UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Condiciones suficientes para que un atractor parcialmente hiperbólico sea una clase homoclínica

Henry Mauricio Sánchez Sanabria

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas.
Bogotá D.C., Colombia
2012

Condiciones suficientes para que un atractor parcialmente hiperbólico sea una clase homoclínica

Henry Mauricio Sánchez Sanabria

Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias Matemáticas

Director:
Serafín Bautista Díaz

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2012

Dedicatoria

A mi familia

Agradecimientos

De manera muy especial resaltar el innegable respaldo de mis padres en la consecución de esta empresa. Solo mediante su apoyo, ejemplo y amor, fue posible la realización de este trabajo, así como de cada uno de los proyectos que me he trazado realizar. También quiero agradecer la gran colaboración y buena disposición que tuvo mi director de trabajo final, el profesor Serafín Bautista Díaz, quien aportó en gran medida a mi desarrollo intelectual, personal y profesional. Por último deseo expresar mi gratitud a todas aquellas personas que he encontrado en mi camino, las cuales a través de experiencias, consejos y demás vivencias han nutrido mi aprendizaje, mis objetivos, mi existencia. A mis amigos, mis compañeros y profesores.

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es probar que un atractor parcialmente hiperbólico Λ, con dirección central bidimensional es una clase homoclínica si este posee una óribita periódica hiperbólica O y una singularidad tipo Lorenz σ de manera tal que $W^u(\sigma) \cap W^s(O) \neq \emptyset$ y $W^s(\sigma)$ sea densa en Λ.

Palabras clave: Atractor parcialmente hiperbólico, clases homoclínicas, singularidad tipo Lorenz.

Abstract

The main goal of this work is to prove that a partially hyperbolic attractor Λ, with two-dimensional central direction is a homoclinic class if it has a hyperbolic periodic orbit O and a Lorenz-like singularity σ such as $W^u(\sigma) \cap W^s(O) \neq \emptyset$ and $W^s(\sigma)$ is dense Λ.

Keywords: Partially hyperbolic attractor, Homoclinic class, Lorenz-like singularity.

Contenido

Agradecimientos vii

Resumen ix

1. Introducción 2

2. Conceptos generales 3

2.1. Motivación 5

3. Propiedades de variedades invariantes 7

4. Órbitas genéricas, dobladas y equivalentes 13

4.1. Preliminares 13

4.2. Órbitas genéricas 14

4.3. Órbitas dobladas y equivalentes 16

5. Un Teorema tipo Birkhoff-Smale 18

6. Teorema Principal 23

1 Introducción

Es de gran interés dentro del estudio de sistemas dinámicos, el poder determinar criterios que permitan establecer cuándo un atractor es una clase homoclínica. Por ejemplo, un resultado para variedades tridimensionales es la hiperbolicidad singular *(singular-hyperbocity)* introducida en [10]. Al respecto podría uno pregutarse si esta condición también es necesaria para atractores parcialmente hiperbólicos cuyo campo vectorial está definido sobre una variedad tridimensional. Este último hecho tiene respuesta negativa, en efecto, se puede construir un atractor Λ de manera similar al atractor geométrico de Lorenz, adicionando otra singularidad σ' con sus valores propios asociados $\{\lambda'_{ss}, \lambda'_s, \lambda'_u\}$ cumpliendo la relación $\lambda'_{ss} < \lambda'_s < 0 < \lambda'_u < -\lambda'_s$. Por [3], Λ no es *singular hiperbólico*, puesto que éstos no poseen singularidades como la singularidad σ' descrita en este ejemplo. Aún así, este atractor Λ si resulta ser una clase homoclínica.

Dada la importancia de obtener resultados en ambientes menos restrictivos, se hace imperativo explorar varias posibilidades y así determinar lo requerido para llegar al objetivo. Una primera posibilidad sería el considerar dimensiones superiores en la variedad sobre la cual se define el flujo. También se puede pensar con una descomposición del fibrado tangente más general como lo son el seccional hiperbólico, o parcialmente hiperbólico, Además, se pueden hacer ciertas consideraciones con respecto a singularidades y órbitas. Por último se debe mencionar también qué condiciones se requieren según la topología en la cual se esté considerando el campo vectorial, por ejemplo, la topología C^1, ó C^2.

2 Conceptos generales

Sean M una n-variedad cerrada (compacta con $\partial M = \emptyset$) y X un campo vectorial C^1 . Denotaremos por X_t el flujo generado por X.

Un subconjunto $\Lambda \subset M$ compacto es invariante si $X_t(\Lambda) = \Lambda$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición 2.1 *Para $x \in M$, se define su conjunto omega-ímite como*

$$\omega(x) = \{y \in M : y = \lim_{n\to\infty} X_{t_n}(x), \quad para \quad alguna \quad t_n \to \infty\}.$$

y su conjunto alpha-límite como

$$\alpha(x) = \{z \in M : z = \lim_{n\to\infty} X_{-t_n}(x), \quad para \quad alguna \quad t_n \to \infty\}.$$

Decimos que el conjunto invariante $\Lambda \subset M$ es transitivo si $\Lambda = \omega(p)$ para algún $p \in \Lambda$, y *attracting* si hay un abierto U tal que

$$\Lambda = \bigcap_{t>0} X_t(U).$$

Un atractor es un conjunto *attracting* transitivo.

Notamos por $m(\cdot)$ la co-norma del ínfimo la cual recordemos viene definida por

$$m(T) = \inf_{v\neq 0} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|}.$$

donde T es un operador lineal.

Definición 2.2 *Un conjunto compacto invariante Λ de X_t es hiperbólico si existe una descomposición continúa y DX_t-invariante del fibrado sobre Λ de la forma $T_\Lambda M = E^s_\Lambda \oplus E^X_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$, tal que para algunas constantes K, λ y una métrica riemanniana en M se tiene*

- $\max\left\{\| DX_t(x)/_{E^s_x} \|, m\left(X_t\left(x\right)/_{E^u_x}\right)\right\} \leq Ke^{-\lambda t}$
  para todo $x \in \Lambda$ y para todo $t > 0$,

- $E^X = \langle X \rangle$ (i.e., E^X es la dirección del campo).

Definición 2.3 *Un conjunto compacto invariante Λ es parcialmente hiperbólico si este exhibe una descomposición continua y DX_t-invariante del subfribado tangente $T_\Lambda M = F^s_\Lambda \oplus F^c_\Lambda$ sobre Λ, con $F^s_x \neq 0 \neq F^c_x$ para todo $x \in \Lambda$ tal que*

$$\text{máx}\left\{\| DX_t(x)/_{F^s_x} \|, \frac{\| DX_t(x)/_{F^s_x} \|}{m(DX_t(x)/_{F^c_x})}\right\} \leq Ke^{-\lambda t}, \quad \textit{para todo } x \in \Lambda$$

y para todo $t > 0$.

Llamaremos al subfibrado F^c_Λ la dirección central de Λ.

Nótese que $\frac{\|DX_t(x)/_{F^s_x}\|}{m(DX_t(x)/_{F^c_x})} \leq Ke^{-\lambda t}$ implica que para $x \in \Lambda$ con $v_x \in T_xM \setminus (F^c_x \cup F^s_x)$, el ángulo entre $DX_t(x) \cdot v_x$ y $F^c_{X_t(x)}$ tiende a cero exponencialmente cuando t tiende a infinito. Diremos que esta situación significa que F^s_Λ domina a F^c_Λ.

Definimos para cada $x \in M$, $O = \{X_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$ la órbita de X que pasa a través de x.

La teoría de las variedades invariantes afirma que si Λ es un conjunto hiperbólico de X_t, y $p \in \Lambda$, entonces los conjuntos

$$W^{ss}(p) = \{x \in M : \lim_{t \to \infty} d(X_t(x), X_t(p)) = 0\}$$

$$W^{uu}(p) = \{x \in M : \lim_{t \to -\infty} d(X_t(x), X_t(p)) = 0\}$$

son subvariedades inmersas en M de clase C^1. Se llamarán a estos conjuntos variedad estable fuerte asociada a p y variedad inestable fuerte asociada a p respectivamente.

Definición 2.4 *Dada una órbita O, se definen respectivamente la variedad estable e inestable asociada a O como*

$$W^s(O) = \bigcup_{x \in O} W^{ss}(x) \qquad\qquad W^u(O) = \bigcup_{x \in O} W^{uu}(x).$$

Además diremos que O es una órbita cerrada hiperbólica si es hiperbólica como un conjunto compacto invariante.

