UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

LENGUAJE Y COMUNICACIÓN EN MATEMÁTICAS

UNA APROXIMACIÓN TEÓRICA DESDE LAS MATEMÁTICAS A LOS CONCEPTOS DE LENGUAJE Y COMUNICACIÓN EN RELACIÓN CON LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE

CARLOS FABIÁN GARCÍA NIETO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Facultad de Ciencias
Medellín
2014

LENGUAJE Y COMUNICACIÓN EN MATEMÁTICAS

UNA APROXIMACIÓN TEÓRICA DESDE LAS MATEMÁTICAS A LOS CONCEPTOS DE LENGUAJE Y COMUNICACIÓN EN RELACIÓN CON LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE

CARLOS FABIÁN GARCÍA NIETO

Trabajo de grado para optar al título de
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Asesora

Julia Victoria Escobar Londoño
Magister en Educación
Doctora en Educación

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Facultad de Ciencias
Medellín
2014

Para José Miguel y Manuel Esteban, mis hijos, porque en ellos siento la presencia de mis mayores, le dan sentido a mi presente y en su mirada puedo soñar con el futuro.

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos a:

Julia Victoria Escobar Londoño, asesora de este trabajo, por sus valiosas orientaciones, su paciencia y su confianza

A la Universidad Nacional, que siempre ha sido mi casa, y esta ocasión a la Facultad de Ciencias y su Maestría en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

A mi familia, por su apoyo y acompañamiento

A mis amigos, que siempre me motivaron

A especialmente a mis estudiantes, porque este trabajo se hizo pensando en ellos y para ellos

… a la mano amiga, a la sonrisa sincera…

RESUMEN

Este trabajo pretende resaltar la importancia del proceso comunicativo en las matemáticas, y más especialmente como las dificultades en esta comunicación influyen tanto en su enseñanza como en su aprendizaje. Inicialmente se plantean algunos de los problemas más comunes en este proceso, y como se manifiestan en los estudiantes, posteriormente se hace una aproximación teórica tomando como referencia a los autores Raymond Duval y Gerard Vernaugd, que contribuyen desde un enfoque cognitivo en el entendimiento de cómo es que se aprenden las matemáticas y poder intervenir en el proceso. Finalmente se presentan algunas conclusiones y recomendaciones que pueden servir en la reflexión y el mejoramiento de las prácticas de aula en este proceso general tan importante en la actividad matemática.

Palabras Clave: Matemáticas, lenguaje, comunicación, campos conceptuales, representación semiótica

ABSTRACT

This work aims to highlight the importance of the communication process in mathematics, and how these communication difficulties affect both teaching and learning. Initially proposes some of the most common problems in this process, and how they manifested in students, subsequently performed a theoretical approach selecting as reference to authors Raymond Duval and Gerard Vernaugd, contributing from a cognitive approach to understanding how mathematics is learned to intervene in the process. Finally some conclusions and recommendations that can serve in reflection and improvement of classroom practices in this important activity in mathematics overall process are presented.

Keywords: Mathematics, language, communication, conceptual fields, semiotic representation.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

"El futuro no es lo que esperamos, sino lo que hacemos"

Gonzalo Arango

Este trabajo surge de la necesidad concreta de mejorar los desempeños de los estudiantes en el área de matemáticas, y esto requiere inicialmente una detenida reflexión por parte de los docentes que trabajan el área. Hay que partir entonces de dificultades tan notorias como la desmotivación de los estudiantes, o sus enormes dificultades para comprender ciertas temáticas, e intentar develar que hay detrás de esto, y aunque se sabe que las causas son muchas y de diversa índole, pues van desde problemáticas sociales y familiares muy complejas hasta la desmotivación propia de la edad de los estudiantes; cada una amerita un análisis particular. Pero no podemos seguir esperando que los estudiantes simplemente cambien su actitud, o que el Ministerio de Educación de una "solución final", debemos empezar por el trabajo cotidiano en el aula.

En nuestro medio es frecuente que a los docentes se les asignen tareas que no siempre corresponden a sus deberes como educadores, y es claro que desde el aula no se logra impactar la mayoría de problemas que nos afectan, pero lo que sí se puede hacer es un trabajo reflexivo y constructivo sobre nuestras prácticas de aula, que redunde en beneficio principalmente de los estudiantes pues ellos son la razón de ser de la educación, y cualquier mejora se verá reflejada en resultados.

