$$B = Vf(s) \times \frac{Z_c}{Z_1 + Z_c} \times \frac{r_2 e^{-2\gamma(s)d}}{1 - r_1 r_2 e^{-2\gamma(s)d}} \quad (37)$$

Donde,

$$r_1 = \frac{Z_1 - Z_c}{Z_1 + Z_c}\ , \textit{Coeficiente de reflexión al comienzo de la línea} \quad (38)$$

$$r_2 = \frac{Z_2 - Z_c}{Z_2 + Z_c}\ , \textit{Coeficiente de reflexión al final de la línea} \quad (39)$$

Reemplazando A y B en (26):

$$V(x,s) = Vf(s) \frac{Z_c}{Z_1 + Z_c} \times \left[\frac{e^{-\gamma(s)x} + r_2 e^{-\gamma(s)(2d-x)}}{1 - r_1 r_2 e^{-\gamma(s)2d}} \right] \quad (40)$$

Con el uso del teorema del binomio se puede descomponer una parte de la ecuación (40) en una serie infinita, de la siguiente forma; ya que $r_1 r_2 e^{-\gamma(s)2d} < 1$

$$\frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{-\gamma(s)2d}} = \frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots a^n + \ldots \quad (41)$$

$$\frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{-\gamma(s)2d}} = 1 + r_1 r_2 e^{-\gamma(s)2d} + r_1^2 r_2^2 e^{-\gamma(s)4d} + r_1^3 r_2^3 e^{-\gamma(s)6d} + \ldots \quad (42)$$

Reemplazando (42) en (40),

$$V(x,s) = Vf(s) \frac{Z_c}{Z_1 + Z_c} \times \left[\begin{matrix} e^{-\gamma(s)x} + r_2 e^{-\gamma(s)(2d-x)} + r_1 r_2 e^{-\gamma(s)(2d+x)} + \\ r_1 r_2^2 e^{-\gamma(s)(4d-x)} + r_1^2 r_2^2 e^{-\gamma(s)(4d+x)} + \ldots \end{matrix} \right] \quad (43)$$

La ecuación para corriente (27), después de reemplazar las expresiones obtenidas para A y B queda:

$$I(x,s) = Vf(s) \frac{1}{Z_1 + Z_c} \times \left[\frac{e^{-\gamma(s)x} - r_2 e^{-\gamma(s)(2d-x)}}{1 - r_1 r_2 e^{-\gamma(s)2d}} \right] \quad (44)$$

Reemplazando (42) en (44) se obtiene la ecuación final para la corriente $I(x,s)$.

$$I(x,s) = Vf(s)\frac{1}{Z_1 + Z_c} \times \begin{bmatrix} e^{-\gamma(s)x} - r_2 e^{-\gamma(s)(2d-x)} + r_1 r_2 e^{-\gamma(s)(2d+x)} - \\ r_1 r_2^2 e^{-\gamma(s)(4d-x)} + r_1^2 r_2^2 e^{-\gamma(s)(4d+x)} - \ldots \end{bmatrix} \quad (45)$$

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDA EN EL DOMINIO DEL TIEMPO PARA UNA LÍNEA IDEAL SIN PÉRDIDAS

La transformada inversa para las ecuaciones (43) y (45) solo se puede calcular en casos particulares. Interesa en ésta oportunidad resolver el caso de una línea sin pérdidas (R=0, G=0).

Para el caso de la línea ideal, la impedancia característica Z_c no depende de s y se convierte en una constante.

$$Z_c(s) = \sqrt{\frac{sL+R}{sC+G}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (46)$$

La expresión $e^{-\gamma(s)x}$ se convierte en un término de la forma $e^{-\tau x}$,

$$e^{-\gamma(s)x} = e^{-\sqrt{(sL+R)(sC+G)}\,x} \approx e^{-s\sqrt{LC}\,x} \quad (47)$$

La transformada inversa para el término genérico que aparece es:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)e^{-s\tau}\right] = f(t-\tau)u(t-\tau) \quad (48)$$

La solución anterior se interpreta como una onda desplazada en el tiempo que conserva la misma forma a lo largo de la línea.

El término $\sqrt{LC}x$ corresponde al tiempo de propagación de la onda hasta la distancia x. Es usual expresarlo en función de la velocidad de propagación, en lugar del tiempo de propagación.

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = Velocidad\ de\ propagación\left[\frac{Unidades\ de\ distancia}{segundos}\right] \quad (49)$$

La solución para el voltaje, después de aplicar la transformada inversa a la ecuación (43), con las consideraciones de línea ideal, es:

$$V_2(x,t) = \frac{Z_c}{Z_1 + Z_c} \times \begin{bmatrix} (1+r_2)v_f(t-\tau)u(t-\tau)+ \\ r_1r_2(1+r_2)v_f(t-3\tau)u(t-3\tau)+ \\ r_1^{\,2}r_2^{\,2}(1+r_2)v_f(t-5\tau)u(t-5\tau)+ \\ r_1^{\,3}r_2^3(1+r_2)v_f(t-7\tau)u(t-7\tau)+\ldots \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$i(x,t) = \frac{1}{Z_1 + Z_c} \times \begin{bmatrix} v_f(t-x/v)u(t-x/v) \\ -r_2v_f(t-(2d-x)/v)u(t-(2d-x)/v) \\ +r_1r_2v_f(t-(2d+x)/v)u(t-(2d+x)/v) \\ -r_1r_2^2v_f(t-(4d-x)/v)u(t-(4d-x)/v) \\ +r_1^2r_2^2\,v_f(t-(4d+x)/v)u(t-(4d+x)/v)-\ldots \end{bmatrix} \quad (51)$$

Las anteriores ecuaciones dan la solución para el voltaje y la corriente en cualquier punto de la línea e instante. Una solución de interés práctico es el voltaje al final de la línea; para éste caso la ecuación (50) se convierte en:

$$v_2(x,t) = \frac{Z_c}{Z_1 + Z_c} \times \begin{bmatrix} (1+r_2)v_f(t-\tau)u(t-\tau)+ \\ r_1r_2(1+r_2)v_f(t-3\tau)u(t-3\tau)+ \\ r_1^{\,2}r_2^{\,2}(1+r_2)v_f(t-5\tau)u(t-5\tau)+ \\ r_1^{\,3}r_2^3(1+r_2)v_f(t-7\tau)u(t-7\tau)+\ldots \end{bmatrix} \quad (52)$$

Algunas situaciones particulares ayudan a entender la solución de la ecuación de onda. Una de ellas es considerar una línea de longitud muy grande y tratar de darle una interpretación para este caso a las ecuaciones (50) y (51).

Con las ecuaciones (50) y (51) se quiere evaluar el voltaje y la corriente en un punto de la línea a una distancia x, donde se cumple que la distancia d, es mucho mayor que x (d>>x). Para este caso, las ecuaciones para voltaje y corriente quedarían reducidas a:

$$v(x,t) = \frac{Z_c}{Z_1 + Z_c} \times \left[v_f\left(t - x/v\right) u\left(t - x/v\right) \right] \tag{53}$$

$$i(x,t) = \frac{1}{Z_1 + Z_c} \times \left[v_f\left(t - x/v\right) u\left(t - x/v\right) \right] \tag{54}$$

De acuerdo con las ecuaciones (53) y (54), el voltaje aparece como una copia a escala con respecto al voltaje de la fuente, un tiempo después de la energización, dado por x/v; es decir, el tiempo que demora la onda viajera en recorrer una distancia x a una velocidad v.