Definición 2.5 *Diremos que γ es una órbita homoclínica de una órbita cerrada periódica hiperbólica O, si $\gamma \subset W^s(O) \cap W^u(O)$. Si además esta intersección es transversal, es decir, si $T_pM = T_pW^s(O) + T_pW^u(O)$ para algún $p \in \gamma$ y por ende para todo punto de la órbita, γ se denomina una órbita homoclínica transversa de O.*

Definición 2.6 *Se define la clase homoclínica de una órbita periódica hiperbólica O, como la clausura de la unión de las órbitas homoclínicas transversas de O. Denotaremos esta clase como $H(O)$.*

Definición 2.7 *Un conjunto Λ es una clase homoclínica si $\Lambda = H(O)$ para alguna órbita periódica hiperbólica O.*

Definición 2.8 *Una singularidad σ de X es tipo Lorenz si posee dos valores propios reales λ_s, λ_u con $\lambda_s < 0 < -\lambda_s < \lambda_u$, tal que la parte real de los otros valores propios está fuera del intervalo $[\lambda_s, \lambda_u]$.*

2.1. Motivación

Miremos ahora con más detalle, el ejemplo mencionado anteriormente que resulta ser una clase homoclínica sin ser singular hiperbólico. De éste hay que resaltar lo siguiente.

Se considera una sección transversal Σ para σ, la cual tiene asociada una función de retorno $\mathit{\Pi}(x, y) = (f(x), g(x, y))$ la cual preserva y contrae la foliación vertical en Σ. Se asume que los valores propios asociados a las singularidades cumplen la relación

$$\left(\frac{-\lambda_s}{\lambda_u}\right)\left(\frac{-\lambda_s'}{\lambda_u'}\right) < 1.$$

Tomando la saturación del conjunto maximal invariante en Σ determinado por Π a través del flujo, se va a tener existe un conjunto Λ el cual resulta ser un *attracting* parcialmente hiperbólico. Si además $f(x)$ preserva orientación y posee derivada $f'(x) > \sqrt{2}$, se puede argumentar como en [1] para probar que Λ es una clase homoclínica. Como consecuencia del Teorema de Birkhoff-Smale, se tendrá que el conjunto Λ es transitivo. De todo lo anterior se sigue que Λ es un atractor parcialmente hiperbólico el cual es una clase homoclínica.

Este atractor posee las siguientes características:

- El fibrado central es de dimensión 2.
- Posee una singularidad σ la cual tiene asociada dos valores propios reales λ_s, λ_u que satisfacen la relación $\lambda_s < 0 < -\lambda_s < \lambda_u$, y la parte real de los demás valores propios está fuera del intervalo $[\lambda_s, \lambda_u]$.
- Del hecho $f'(x) > \sqrt{2}$ se obtiene que f es localmente eventualmente sobreyectiva (o L.E.O. por sus siglas en inglés) con lo cual la variedad estable de σ resulta ser densa en Λ.

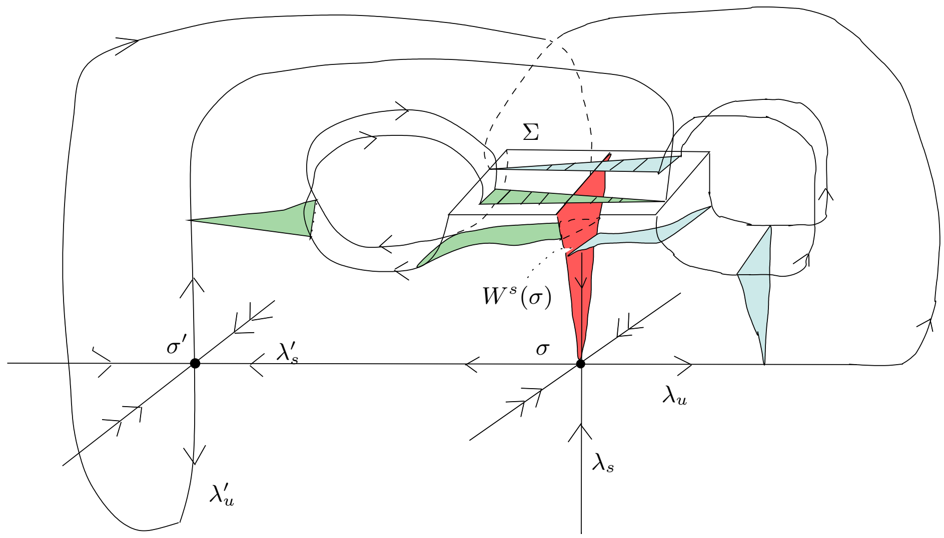


Figura 2-1: Atractor Λ

- Como consecuencia de *connecting-lemma* (ver [7]) aplicado al lado derecho de la variedad inestable de σ, se tendrá que existe una órbita periódica hiperbólica O tal que $W^u(\sigma) \cap W^s(O) \neq \emptyset$. Donde σ y O actúan respectivamente como el α-límite y ω-límite de algún punto $p \in \Lambda$.

Se verá que de estas 4 propiedades establecen condiciones suficientes para que un atractor parcialmente hiperbólico de un campo vectorial de clase C^1 sea una clase homoclínica.
Más precisamente, el objetivo del presente trabajo consiste en desarrollar el siguiente teorema

Teorema Principal: *Un atractor parcialmente hiperbólico Λ con dirección central bidimensional es una clase homoclínica si este posee una órbita periódica hiperbólica O y una singularidad tipo Lorenz σ con $W^u(\sigma) \cap W^s(O) \neq \emptyset$, tal que $W^s(\sigma)$ es densa en Λ.*

3 Propiedades de variedades invariantes

Consideremos un campo vectorial X de clase C^1 definido sobre una variedad compacta M de dimensión n, $n \geq 3$.

Definición 3.1 *Una singularidad σ de X es cuasi-Lorenz si posee dos valores propios reales λ_s, λ_u con $\lambda_s < 0 < \lambda_u$, tal que la parte real de los otros valores propios esta fuera del intervalo $[\lambda_s, \lambda_u]$.*

Teniendo esto en cuenta, existen k, r enteros no negativos de manera tal que $k + r + 2 = n$ y los valores propios de σ cumplen la relación

$$Re(\lambda_1^{ss}) \leq \cdots \leq Re(\lambda_k^{ss}) < \lambda_s < 0 < \lambda_u < Re(\lambda_1^{uu}) \leq \cdots \leq Re(\lambda_r^{uu}).$$

Se sigue de la definición de variedad estable y variedad estable fuerte introducida en el capítulo 2, que para una singularidad cuasi-Lorenz σ se va a tener que $W^{ss}(\sigma) = W^s(\sigma)$. En vista de los resultados que prosiguen se procede a dar la siguiente definición:

Definición 3.2 *Para una singularidad cuasi-Lorenz σ, consideramos el conjunto*

$$W^s(\sigma) = \{x \in M : \lim_{t \to \infty} d(X_t(x), \sigma) = 0\}$$

de manera que en σ, este conjunto sea tangente a $\langle \lambda_1^{ss}, \ldots, \lambda_k^{ss}, \lambda_s \rangle$. $W^s(\sigma)$ se denomina la variedad estable asociada a σ.

El conjunto $W^{ss}(\sigma) \subset W^s(\sigma)$ que es tangente en σ al espacio $\langle \lambda_1^{ss}, \ldots, \lambda_k^{ss} \rangle$ se denomina la variedad estable fuerte asociada a σ.

Por lo anterior, la variedad estable $W^s(\sigma)$ y la variedad inestable $W^u(\sigma)$ asociadas a la singularidad, están bien definidas y son tangentes en σ a $E^s_\sigma = \langle \lambda_1^{ss}, \ldots, \lambda_k^{ss}, \lambda_s \rangle$ y $E^u_\sigma = \langle \lambda_1^{uu}, \ldots, \lambda_r^{uu}, \lambda_u \rangle$ respectivamente. Por otra parte, existe una única variedad estable fuerte $W^{ss}(\sigma) \subset W^s(\sigma)$ tangente en σ al espacio $E^{ss} = \langle \lambda_1^{ss}, \ldots, \lambda_k^{ss} \rangle$.

Por otro lado el teorema 2.8 de [4] garantiza la existencia de una variedad central inestable $W^{cu}(\sigma)$ tangente en σ al espacio $E^{cu}_\sigma = \langle \lambda_1^{uu}, \ldots, \lambda_k^{uu}, \lambda_u, \lambda_s \rangle$. Aunque tal variedad central inestable no es única, sobre cada punto $q \in W^u(\sigma)$ estas variedades tienen la misma tangencia. Así, $T_q W^{cu}(\sigma)$ está bien definido para todo punto $q \in W^u(\sigma)$.