Se pretende identificar algunas de las dificultades más comunes en lo referente a los diferentes procesos comunicativos que se dan en el aula y en particular en las clases de matemáticas, y que además de diversos tampoco son simples o fáciles de detectar. Luego se proponen algunas posibles alternativas de solución a dichas dificultades, esto a la luz de las teorías cognitivas que son el fundamento de este trabajo en particular, y que pretenden aclarar un poco más sobre cómo es que aprendemos matemáticas, para de esta forma darle sentido a muchas de nuestras prácticas y acciones, y lograr concretarlas en el aula para el beneficio los estudiantes.

ANTECEDENTES

La práctica misma nos muestran las grandes dificultades que existen para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que generalmente se traducen en los bajos rendimientos de los estudiantes, el desinterés y apatía general por el área. Las preguntas sobre cuáles son las razones de esta situación no son para nada nuevas, y especialmente en nuestros tiempos cobran gran importancia por lo que significa para cualquier persona tener un adecuado desempeño en matemáticas para su vida cotidiana.

Ante esta situación, generalmente se buscan las causas y una de las más notorias ha sido la dificultad en el proceso comunicativo; sobre estas y otras dificultades vistas como errores Luis Rico escribe:

> "Por ello el estudio sobre los errores en el aprendizaje de las matemáticas ha sido siempre un asunto de gran interés en la educación matemática, y tiene una larga historia que se ha caracterizado por aproximaciones e intereses muy diferentes. En cada época el análisis de errores en educación matemática se ha visto orientado por las corrientes predominantes en pedagogía y psicología; también ha estado condicionado por los objetivos y formas de organización del currículo de matemáticas en los correspondientes sistemas educativos.
>
> En un trabajo ya clásico de Radatz señala tres rasgos característicos de los estudios aparecidos hasta la fecha:
>
> 1. La aritmética, el conocimiento numérico, constituyen el área de contenido dominante en la mayor parte de los estudios sobre errores en matemáticas escolares.
> 2. En USA ha habido un desarrollo teórico continuo desde comienzos de siglo para analizar los errores en educación matemática; en los países europeos el desarrollo ha sido más esporádico y carece de continuidad hasta fechas muy recientes.
> 3. Hay una pluralidad de aproximaciones teóricas y de intentos de explicación acerca de las causas de los errores de los estudiantes en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

> Siguiendo a este mismo autor, destacamos algunas de las contribuciones realizadas al análisis de errores desde comienzos del este siglo hasta finales de los 70, agrupando los autores por países" (Rico, 1995).

En nuestro país en algún momento las diferentes facultades de educación se han interesado por este aspecto, y en particular como referentes para este trabajo la Universidad del Valle ha tenido esta temática como una de sus énfasis en el Doctorado en Educación, e invitó por algún tiempo a Raymond Duval, de quien ha publicado varios textos al respecto. De igual manera en la Universidad de Antioquia varios docentes vienen trabajando las ideas de Gerard Vergnaud, más específicamente sobre los Campos Conceptuales aplicados al Aprendizaje Significativo.

Veamos algunos ejemplos de estas dificultades:

- Los textos matemáticos generalmente usan unas palabras que no aparecen normalmente en otros ámbitos, y los emplean sin ninguna contextualización.
- La forma estándar de enunciar los problemas en matemáticas y lo poco que se relacionan generalmente con la realidad y el entorno
- Para explicar algunos conceptos los docentes comúnmente recurren a un "lenguaje escolar", que en vez de aclarar o aportar logran un efecto contraproducente. A este respecto dice D'Amore: "De hecho cuando se hace matemática, la comunicación no se da ciertamente en el lenguaje matemático, y ni siquiera se da en la lengua común; se asume una sintaxis específica (a veces engorrosa), una semántica considerada oportuna y nace una extraña lengua…" (D´Amore, 2006)
- Cada una de las matemáticas emplea una forma de lenguaje y símbolos particulares, que la mayoría de las veces se diferencian dependiendo del contexto o de su utilidad. Por ejemplo: La notación de conjuntos, los símbolos empleados en lógica o la forma de escritura que se emplea en la geometría; además de ser bastante diferentes, se usan generalmente en contextos igualmente diferentes.
- La diversidad de formas que se tienen para expresar un mismo valor:

$$0.5 = 0{,}5 = ½ = 5 \times 10^{-1}$$

- El hecho de emplear elementos de otras culturas o idiomas sin contextualizarlas:

A = b x h donde **A**=Área, **b**=base y **h**= *¿altura?*

Pero donde nunca se aclara que se usa la **h** del inglés **h**=height=”altura”

Como puede verse este trabajo tiene mucha “tela para cortar”, pues las dificultades aparecen en todos los niveles educativos, desde el preescolar hasta la universidad, y se presenta de múltiples formas. Existen adicionalmente otros tantos estudios puntuales sobre diferentes aspectos que pueden relacionarse de alguna manera con este tema, pero se caracterizan por su complejidad en la mayoría de los casos, pero es común que quienes los abordan provengan de otros contextos diferentes al educativo.

