doble titulación. Estos estudiantes inician estudios en el periodo  $(k+1)$  inscribiendo la asignatura  $j$ .

- D.5. Para el semestre 1 la dinámica se representa por:

$$x_1(k+1) = x_{can_1}(k) + x_{nap_1}(k) + u(k) + t_j(k) \quad (2)$$

En donde

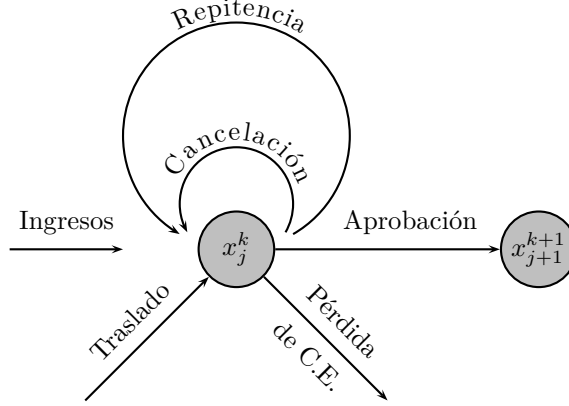


Figura 4: Diagrama de flujo para el estado  $x_j(k)$

- $u(k)$ : Número de admitidos en el periodo  $k$  que inician estudios en el periodo  $(k + 1)$

D.6. Se definen los siguientes parámetros:

- $\alpha_j(k)$  : tasa de aprobación para la asignatura  $j$  en el periodo  $k$ .
- $\beta_j(k)$  : tasa de cancelación para la asignatura  $j$  en el periodo  $k$ .
- $\sigma_j(k)$  : tasa de pérdida de calidad de estudiante para el semestre  $j$  en el periodo  $k$ .

D.7. Los términos de la derecha en la ecuación 1 pueden entonces calcularse así:

$$\begin{aligned}
 x_{ap_j}(k) &= x_j(k)(1 - \beta_j(k))\alpha_j(k)(1 - \sigma_{j+1}(k)) \\
 x_{can_{j+1}}(k) &= x_{j+1}(k)\beta_{j+1}(k)(1 - \sigma_{j+1}(k)) \\
 x_{nap_{j+1}}(k) &= x_{j+1}(k)(1 - \beta_{j+1}(k))(1 - \alpha_{j+1}(k))(1 - \sigma_{j+1}(k))
 \end{aligned} \tag{3}$$

D.8. Se denota por  $y_j(k)$  al número de estudiantes que inscriben una asignatura de un semestre menor o igual a  $j$  en el periodo  $k$ .

D.9. Se denota por  $y_T(k)$  al número total de estudiantes del programa en el periodo  $k$ , es decir  $y_T(k) = y_n(k)$

D.10. Se denota por  $g(k)$  al número de estudiantes graduados al terminar el periodo académico  $k$

Con esas condiciones, se puede derivar un modelo dinámico discreto lineal variante en el tiempo (ver sección A.1):

$$\begin{aligned} X(k+1) &= A(k)X(k) + B(k)U(k) \\ Y(k) &= C(k)X(k) + D(k)U(k) \end{aligned} \quad (4)$$

## 2.1. Modelo reducido

Con el propósito de facilitar el análisis del modelo, se introducen dos simplificaciones:

**Invarianza en el tiempo:** todos los parámetros del modelo permanecen constantes a lo largo del tiempo.

**Homogeneidad:** los parámetros del modelo son iguales para las  $n$  asignaturas del plan de estudio

Estas simplificaciones implican:

$$\begin{aligned} \alpha_j(k) &= \alpha \quad \forall j, k \\ \beta_j(k) &= \beta \quad \forall j, k \\ \sigma_j(k) &= \sigma \quad \forall j, k \end{aligned} \quad (5)$$

El modelo reducido resulta ser un modelo lineal invariante en el tiempo:

$$\begin{aligned} X(k+1) &= AX(k) + BU(k) \\ Y(k) &= CX(k) + DU(k) \end{aligned} \quad (6)$$

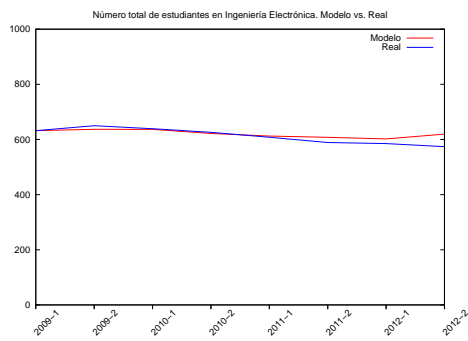
Para un programa de 10 semestres, estudiado durante 8 periodos, esta simplificación reduce el número de parámetros de  $10 * 8 * 3 = 240$  a sólo 3. En este documento se utilizará el modelo completo en los ejercicios de validación y uso que involucran datos de la facultad de ingeniería en las secciones 3 y 5. El modelo reducido se utilizará en los ejercicios de análisis de la sección 4. Los dos modelos pueden distinguirse además por el uso o no de los subíndices y la variabilidad en el tiempo  $_j(k)$  en los parámetros.

## 3. Validación del modelo

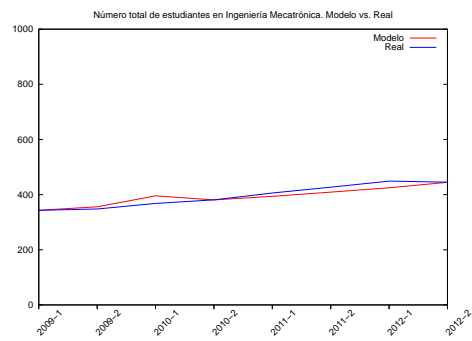
Para validar el modelo se realizaron dos procedimientos. El primero de ellos con información de tres carreras, y el segundo con información de la Facultad en su conjunto. Los resultados se muestran en la figura 5.

El procedimiento para las tres carreras fue el siguiente:

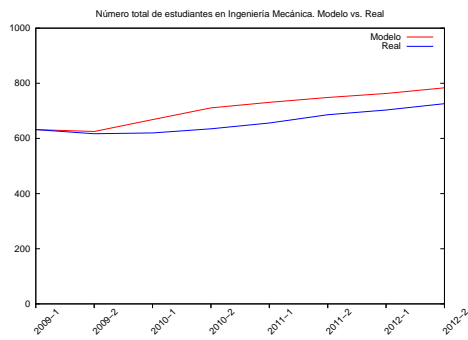
Vc.1. Se seleccionaron algunas carreras de la facultad de ingeniería como espacios de validación.



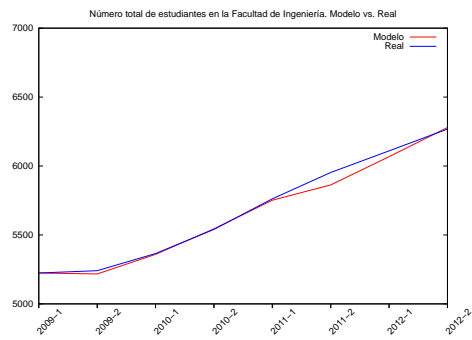
(a) Ingeniería Electrónica



(b) Ingeniería Mecatrónica



(c) Ingeniería Mecánica



(d) Facultad

Figura 5: Validación mediante número total de estudiantes



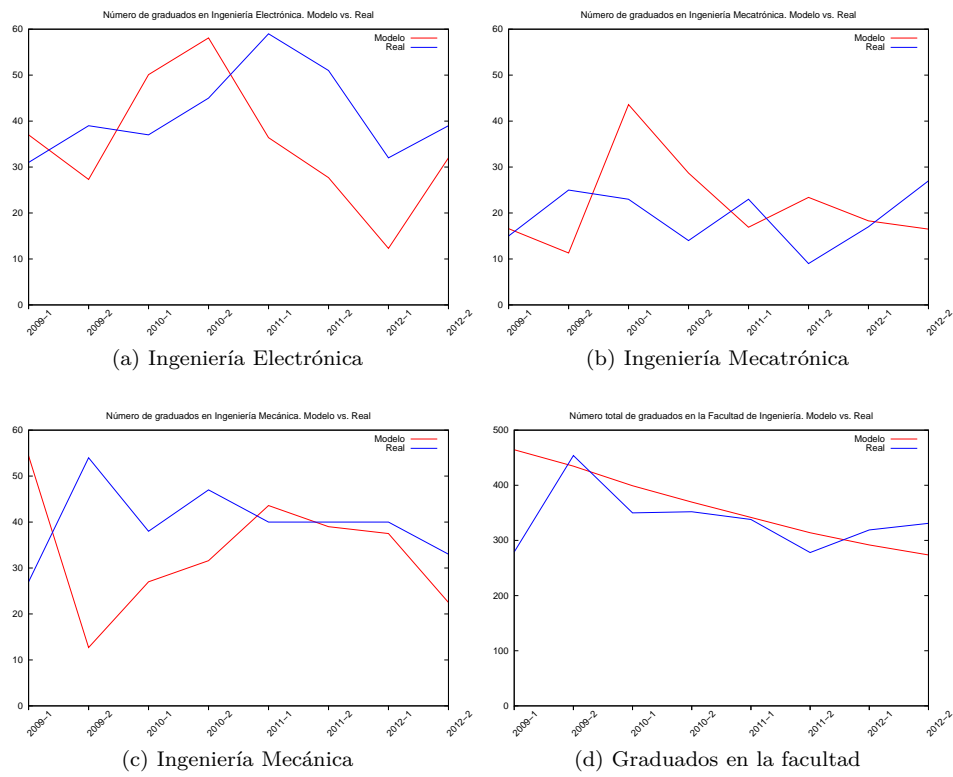


Figura 6: Validación mediante número de graduados

- Vc.2. Para cada una de las carreras se seleccionaron las asignaturas del plan de estudios vigente que podrían representar de mejor manera el modelo simplificado de la figura 3. En esta labor se utilizó el acompañamiento de los coordinadores curriculares de las carreras seleccionadas. El resultado se muestra en el cuadro 1.
- Vc.3. Se diseñaron algunas bases de datos (sobre un motor de bases de datos `mysql`) para organizar la información primaria suministrada por la Oficina de Registro (ver sección 3.1).
- Vc.4. Se procesó la información primaria para estimar los parámetros, las condiciones iniciales y las variables de entrada del modelo, tal como se detalla en la sección 3.2.
- Vc.5. Se implementó el modelo matemático en una herramienta de simulación (`scilab`).
- Vc.6. Se corrió el modelo con los parámetros y variables obtenidas en el paso Vc.4. para estimar la evolución del número total de estudiantes de cada carrera desde el periodo 2009-1 al periodo 2013-1.
- Vc.7. Se comparó la evolución del número total de estudiantes estimada por el modelo con la evolución real sucedida en el mismo periodo. La comparación se presenta de forma gráfica en las figuras 5a, 5c y 5c.
- Vc.8. Se comparó la evolución del número total de graduados estimado por el modelo con la evolución real sucedida en el mismo periodo. La comparación se presenta de forma gráfica en las figuras 6a, 6c y 6c.
- Vc.9. Los parámetros de simulación se muestran en los cuadros 3, 4 y 5. Los resultados de las simulaciones se presentan en los cuadros 7, 8 y 9.