Teorema 3.1 .
Sea Λ un atractor parcialmente hiperbólico con dirección central bidimensional de X. Si O y $\sigma \in \Lambda$ son respectivamente una órbita periódica hiperbólica y una singularidad cuasi-Lorenz tales que $\Lambda = Cl\left(W^s\left(\sigma\right)\right)$ y $W^u\left(\sigma\right) \cap W^s\left(O\right) \neq \emptyset$, entonces se tiene que:

- *(H1) $dim(W^u\left(O\right)) = 2$ y $dim(W^u\left(\sigma\right)) = 1$.*
- *(H2) Existe una órbita regular $\gamma^* \subset W^u\left(\sigma\right) \cap W^s\left(O\right)$ tal que*

$$T_{\gamma^*}M = T_{\gamma*}W^{cu}\left(\sigma\right) + T_{\gamma^*}W^s\left(O\right).$$

- *(H3) Toda órbita regular $\gamma_0 \subset W^s\left(\sigma\right) \cap W^u\left(O\right)$ satisface*

$$T_{\gamma_0}M = T_{\gamma_0}W^s\left(\sigma\right) + T_{\gamma_0}W^u\left(O\right) \;\; y \; \gamma_0 \cap W^{ss}(\sigma) = \emptyset.$$

Para la demostración de este resultado se hará uso de los siguientes lemas. Consideremos además a Λ, σ y O con las propiedades enunciadas en el teorema.

Lema 1 *Para cada variedad invariante W de X que contiene a σ de manera que $T_\sigma W \subset F^s_\sigma$, se tiene que $\Lambda \cap W \cap W^s(\sigma) = \{\sigma\}$.*

Demostración. Dado que σ es la única singularidad contenida en $W^s(\sigma)$, es suficiente probar que en la intersección no hay puntos regulares.

Supongamos que existe un punto regular $x_0 \in \Lambda \cap W \cap W^s(\sigma)$.

Se afirma que $X(x_0) \in F^c_{x_0}$. En efecto, si $x_0 \notin W^u(\sigma')$ para toda singularidad σ', significa que exite un punto regular $z \in \alpha(x_0)$, además la invarianza del flujo garantiza que $X(z) \notin F^s_z$, pues $x_0 \in W^s(\sigma)$. También existe una sucesión $t_n \to \infty$ de manera que $X_{-t_n}(x_0) \to z$ y así, por la continuidad del campo y de la descomposición se obtiene $X(X_{-t_n}(x_0)) \to X(z)$ y $F^s_{X_{-t_n}(x_0)} \to F^s_z$. Ya que el ángulo entre $X(X_{-t_n}(x_0))$ y $F^s_{X_{-t_n}(x_0)}$ es suficientemente grande a partir de cierto n, se tendrá de la dominancia de F^s_Λ sobre F^c_Λ que el ángulo entre $DX_{t_n}(X_{-t_n}(x_0))(X(X_{-t_n}(x_0)))$ y $DX_{t_n}(F^c_{X_{-t_n}(x_0)})$ converge a cero cuando n tiende a infinito. Sigue de la invarianza del flujo y de la regla de la cadena que

$$DX_{t_n}(X_{-t_n}(x_0))(X(X_{-t_n}(x_0))) = X(x_0) \;\; y \;\; DX_{t_n}(F^c_{X_{-t_n}(x_0)}) = F^c_{x_0}.$$

De lo anterior se concluye que $X(x_0) \in F^c_{x_0}$.

Consideremos ahora el caso en que $x_0 \in W^u(\sigma')$ para toda singularidad σ'. Ya que $T_{\sigma'}W^u(\sigma') \cap F^s_{\sigma'} = \{0\}$, se obtiene directamente de la dominancia del fibrado estable sobre el central que $T_{\sigma'}W^u(\sigma') \subset F^c_{\sigma'}$, lo que implica $T_{\sigma'}W^u(\sigma') \subset F^c_{x_0}$. Y como $X(x_0) \in T_{x_0}W^u(\sigma')$ se concluye que $X(x_0) \in F^c_{x_0}$.

Debido a que W es invariante se tiene que $X(x_0) \in T_{x_0}W$.

De esta manera,

$$X(x_0) \in T_{x_0}W \cap F^c_{x_0}.$$

De otra parte, al ser x_0 regular, se puede construir para cada t real, un vector v^t tangente a x_0 como sigue.

$$v^t = \frac{X(X_t(x_0))}{\|X(X_t(x_0))\|}.$$

Nuevamente por la invarianza de W y F^c_Λ tenemos que

$$v^t \in T_{X_t(x_0)}W \cap F^c_{X_t(x_0)}, \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Por la compacidad, se puede obtener una subsucesión $\{v^{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a cierto vector

$$v^\infty = \lim_{n\to\infty} v^{t_n}.$$

Por la continuidad de la norma, v^∞ es un vector unitario. Por otro lado, al tener $x_0 \in W^s(\sigma)$ se sigue que la sucesión $X_{t_n}(x_0)$ converge a σ con lo cual

$$v^\infty \in T_\sigma W \cap F^c_\sigma.$$

Ya que por hipótesis $T_\sigma W \subset F^s(\sigma)$ obtenemos que

$$v^\infty \in F^s_\sigma \cap F^c_\sigma.$$

Teniendo en cuenta que $T_\sigma M = F^s_\sigma \oplus F^c_\sigma$, se sigue que $v^\infty = 0$ lo cual es una contradicción.

De esta manera, σ es el único elemento en la intersección. ■

Lema 2 *$dim(W^u(O)) = 2$ y además*

$$T_xW^u(O) = F^c_x, \qquad \textit{para todo } x \in W^u(O). \tag{3-1}$$

Demostración.
Dado que Λ es un conjunto parcialmente hiperbólico y que por hipótesis la dirección central es de dimensión dos, se tiene que $dim(F^s_\Lambda) = n-2$ con lo cual $dim(W^s(O)) \geq n-1$. Veamos que $dim(W^s(O)) = n-1$. En efecto, si $dim(W^s(O)) = n$, la órbita O resultaría ser un conjunto *attracting* lo que implicaría que $O = \Lambda$. Este resultado no se puede tener debido a que $\sigma \in \Lambda \setminus O$. Por lo tanto, la dimensión de la variedad estable asociada a O tiene que ser

$n-1$ por lo que $dim(W^u(O)) = 2$.

La igualdad (3-1) se verificará en dos pasos. Consideremos primero un punto $x \in O$, debido a que el fibrado F^s_Λ contrae a través de la derivada, tenemos que $T_xW^u(O) \cap F^s_x = \{0\}$. Teniendo en cuenta que F^s_Λ domina a F^c_Λ, se puede asegurar que $T_xW^u(O) \subset F^c_x$. Del hecho de $T_xW^u(O)$ y F^c_x tener misma dimensión, se sigue la igualdad.

Para un elemento $x \in W^u(O)$ cualquiera, tenemos que $T_{X_{-t}(x)}W^u(O)$ está cerca a $T_pW^u(O)$ para algún $p \in O$ y un t suficientemente grande. Por otro lado el ángulo entre $T_{X_{-t}(x)}W^u(O)$ y $F^s_{X_{-t}(x)}$ es suficientemente grande, y como F^s_Λ domina a F^c_Λ se tiene que el ángulo entre $T_xW^u(O)$ y F^c_x puede ser tan pequeño como se desee. Por lo tanto, con lo cual $T_xW^u(O) \subset F^c_x$. La igualdad se vuelve a obtener debido a que los dos espacios tienen la misma dimensión. ■

Corolario 1 *$F^s_\sigma = E^{ss}_\sigma$, $F^c_\sigma = E^{cu}_\sigma$ y $\Lambda \cap W^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}$.*

Demostración.
Las dos primeras igualdades se obtienen de la unicidad de la descomposición del espacio tangente. La última igualdad es consecuencia del lema (1) tomando a $W = W^{ss}(\sigma)$. ■

Lema 3 *$E^u_\sigma = \langle \lambda_u \rangle$.*

Demostración.
Por hipótesis $\Lambda = Cl\,(W^s\,(\sigma))$, y del hecho de ser Λ un atractor se sigue que $\sigma \in \Lambda$. De esto último se puede afirmar que $W^u(\sigma) \subset \Lambda$, y ya que $W^u(\sigma) \cap W^s(O) \neq \emptyset$ se concluye que $O \subset \Lambda$. Nuevamente la condición de ser atractor implica $W^u(O) \subset \Lambda$. Debido a la densidad de $W^s(\sigma)$ se puede considerar una sucesión x_n de esta variedad de manera que vaya a converger a un elemento de $W^u(O) \setminus O$. Dado que Λ tiene una foliación fuertemente contractora, existe un n suficientemente grande tal que la foliación a través de x_n intersecta a $W^u(O)$, luego existe $p \in W^u(O) \cap W^s(\sigma)$ para el que se tiene

$$E^X_{X_t(p)} \subset T_{X_t(p)}W^s(\sigma) \cap T_{X_t(p)}W^u(O), \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{3-2}$$