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Cuando un docente de matemáticas se para frente a su grupo de estudiantes, una de las primeras dificultades que afloran es el desinterés y la apatía por el área, generadas casi siempre en el presupuesto de ser un conocimiento complicado y difícil, o si no al menos aburrido, que sería lo menos preocupante; ante lo cual generalmente se tienen diferentes aproximaciones, diagnósticos o propuestas metodológicas que permiten de acuerdo a cada grupo y circunstancia particular, procurar por un desarrollo adecuado de las temáticas para ese curso específico.

Pero mirando el problema un poco más de cerca, se encuentra que uno de los obstáculos más relevantes es la dificultad de los estudiantes para "comunicarse matemáticamente", esto es, que no logran captar y comprender los aspectos generales de un tema matemático específico, ni tampoco plantear y resolver problemas concretos e inclusive ni siquiera repetir una mecánica operativa particular; o si abordan el problema lo hacen en una forma poco adecuada: desordenada, incoherente, memorística o emplean para procurar la solución otras "habilidades" no propiamente matemáticas.

Aunque nuestro cerebro en la cotidianidad funciona básicamente con pensamientos lógico-matemáticos (ubicación espacio-temporal, manejo del tiempo, cálculos de todo tipo, proporcionalidades,…), a nuestros estudiantes les cuesta mucho trabajo establecer relaciones o describir situaciones concretas en términos matemáticos, y esto se debe más una dificultad *comunicativa* y de los *lenguajes* empleados por las matemáticas en sí mismas.

A este respecto se puede leer en los Lineamientos Curriculares para matemáticas:

> "Una necesidad común que tenemos todos los seres humanos en todas las actividades, disciplinas, profesiones y sitios de trabajo es la habilidad para comunicarnos. Los retos que nos plantea el siglo XXI requieren que en todas las profesiones científicas y técnicas las personas sean capaces de:

- Expresar ideas hablando, escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas.

- Comprender, interpretar y evaluar ideas que son presentadas oralmente, por escrito y en forma visual
- Construir, interpretar y ligar varias representaciones de ideas y de relaciones.
- Hacer observaciones y conjeturas, formular preguntas, y reunir y evaluar información.
- Producir y presentar argumentos persuasivos y convincentes.

  En los últimos años se ha incrementado el interés de los investigadores por estudiar cómo comunican ideas matemáticas los alumnos y qué factores facilitan o impiden el desarrollo de habilidades comunicativas.

  Muchas de estas características y habilidades se dan diariamente en la interacción de los alumnos en las clases, pero no se le ha puesto suficiente atención en el currículo de matemáticas, en parte por las limitaciones del tiempo y en parte porque se cree que no son tan importantes y que son asunto de los profesores de otras áreas.

  Diversos estudios han identificado la comunicación como uno de los procesos más importantes para aprender matemáticas y para resolver problemas" (Ministerio de Educación Nacional, 1998)

En el caso particular de las ciencias y las matemáticas se presenta un distanciamiento entre el lenguaje cotidiano y el empleado por quienes comparten un conocimiento específico. Así lo expresa Gallego-Badillo:

> "Los lenguajes de las ciencias experimentales se apartan casi que radicalmente del lenguaje del saber cotidiano, significando muchas veces conceptos algo totalmente contrario a las nociones que usa la gente común. Se debe anotar al respecto que, con excepción de palabras tales como entalpía, entropía y otras del mismo estilo, la mayoría de los vocablos que se emplean en los discursos de las ciencias experimentales son los mismos del lenguaje cotidiano, pero, como ya se dijo, significan distinto. Valga la pena esto para destacar que el proceso de significación, de conceptualización que se halla en la base de sus actividades cognoscitivas y las relaciones transaccionales que son indispensables en el seno de las comunidades científicas, son de un orden diferente" (Gallego-Badillo, 1996).