Por su parte, el procedimiento de validación para la facultad en su conjunto fue el siguiente:

- Vf.1. Se procesó la información primaria para estimar la tasa de pérdida de calidad de estudiante, las condiciones iniciales y las variables de entrada del modelo, tal como se detalla en la sección 3.2.
- Vf.2. Debido a que las tasas de cancelación y aprobación, así como las condiciones iniciales están asociadas a asignaturas específicas, y que en el proceso de validación para la facultad no se han escogido asignaturas específicas, estos parámetros se estimaron de forma diferente. El procedimiento se explica en las secciones 3.2.8, 3.2.9 y 3.2.10.
- Vf.3. Se corrió el modelo con los parámetros y variables obtenidos en el paso Vf.1. y Vf.2. para estimar la evolución del número total de estudiantes de la facultad desde el periodo 2009-1 al periodo 2013-1.

Sem.	Ingeniería Electrónica	Ingeniería Mecánica	Ingeniería Mecatrónica
1	Cálculo diferencial	Cálculo diferencial	Ingeniería y desarrollo sostenible
2	Cálculo integral	Álgebra lineal	Taller de ingeniería electrónica
3	Cálculo en varias variables	Principios de estática	Principios de estática
4	Campos electromagnéticos	Principios de dinámica	Principios de dinámica
5	Electrónica digital 1	Resistencia de materiales	Resistencia de materiales
6	Líneas y antenas	Electrónica básica	Diseño mecatrónico
7	Comunicaciones	Señales y sistemas I	Microcontroladores
8	Conversión electromagnética	Análisis de sistemas dinámicos	Robótica
9	Taller de proyectos interdisciplinarios	Fundamentos de control	Automatización de procesos de manufactura
10	Trabajo de grado	Trabajo de grado	Trabajo de grado

Cuadro 1: Asignaturas seleccionadas como base para el plan de estudios simplificado de la figura 3

- Vf.4. Se comparó la evolución del número total de estudiantes estimada por el modelo con la evolución real sucedida en el mismo periodo. La comparación se presenta de forma gráfica en la figura 5d.
- Vf.5. Se comparó la evolución del número total de graduados estimado por el modelo con la evolución real sucedida en el mismo periodo. La comparación se presenta de forma gráfica en la figura 6d.
- Vf.6. Los parámetros de simulación se muestran en el cuadro 6. Los resultados de la simulación se presentan en el cuadro 10.

Como resultado de los procesos de validación puede concluirse que el modelo es capaz de reproducir adecuadamente el comportamiento del número total de estudiantes, especialmente para los datos relativos a la facultad en su conjunto. El modelamiento del número de graduados es menos preciso, aunque las tendencias si se ven reflejadas en el modelo; de nuevo, la predicción del número de graduados de la facultad en su conjunto es mejor que la de cada programa por separado.

Una de las razones por las que es más difícil modelar el número de graduados que el número total de estudiantes radica en la dificultad de estimar adecuadamente las condiciones iniciales, es decir, cómo distribuir el número total de estudiantes en el periodo académico inicial dentro de los  $n$  semestres ( $X(0)$ ).

### 3.1. Información primaria

Para la estimación de los parámetros y variables de entrada se utilizó la siguiente información primaria:

- I.1. **Reporte de estudiantes activos y bloqueados.** Consiste en una tabla generada por la Oficina de Registro con información sobre cada estudiante de la Facultad de ingeniería. En ella se reporta la fecha de ingreso al programa curricular, los cambios de estado (bloques del historial académico) y las causas de los mismos. La tabla incluye los cambios de estado desde el periodo 2006-1 al periodo 2013-1. El número de registros en la tabla es de 16297.
- I.2. **Reporte de calificaciones.** Consiste en una colección de tablas generadas por la Oficina de Registro. En ellas se consignan las calificaciones finales obtenidas por todos los estudiantes de la facultad de ingeniería en todas las asignaturas cursadas desde el periodo 2004-1 al periodo 2012-3. El número de registros es de 664115.
- I.3. **Reporte de cancelaciones.** Consiste en una colección de tablas generadas por la Oficina de Registro en la que se reportan las cancelaciones de asignaturas previamente inscritas. Existen registros desde el periodo 2004-2 hasta el periodo 2012-3. El número total de registros es de 61781.
- I.4. **Reporte de admitidos.** Consiste en una colección de tablas generadas por la Dirección Nacional de Admisiones que contiene el número de admitidos por carrera. Se tienen registros desde el periodo 2007-I hasta el periodo 2013-3.

### 3.2. Obtención de los parámetros y variables de entrada

#### 3.2.1. Tasas de aprobación

A partir del reporte de calificaciones se calculó la tasa de aprobación para cada una de las asignaturas del cuadro 1 desde el periodo 2009-1 al periodo 2013-1. En cada caso sólo se consideraron los registros correspondientes a estudiantes de la carrera en estudio. La tasa de aprobación de la asignatura  $j$  en el periodo  $k$  se estimó entonces así:

$$\alpha_j(k) = \frac{\text{Número de estudiantes con nota aprobatoria}}{\text{Número de estudiantes con nota reportada}} \Big|_{\text{asignatura}=j \text{ periodo}=k}$$

#### 3.2.2. Tasas de cancelación

A partir del reporte de cancelaciones se calculó la tasa de cancelación para cada una de las asignaturas del cuadro 1 desde el periodo 2009-1 al periodo 2013-1. En cada caso sólo se consideraron los registros correspondientes a estudiantes de la carrera en estudio. La tasa de cancelación de la asignatura  $j$  en el periodo  $k$  se estimó entonces así:

$$\beta_j(k) = \frac{\text{Número de cancelaciones}}{\text{Número de estudiantes con nota reportada}} \Big|_{\text{asignatura}=j \text{ periodo}=k}$$

### 3.2.3. Tasas de pérdida de calidad de estudiante

A partir del reporte de estudiantes activos y bloqueados se calculó  $n_j(k)$  el número de estudiantes activos en cada carrera con  $1, 2, 3 \dots, n$  semestres de antigüedad. Este cálculo se realizó desde el periodo 2008-1 al periodo 2013-1. A partir de allí se calculó la tasa de pérdida de calidad de estudiante:

$$p_j(k) = \frac{n_j(k) - n_{j+1}(k+1)}{n_j(k)}$$

El número de datos disponibles para cada valor de  $j$  es distinto. Considérese por ejemplo el caso en que  $j = 10$ : la información del número de estudiantes con 10 semestres de antigüedad, sólo puede obtenerse en el periodo 2013-1 y corresponde a aquellos estudiantes que ingresaron en el periodo 2008-1. En cambio, para  $j = 9$  hay dos datos: en el periodo 2013-1 son los estudiantes que ingresaron en 2008-2, y en el periodo 2012-3 son los estudiantes que ingresaron en 2008-1.

Por otra parte, deben incluirse en esta estimación los casos de pérdida de calidad de estudiante por causas distintas a la culminación exitosa del plan de estudios. Como resultado, el número de valores de  $p_j(k)$  que se pueden calcular no es el mismo para todos los valores de  $j$ . Si denotamos por  $m_j$  este valor tenemos:

$$m_j = 11 - j$$

Por esta razón se decidió estimar la tasa de pérdida de calidad de estudiante como el valor medio de los valores disponibles:

$$\sigma_j(k) = \frac{\sum^k p_j(k)}{m_j}$$

### 3.2.4. Ingresos

A partir del reporte de estudiantes activos y bloqueados se calculó  $n_{1_{ex}}(k+1)$  el número de estudiantes activos en cada carrera con un semestre de antigüedad en el periodo  $k+1$ , que ingresaron por examen de admisión. Este número se interpretó como el número de admitidos en el periodo  $k$  para iniciar estudios en el periodo  $(k+1)$ , es decir

$$u(k) = n_{1_{ex}}(k+1)$$

### 3.2.5. Traslados

A partir del reporte de estudiantes activos y bloqueados se calculó  $n_{1_{tras}}(k+1)$  el número de estudiantes activos en cada carrera con un semestre de antigüedad en el periodo  $k+1$ , que ingresaron por una condición diferente a examen de admisión (traslado, doble titulación). Este número se interpretó como el número de traslados en el periodo  $k$  para iniciar estudios en el periodo  $(k+1)$ , en el semestre número 5.

$$t_j(k) = \begin{cases} n_{1_{tras}}(k+1) & \text{si } j = 5 \\ 0 & \text{si } j \neq 5 \end{cases}$$

### 3.2.6. Condiciones iniciales

A partir del reporte de calificaciones se calculó  $\tilde{x}_j(0)$  el número de estudiantes que tomaron cada una de las asignaturas del cuadro 1 en el periodo 2009-1 ( $k = 0$ ). Por otra parte, a partir del reporte de estudiantes activos y bloqueados se calculó  $N(0)$  el número de estudiantes activos en el periodo 2009-1 para cada carrera.

Para la estimación de  $x_j(0)$  se distribuyó el total  $N(0)$  en los  $n$  semestres, manteniendo las proporciones definidas por el conjunto de valores  $\tilde{x}_1(0), \tilde{x}_2(0), \dots, \tilde{x}_n(0)$

$$x_j(0) = \frac{\tilde{x}_j(0)}{\sum_{h=1}^n \tilde{x}_h(0)} N(0)$$

### 3.2.7. Número real de estudiantes

A partir del reporte de estudiantes activos y bloqueados se calculó  $N(k)$ , el número de estudiantes activos en el periodo  $k$  para cada carrera.