Dado que p es un punto regular, para cada t podemos definir un vector unitario

$$v^t = \frac{X(X_t(p))}{\|X(X_t(p))\|}. \tag{3-3}$$

Por la invariancia del subfibrado tenemos que $v^t \in E^X_{X_t(p)}$ con lo que resulta

$$v^t \in T_{X_t(p)}W^s(\sigma) \cap T_{X_t(p)}W^u(O), \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{3-4}$$

Debido a que $X_t(p) \in W^u(O)$ se puede aplicar la fórmula (3-1) para obtener

$$v^t \in T_{X_t(p)}W^s(\sigma) \cap F^c_{X_t(p)}, \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{3-5}$$

Por otro lado, $X_t(p) \to \sigma$. Esto significa que existe una sucesión t_n tal que $v^{t_n} \to v^\infty$ donde v^∞ es un vector unitario en $T_\sigma M$. De (3-5) se obtiene

$$v^\infty \in T_\sigma W^s(\sigma) \cap F^c_\sigma. \tag{3-6}$$

Ahora, como $dim(F^c_\Lambda) = 2$ se tiene que $dim(F^s_\Lambda) = n-2$ con lo cual $n-2 \leq dim(W^s(\sigma)) \leq n$. Veamos que $dim(W^s(\sigma)) = n-1$. En efecto, la dimensión no puede ser n porque σ no es un sumidero. Si suponemos que $dim(W^s(\sigma)) = n-2$ se tendría que $T_\sigma W^s(\sigma) = F^s_\sigma$, pero por (3-6) significaría que $v^\infty \in F^s_\sigma(\sigma) \cap F^c_\sigma$ lo que implicaría que $v^\infty = 0$ lo cual es absurdo pues por construcción éste es un vector unitario. Se concluye así que $dim(W^s(\sigma)) = n-1$, es decir, $E^u_\sigma = \langle \lambda_u \rangle$. ■

Lema 4 *Si $\alpha \subset W^u(O) \cap W^s(\sigma)$ entonces $T_\alpha M = T_\alpha W^u(O) + T_\alpha W^s(\sigma)$.*
$\beta \subset W^s(O) \cap W^u(\sigma)$ y $E^u_\sigma = \langle \lambda_u \rangle$ implican $T_\beta M = T_\beta W^s(O) + T_\beta W^{cu}(\sigma)$.

Demostración.
Para la primera implicación basta observar que al tener $\alpha \subset W^u(O)$, el lema (2) implica $F^c_q = T_q W^u(O)$ para todo $q \in \alpha$. Ya que además F^s_Λ contrae, resulta que $F^c_q \subset T_q W^s(\sigma)$ con lo cual

$$T_q M = T_q W^u(O) + T_q W^s(\sigma), \qquad \textit{para todo} \quad q \in \alpha. \tag{3-7}$$

Por otro lado, el colorario (1) dice que $F^c_\sigma = T_\sigma W^{cu}(\sigma)$. Ahora, si consideramos un punto $q \in W^u(\sigma)$ por el λ-Lema fuerte *(Strong λ-lema)* [5], cualquier vector $v \notin T^{cu}_q(\sigma)$ es empujado hacia $W^{ss}(\sigma)$ bajo iterados negativos. Ya que además la descomposición parcialmente hiperbólica de Λ dada por $T_\Lambda M = F^s_\Lambda \oplus F^c_\Lambda$ es continua, se puede concluir que $F^c_q \subset T_q W^{cu}(\sigma)$ para todo $q \in W^u(\sigma)$.
Teniendo en cuenta que para cada $q \in W^u(\sigma)$ el espacio $T_q W^{cu}(\sigma)$ es bidimensional, ya que el lema (3) garantiza que E^{cu} es de dimendión dos, se obtiene que $F^c_q = T_q W^{cu}(\sigma)$ para todo $q \in W^u(\sigma)$. Nuevamente, ya que F^s_Λ domina a F^c_Λ se tiene que $E^X_q \subset F^c_q$ para todo $q \in W^u(\sigma)$.

Si ahora se considera una órbita $\beta \subset W^u(\sigma) \cap W^s(O)$. Debido a que F^s_Λ contrae se tendría que $F^s_q \subset T_q W^s(O)$ para todo $q \in \beta$ con lo cual

$$T_q M = T_q W^s(O) + T_q W^{cu}(\sigma), \qquad \textit{para todo} \quad q \in \beta. \tag{3-8}$$

Concluimos de esta manera la segunda implicación. ■

Demostración Teorema 3.1.
Sea Λ un atractor parcialmente hiperbólico con dirección central bidimensional de X. Si O y $\sigma \in \Lambda$ son respectivamente una órbita periódica hiperbólica y una singularidad cuasi-Lorenz tales que $\Lambda = Cl\left(W^s\left(\sigma\right)\right)$ y $W^u\left(\sigma\right) \cap W^s\left(O\right) \neq \emptyset$, entonces se tiene que:

$dim(W^u(O)) = 2$ debido al lema 2, por otro lado el lema 3 garantiza que $dim(W^u(\sigma)) = 1$ ya que la singularidad solo posee un valor propio con parte real positiva. De esta manera resulta $(H1)$.

Para obtener el resultado de $(H2)$ basta observar que al tener $W^u\left(\sigma\right) \cap W^s\left(O\right) \neq \emptyset$, existe una órbita regular $\gamma^* \subset W^u\left(\sigma\right) \cap W^s\left(O\right)$, la cual por la segunda implicación del lema 4 aplicada a $\rho = \gamma^*$ genera la descomposición pedida

$$T_{\gamma^*}M = T_{\gamma*}W^{cu}\left(\sigma\right) + T_{\gamma^*}W^s\left(O\right).$$

El item $(H3)$ se deduce en primera medida por el corolario 1 que establece que $\Lambda \cap W^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}$. Teniendo en cuenta que Λ es un atractor, se tiene que $W^u(O) \subset \Lambda$, con lo cual toda órbita regular $\gamma_0 \subset W^s\left(\sigma\right) \cap W^u\left(O\right)$ satisface $\gamma_0 \cap W^{ss}(\sigma) = \emptyset$. Por último, la primera implicación del lema 4 tomando $\alpha = \gamma_0$ conlleva a

$$T_{\gamma_0}M = T_{\gamma_0}W^s\left(\sigma\right) + T_{\gamma_0}W^u\left(O\right).$$

De esta manera queda demostrado el Teorema. ■

4 Órbitas genéricas, dobladas y equivalentes

4.1. Preliminares

Sea X un campo vectorial C^1 sobre una variedad compacta, conexa y sin frontera. Fijamos una órbita periódica hiperbólica O y una singularidad cuasi-Lorenz σ de X, las cuales satisfacen (H1) y (H2) del Teorema (3.1). Denotamos por $\langle\lambda_s\rangle$ el espacio propio asociado al valor propio λ_s de σ.

Para cada vector unitario $e \in \langle\lambda_s\rangle$, se define el fibrado $D^{cu}(e)$ sobre γ^* cuya fibra en $q \in \gamma^*$ es el semiespacio $D_q^{cu}(e)$ definido por:

$$D_q^{cu}(e) = \left\{ v \in T_q W^{cu}(\sigma) : \lim_{t\to\infty} \frac{DX_{-t}(v)}{\parallel DX_{-t}(v) \parallel} = e \right\}.$$

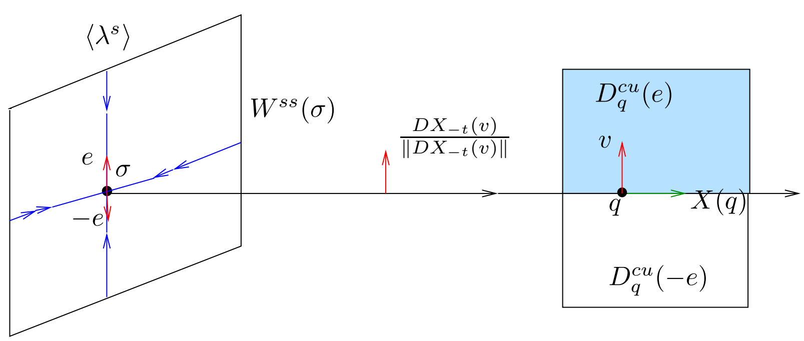


Figura 4-1: Definición de $D^{cu}(e)$.