Las matemáticas para los estudiantes en su concepción más general son solo números y fórmulas, que no son capaces de relacionar entre sí ni con el entorno. Y esta dificultad en la comunicación matemática, afecta la manera de "pensar matemáticamente" de forma clara, coherente y eficaz; e igualmente dificulta los otros dos aspectos que plantean los estándares básicos para el área: el planteamiento y la resolución de problemas, y el razonamiento matemático.

Partiendo de que las matemáticas emplean varias formas de lenguaje y que como tal le permite transmitir y concretar ideas, son notorias las dificultades en este aspecto particular para los estudiantes, y es además algo que se va acentuando con el paso del tiempo al distanciarse cada vez más el <u>lenguaje cotidiano</u> del estudiante del <u>lenguaje estructurado</u> de las matemáticas, ya que a medida que se profundiza en los diferentes temas, el lenguaje matemático se va haciendo más específico y particular.

A este respecto Orlando Mesa, hablando de las competencias matemáticas fundamentales que se adquieren a través de un estudio constructivo, y más específicamente de la capacidad para establecer relaciones entre conjuntos de objetos, presenta una de las múltiples formas de categorización, que es previa a una intención formativa, y la enumera de la siguiente manera:

1. "Relaciones semánticas (de significantes y significados)

   Se trata de conocer las diferentes concepciones que han tenido o tienen los constructos matemáticos. Por ejemplo, el constructo de número, como objeto para contar y medir, se usa desde la antigüedad, pero el número como elemento de un sistema que cumple axiomas, es un resultado del pensamiento moderno…En otra palabras las relaciones semánticas cambian históricamente y de acuerdo con las teorías en donde si presentan los conceptos matemáticos.

2. Relaciones semióticas: uso de signos

a. Signos para los objetos como los usados en diferentes culturas para los números y las representaciones geométricas.
b. Signos para las relaciones entre objetos como las relaciones de minorancia y mayorancia, las de semejanza, las de perpendicularidad y paralelismo, las de pertenencia e inclusión, las de implicación y condicionalidad, etc.

c. Signos para las operaciones de todo tipo " (Mesa Betancur, 2004)

Este es un aspecto poco visible en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y que puede verse como una paradoja didáctica, que Bruno D'Amore llama la *Paradoja del Lenguaje Específico:*

> *"la enseñanza es comunicación y uno de sus objetivos es el favorecer el aprendizaje de los estudiantes; entonces, en primer lugar, quien comunica debe hacer que el lenguaje utilizado no sea fuente de obstáculos para la comprensión; la solución parecería banal: basta evitar a los estudiantes ese lenguaje específico: toda la comunicación debe darse en la lengua común; la matemática tiene su lenguaje específico (mas aún es un lenguaje especifico); uno de los principales objetivos de quien enseña es el hacer que los estudiantes aprendan no solo que entiendan, pero también es el que se apropien de ese lenguaje especializado; por lo que, no puede evitarse hacer entrar en contacto a los estudiantes con ese lenguaje especifico, es más: al contrario , se necesita presentarlo (¿imponerlo?) para que lo hagan propio"* (D´Amore, 2006).

Y este trabajo adicional implica tiempo y cambios profundos en la forma de enseñar y aprender las matemáticas.

Es así entonces como surge la pregunta que orienta este trabajo:

Partiendo de que *la comunicación* en matemáticas además de ser *herramienta* fundamental y uno de sus *procesos generales*, es también de los aspectos que mayores dificultades presentan en su enseñanza y aprendizaje, entonces: ¿Cómo mejorar el desempeño de los estudiantes en el área de matemáticas, aportando a las prácticas de aula desde un enfoque comunicativo y del lenguaje?

JUSTIFICACIÓN

Este trabajo es pensado inicialmente como la posibilidad de esclarecer y relacionar entre si los diferentes usos lingüísticos y comunicativos en matemáticas, para comprender y facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje del área, pero fácilmente se entiende que esta pretensión desborda las buenas intenciones e involucra no solo sistemas macro en sus concepciones, sino también multiplicidad de ideologías y tradiciones.

La idea se centra entonces en una escala próxima y que realmente de cuenta de los alcances de un trabajo de maestría, son las posibles dificultades que se generan cuando un docente no logra transmitir adecuadamente una idea en matemáticas, o como una ambigüedad conceptual del estudiante (o del docente), dispersa y distorsiona las ideas, creando *polisignificados* que dificultan y entorpecen enormemente los procesos de enseñanza y aprendizaje en el área.