### 3.2.8. Condiciones iniciales para la facultad

A partir del reporte de estudiantes activos y bloqueados se calculó  $N_F(0)$  el número de estudiantes activos en el periodo 2009-1 de la Facultad. Esta cantidad se distribuyó en los 10 semestres de tal manera que hubiese más estudiantes en los semestres inferiores que en los superiores. Se utilizó una relación geométrica de la forma

$$x_{j+1}(0) = m x_j(0) \quad 0 \leq m \leq 1$$

El valor de la condición inicial para el primer semestre se obtiene así

$$X_1(0) = N_F(0) * \frac{1 - m}{1 - m^n}$$

$n$  es el número de semestres (10) y el valor de  $m$  se seleccionó en 0.05

### 3.2.9. Tasas de aprobación para la facultad

Las tasas de aprobación se estimaron de tal manera que la probabilidad de aprobar un curso de los semestres superiores fuera mayor que la de los semestres inferiores. Se utilizó una relación geométrica sobre las tasas de repitencia ( $1 - \alpha_j(k)$ ). Las tasas de repitencia se mantienen constantes en el tiempo:

$$\alpha_{j+1}(k) = 1 - m_\alpha (1 - \alpha_j(k)) \quad 0 \leq m_\alpha \leq 1 \quad \forall k$$

El valor seleccionado para  $\alpha_1(k)$  fue de  $= 0.65$ , lo que representa la tasa de aprobación de la asignatura *Cálculo diferencial*. El valor de  $m_\alpha$  se seleccionó en  $= 0.5$ , lo que significa que la tasa de repitencia disminuye a la mitad en cada semestre.

### 3.2.10. Tasas de cancelación para la facultad

La tasa de cancelación en la facultad ha venido creciendo desde el periodo 2009-01 en forma sostenida. Por esta razón la tasa de cancelación se modeló siguiendo una relación afín en función del tiempo:

$$\beta_j(k) = \beta_0 + m_b k \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1 \quad m > 0$$

Al efectuar un ajuste de línea recta sobre las tasas de cancelación desde el periodo 2009-1 al 2012-3, los valores que resultan son  $\beta_0 = 0.11$  y  $m_\beta = 0.03$

## 4. Análisis del modelo reducido

Utilizando el modelo reducido, se formulan las siguientes preguntas de análisis:

- P.1. ¿Cómo evoluciona el número de estudiantes de un programa si el ingreso es constante?
- P.2. ¿Cuál es el número esperado de estudiantes de un programa si el ingreso es constante?
- P.3. ¿Qué efecto tienen los parámetros del modelo sobre el número esperado de estudiantes?
- P.4. ¿Cuántos estudiantes se graduarán y en qué tiempo lo harán?
- P.5. ¿Qué efecto tienen los parámetros del modelo sobre el número de graduados y los tiempos de graduación?

Estas preguntas se abordan en las secciones siguientes:

### 4.1. Evolución del número de estudiantes

Para analizar la evolución del número de estudiantes se considera el caso en que no hay traslados ( $t_j(k) = 0$ ) y los ingresos son constantes ( $u(k) = u$ ). En otras palabras, se realiza un análisis de respuesta a una entrada escalón en los ingresos.

Si se considera como salida del sistema a  $y_T(k)$ , el número total de estudiantes del sistema, función de transferencia  $F_T(z)$  puede definirse como:

$$F_T(z) = \frac{Y_T(z)}{U(z)}$$

La expresión de  $F_T(z)$  corresponde a (ver sección A.3)

$$F_T(z) = \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^n \frac{\gamma^j}{(z - \delta)^j}$$

El sistema tiene un único polo  $\delta$  que aparece  $n$  veces en la función de transferencia. La estabilidad del sistema depende entonces del valor de  $\delta$ . Tanto  $\alpha$  como  $\beta$  son valores en el intervalo  $[0, 1]$  por tanto

$$\begin{aligned} 0 &\leq \gamma = (1 - \beta)\alpha &\leq 1 \\ 0 &\leq \delta = 1 - \gamma &\leq 1 \end{aligned}$$

Como  $\delta$  está en el intervalo  $[0, 1]$  el sistema es estable. En el caso frontera en que  $\delta = 1$ , el sistema será marginalmente estable. Para que esto suceda se necesita que  $\gamma = 0$ , es decir, se requiere que se satisfaga una de las siguientes condiciones:

- $\beta = 1$ , lo que significa que todos los estudiantes cancelan todas las asignaturas.
- $\alpha = 0$ , lo que significa que ningún estudiante aprueba asignaturas.

#### 4.1.1. Ejemplo

Para ilustrar el comportamiento del número de estudiantes se ha corrido el modelo para 10 semestres ( $n = 10$ ), sin traslados ( $t_j(k) = 0$ ), con un ingreso constante de 100 estudiantes por periodo ( $u(k) = u = 100$ ) y condiciones iniciales nulas ( $x_j(0) = 0$ ). Los parámetros del modelo se han fijado en  $\alpha = 0.85$ ,  $\beta = 0.03$  y  $\sigma = 0.01$ . Esta simulación representa la evolución esperada de un programa nuevo.

La figura 7 muestra los resultados de la simulación. En la figura 7a se muestra cómo evoluciona el número de estudiantes inscritos en cada semestre y la figura 7b muestra la evolución del número total de estudiantes. Al analizar esas figuras se encuentra que:

- El sistema se estabiliza después de aproximadamente 16 semestres
- El valor de estado estacionario de cada semestre es diferente, siendo mayor el de los semestres inferiores. Estas diferencias se deben a los estudiantes que no alcanzan los semestres superiores debido a la pérdida de la calidad de estudiante.
- Los tiempos de estabilización de cada semestre son diferentes: las curvas inician en tiempos diferentes y presentan inclinaciones diferentes, siendo menor la de los semestres superiores.

## 4.2. Número esperado de estudiantes

Para analizar el número esperado de estudiantes, se calcula el número total de estudiantes cuando han transcurrido muchos semestres, sin traslados ( $t_j(k) = 0$ ) y con ingresos constantes ( $u_j(k) = u$ ). En otras palabras, se evalúa el valor en estado estacionario de la variable  $y_T(k)$  (ver sección A.4)

$$y_{ee} = \lim_{k \rightarrow \infty} y_T(k)$$



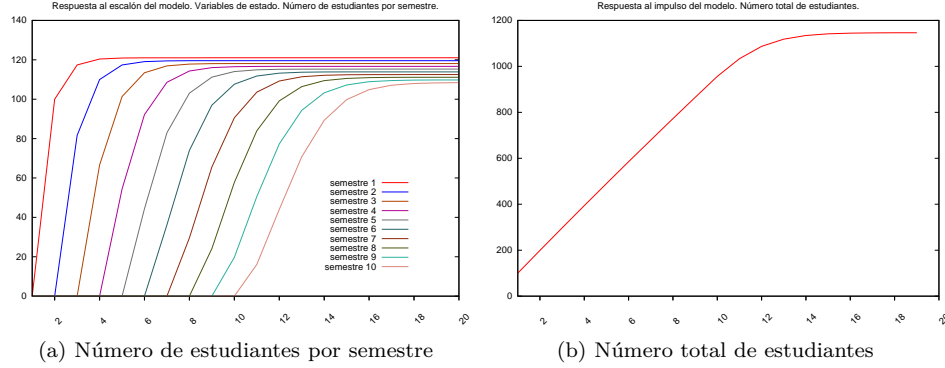


Figura 7: Respuesta al escalón del modelo.  $\alpha = 0.85$   $\beta = 0.03$   $\sigma = 0.01$

$$y_{ee} = \frac{u}{\sigma} \left( 1 - \left( \frac{(1-\beta)\alpha(1-\sigma)}{\sigma + (1-\beta)\alpha(1-\sigma)} \right)^n \right)$$

#### 4.2.1. Caso sin pérdida de calidad de estudiante

Si la única causa de pérdida de calidad de estudiante se debe a la graduación ( $\sigma = 0$ ), el valor esperado del número de estudiantes debe calcularse (ver sección A.4.1) como:

$$y_{ee} = \frac{nu}{\gamma} = \frac{nu}{(1-\beta)\alpha}$$

#### 4.2.2. Caso de referencia

Un caso especial se considera: Si no hay cancelaciones, ni pérdida de la calidad de estudiante, y todos los estudiantes aprueban todas las asignaturas, el número de estudiantes se reduce a

$$y_{ref} = y_{ee} = nu$$

### 4.3. Efecto de los parámetros sobre el número esperado de estudiantes

Para evaluar el efecto de los parámetros del modelo sobre el número esperado de estudiantes, se ha considerado un programa de 10 semestres ( $n = 10$ ) al que ingresan 100 estudiantes cada periodo  $u = 100$ . Con esas consideraciones, el valor de referencia es de 1000 estudiantes ( $y_{ref} = nu = 1000$ )

Sobre es programa base se han realizado los siguientes experimentos:

- Caso 1: Se han variado los parámetros del modelo  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\sigma$  uno a la vez. La variación se ha hecho desde 0 hasta 1 y se ha calculado el número esperado

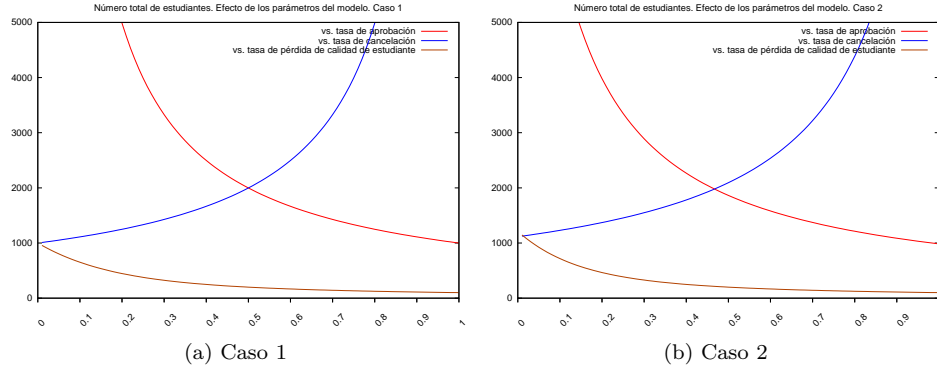


Figura 8: Efecto de la variación de los parámetros del modelo sobre el número esperado de estudiantes

de estudiantes. En cada caso, cuando un parámetro permanece constante, toma los siguientes valores:

$$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad \sigma = 0$$

- Caso 2: Se han variado los parámetros del modelo  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\sigma$  uno a la vez. La variación se ha hecho desde 0 hasta 1 y se ha calculado el número esperado de estudiantes. En cada caso, cuando un parámetro permanece constante, toma los siguientes valores:

$$\alpha = 0.83 \quad \beta = 0.01 \quad \sigma = 0.03$$

Los resultados de los experimentos se muestran en la figura 8. Al analizar esas figuras se encuentra que:

- El número total de estudiantes es muy sensible a las tasa de cancelación y de aprobación.
- La sensibilidad del número total de estudiantes a la tasa de cancelación y de aprobación aumenta en el caso 1, es decir, aumenta al disminuir la tasa de pérdida de calidad de estudiante.
- La tasa de cancelación actual está cercana a 0.2. Para estos valores, la cancelación puede estar causando un incremento de hasta el 20% en el número total de estudiantes.