Definición 4.1 *Para cada vector unitario $e \in \langle\lambda_s\rangle$ definimos una subvariedad $W^{u,in}(e)$ de $W^u(O)$, a partir del valor propio β de módulo mayor que 1, que está asociado a la aplicación de Poincaré de O y el cual es real.*

1. *Si $\beta < 0$, $W^{u,in}(e) = W^u(O)$.*

2. *Si $\beta > 0$, entonces $W^u(O)$ es un cilindro de manera tal que $W^u(O) \setminus O$ tiene dos componentes conexas. Para $v \in D_q^{cu}(e)$, $X_{t_n}(q) \to p$, para algún $p \in O$ y alguna sucesión $t_n \to \infty$. Se define*

$$e^u(e) = \lim_{n\to\infty} \frac{DX_{t_n}(v)}{\| DX_{t_n}(v) \|}.$$

$W^{u,in}(e)$ es la parte conexa de $W^u(O) \setminus O$ que contiene a $e^u(e)$.

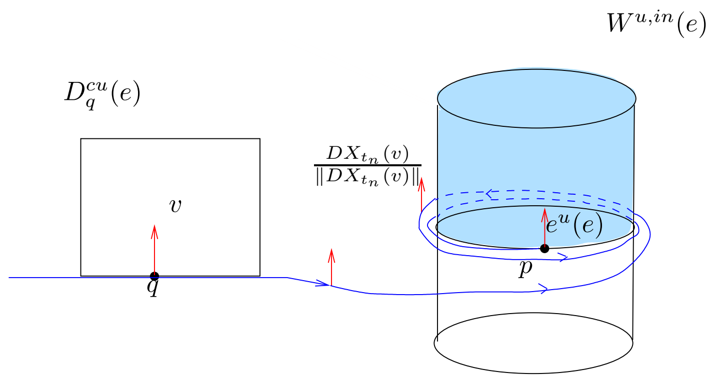


Figura 4-2: Definición de $W^{u,in}(e)$.

Nótese que para $\beta > 0$, $W^{u,in}(e)$ está bien definida. En efecto, se sigue del segundo item de Teorema (3.1) que $e^u(e) \in T_pW^{uu}(p)$, lo que significa que $e^u(e)$ no depende de la sucesión $\{t_n\}$ ni del vector v en el espacio tangente asociado a q y además $e^u(e)$ resulta ser transversal a la órbita O. Esto significa que la componente conexa de $W^u(O) \setminus O$ que define a $W^{u,in}(e)$ queda bien determinada.

4.2. Órbitas genéricas

Definición 4.2 *Una órbita $\gamma \subset W^s(\sigma)$ es genérica si*

$$\gamma \cap W^{ss}(\sigma) = \emptyset.$$

Para una órbita genérica γ consideramos el vector unitario

$$e^s(\gamma) = -\lim_{t\to\infty} \frac{X(X_t(q))}{\| X(X_t(q)) \|}.$$

el cual no depende de q, está contenido en $\langle \lambda_s \rangle$ y es transversal a $W^{ss}(\sigma)$.

Definición 4.3 *Se define la subvariedad $W^{in}(\gamma)$ como la componente conexa de $W^s(\sigma) \setminus W^{ss}(\sigma)$ con $e^s(\gamma)$ como punto interior. Además se define $W^{out}(\gamma) = W^{u,in}(e^s(\gamma))$.*

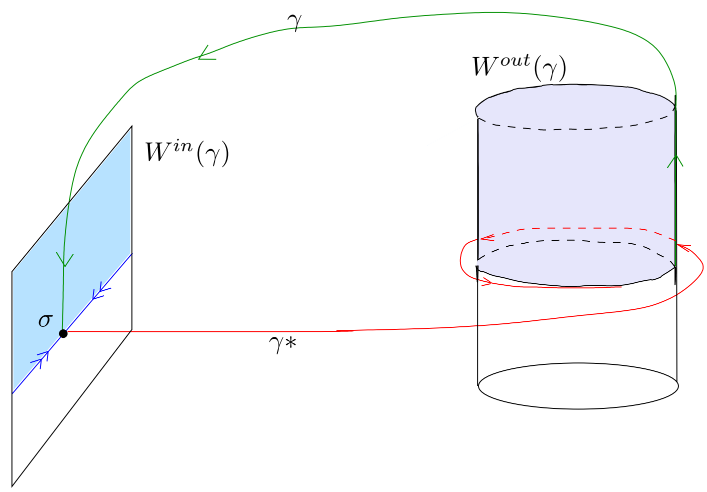


Figura 4-3: Definición de $W^{in}(\gamma)$ y $W^{out}(\gamma)$.

Lema 5 *Si $\gamma \subset W^s(\sigma)$ es una órbita genérica, I es una curva que intersecta transversalmente a $W^{in}(\gamma)$ y Σ una subvariedad intersectando a $W^{out}(\gamma)$ transversalmente, entonces $\bigcup_{t\geq 0} X_t(I)$ intersecta a Σ transversalmente.*

Demostración.
Es una consecuencia directa del *lema de inclinación*. Nótese que una subvariedad I que intersecte transversalmente a $W^{in}(\gamma)$ cortará a la órbita γ^*. Teniendo en cuenta que $\gamma^* \subset W^s(O) \cap W^u(\sigma)$, a través de $W^u(\sigma)$ mediante iterados positivos cortará a la variedad estable de la órbita. Por lo tanto, partes compactas de la subvariedad I convergeran a la variedad inestable de O. Como Σ intersecta transversalmente a $W^{out}(\gamma) \subset W^u(O)$ se concluye que $\bigcup_{t\geq 0} X_t(I)$ intersecta a Σ transversalmente. ■

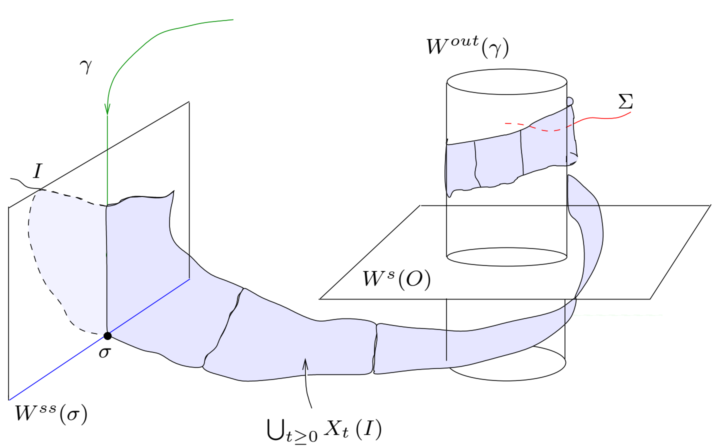


Figura 4-4: Representación del Lema.

4.3. Órbitas dobladas y equivalentes

Definición 4.4 *Decimos que una órbita genérica* $\gamma \subset W^u(O) \cap W^s(\sigma)$ *no se dobla (Respectivamente se dobla) si* $\gamma \subset W^{out}(\gamma)$ *(respectivamente si* $\gamma \not\subseteq W^{out}(\gamma)$*). Sea* $\gamma' \subset W^s(\sigma)$ *otra órbita genérica, Diremos que* γ *y* γ' *son equivalentes si* $W^{out}(\gamma) = W^{out}(\gamma')$*, y lo denotaremos* $\gamma \sim \gamma'$*.*

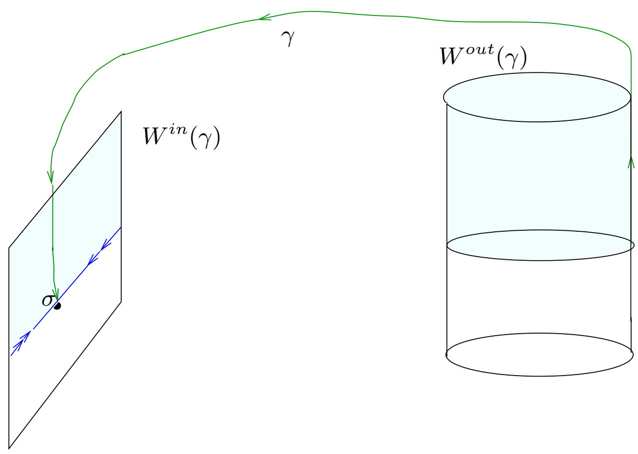


Figura 4-5: Órbita que no se dobla.

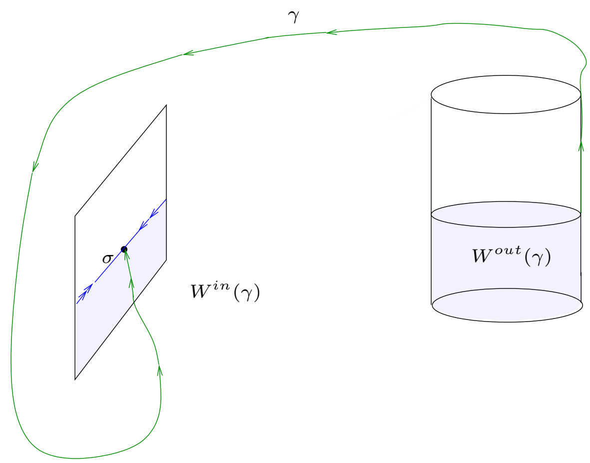


Figura 4-6: Órbita que se dobla.