Las dificultades generales de los estudiantes son bastante grandes a todo nivel, pues es de anotar que estas surgen inclusive al tratar de entender cualquier texto sencillo, y no es una dificultad propia o exclusiva de las matemáticas; hay que ver esta situación desde un contexto más amplio, y entenderlo como una problemática general del sistema educativo que empieza desde el mismo lenguaje cotidiano. Así lo muestran en su ensayo *"El papel del lenguaje en la apropiación del conocimiento*", los docentes de la Universidad de Antioquia José Ignacio Henao y Luz Stella Castañeda; cuando analizan las enormes dificultades que tienen los estudiantes recién llegados a la universidad con lo que ellos denominan la ***literacia***, o sea la capacidad de un individuo de comprender y usar la información escrita; esto es, la capacidad de leer comprensivamente un texto y/o escribirlo con coherencia. En uno de los apartes de su ensayo afirman: "La lectura no es simplemente el desciframiento de un código sino su construcción de sentido" (Henao Salazar, y otros, 2002). Y si trasladamos estas palabras a los ámbitos de la enseñanza de las matemáticas, se ve con mayor claridad la enorme dificultad que puede representar una comunicación deficiente a cualquier nivel.

Desafortunadamente en nuestro sistema educativo estas macro deficiencias de los estudiantes solo se muestran de forma amplificada y "acusadora", cuando se socializan los resultados de las diferentes pruebas censales y evaluaciones; pues si bien el bajo desempeño de los estudiantes en general no es secreto, también es claro que con las pruebas se enfoca la atención en el *error* que se comete, o en los *vacios y desconocimientos* que se evidencian; pero si analizamos un poco más a fondo veremos que por ejemplo el error como tal no se da simplemente por una respuesta equivocada, sino que tiene otros componentes y categorías, siendo una de las más importantes la interpretación incorrecta del lenguaje, que como lo expresa Luis Rico en su informe: “se produce al traducir incorrectamente un hecho matemático de un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto” (Rico, 1995).

Por lo tanto, mucho de la incapacidad y dificultad en la comprensión y comunicación matemática de nuestros estudiantes, radica en la forma poco “matemática” en que se pretende enseñar, sobre todo cuando lo hacen docentes que no son especializados en el área, ya que al tratar de explicar un concepto o idea con palabras sencillas lo transforman en otra cosa o idea diferente.

Por lo tanto este trabajo apunta a entender algunos de los elementos básicos de un proceso tan importante como lo es el comunicativo, para luego proponer estrategias concretas que ayuden a mejorar este proceso en el aula.

Se espera entonces que al detectar situaciones concretas donde sean evidentes las dificultades, y entendiendo con claridad los mecanismos que ahí interactúan, se puedan hacer algunos aportes concretos a esas dificultades específicas.

A este respecto Bruno D'Amore muestra mediante ejemplos como una misma información (ya sea una función matemática o la correspondencia entre unas ciudades y sus respectivos países), puede representarse de cuatro formas diferentes (cartesiana, diagrama de Venn, diagrama de Carroll o proposicionalmente), y analiza como son entendidas por un grupo de estudiantes y algunas posibles implicaciones de cada una de las diferentes representaciones en un contexto de aula (D´Amore, 2006). De esta manera se esclarecen algunos asuntos claves que permiten facilitar o por el contrario generan dificultad en el proceso comunicativo, y teniendo algunas de estos criterios claros se pueden lograr mejoras conscientes en dicho proceso.

Teniendo como referencia los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, encontramos que allí se enuncia:

> "A pesar de que suele repetirse lo contrario, las matemáticas no son un lenguaje, pero ellas pueden construirse y comunicarse a través de diferentes lenguajes con los que se expresan y representan, se leen y se escriben, se hablan y se escuchan. La adquisición y dominio de los lenguajes propios de las matemáticas ha de ser un proceso deliberado y cuidadoso que posibilite y fomente la discusión frecuente y explícita sobre situaciones, sentidos, conceptos y simbolizaciones, para tomar conciencia de las conexiones entre ellos y para propiciar el trabajo colectivo, en el que los estudiantes compartan el significado de las palabras, frases, gráficos y símbolos, aprecien la necesidad de tener acuerdos colectivos y aun universales y valoren la eficiencia, eficacia y economía de los lenguajes matemáticos.
> Las distintas formas de expresar y comunicar las preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos no son algo extrínseco y adicionado a una actividad matemática puramente mental, sino que la configuran intrínseca y radicalmente, de tal manera que la dimensión de las formas de expresión y comunicación es constitutiva de la comprensión de las matemáticas (Wiske, 2003). Podría decirse con Raymond Duval que si no se dispone al menos de dos formas distintas de expresr y representar contenidos matemáticos, formas que él llama "registros de representación" o "registros semióticos", no parece posible aprender y comprender dicho contenido (Duval, Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales, 2004)" (Ministerio de Educación Nacional y ASCOFADE (Asociación Colombiana de Facultades de, 2006)