#### 4.3.1. Valor esperado y valor de referencia

La figura 8 muestra que el efecto sobre el número esperado de estudiantes de algunos parámetros es creciente y el de otros es decreciente. Este hecho genera una pregunta de análisis:

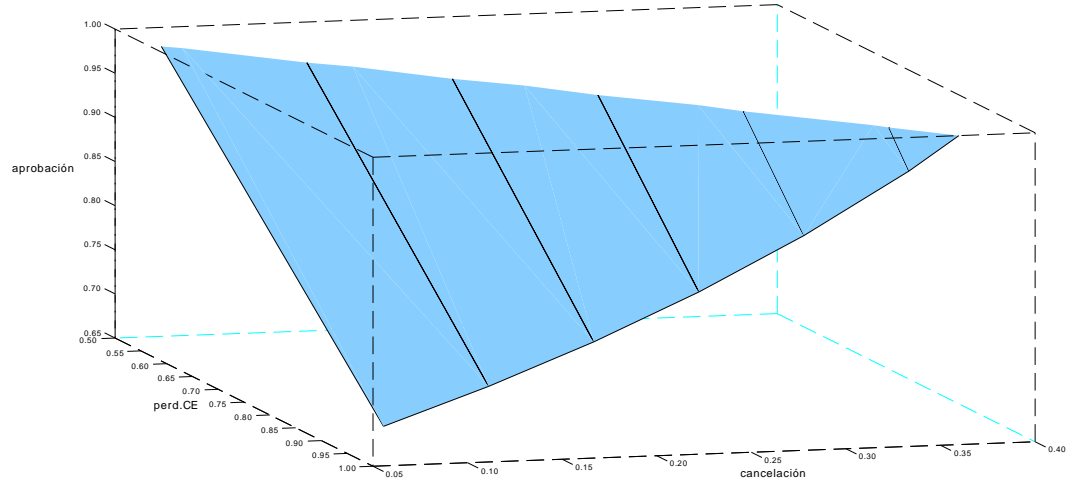


Figura 9: Superficie de población de referencia

- ¿Qué combinación de parámetros hace que el número esperado de estudiantes se igual el número de referencia? o lo que es igual, bajo qué condiciones se satisface

$$\frac{u}{\sigma} \left( 1 - \left( \frac{(1-\beta)\alpha(1-\sigma)}{\sigma + (1-\beta)\alpha(1-\sigma)} \right)^n \right) = nu$$

Para el caso en que  $n = 10$ , la combinación de parámetros resulta ser (ver sección A.4.2)

$$\alpha = \frac{\sigma/(1-\beta)}{(1-10\sigma)^{-0.1} - 1} \quad (7)$$

La figura 9 muestra la superficie tridimensional que se genera a partir de la ecuación 7

#### 4.4. Tiempos de graduación

No todos los estudiantes que ingresan se gradúan; los estudiantes que se gradúan lo hacen en un número de semestres diferentes. Para explorar los tiempos de graduación de los estudiantes admitidos en el periodo  $m$  (que ingresan al programa en el periodo  $m + 1$ ) se define la serie de graduación  $G_m(k)$  como:

$$G_m(k) = g(k)|_{impulso} \quad (8)$$

El subíndice *impulso* denota las condiciones de respuesta al impulso:

- Condiciones iniciales nulas :  $x_j(0) = 0$
- Traslados nulos :  $t_j(k) = 0$
- La serie de ingreso representa un impulso discreto en el periodo  $m$ :

$$u(k) = \begin{cases} u & \text{si } k = m \\ 0 & \text{si } k \neq m \end{cases} \quad (9)$$

#### 4.4.1. Indicadores de los tiempos de graduación

Utilizando la serie  $G_m(k)$  pueden definirse varios indicadores sobre el proceso de graduación:

**Número total de graduados  $GT_m$**  : corresponde a la suma de todos los términos de la serie:

$$GT_m = \sum_{k=0}^{\infty} G_m(k)$$

**Tiempo medio de graduación  $\overline{G_m}$** : el tiempo transcurrido entre el ingreso al programa (que sucede en  $m + 1$ ) y el tiempo  $k$  es  $(k - (m + 1)) = (k - m - 1)$ ; por tanto, el tiempo medio de graduación se calcula:

$$\overline{G_m} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (k - m - 1)G_m(k)}{GT_m}$$

**Varianza en el tiempo de graduación:** calculada como

$$GV_m = \text{Var}[G_m(k)] = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} G_m(k) (G_m(k) - \overline{G_m})^2}{GT_m}$$

Si se considera el tiempo de graduación para una única cohorte que ingresa en el periodo inicial ( $m = 0$ ), entonces las expresiones para la serie de graduación y el tiempo medio de graduación resultan ser (ver secciones A.5 y A.5.1):

$$G_0(k) = \begin{cases} \frac{\delta^{k-n}\gamma^n(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{si } k < n \end{cases}$$

$$\overline{G_0} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\delta^{k-n}\gamma^n k!}{(n-1)!(k-n)!} \quad (10)$$

$$\gamma = (1 - \beta)\alpha(1 - \sigma)$$

$$\delta = \beta(1 - \sigma) + (1 - \beta)(1 - \alpha)(1 - \sigma)$$

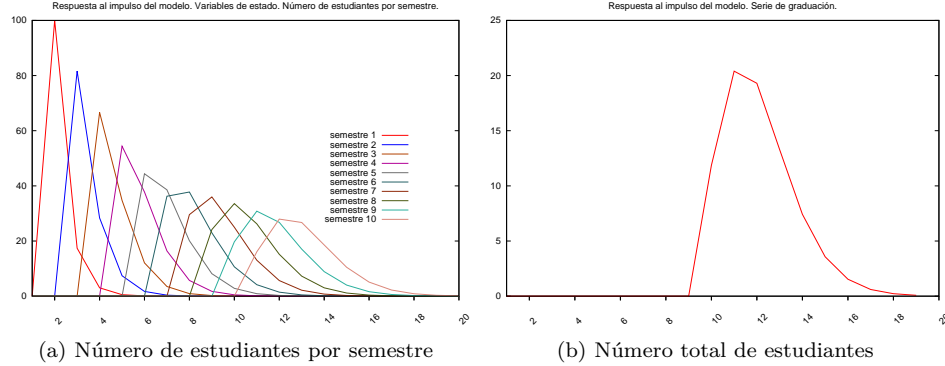


Figura 10: Respuesta al impulso del modelo.  $\alpha = 0.85$   $\beta = 0.03$   $\sigma = 0.01$

#### 4.4.2. Ejemplo

Para ilustrar el comportamiento del número de estudiantes se ha corrido el modelo para 10 semestres ( $n = 10$ ), sin traslados ( $t_j(k) = 0$ ), con un ingreso constante de 100 estudiantes en el periodo inicial ( $u(0) = u = 100$ ) y condiciones iniciales nulas ( $x_j(0) = 0$ ). Los parámetros del modelo se han fijado en  $\alpha = 0.85$ ,  $\beta = 0.03$  y  $\sigma = 0.01$ . Esta simulación representa la evolución de una única cohorte.

La figura 10 muestra los resultados de la simulación. En la figura 10a se muestra cómo evoluciona el número de estudiantes inscritos en cada semestre y la figura 10b muestra la evolución del número total de estudiantes. Para este ejemplo, los indicadores de los tiempos de graduación toman los siguientes valores:

$$\begin{aligned} GT_m &= 88.5 \\ \overline{G}_m &= 12.1 \\ GV_m &= 2.5 \end{aligned}$$

#### 4.5. Efecto de los parámetros sobre los tiempos de graduación

Para evaluar el efecto de los parámetros del modelo sobre el número esperado de estudiantes, se ha considerado un programa de 10 semestres ( $n = 10$ ) al que ingresan 100 estudiantes cada periodo  $u = 100$ . Con esas consideraciones, el valor de referencia es de 1000 estudiantes ( $y_{ref} = nu = 1000$ )

Sobre ese programa base se han realizado los siguientes experimentos:

- Caso 1: Se han variado los parámetros del modelo  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\sigma$  uno a la vez. La variación se ha hecho desde 0 hasta 1 y se ha calculado el tiempo medio

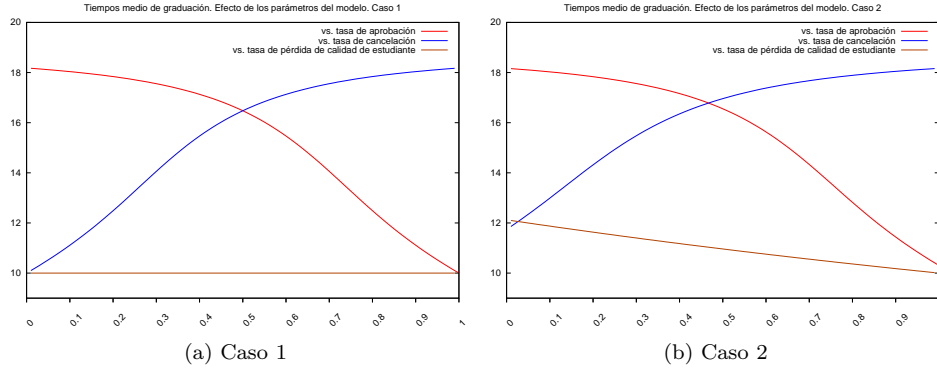


Figura 11: Efecto de la variación de los parámetros del modelo sobre el tiempo medio de graduación

de graduación. En cada caso, cuando un parámetro permanece constante, toma los siguientes valores:

$$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad \sigma = 0$$

- Caso 2: Se han variado los parámetros del modelo  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\sigma$  uno a la vez. La variación se ha hecho desde 0 hasta 1 y se ha calculado el tiempo medio de graduación. En cada caso, cuando un parámetro permanece constante, toma los siguientes valores:

$$\alpha = 0.83 \quad \beta = 0.01 \quad \sigma = 0.03$$

Los resultados de los experimentos se muestran en la figura 11. Al analizar esas figuras se encuentra que:

- El tiempo medio de graduación es muy sensible a las tasa de cancelación y de aprobación.
- El tiempo medio de graduación no es muy sensible a la tasa de pérdida de calida de estudiante.
- La sensibilidad del número total de estudiantes a la tasa de cancelación y de aprobación es semejante en los dos casos.
- La tasa de cancelación actual está cercana a 0.2. Para estos valores, la cancelación puede estar causando un incremento de hasta dos semestres en los tiempos medios de graduación.