Definición 4.5 *Para toda órbita genérica* $\gamma_0 \subset W^u(O) \cap W^s(\sigma)$ *que satisfaga*

$$T_{\gamma_0}M = T_{\gamma_0}W^u(O) + T_{\gamma_0}W^s(\sigma)$$

se define el conjunto $[\gamma_0] = Cl\left(\bigcup_{\gamma \in A_{\gamma_0}} \gamma\right)$.

Donde A_{γ_0} es el conjunto formado por todas las órbitas genéricas $\gamma \subset W^u(O) \cap W^s(\sigma)$, con $\gamma \sim \gamma_0$ tales que

$$T_\gamma M = T_\gamma W^u(O) + T_\gamma W^s(\sigma). \tag{4-1}$$

Proposición 4.1 *Sean* $\gamma_0 \subset W^u(O) \cap W^s(\sigma)$ *y* $\gamma_1 \subset W^{out}(\gamma_0) \cap W^s(\sigma)$ *órbitas genéricas que satisfacen (4-1), entonces se tiene:*

1. *Si* γ_1 *no se dobla, entonces* $\gamma_0 \sim \gamma_1$.

2. *Si* γ_0 *y* γ_1 *se doblan, entonces hay una órbita* $\gamma_2 \subset W^u(O) \cap W^s(\sigma)$ *que no se dobla.*

3. *Si* γ_0 *no se dobla y* γ_1 *se dobla, entonces todo* $x \in W^{out}(\gamma_1) \cap W^s(\sigma)$ *puede ser aproximada por puntos en* $W^{out}(\gamma_1) \cap W^s(\sigma)$ *para los cuales la órbita es genérica y no se dobla.*

Demostración.
Para la primera implicación basta observar que $\gamma_1 \subset W^{out}(\gamma_1)$, y ya que $\gamma_1 \subset W^{out}(\gamma_0)$, se tiene que $\gamma_1 \subset W^{out}(\gamma_0) \cap W^{out}(\gamma_1)$. Puesto que las componentes conexas de $W^u(O) \setminus O$ son disjuntas, se concluye que $W^{out}(\gamma_0) = W^{out}(\gamma_1)$, es decir, las dos órbitas son equivalentes.

Veamos como se obtiene la segunda proposición. Ya que $\gamma_1 \not\subset W^{out}(\gamma_1)$ y $\gamma_1 \subset W^{out}(\gamma_0)$, tenemos que $W^{out}(\gamma_0) \cap W^{out}(\gamma_1) = \emptyset$. Consecuentemente $\gamma_0 \subset W^{out}(\gamma_1)$, ya que γ_0 se dobla. Ahora, fijamos una subvariedad $\Sigma_0 \subset W^{in}(\gamma_0)$ transversal a $W^{out}(\gamma_1)$ en algún punto de γ_0, y otra subvariedad $I_0 \subset W^{out}(\gamma_0)$ transversal a $W^{in}(\gamma_1)$ en algún punto de γ_1 la cual existe pues $\gamma_1 \subset W^{out}(\gamma_0)$. Aplicando el Lema 5 a $\gamma = \gamma_1$, $I = I_0$ y $\Sigma = \Sigma_0$ se puede considerar una órbita γ_2 que vaya de I_0 a Σ_0. De esta manera $W^{in}(\gamma_2) = W^{in}(\gamma_0)$, luego $W^{out}(\gamma_2) = W^{out}(\gamma_0)$. Puesto que $I_0 \subset W^{out}(\gamma_2)$ podemos afirmar que $\gamma_2 \in W^{out}(\gamma_0)$, así $\gamma_2 \in W^{out}(\gamma_2)$. Por lo tanto se puede concluir que γ_2 no se dobla.

Ahora probemos (3). Consideremos $x \in W^s(\sigma) \cap W^{out}(\gamma_1)$ y una pequeña subvariedad unidimensional $I_x \subset W^{out}(\gamma_1)$ transversal a la variedad estable de σ en x. Para este $x \in W^s(\sigma)$, se tiene que pertenece ya sea a $W^{in}(\gamma_0)$ ó a $W^{in}(\gamma_1)$. Si $W^{in}(\gamma_1)$, se puede tomar una subvariedad $\Sigma_x \subset W^{in}(\gamma_1)$ transversal a $W^{out}(\gamma_1)$ en x. Nuevamente por el Lema 5, existe $y \in I_x$ tal que la órbita γ_y asociada a y intersecta a Σ_x en algún punto. Como en el resultado anterior, la órbita γ_y es genérica y no se dobla. La prueba para el caso en que $x \in W^{in}(\gamma_0)$ es análoga. ∎

5 Un Teorema tipo Birkhoff-Smale

Sea F una sección transversal en X. Denotamos por TF el fibrado tangente de F. Para $x \in F$, $\theta > 0$ y un subespacio lineal $V_x \subset T_xF$ definimos el cono alrededor de V_x en T_xF con inclinación θ como

$$C_{\theta,V_x}(x) = \{v_x \in T_xF : \angle(v_x, V_x) \leq \theta\}.$$

Un campo de conos en F es una función continua

$$C_\theta : x \in F \to C_{\theta,V_x}(x) \subset T_xF.$$

Para una descomposición en suma directa $A_x \oplus B_x = T_xF$ de T_xF, se denominará a $C_\theta^h(x) = C_{\theta,A_x}(x)$, el cono horizontal de inclinación θ en F. Respectivamente se llamará a $C_\theta^v(x) = C_{\theta,B_x}(x)$, el cono vertical de inclinación θ en F.

De manera similar se definen los campos de cono horizontal y vertical.

Recordemos que una singularidad σ de X es tipo Lorenz si posee dos valores propios reales λ_s, λ_u con $\lambda_s < 0 < -\lambda_s < \lambda_u$, tal que la parte real de los otros valores propios esta fuera del intervalo $[\lambda_s, \lambda_u]$.

Sean O y σ respectivamente una órbita periódica hiperbólica y una singularidad tipo Lorenz de X las cuales cumplen:

- (H1) $dim(W^u(O)) = 2$ y $dim(W^u(\sigma)) = 1$.
- (H2) Existe una órbita regular $\gamma^* \subset W^u(\sigma) \cap W^s(O)$ tal que

$$T_{\gamma^*}M = T_{\gamma*}W^{cu}(\sigma) + T_{\gamma^*}W^s(O).$$

Consideremos además $\gamma_0 \subset W^s(\sigma) \cap W^u(O)$ una órbita que no se dobla, la cual satisface

$$T_{\gamma_0}M = T_{\gamma_0}W^s(\sigma) + T_{\gamma_0}W^u(O).$$

Para los siguientes tres resultados fijaremos a σ, O y γ_0 en términos de que satisfagan las propiedades anteriormente descritas.

Proposición 5.1 *Hay una órbita periódica hiperbólica P, para la cual existen órbitas regulares α y ρ tales que:*

$$\alpha \subset W^{out}(\gamma_0) \cap W^s(P) \qquad y \qquad T_\alpha M = T_\alpha W^{out}(\gamma_0) + T_\alpha W^s(P). \tag{5-1}$$

$$\rho \subset W^{in}(\gamma_0) \cap W^u(P) \qquad y \qquad T_\rho M = T_\rho W^{in}(\gamma_0) + T_\rho W^u(P). \tag{5-2}$$

Demostración.
La demostración se hará trabajando con la aplicación de Poincaré asociada a la órbita O. Como $dim(W^u(O)) = 2$, la órbita O tiene asociada un valor propio real β con módulo mayor que 1.

- **Caso 1** $\beta > 0$: Fijemos $p \in O$ y consideremos S, una sección transversal a X en p. Sobre S establecemos un sistema de coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^{n-2}$x $\mathbb{R}$ en S tal que:
  - $S = \{||x||, |y| \leq 2\}$.
  - $p = (0, 0)$.
  - $W^s_{loc}(p) \subset W^s(O)$, donde $W^s_{loc}(p) = \{||x|| \leq 2, |y| = 0\}$.
  - $W^u_{loc}(p) \subset W^u(O)$, donde $W^u_{loc}(p) = \{||x|| = 0, |y| \leq 2\}$.

Sea $\mathit{\Pi} : Dom(\mathit{\Pi}) \subset S \to S$ la función de retorno inducida por X en S. Diremos que $I \subset S$ es una curva horizontal si es el gráfico de una función suave φ con dominio en $W^s_{loc}(p)$ y rango en $W^u_{loc}(p)$. Si el dominio de φ es toda $W^s_{loc}(p)$ entonces I será una curva horizontal completa. De manera similar definimos curva vertical y curva vertical completa intercambiando $W^s_{loc}(p)$ con $W^u_{loc}(p)$. Llamaremos a $R \subset S$ un rectángulo horizontal si este es acotado por dos curvas horizontales completas.