IMPACTO ESPERADO

Con el desarrollo del presente trabajo se espera presentar un contexto teórico que sirva como herramienta conceptual en la reflexión y el dialogo didáctico y pedagógico con relación a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pues aunque es un componente fundamental y prioritario de la actividad matemática, se notan grandes vacios que transcienden a los otros procesos generales de la actividad matemática como son: formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos

Las recomendaciones generales, surgidas de los autores trabajados, se espera que permitan plantear estrategias concretas que ayuden a entender y mejorar el proceso comunicativo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Es claro que “no son fórmulas mágicas”, pero que al llevarlas al aula y sobretodo luego de una reflexión y dialogo sobre ellas, pueden enriquecer nuestra labor y quien sabe… generar o motivar espacios y situaciones que nos ayuden a los docentes en nuestra difícil labor de educar, pues nunca será acabada y es tan diversa y compleja como cada uno de nuestros estudiantes.

METODOLOGÍA

Para la realización de este trabajo se opto por elaborar una monografía de compilación, entre otras razones porque el énfasis de la maestría es en profundización y esta era una buena forma de abordar esta temática en particular, pues no se pretendía hacer aportes específicos sobre el tema ni analizar una práctica específica; la idea era indagar y conocer más sobre este aspecto de la enseñanza de las matemáticas, que es absolutamente fundamental y presenta tantas dificultades. Adicionalmente este tipo de monografía permite abordar temáticas como esta de una forma un poco más amplia.

La revisión bibliográfica empezó buscando las palabras lenguaje y comunicación, y en la medida que se fue avanzando se vinculo al concepto de las matemáticas. desde muy pronto empezaron a surgir un mismo grupo de autores y referencias que se vinculan mutuamente. De ahí surgen dos nombres sobre los cuales se fundamenta este trabajo: Raymond Duval y Gerard Vergnaud, reconocidos en el medio académico por la importancia de sus estudios, de corte cognitivo. Estos estudios son retomados y llevados a otras teorías y conceptualizaciones como por ejemplo el llamado Aprendizaje Significativo de Ausubel, que últimamente han tenido una amplia divulgación en nuestro medio.

Igualmente en la búsqueda bibliográfica se encuentran bastantes autores y temáticas diversas, sobre temas o áreas de conocimiento afines como la psicología, la lingüística, la neurología, teorías de la comunicación, neurolingüística, etc., que además de ser complejas en si mismas no tienen todavía un claro asiento en el discurso y la práctica educativa y pedagógica como tal. También fue necesario remitirse en varios apares a autores diferentes y más específicos, pues cada uno trabaja un tema en particular que no siempre enlazan con otras temáticas.

Se anexa al final un ejemplo del modelo fichas de revisión documental.

OBJETIVO GENERAL

Contribuir desde una aproximación teórica en la comprensión y el mejoramiento de la comunicación matemática en el aula de clase, asumida como uno de los procesos generales de la actividad matemática, para que las dificultades en algunas de las prácticas comunicativas o los lenguajes usados en el área no afecten el proceso de enseñanza y aprendizaje, sino que sirvan para mejorarlo y se asuman como un requerimiento propio del saber matemático que contribuye a su desarrollo, claridad y aplicabilidad.

Objetivos Específicos

- Destacar la importancia del hecho comunicativo y de los lenguajes usados en el área, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
- Abordar la problemática de la dificultad en la enseñanza de las matemáticas desde un enfoque comunicativo y del lenguaje, que involucra su propia semiótica, sintaxis, simbología y significados.
- Proponer estrategias concretas de comunicación matemática en el aula a la luz de los estudios actuales, que apunten a tener un mejor desempeño en la práctica docente para influir positivamente en el proceso de aprendizaje por parte de los estudiantes

1. LENGUAJE, COMUNICACIÓN Y MATEMÁTICAS

Al iniciar este trabajo una de las primeras necesidades que surge es la de definir cada uno de los términos y conceptos que se pretenden abordar de una forma más precisa y concreta, o dependiendo de su complejidad, intentar una aproximación conceptual, esto con el fin inicialmente de aclarar sus alcances y ayudar a poner estas ideas en un contexto adecuado, que además de evitar confusiones y malentendidos, contribuya en la comprensión y el entendimiento de los mismos, para finalmente poder relacionarlos entre sí y darle coherencia y pertinencia en su desarrollo.