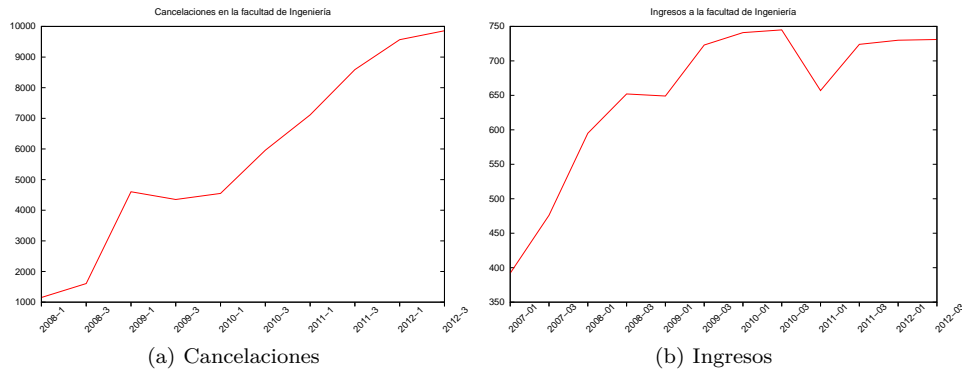


Figura 12: Evolución de dos de las posibles causas del incremento en el número de estudiantes de la facultad de ingeniería

## 5. Análisis del incremento de estudiantes de la Facultad de Ingeniería

Para explicar el incremento en el número de estudiantes de la Facultad de Ingeniería que se muestra en la figura 2b, se formulan las siguientes causas posibles:

- C.1. **El incremento en el número de estudiantes que ingresan a primer semestre:** La figura 12b muestra la evolución de los ingresos por examen de admisión a la facultad desde el año 2007. Se observa un crecimiento pronunciado en el año 2009, y un decrecimiento excepcional en el periodo 2011-01.
- C.2. **El incremento en la tasa de cancelación:** La figura 12a muestra la evolución del número de cancelaciones de asignaturas previamente inscritas por estudiantes de la facultad. El crecimiento continuado se explica en los cambios normativos realizados en el 2008.
- C.3. **El incremento en los traslados e ingresos por doble titulación:** La doble titulación es un fenómeno relativamente nuevo. Fue creado en el 2008, y empezó a ser efectiva aproximadamente en el año 2010.
- C.4. **El efecto combinado de las anteriores causas.**

Para explorar el impacto de las posibles causas, se diseñaron cuatro experimentos de simulación. Los cuatro experimentos toman como base las condiciones de simulación utilizadas para validar el modelo con datos de la facultad (ver sección 3) que se consignan en el cuadro 6. A partir de esa condición base, para cada experimento se realizaron modificaciones en las condiciones de simulación:

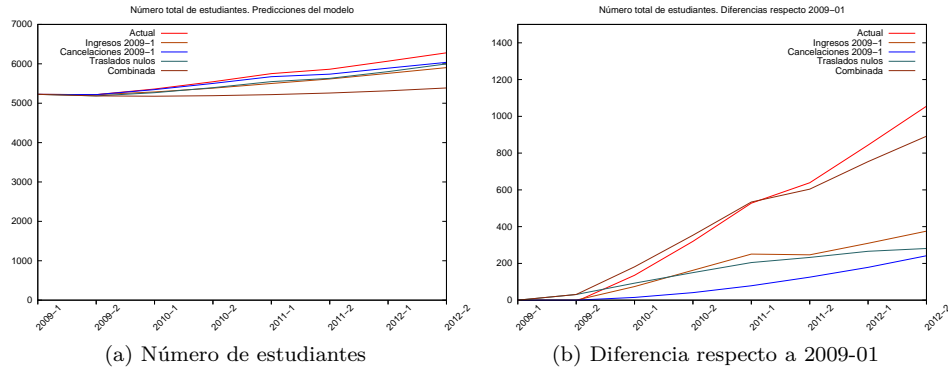


Figura 13: Resultados de las simulaciones diseñadas para explicar las causas del incremento del número de estudiantes de la facultad de ingeniería

Cuadro 2: Aporte de cada causa potencial a la explicación del incremento en el número de estudiantes de la facultad

Causas potenciales	Porcentaje de explicación
Ingresos	35.60 %
Cancelaciones	22.91 %
Traslados	26.64 %
Combinación	84.54 %

- Ex.1. Se mantuvo constante el ingreso a primer semestre en el valor correspondiente al periodo 2009-01.
- Ex.2. Se mantuvo constante la tasa de cancelación con el valor correspondiente al periodo 2009-01.
- Ex.3. Se consideraron traslados nulos durante todo el periodo de simulación.
- Ex.4. Se modificaron simultáneamente las tres condiciones anteriores.

Los resultados de la simulación se muestran en la figura 13. La figura 13a muestra la predicción del número total de estudiantes para cada experimento, mientras que la figura 13b muestra la diferencia de ese mismo número respecto al número total de estudiantes en el periodo 2009-01. Puede verse cómo cada una de las causas potenciales explica parcialmente el crecimiento real. El cuadro 2 muestra el aporte de cada causa potencial a la explicación del incremento en el número de estudiantes de la facultad. El modelo logra una explicación parcial del 84.54 % del incremento.



## 6. Conclusiones

- C.1. El modelo matemático propuesto logra modelar adecuadamente la cancelación de asignaturas, repitencia, aprobación, ingresos, traslados (y dobles titulaciones), pérdida de calidad de estudiante y graduación.
- C.2. Al realizar la validación del modelo se evidencia que este se ajusta mejor para: a) el número total de estudiantes que para el número de graduados y b) la Facultad en su conjunto que para carreras individuales.
- C.3. A partir de datos históricos es posible estimar los parámetros específicos del modelo para un programa curricular específico. Esta tarea, no obstante, no es expedita, dada la estructura misma de la información institucional disponible.
- C.4. El modelo simplificado permite realizar un análisis matemático detallado tanto del número total de estudiantes, como de los tiempos de graduación.
- C.5. El incremento que ha sucedido desde el 2009-01 en la tasa de cancelación tiene un impacto claro tanto en el número de estudiantes del programa como en los tiempos de graduación. Los incrementos registrados pueden estar originando un aumento de dos semestres académicos en los tiempos de graduación y del 20% del número total de estudiantes.
- C.6. El aumento del número de estudiantes de la facultad de ingeniería se explica principalmente por el incremento en los ingresos por examen de admisión. Las cancelaciones, y los traslados (en conjunto con las dobles titulaciones) fueron también causa importante de dicho aumento.

## A. Demostraciones

### A.1. Obtención del modelo detallado

A partir de las ecuaciones 1 y 3 se obtiene un conjunto de ecuaciones válidas para  $j = 1, 2, \dots, n-1$  se tiene que

$$x_{j+1}(k+1) = x_{ap_j}(k) + x_{can_{j+1}}(k) + x_{nap_{j+1}}(k) + t_j(k)$$

Para el primer semestre se emplea la ecuación 2

$$x_1(k+1) = x_{can_1}(k) + x_{nap_1}(k) + u(k) + t_j(k)$$

El conjunto extendido de ecuaciones resulta ser

$$\left. \begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k)\beta_1(k)(1-\sigma_1(k)) + \\ &\quad x_1(k)(1-\beta_1(k))(1-\alpha_1(k))(1-\sigma_1(k)) + \\ &\quad u(k) + t_1(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k)(1-\beta_1(k))\alpha_1(k)(1-\sigma_2(k)) + \\ &\quad x_2(k)\beta_2(k)(1-\sigma_2(k)) + \\ &\quad x_2(k)(1-\beta_2(k))(1-\alpha_2(k))(1-\sigma_2(k)) + \\ &\quad t_2(k) \\ x_3(k+1) &= x_2(k)(1-\beta_2(k))\alpha_2(k)(1-\sigma_3(k)) + \\ &\quad x_3(k)\beta_3(k)(1-\sigma_3(k)) + \\ &\quad x_3(k)(1-\beta_3(k))(1-\alpha_3(k))(1-\sigma_3(k)) + \\ &\quad t_3(k) \\ &\quad \vdots \\ x_n(k+1) &= x_{n-1}(k)(1-\beta_{n-1}(k))\alpha_{n-1}(k)(1-\sigma_n(k)) + \\ &\quad x_n(k)\beta_n(k)(1-\sigma_n(k)) + \\ &\quad x_n(k)(1-\beta_n(k))(1-\alpha_n(k))(1-\sigma_n(k)) + \\ &\quad t_n(k) \\ \\ y_1(k) &= x_1(k) \\ y_2(k) &= x_1(k) + x_2(k) \\ &\quad \vdots \\ y_n(k) &= x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) + \dots + x_n(k) \\ g(k) &= (1-\beta_n(k))\alpha_n(k)(1-\sigma_n(k))x_n(k) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Las ecuaciones en 11 pueden escribirse de forma más compacta definiendo:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_j(k) &= (1-\beta_j(k))\alpha_j(k)(1-\sigma_j(k)) \\ \delta_j(k) &= \beta_j(k)(1-\sigma_j(k)) + (1-\beta_j(k))(1-\alpha_j(k))(1-\sigma_j(k)) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

en cuyo caso

$$\left. \begin{aligned}
 x_1(k+1) &= x_1(k)\delta_1(k) + u(k) + t_1(k) \\
 x_2(k+1) &= x_1(k)\gamma_1(k) + x_2(k)\delta_2(k) + t_2(k) \\
 x_3(k+1) &= x_2(k)\gamma_2(k) + x_3(k)\delta_3(k) + t_3(k) \\
 &\vdots \\
 x_n(k+1) &= x_{n-1}(k)\gamma_{n-1}(k) + x_n(k)\delta_n(k) + t_n(k) \\
 \\
 y_1(k) &= x_1(k) \\
 y_2(k) &= x_1(k) + x_2(k) \\
 &\vdots \\
 y_n(k) &= x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) + \cdots + x_n(k) \\
 g(k) &= \gamma_n x_n(k)
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