Sean q_0 y q^* los primeros puntos de intersección de las órbitas γ_0 y γ^* con S respectivamente.

Como $W^{in}(\gamma_0)$ es un abierto en $W^s(\sigma)$ y contiene a γ_0, tenemos que:

$$T_{\gamma_0} M = T_{\gamma_0} W^{in}(\gamma_0) + T_{\gamma_0} W^u(O).$$

Seleccionemos una curva horizontal I_0 a través de q_0 contenida en $W^{in}(\gamma_0) \cap S$ tal que $I_0 \cap Dom(\mathit{\Pi}) = \emptyset$. Ya que $q^* \in \gamma^*$, existe un rectángulo horizontal R_0 con I_0 como una curva horizontal actuando como un borde de este rectángulo, de manera que $R_0 \setminus I_0 \subset Dom(\mathit{\Pi})$. Las órbitas a través de $R_0 \setminus I_0$ pasan cercanas a σ antes de intersectar a S.
Denotaremos la imagen de $R_0 \setminus I_0$ como:

$$\hat{R}_0 = \mathit{\Pi}(R_0 \setminus I_0).$$

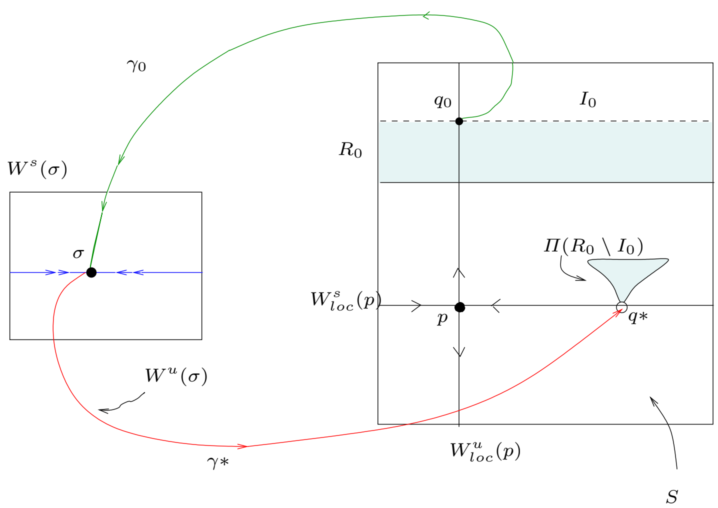


Figura 5-1: Sección transversal.

Sean C^v, C^h respectivamente, los campos de conos vertical y horizontal en S. Como E^{ss}_σ contrae más que $E^s_\sigma \oplus E^u_\sigma$, al considerar R_0 suficientemente cerca de I_0 se tendrá que la derivada $D\Pi$ de Π envie $C^v|_{\hat{R}_0}$ en C^v. Como σ es tipo Lorenz, se tiene además que $D\Pi$ expande $C^v|_{\hat{R}_0}$.

Por otro lado, debido al Lema de Inclinación $D\Pi^{-1}$ lleva y expande a $C^h|_{\hat{R}_0}$ dentro de C^h. De nuevo por el Lema de Inclinación, puedo considerar una sucesión de rectángulos R_0^k que converge a $W^s_{loc}(p)$ de manera que $\Pi^k\left(R_0^k\right) = R_0$ para un k suficientemente grande.

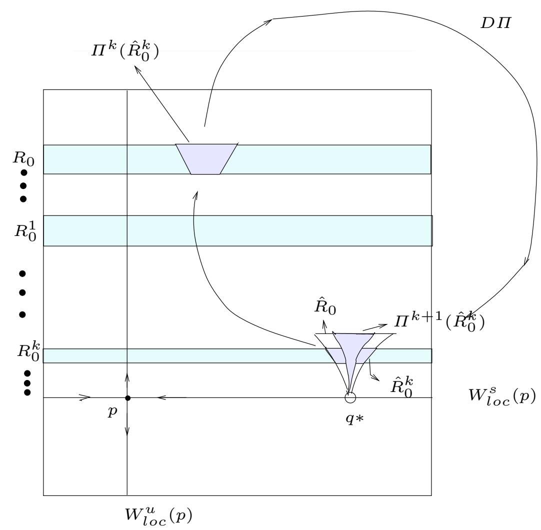
Denotamos

$$\hat{R}_0^k = R_0^k \cap \hat{R}_0.$$

$\Pi^k(\hat{R}_0^k)$ es una banda vertical en R_0 y $D\Pi^k$ manda y expande $C^v|_{\hat{R}_0^k}$ en $C^v|_{R_0}$. De esta forma $\Pi^{k+1}(\hat{R}_0^k)$ atraviesa completamente $\hat{R}_0^k$, por lo tanto existe una órbita periódica hiperbólica P_k intersectando $\hat{R}_0^k$ en algún punto z_k. Vamos a tener que $z_k \to q^*$ y $\Pi^k(z_k) \to q_0$ cuando $k \to \infty$.

Veamos que $P = P_k$ satisface la conclusión de la proposición. Como $W^s(P) \cap S$ contiene una curva horizontal cercana a $W^s_{loc}(p)$, esta intersecta a $W^u_{loc}(p)$ transversalmente en algún punto. La órbita α que pasa por ese punto satisface (5-1). Además, $W^u(P) \cap S$ intersecta $\Pi^{-k}(I_0)$ trasversalmente en algún punto. La órbita ρ que contiene ese punto satisface (5-2).

- **Caso 2** $\beta < 0$: La prueba es análoga al caso 1, solo que se define $\hat{R}_0^k = R_0^{2k} \cap \hat{R}_0$ en



vez de $\hat{R}_0^k = R_0^k \cap \hat{R}_0$.

■

Proposición 5.2 *P es tal que* $[\gamma_0] \subset H(P)$.

Demostración.
Sea $\gamma \subset W^u(O) \cap W^s(\sigma)$ una órbita genérica equivalente a γ_0 y que satisface (4-1).
Si $q \in \gamma$ entonces $X(q) \in T_qW^u(O) \cap T_qW^s(\sigma)$, por lo tanto $E_q^X \subset T_qW^u(O) + T_qW^s(\sigma)$.
Ya que γ cumple (4-1) tenemos que

$$n = dim(T_qW^u(O)) + dim(T_qW^s(\sigma)) - dim((T_qW^u(O)) \cap T_qW^s(\sigma)).$$

Es decir, $n = 2 + (n-1) - dim(T_qW^u(O) \cap T_qW^s(\sigma))$ con lo cual

$$dim(T_qW^u(O) \cap T_qW^s(\sigma)) = 1.$$

Ya que E_q^X es unidimensional concluimos que

$$T_\gamma W^u(O) \cap T_\gamma W^s(\sigma) = E_\gamma^X. \tag{5-3}$$

Veamos que $\gamma \subset H(P)$.

Consideremos $q \in \gamma$ fijo, por la existencia de α satisfaciendo (5-1), podemos tomar una subvariedad $\Sigma \subset W^s(P)$ de manera que intersecte a $W^{out}(\gamma_0)$ transversalmente. Como $\gamma \sim \gamma_0$, tenemos que Σ intersecta a $W^{out}(\gamma)$ transversalmente. Ya que $dim\,(W^u(O)) = 2$, de (5-3) podemos seleccionar una curva $I \subset W^u(O)$ que intersecte transversalmente $W^s(\sigma)$ en q. Debido a que $q \in \gamma$, podemos aplicar el lema 5 para ver que Σ también intersecta a $\bigcup_{t\geqslant 0} X_t(I)$. Como $W^s(P)$ es invariante, también corta transversalmente a I. Dado que I está cerca de q, existe una subvariedad $\Sigma' \subset W^s(P)$ intersectando a $W^{out}(\gamma_0)$ transversalmente en algún punto z' cerca de q.

Denotemos por $A \pitchfork B$ la intersección transversal entre A y B. Ahora se probará que $z' \in H(P)$.

Sea Σ'' una bola abierta en Σ' centrada en z', tenemos que $z' \in \Sigma'' \pitchfork W^{out}(\gamma_0) \neq \emptyset$. Como ρ es genérica y $T_\rho M = T_\rho W^u(P) + T_\rho W^{in}(\gamma_0)$, resulta

$$T_\rho W^u(P) \cap T_\rho W^{in}(\gamma_0) = E^X_\rho.$$

Así, puedo tomar una curva $I'' \subset W^u(P)$ tal que $I'' \pitchfork W^{in}(\gamma_0) \neq \emptyset$. Por otro lado, $z' \in \Sigma'' \pitchfork W^{in}(\gamma)$ ya que $\gamma \sim \gamma_0$. Nuevamente por el Lema, $(\bigcup_{t\geqslant 0} X_t(I'')) \pitchfork \Sigma''$, por lo cual existe $z'' \in W^u(P) \pitchfork \Sigma''$. Ya que $\Sigma'' \subset W^s(P)$, tenemos que $z'' \in H(P)$. Como $H(P) \cap \Sigma'' \neq \emptyset$, Σ'' es arbitrario y $H(P)$ es cerrado, concluimos que $z' \in H(P)$.