Aunque los términos: lenguaje, comunicación y matemáticas, se emplean cotidianamente, al indagar un poco más sobre su sentido, su alcance o su significación, se encuentran múltiples variantes y acepciones que no permiten concretar una definición propiamente dicha, o por el contrario se limitan a una postura ideológica particular; estas dificultades aparecen continuamente a razón de la naturaleza misma de los conceptos abordados, tanto por la complejidad o por la especificidad de cada uno de ellos, que por haberse desarrollado y/o estudiado de formas tan disimiles y diferentes tienen sus propias reglas y se conforman casi como sistemas aislados y autoexplicados, que poco o nada desean o necesitan ser relacionados con otros formas de conocimiento, aunque en realidad coexisten en la cotidianidad y se necesitan mutuamente para cumplir con sus funciones particulares.

1.1 LENGUAJE Y COMUNICACIÓN

Inicialmente se revisa el concepto de Lenguaje, y para ello se parte de una definición formal tomada del libro “Semiótica. Diccionario razonado de la teoría del lenguaje”, y más particularmente se retoman apartes de cinco de las seis acepciones que presentan sus autores y son de nuestro interés:

“LENGUAJE. *Fr. langage, ing. semiotics (semiotics system and process)*

1. El término **lenguaje**, perteneciente a una lengua natural como el español, se ve definitivamente liberado de su cuasi-sinonimia con lengua en el siglo XIX, lo que permite oponer el lenguaje “semiótico” (o lenguaje en sentido general) a la “lengua natural”. Esta distinción, que llegaría a ser de gran utilidad, vuelve a discutirse de nuevo, una vez inscrita en el contexto internacional, en que numerosas lenguas sólo poseen una palabra, en vez de dos términos españoles (o franceses); entonces, es neutralizada (se dice indiferentemente “metalenguaje” y “metalengua”) o reafirmada pleonásticamentecuando se opone “lenguaje” a “lengua natural”).
2. Puede decirse que el lenguaje es el objeto de saber del que se ocupa la semiótica general (o semiología): objeto que no es definible en sí, sino solamente en función de los métodos y de los procedimientos que permiten su análisis y/o su construcción; de ahí que toda tentativa de definir el lenguaje (como facultad humana, como función social, como medio de comunicación, etc.) refleja una actitud teórica que condiciona, a su manera, el conjunto de los “hechos semióticos”. Lo menos comprometedor, tal vez, sería sustituir el término **lenguaje** por la expresión **conjunto significante**: partiendo del concepto intuitivo de universo semántico, considerado como el mundo aprehensible en su significación –previamente a todo análisis-, se tiene derecho a postular la articulación de este universo en conjuntos significantes o lenguajes, que se yuxtaponen o se superponen entre sí. …

3. Si bien al estudio del lenguaje depende de la teoría semiótica, el de los lenguajes particulares pertenece, en cambio, a las diversas semióticas. No obstante dista mucho de estar terminada y los primeros ensayos se basan en criterios poco seguros y escasamente rentables (así, las clasificaciones según la "naturaleza" de los signos, en función de su relación con el referente; según la sustancia de su significante o, lo que es lo mismo, según los canales de transmisión; o, en fin, según el número de planos del lenguaje que entran en la composición de una semiótica dada). …

5. Se distinguen, igualmente, los lenguajes **naturales** de los lenguajes **artificiales**, al subrayar que las estructuras semióticas que presiden la organización de los primeros son inmanentes y que el sujeto humano solo participa en ellos como utilizador y paciente, mientras que los segundos son, al contrario, construidos y manipulables por el hombre. …
6. La distinción entre **lenguajes** y **metalenguajes**, es asimismo, delicada. Toda predicación –o, al menos, la predicación atributiva- puede ser considerada, en última instancia, como una operación metalingüística. La paráfrasis no es otra cosa que el discurso sobre lenguaje: es prácticamente imposible trazar la frontera entre lo lingüístico y lo metalingüístico. En el otro extremo, todo discurso científico, toda ciencia puede también ser considerada como de naturaleza metalingüística."[1] (Greimas & Cuortés, 1982)

Luego de revisar las anteriores acepciones del lenguaje, se observa que las aproximaciones a este concepto son diversas y provienen de diferentes fuentes, pero sobretodo queda la sensación de que aún no se logra un criterio definitivo acerca de que es el lenguaje como tal. Esto inicialmente es una ganancia, pues nos devela la gran riqueza y el enorme potencial de este concepto como tal, pero también obliga a tomar un camino en particular, ya que en la medida que se profundiza en algún tópico, la divergencia de las ideas implícitas no permite ahondar ni avanzar.