La ecuación 14 presenta el modelo en forma matricial

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 X(k+1) &= A(k)X(k) + B(k)U(k) \\
 Y(k) &= C(k)X(k) + D(k)U(k)
 \end{aligned} \right\} \\
 & A(k) = \begin{bmatrix} \delta_1(k) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma_1(k) & \delta_2(k) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2(k) & \delta_3(k) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \gamma_{n-1}(k) & \delta_n(k) \end{bmatrix}_{n \times n} \\
 & B(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times (n+1)} \\
 & C(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_n(k) \end{bmatrix}_{n \times n} \quad D(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times (n+1)} \\
 & X(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad Y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_n(k) \\ g(k) \end{bmatrix}_{(n+1) \times 1} \quad U(k) = \begin{bmatrix} u(k) \\ t_1(k) \\ t_2(k) \\ \vdots \\ t_n(k) \end{bmatrix}_{(n+1) \times 1} \\
 & \left. \begin{aligned}
 \gamma_j(k) &= (1 - \beta_j(k))\alpha_j(k)(1 - \sigma_j(k)) \\
 \delta_j(k) &= \beta_j(k)(1 - \sigma_j(k)) + (1 - \beta_j(k))(1 - \alpha_j(k))(1 - \sigma_j(k))
 \end{aligned} \right\} \quad (14)
 \end{aligned}$$

### A.1.1. Cambio de parámetros

Por simplicidad en la notación se omite el subíndice  $j$  y la dependencia de  $k$

$$\begin{aligned}\gamma &= (1 - \beta)\alpha(1 - \sigma) \\ &= \alpha - \alpha\beta - \sigma\alpha + \alpha\beta\sigma \\ \delta &= \beta(1 - \sigma) + (1 - \beta)(1 - \alpha)(1 - \sigma) \\ &= (1 - \sigma)(\beta + (1 - \beta)(1 - \alpha)) \\ &= (1 - \sigma)(\beta + 1 - \beta - \alpha(1 - \beta)) \\ &= (1 - \sigma)(\beta + (1 - \beta)(1 - \alpha)) \\ &= (1 - \sigma)(1 - \alpha(1 - \beta)) \\ &= (1 - \sigma) \left( 1 - \frac{\gamma}{(1 - \sigma)} \right) \\ &= 1 - \sigma - \gamma\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\delta + \sigma + \gamma = 1$$

Generalizando:

$$\delta_j(k) + \sigma_j(k) + \gamma_j(k) = 1$$

### A.2. Obtención del modelo reducido

Bajo las consideraciones de la ecuación 5, la ecuación 12 se convierte en

$$\left. \begin{aligned}\gamma &= (1 - \beta)\alpha(1 - \sigma) \\ \delta &= \beta(1 - \sigma) + (1 - \beta)(1 - \alpha)(1 - \sigma)\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

y por tanto las matrices  $A(k)$ ,  $B(k)$ ,  $C(k)$  y  $D(k)$  de la ecuación 14 sólo tiene términos constantes. Por tanto, puede escribirse como

$$\begin{aligned}X(k+1) &= AX(k) + BU(k) \\ Y(k) &= CX(k) + DU(k)\end{aligned} \quad (16)$$

Las ecuaciones del modelo de estado en forma explícita son:

$$\left. \begin{aligned}
 X(k+1) &= AX(k) + Bu(k) \\
 y(k) &= CX(k) + Du(k) \\
 A &= \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \delta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \gamma & \delta \end{bmatrix}_{n \times n} & B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1} \\
 C &= [1 \quad 1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]_{1 \times n} & D &= [0]_{1 \times 1} \\
 \gamma &= (1 - \beta)\alpha \\
 \delta &= 1 - \gamma
 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

### A.3. Función de transferencia del número total de estudiantes

Con condiciones iniciales nulas, traslados nulos y las consideraciones de la ecuación 5, la transformada  $Z$  de las ecuaciones de estado del modelo reducido corresponde a (ver ecuación 17):

$$\begin{aligned}
 zX_1(z) &= \delta X_1(z) + U(z) \\
 zX_{j+1}(z) &= \gamma X_j(z) + \delta X_{j+1}(z) \quad j = 1, 2, 3, \dots, n-1
 \end{aligned} \quad (18)$$

Es posible despejar cada una de las variables de estado:

$$\begin{aligned}
 X_1(z) &= (z - \delta)^{-1}U(z) \\
 X_2(z) &= (z - \delta)^{-1}\gamma X_1(z) = (z - \delta)^{-2}\gamma U(z) \\
 X_3(z) &= (z - \delta)^{-1}\gamma X_2(z) = (z - \delta)^{-3}\gamma^2 U(z) \\
 &\vdots \\
 X_n(z) &= (z - \delta)^{-1}\gamma X_{n-1}(z) = (z - \delta)^{-n}\gamma^{n-1}U(z)
 \end{aligned} \quad (19)$$

El número total de estudiantes es  $Y_T(z) = \sum_1^n X(z)$ , por tanto

$$Y_T(z) = \frac{U(z)}{(z-1)} + \frac{\gamma U(z)}{(z-1)^2} + \frac{\gamma^2 U(z)}{(z-1)^3} + \cdots + \frac{\gamma^{n-1} U(z)}{(z-1)^n} \quad (20)$$

y la función de transferencia resulta ser:

$$F_T(z) = \frac{Y_T(z)}{U(z)} = \frac{1}{(z-1)} + \frac{\gamma}{(z-1)^2} + \frac{\gamma^2}{(z-1)^3} + \cdots + \frac{\gamma^{n-1}}{(z-1)^n} \quad (21)$$

$$F_T(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\gamma^{j-1}}{(z-\delta)^j} = \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^n \frac{\gamma^j}{(z-\delta)^j} \quad (22)$$

#### A.4. Valor de estado estacionario ante un escalón en el modelo mínimo

$$\begin{aligned}
y_{ee} &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^n \frac{\gamma^j u z}{(z - \delta)^j} \\
y_{ee} &= \frac{u}{\gamma} \sum_{j=1}^n \frac{\gamma^j}{(1 - \delta)^j} \\
y_{ee} &= \frac{u}{\gamma} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\gamma}{(1 - \delta)} \right)^j \\
y_{ee} &= \frac{u}{\gamma} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\gamma}{(\sigma + \gamma)} \right)^j \tag{23}
\end{aligned}$$

Usando  $\sum_{j=1}^n a^j = a(1 - a^n)/(1 - a)$

$$\begin{aligned}
y_{ee} &= \frac{u}{\gamma} \left[ \frac{\frac{\gamma}{\sigma + \gamma} \left( 1 - \left( \frac{\gamma}{\sigma + \gamma} \right)^n \right)}{1 - \frac{\gamma}{\sigma + \gamma}} \right] = \frac{u}{\gamma} \left[ \frac{\gamma}{\sigma} \left( 1 - \left( \frac{\gamma}{\sigma + \gamma} \right)^n \right) \right] \\
y_{ee} &= \frac{u}{\sigma} \left( 1 - \left( \frac{\gamma}{\sigma + \gamma} \right)^n \right)
\end{aligned}$$

Expresada en función de los parámetros originales:

$$y_{ee} = \frac{u}{\sigma} \left( 1 - \left( \frac{(1 - \beta)\alpha(1 - \sigma)}{\sigma + (1 - \beta)\alpha(1 - \sigma)} \right)^n \right) \tag{24}$$

##### A.4.1. Caso sin pérdida de la calidad de estudiante

Si  $\sigma = 0$  la ecuación 24 lleva a  $y_{ee} = 0/0$ . En ese caso se satisface que  $\delta = 1 - \gamma$  entonces  $\gamma = 1 - \delta$ , por tanto la ecuación 23 lleva a

$$y_{ee} = \frac{u}{\gamma} \sum_{j=1}^n \frac{\gamma^j}{(1 - \delta)^j} = \frac{nu}{\gamma} \tag{25}$$

##### A.4.2. curvas de $y_{ee}$ constante

Sea  $\bar{y} = y_{ee}/u$ .

$$\begin{aligned}
\bar{y}\sigma &= 1 - \left( \frac{\gamma}{\sigma + \gamma} \right)^n \\
1 - \bar{y}\sigma &= \left( \frac{\gamma}{\sigma + \gamma} \right)^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 - \bar{y}\sigma)^{1/n} &= \frac{\gamma}{\sigma + \gamma} \\
\sigma(1 - \bar{y}\sigma)^{1/n} + \gamma(1 - \bar{y}\sigma)^{1/n} &= \gamma \\
\sigma(1 - \bar{y}\sigma)^{1/n} &= \gamma(1 - (1 - \bar{y}\sigma)^{1/n}) \\
\gamma &= \frac{\sigma(1 - \bar{y}\sigma)^{1/n}}{1 - (1 - \bar{y}\sigma)^{1/n}} \\
\gamma &= \frac{\sigma}{(1 - \bar{y}\sigma)^{-1/n} - 1}
\end{aligned}$$

Si  $\bar{y} = n$  (equivalente a no pérdida ni repitencia ni cancelación)

$$\gamma = \frac{\sigma}{(1 - n\sigma)^{-1/n} - 1}$$

Si  $n = 10$

$$\gamma = \frac{\sigma}{(1 - 10\sigma)^{-0.1} - 1}$$

Como  $\sigma = \alpha(1 - \beta)$

$$\alpha = \frac{\sigma/(1 - \beta)}{(1 - 10\sigma)^{-0.1} - 1}$$

## A.5. Respuesta al impulso de la graduación en el modelo reducido

A partir de la ecuación 14 se obtiene la expresión de  $g(k)$ , el número de graduados:

$$g(k) = \gamma x_n(k)$$

La transformada  $\mathcal{Z}$  de  $g(k)$  se obtiene usando 19

$$G(z) = \gamma X_n(z) = \frac{\gamma^n}{(z - \delta)^n} U(z)$$

Se define  $F_G(z)$  como la función de transferencia del número de graduados:

$$F_G(z) = \frac{G(z)}{U(z)} = \frac{\gamma^n}{(z - \delta)^n}$$

La respuesta al impulso de la graduación  $g_{imp}(k)$  puede calcularse como la transformada inversa  $\mathcal{Z}$  de  $F_G(z)$

$$\begin{aligned}
g_{imp}(k) &= \mathcal{Z}^{-1} \{F_G(z)\} \\
\mathcal{Z} \{g_{imp}(k)\} &= F_G(z)
\end{aligned}$$

Para calcular este valor esta transformada inversa reescribimos  $F_G(z)$  como

$$F_G(z) = \frac{\gamma^n / \delta^n}{\left(\frac{z}{\delta} - 1\right)^n}$$



Definimos la función  $H(z)$

$$H(z) = \frac{\gamma^n / \delta^n}{(z-1)^n} \quad G(z) = H(z/\delta) \quad (26)$$