Debido a que z' esta cerca de q, tenemos que $q \in H(P)$ y así $\gamma \subset H(P)$. Ya que γ es arbitrario, concluimos que $[\gamma_0] \subset H(P)$. ■

Teorema 5.1 *Sean O y σ respectivamente una órbita periódica hiperbólica y una singularidad tipo Lorenz de X las cuales cumplen:*

- *(H1) $dim(W^u(O)) = 2$ y $dim(W^u(\sigma)) = 1$.*
- *(H2) Existe una órbita regular $\gamma^* \subset W^u(\sigma) \cap W^s(O)$ tal que*

$$T_{\gamma^*}M = T_{\gamma*}W^{cu}(\sigma) + T_{\gamma^*}W^s(O).$$

Consideremos además $\gamma_0 \subset W^s(\sigma) \cap W^u(O)$ una órbita que no se dobla, la cual satisface

$$T_{\gamma_0}M = T_{\gamma_0}W^s(\sigma) + T_{\gamma_0}W^u(O).$$

Entonces, $[\gamma_0]$ está contenida en una clase homoclínica de X.

Demostración.
Por las proposiciones 5.1 y 5.2, $[\gamma_0] \subset H(P)$. ■

6 Teorema Principal

Teorema 6.1 *Un atractor parcialmente hiperbólico* Λ *con dirección central bidimensional es una clase homoclínica si este posee una órbita periódica hiperbólica* O *y una singularidad tipo Lorenz* σ *con* $W^u(\sigma) \cap W^s(O) \neq \emptyset$*, tal que* $W^s(\sigma)$ *es densa en* Λ*.*

Demostración.
Es suficiente encontrar una clase homoclínica H que contenga a Λ.

Tenemos que σ y O satisfacen las conclusiones del teorema 3.1, en particular $[\gamma_0]$ está bien definida para toda órbita $\gamma_0 \subset W^u(O) \cap W^s(\sigma)$.

Fijemos $\gamma \subset W^s(\sigma)$. Por $(H3)$, γ es una órbita genérica y además $W^{out}(\gamma)$ está bien definida. Como $W^u(O) \subset \Lambda \subset Cl(W^s(\sigma))$, tenemos que $W^u(O) \cap W^s(\sigma)$ es densa en $W^u(O)$. Así,

$$Cl(W^{out}(\gamma)) = Cl(W^{out}(\gamma) \cap W^s(\sigma)).$$

Dado que Λ es transitivo, $\Lambda \subset Cl(W^{out}(\gamma))$.

Por lo tanto

$$\Lambda = Cl(W^{out}(\gamma) \cap W^s(\sigma)), \tag{6-1}$$

para toda órbita genérica γ.

Veamos que existe una órbita $\gamma_0 \subset W^u(O) \cap W^s(\sigma)$ que no se dobla tal que $\Lambda \subset [\gamma_0]$.

De la segunda propiedad de la proposición 4.1 del capítulo 4, existe una órbita $\gamma_0' \subset W^u(O) \cap W^s(\sigma)$ que no se dobla. Si ninguna órbita $\gamma_1 \subset W^{out}(\gamma_0') \cap W^s(\sigma)$ se dobla, tendriamos que $\gamma_1 \sim \gamma_0'$. Por lo tanto

$$Cl(W^{out}(\gamma_0) \cap W^s(\sigma)) \subset [\gamma_0'] .$$

De esta forma tomando $\gamma_0 = \gamma_0'$ se tendrá que (6-1) implica $\Lambda \subset [\gamma_0]$.

Ahora asumamos que existe una órbita $\gamma_1 \subset W^{out}(\gamma_0') \cap W^s(\sigma)$ que se dobla. De la tercera propiedad de la proposición 4.1 del capítulo 4, tenemos que $W^{out}(\gamma_1) \cap W^s(\sigma)$ está contenida en la clausura de las órbitas $\gamma \subset W^{out}(\gamma_1) \cap W^s(\sigma)$ que no se doblan. Tomemos una órbita $\gamma_0'' \subset W^{out}(\gamma_1) \cap W^s(\sigma)$ que no se dobla. Nuevamente, la proposición 4.1 del capítulo 4, $\gamma_1 \sim \gamma_0''$ con lo cual $W^{out}(\gamma_1) = W^{out}(\gamma_0'')$. Además, toda $\gamma \subset W^{out}(\gamma_0'') \cap W^s(\sigma)$ pertenece a $[\gamma_0'']$, es decir, $\gamma \subset W^{out}(\gamma_1) \cap W^s(\sigma)$ pertenece a $[\gamma_0'']$.

Como $W^{out}(\gamma_1) \cap W^s(\sigma)$ está contenida en la clausura de la órbitas $\gamma \subset W^{out}(\gamma_1) \cap W^s(\sigma)$ que no se doblan, obtenemos que $Cl(W^{out}(\gamma_1) \cap W^s(\sigma)) \subset [\gamma_0'']$ y así $\Lambda \subset [\gamma_0'']$. Tomando $\gamma_0 = \gamma_0''$, concluimos que $\Lambda \subset [\gamma_0]$ donde γ_0 es una órbita que no se dobla.

Por teorema 5.1 aplicado a γ_0 tenemos el resultado pedido. ■

Bibliografía

[1] S. Bautista, *The geometric Lorenz attractor is a homoclinic class*, Bol. Mat. (N.S.)11(1) 69,78 2004.

[2] S. Bautista, *On the intersections of homoclinic classes on singular-hyperbolic sets.* Discrete Contin. Dynamical Systems, 19(4), 761-775, 2007.

[3] S. Bautista, C. Morales, *Existence of periodic orbits for singular hyperbolic sets*, Moscow Mathematical Journal Vol 6, 265-297, 2006.

[4] L.O. Chua, A.L. Shilnikov, L.P. Shilnikov, D.V. Turaev, Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I, with the collaboration of Sergey Gonchenko (Sections 3.7 and 3.8), Oleg Stenkin (Section 3.9 and Appendix A) and Mikhail Shashkov (Sections 6.1 and 6.2), World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, vol. 4, World Scientific, River Edge, NJ, 1998

[5] B. Deng, *The Silnikov problem, exponential expansion, strong λ-lemma, C1-linearization, and homoclinic bifurcation*, J. Differential Equations 79 (2) 189-231, 1989.

[6] B. Hasselblatt, A. Katok, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems (English Summary), with a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza*, Encyclopedia Math. Appl., vol. 54,Cambridge University Press., 275-278, Cambridge 1995.

[7] S. Hayashi, *Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1 stability and Ω-stability conjectures for flows*, Ann. of Math. (2) 145 (1) 81–137, 1997.

[8] C. Morales, *Sufficient Conditions for a Partially hiperbolic attractor to be a homoclinic class*, Journal of Differential Equations 249, 2005-2020, Elservier 2010.

[9] C. Morales, M. J. Pacifico. *Sufficient conditions for robutness of attractors*, Pacific Journal Math. 216 (2) 327-342, 2004.

[10] C. Morales, M. J. Pacifico, y E. Pujals. *Singular Hyperbolic systems*, Proc. Amer. Math. Soc. 127, 3393-3401, 1999.

Índice alfabético

Órbita
- Periódica hiperbólica, 4
- Doblada, 16
- Equivalente, 16
- Genérica, 14
- Homoclínica, 4
- Periódica hiperbólica, 22, 23

Aplicación de Poincaré, 19
Atractor, 3, 11, 23

Campo de conos, 18, 19
Clase homoclínica, 5, 22, 23
Conjunto
- Alpha límite, 3
- Attracting, 3
- Hiperbólico, 3
- Invariante, 3
- Omega límite, 3
- Parcialmente hiperbólico, 4
- Transitivo, 3

Dirección central, 4

Lema de inclinación, 15

Sección transversal, 18, 19
Singularidad
- Cuasi-Lorenz, 8, 11
- Tipo Lorenz, 5, 22, 23

Transversal, 4, 15

Variedad
- Central inestable, 7
- Estable, 4
  - Singularidad cuasi-Lorenz, 7
- Estable fuerte, 4
  - Singularidad cuasi-Lorenz, 7
- Inestable, 4
- Inestable fuerte, 4
- Invariante, 8