Por la propiedad de escalamiento de la transformada  $\mathcal{Z}$  se tiene que

$$g_{imp}(k) = \delta^k h(k) \quad (27)$$

Por otra parte, se conoce la pareja  $F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\}$ :

$$F(z) = m! \frac{z}{(z-1)^{m+1}}$$

$$f(k) = k(k-1)(k-2) \cdots (k-m+1) = \begin{cases} \frac{k!}{(k-m)!} & \text{si } k > m \\ 0 & \text{si } k \leq m \end{cases}$$

haciendo  $m = n-1$  y suponiendo  $k > m$ , es decir  $k \geq n$  esta pareja se reescribe como

$$F(z) = (n-1)! \frac{z}{(z-1)^n}$$

$$f(k) = k(k-1)(k-2) \cdots (k-n) = \frac{k!}{(k-(n-1))!} \quad (28)$$

Despejando el término  $\frac{1}{(z-1)}$  de las ecuaciones 26 y 28 e igualando se obtien

$$\frac{F(z)}{(n-1)!z} = \frac{\delta^n}{\gamma^n} H(z)$$

Lo que permite escribir

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{(n-1)! \delta^n}{\gamma} H(z)$$

Utilizando la propiedad de desplazamiento de la transformada  $\mathcal{Z}$  se obtiene

$$f(k-1) = \frac{(n-1)! \delta^n}{\gamma} h(k)$$

Empleando 28

$$\frac{(k-1)!}{(k-1-(n-1))!} = \frac{(n-1)! \delta^n}{\gamma} h(k)$$

$$\frac{(k-1)!}{(k-n)!} = \frac{(n-1)! \delta^n}{\gamma} h(k)$$

Se despeja  $h(k)$

$$h(k) = \frac{\gamma^n (k-1)!}{\delta^n (n-1)! (k-n)!}$$

Utilizando 27 se obtiene una expresión para la respuesta al impulso de la graduación:

$$g_{imp}(k) = \frac{\delta^{k-n}\gamma^n(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} \quad (29)$$

Para considerar los casos en que  $k < n$ :

$$g_{imp}(k) = \begin{cases} \frac{\delta^{k-n}\gamma^n(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{si } k < n \end{cases} \quad (30)$$

### A.5.1. Tiempo medio de graduación

El tiempo medio de graduación  $\overline{g_{imp}}$  se calcula como:

$$\overline{g_{imp}} = \sum_{k=0}^{\infty} k g_{imp}(k)$$

Utilizando 30 se tiene que

$$\overline{g_{imp}} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\delta^{k-n}\gamma^n(k-1)!k}{(n-1)!(k-n)!}$$

Y por tanto

$$\overline{g_{imp}} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\delta^{k-n}\gamma^n k!}{(n-1)!(k-n)!}$$

## B. Tablas de datos

### B.1. Parámetros de simulación para validación

Cuadro 3: Parámetros y condiciones de simulación para la validación del modelo. Ingeniería Electrónica.

Parámetros del modelo								
Tasa de aprobación. $\alpha_j(k)$								
$j$	2009-1	2009-3	2010-1	2010-3	2011-1	2011-3	2012-1	2012-3
1	0.776	0.873	0.705	0.714	0.740	0.594	0.623	0.758
2	0.717	0.700	0.818	0.625	0.638	0.875	0.696	0.653
3	0.649	0.691	0.667	0.667	0.855	0.851	0.731	0.694
4	0.810	0.598	0.514	0.608	0.690	0.707	0.698	0.712
5	0.711	0.803	0.607	0.699	0.740	0.828	0.698	0.686
6	0.896	0.973	0.839	0.787	0.556	0.512	0.500	0.574
7	0.945	0.804	0.854	0.770	0.807	0.865	0.875	0.931
8	0.946	0.982	0.824	0.788	0.500	0.906	0.645	0.683
9	0.972	1.000	0.981	1.000	0.982	1.000	1.000	0.943
10	1.000	1.000	0.927	1.000	0.875	0.957	0.870	0.674
Tasa de pérdida de calidad de estudiante. $\sigma_j(k)$								
$j$	2009-01	2009-03	2010-01	2010-03	2011-01	2011-03	2012-01	2012-03
1	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043
2	0.059	0.059	0.059	0.059	0.059	0.059	0.059	0.059
3	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075
4	0.056	0.056	0.056	0.056	0.056	0.056	0.056	0.056
5	0.084	0.084	0.084	0.084	0.084	0.084	0.084	0.084
6	0.069	0.069	0.069	0.069	0.069	0.069	0.069	0.069
7	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031
8	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031
9	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Tasa de cancelación. $\beta_j(k)$								
$j$	2009-1	2009-3	2010-1	2010-3	2011-1	2011-3	2012-1	2012-3
1	0.020	0.068	0.050	0.038	0.153	0.030	0.042	0.184
2	0.019	0.038	0.035	0.053	0.036	0.226	0.051	0.155
3	0.026	0.018	0.000	0.121	0.114	0.242	0.133	0.234
4	0.060	0.061	0.089	0.108	0.121	0.216	0.149	0.055
5	0.308	0.047	0.067	0.012	0.038	0.108	0.000	0.054
6	0.043	0.075	0.061	0.145	0.316	0.271	0.160	0.069
7	0.027	0.105	0.163	0.086	0.081	0.071	0.030	0.171
8	0.051	0.035	0.039	0.000	0.500	0.304	0.295	0.146
9	0.182	0.020	0.019	0.022	0.018	0.171	0.209	0.125
10	0.050	0.033	0.024	0.129	0.094	0.000	0.080	0.173
Variables de entrada								
Ingresos. $u(k)$								
$j$	2009-01	2009-03	2010-01	2010-03	2011-01	2011-03	2012-01	2012-03
1	74.000	58.000	66.000	75.000	60.000	58.000	62.000	61.000
Traslados. $t_j(k)$								
$j$	2009-01	2009-03	2010-01	2010-03	2011-01	2011-03	2012-01	2012-03
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	2.000	6.000	2.000	4.000	1.000	2.000	1.000	2.000
6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Condiciones Iniciales								
Estado inicial								
$x_1(0)$	50.191							
$x_2(0)$	54.288							
$x_3(0)$	75.799							
$x_4(0)$	129.063							
$x_5(0)$	46.094							
$x_6(0)$	68.629							
$x_7(0)$	74.775							
$x_8(0)$	57.361							
$x_9(0)$	36.875							
$x_{10}(0)$	38.924							

Cuadro 4: Parámetros y condiciones de simulación para la validación del modelo. Ingeniería Mecánica.

Parámetros del modelo								
Tasa de aprobación. $\alpha_j(k)$								
$j$	2009-1	2009-3	2010-1	2010-3	2011-1	2011-3	2012-1	2012-3
1	0.629	0.640	0.730	0.670	0.738	0.741	0.612	0.618
2	0.643	0.750	0.694	0.702	0.735	0.755	0.716	0.734
3	0.450	0.515	0.621	0.607	0.512	0.854	0.600	0.513
4	0.205	0.500	0.468	0.414	0.507	0.528	0.481	0.381
5	0.607	0.382	0.551	0.448	0.508	0.738	0.713	0.595
6	0.774	0.866	0.673	0.961	0.659	0.935	0.609	0.520
7	0.818	0.824	0.873	0.872	0.516	0.756	0.907	0.870
8	0.792	0.523	0.656	0.667	0.746	0.805	0.792	0.689
9	0.000	0.633	0.829	0.936	0.780	0.833	0.737	0.830
10	0.902	0.977	0.805	0.975	0.949	0.933	0.963	0.946
Tasa de pérdida de calidad de estudiante. $\sigma_j(k)$								
$j$	2009-01	2009-03	2010-01	2010-03	2011-01	2011-03	2012-01	2012-03
1	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033
2	0.044	0.044	0.044	0.044	0.044	0.044	0.044	0.044
3	0.047	0.047	0.047	0.047	0.047	0.047	0.047	0.047
4	0.052	0.052	0.052	0.052	0.052	0.052	0.052	0.052
5	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031
6	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055
7	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031
8	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
9	0.041	0.041	0.041	0.041	0.041	0.041	0.041	0.041
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Tasa de cancelación. $\beta_j(k)$								
$j$	2009-1	2009-3	2010-1	2010-3	2011-1	2011-3	2012-1	2012-3
1	0.075	0.057	0.039	0.093	0.156	0.156	0.072	0.219
2	0.087	0.077	0.250	0.215	0.038	0.221	0.107	0.169
3	0.048	0.029	0.079	0.111	0.113	0.293	0.227	0.161
4	0.241	0.130	0.125	0.266	0.258	0.480	0.117	0.359
5	0.103	0.083	0.060	0.118	0.110	0.145	0.149	0.210
6	0.054	0.029	0.071	0.025	0.024	0.207	0.169	0.250
7	0.195	0.128	0.098	0.152	0.147	0.274	0.157	0.061
8	0.020	0.043	0.032	0.013	0.033	0.128	0.020	0.086
9	1.000	0.118	0.028	0.041	0.057	0.018	0.116	0.070
10	0.150	0.022	0.000	0.000	0.000	0.032	0.308	0.302
Variables de entrada								
Ingresos. $u(k)$								
$j$	2009-01	2009-03	2010-01	2010-03	2011-01	2011-03	2012-01	2012-03
1	64.000	77.000	78.000	77.000	80.000	77.000	74.000	82.000
Traslados. $t_j(k)$								
$j$	2009-01	2009-03	2010-01	2010-03	2011-01	2011-03	2012-01	2012-03
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	5.000	6.000	11.000	7.000	7.000	3.000	4.000	9.000
6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Condiciones Iniciales								
Estado inicial								
$x_1(0)$	86.308							
$x_2(0)$	58.467							
$x_3(0)$	83.524							
$x_4(0)$	61.251							
$x_5(0)$	84.916							
$x_6(0)$	73.780							
$x_7(0)$	45.938							
$x_8(0)$	66.819							
$x_9(0)$	0.000							
$x_{10}(0)$	70.996							

Cuadro 5: Parámetros y condiciones de simulación para la validación del modelo. Ingeniería Mecatrónica.

Parámetros del modelo								
Tasa de aprobación. $\alpha_j(k)$								
$j$	2009-1	2009-3	2010-1	2010-3	2011-1	2011-3	2012-1	2012-3
1	0.860	0.775	0.774	0.932	0.945	0.956	0.900	0.894
2	1.000	0.979	0.939	0.957	0.956	0.980	1.000	0.950
3	0.659	0.605	0.707	0.676	0.791	0.806	0.672	0.553
4	0.000	0.429	0.630	0.697	0.556	0.419	0.591	0.452
5	0.316	0.265	0.370	0.739	0.650	0.639	0.754	0.689
6	0.860	0.667	0.909	0.933	0.974	0.880	0.857	0.917
7	0.789	0.786	0.769	0.714	0.967	0.880	1.000	0.636
8	0.926	1.000	0.944	0.882	0.955	0.947	0.885	0.719
9	1.000	1.000	1.000	0.929	0.929	0.923	1.000	0.964
10	0.889	0.960	0.880	0.800	1.000	1.000	0.917	1.000
Tasa de pérdida de calidad de estudiante. $\sigma_j(k)$								
$j$	2009-01	2009-03	2010-01	2010-03	2011-01	2011-03	2012-01	2012-03
1	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040
2	0.026	0.026	0.026	0.026	0.026	0.026	0.026	0.026
3	0.049	0.049	0.049	0.049	0.049	0.049	0.049	0.049
4	0.047	0.047	0.047	0.047	0.047	0.047	0.047	0.047
5	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064
6	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032
7	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025
8	0.081	0.081	0.081	0.081	0.081	0.081	0.081	0.081
9	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Tasa de cancelación. $\beta_j(k)$								
$j$	2009-1	2009-3	2010-1	2010-3	2011-1	2011-3	2012-1	2012-3
1	0.085	0.091	0.046	0.000	0.098	0.100	0.038	0.254
2	0.000	0.000	0.057	0.021	0.043	0.020	0.095	0.111
3	0.102	0.085	0.068	0.178	0.122	0.380	0.069	0.095
4	0.444	0.097	0.206	0.233	0.250	0.367	0.154	0.333
5	0.050	0.081	0.080	0.115	0.200	0.234	0.081	0.167
6	0.000	0.069	0.043	0.167	0.000	0.038	0.000	0.053
7	0.156	0.067	0.000	0.045	0.091	0.074	0.074	0.083
8	0.018	0.087	0.053	0.000	0.043	0.136	0.000	0.030
9	0.000	0.040	0.000	0.548	0.333	0.235	0.032	0.067
10	0.053	0.000	0.000	0.000	0.045	0.143	0.250	0.250
Variables de entrada								
Ingresos. $u(k)$								
$j$	2009-01	2009-03	2010-01	2010-03	2011-01	2011-03	2012-01	2012-03
1	41.000	63.000	40.000	53.000	49.000	52.000	51.000	59.000
Traslados. $t_j(k)$								
$j$	2009-01	2009-03	2010-01	2010-03	2011-01	2011-03	2012-01	2012-03
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	4.000	5.000	2.000	2.000	3.000	2.000	2.000	3.000
6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Condiciones Iniciales								
Estado inicial								
$x_1(0)$	46.971							
$x_2(0)$	15.293							
$x_3(0)$	48.064							
$x_4(0)$	5.462							
$x_5(0)$	41.510							
$x_6(0)$	54.618							
$x_7(0)$	41.510							
$x_8(0)$	58.987							
$x_9(0)$	10.924							
$x_{10}(0)$	19.662							

Cuadro 6: Parámetros y condiciones de simulación para la validación del modelo.  
Facultad de Ingeniería.

Parámetros del modelo								
Tasa de aprobación. $\alpha_j(k)$								
$j$	2009-01	2009-03	2010-01	2010-03	2011-01	2011-03	2012-01	2012-03
1	0.850	0.850	0.850	0.850	0.850	0.850	0.850	0.850
2	0.925	0.925	0.925	0.925	0.925	0.925	0.925	0.925
3	0.963	0.963	0.963	0.963	0.963	0.963	0.963	0.963
4	0.981	0.981	0.981	0.981	0.981	0.981	0.981	0.981
5	0.991	0.991	0.991	0.991	0.991	0.991	0.991	0.991
6	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
7	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
8	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
9	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Tasa de pérdida de calidad de estudiante. $\sigma_j(k)$								
$j$	2009-01	2009-03	2010-01	2010-03	2011-01	2011-03	2012-01	2012-03
1	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042
2	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043
3	0.046	0.046	0.046	0.046	0.046	0.046	0.046	0.046
4	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042
5	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040
6	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031
7	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032
8	0.045	0.045	0.045	0.045	0.045	0.045	0.045	0.045
9	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Tasa de cancelación. $\beta_j(k)$								
$j$	2009-01	2009-03	2010-01	2010-03	2011-01	2011-03	2012-01	2012-03
1	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150	0.175	0.200	0.225
2	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150	0.175	0.200	0.225
3	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150	0.175	0.200	0.225
4	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150	0.175	0.200	0.225
5	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150	0.175	0.200	0.225
6	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150	0.175	0.200	0.225
7	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150	0.175	0.200	0.225
8	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150	0.175	0.200	0.225
9	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150	0.175	0.200	0.225
10	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150	0.175	0.200	0.225
Variables de entrada								
Ingresos. $u(k)$								
$j$	2009-01	2009-03	2010-01	2010-03	2011-01	2011-03	2012-01	2012-03
1	649.000	723.000	741.000	745.000	657.000	724.000	730.000	731.000
Traslados. $t_j(k)$								
$j$	2009-01	2009-03	2010-01	2010-03	2011-01	2011-03	2012-01	2012-03
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	31.000	63.000	61.000	61.000	36.000	43.000	32.000	49.000
6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Condiciones Iniciales								
Estado inicial								
$x_1(0)$	547.276							
$x_2(0)$	541.748							
$x_3(0)$	536.220							
$x_4(0)$	530.692							
$x_5(0)$	525.164							
$x_6(0)$	519.636							
$x_7(0)$	514.108							
$x_8(0)$	508.580							
$x_9(0)$	503.052							
$x_{10}(0)$	497.524							

## **B.2. Resultados de la simulación para validación**

Cuadro 7: Resultados de la simulación para la validación del modelo. Ingeniería Electrónica.

Periodo	Estudiantes por semestre											Real
	Modelo										Total	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
2009-1	50.2	54.3	75.8	129.1	46.1	68.6	74.8	57.4	36.9	38.9	632.0	632.0
2009-2	86.5	51.7	61.7	73.4	116.2	29.9	60.6	72.3	56.8	28.7	637.8	650.0
2010-1	75.4	83.2	51.1	69.1	69.9	84.2	41.5	45.9	67.4	51.8	639.7	639.0
2010-2	89.8	64.8	77.6	66.2	60.3	52.9	73.3	38.0	37.6	64.2	624.7	626.0
2011-1	108.9	84.0	65.8	70.7	55.0	54.3	54.2	57.8	29.8	41.8	622.2	608.0
2011-2	104.9	95.7	63.3	72.4	56.0	67.2	32.8	80.9	15.0	34.9	623.1	589.0
2012-1	102.5	86.9	81.8	68.2	53.3	77.1	29.6	54.5	51.8	12.8	618.5	585.0
2012-2	103.6	86.3	81.7	74.1	54.0	75.7	34.5	53.1	33.9	40.0	636.9	574.0

Cuadro 8: Resultados de la simulación para la validación del modelo. Ingeniería Mecánica.

Periodo	Estudiantes por semestre											Real
	Modelo										Total	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
2009-1	86.3	58.5	83.5	61.3	84.9	73.8	45.9	66.8	0.0	71.0	632.0	632.0
2009-2	98.9	71.6	78.3	83.1	51.5	63.5	66.3	44.1	51.3	16.6	625.3	617.0
2010-1	114.9	78.8	84.7	81.8	72.7	27.0	68.5	67.9	43.6	28.2	668.3	620.0
2010-2	111.2	114.1	73.8	92.0	76.7	46.1	30.1	76.8	50.8	39.2	710.8	635.0
2011-1	127.2	114.3	92.5	98.6	78.5	32.1	48.4	47.5	55.1	44.7	738.9	656.0
2011-2	132.4	108.6	125.4	98.4	83.8	45.2	45.8	33.7	47.9	41.1	762.3	686.0
2012-1	130.0	122.8	108.4	139.8	58.6	62.3	51.7	34.3	31.8	41.6	781.2	703.0
2012-2	131.3	113.7	130.5	124.1	82.6	63.5	41.6	45.9	37.0	33.7	804.0	726.0

Cuadro 9: Resultados de la simulación para la validación del modelo. Ingeniería Mecatrónica.

Periodo	Estudiantes por semestre											Real
	Modelo										Total	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
2009-1	47.0	15.3	48.1	5.5	41.5	54.6	41.5	59.0	10.9	19.7	343.0	343.0
2009-2	51.6	35.5	33.6	32.3	31.2	19.1	59.0	31.9	49.3	13.5	356.8	348.0
2010-1	77.6	35.6	48.1	36.5	39.0	14.1	26.8	44.7	28.6	45.4	396.5	368.0
2010-2	59.5	59.0	46.3	47.5	43.5	14.2	17.9	24.5	36.7	32.6	381.7	381.0
2011-1	60.9	56.9	73.4	45.6	40.3	29.7	16.2	14.6	40.0	21.2	398.7	406.0
2011-2	63.6	54.5	72.0	73.8	39.2	20.4	29.9	15.1	26.7	24.5	419.7	427.0
2012-1	61.5	54.7	85.3	85.9	39.4	21.0	22.1	26.3	18.8	21.4	436.2	449.0
2012-2	63.9	56.2	78.5	91.7	54.2	28.5	19.0	22.7	21.9	23.9	460.6	445.0

Cuadro 10: Resultados de la simulación para la validación del modelo. Facultad de Ingeniería.

Periodo	Estudiantes por semestre											Real
	Modelo										Total	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
2009-1	547.3	541.7	536.2	530.7	525.2	519.6	514.1	508.6	503.1	497.5	5224.0	5224.0
2009-2	749.9	486.2	499.1	502.6	534.3	502.2	501.8	496.6	484.9	470.8	5228.5	5241.0
2010-1	876.6	632.0	450.2	468.7	542.7	509.0	485.2	484.4	472.6	453.8	5375.2	5365.0
2010-2	938.3	743.7	560.8	424.8	513.8	516.2	489.5	468.6	460.5	442.3	5558.3	5540.0
2011-1	975.4	804.3	660.3	508.4	475.8	492.4	495.5	470.1	445.3	431.2	5758.7	5762.0
2011-2	916.3	839.6	719.4	596.5	514.2	458.4	476.3	474.6	443.9	417.8	5857.1	5953.0
2012-1	986.2	805.9	754.2	654.3	595.6	483.1	446.1	459.3	446.5	414.9	6046.0	6110.0
2012-2	1032.3	843.0	735.9	689.2	642.4	548.8	459.7	432.8	434.3	416.2	6234.7	6268.0