[1] Los resaltados son directamente de los autores del libro

Si bien las definiciones apuntan más a una instrumentación del término, no resaltan el aspecto humano, en cuanto al uso cotidiano que el hombre hace del lenguaje, y en particular de la intencionalidad con que se lo reviste. Este aspecto de la intención además es inherente al lenguaje mismo, es otro factor fundamental a tener siempre en cuenta, y que por su misma complejidad y dinamismo es prácticamente imposible de abordar, pues este trasciende cualquier grupo de signos, y que está cargado por toda experiencia previa del ser humano e imbuido en su existencia.

> “Dados los desajustes entre la intencionalidad y lo que se interpreta de ella, la experiencia del mundo, en cuanto a cómo actuamos, lo que sabemos y valoramos de la realidad, no dependería en su totalidad de las intenciones. ¿Se debe esto a la manera diversa como significan los “signos”? Para aclarar esto, tomemos la palabra “perro” que, por igual, puede funcionar como signo, como símbolo y como imagen y significar “animal mamífero, cuadrúpedo”, “fidelidad” o “amigo fiel del hombre. Los usos discursivos no alcanzan a borrar las huellas de ambigüedad que provienen del reconocimiento de que el sentido es un sistema dinámico de posibilidades de significación que se apoya en diferentes tipos de signos, se realiza en textos y se actualiza en discursos, sin contar que todo discurso genera su antidiscurso” (Cárdenas Páez, 2007)

El lenguaje entendido como lengua natural, está lleno de múltiples significaciones, que escapan fácilmente a cualquier análisis, e inclusive obligan cada vez a ajustar y revisar conocimientos previos. Es entonces necesario involucrar al ser humano como un elemento fundamental y prioritario cuando se haga referencia al lenguaje en cualquiera de sus formas, pues no solo lo utilizamos, sino que también somos quienes lo creamos y lo transformamos:

> “A esto hay que agregar algunos principios que pueden contribuir a mejorar las aproximaciones al lenguaje; uno de ellos, se refiere a la necesidad de incorporar la diversidad de fenómenos de la vida humana, de acciones del hombre para comprender como funciona el lenguaje; asentar el principio de que el “logos” es dialéctico, dialógico y analéctico; no pasar por alto que el lenguaje siempre se usa discursivamente y, por último, que entre el hombre y las relaciones que contrae consigo mismo, con el mundo y con el otro no hay un contacto extrasemiótico por

cuanto el mundo de la vida deviene cultura en cuanto se instituye en un lenguaje" (Cárdenas Páez, 2007)

Del mismo libro se toman apartes de siete de las nueve acepciones de su aproximación al concepto de comunicación:

COMUNICACIÓN. *Fr. communication, ing. communicatión*

1. Paralelamente a la teoría de la información y en estrecha relación con ella, se ha desarrollado un **esquema de la comunicación** lingüística que permanece vinculado a una perspectiva mecanicista, aun cuando su punto de partida se muestre más respetuoso con los intercambios intersubjetivo. Según el psicólogo Bühler, la actividad lingüística puede definirse por sus tres funciones: expresión (desde el punto de vista del destinador), llamada (desde el punto de vista del destinatario) y representación (que remite al referente o al contexto). Este esquema triádico ha sido empleado con nuevas denominaciones y completado por R. Jakobson. Para él, la comunicación verbal se basa en seis factores; el destinador y el destinatario, el mensaje transmitido por el uno al otro, el contexto (o referente) –verbal o verbalizable- del que trata el mensaje, el código (más o menos común a los actuantes de la comunicación) gracias al cual se comunica el mensaje, y por último, el contacto que descansa en un canal físico y, la vez, en una conexión psicológica, a cada uno de estos diferentes elementos corresponde una función lingüística particular, respectivamente: emotiva (o expresiva), conativa, poética, referencial, metalingüística, fática.
2. Evidentemente, las funciones jakobsoniana del lenguaje no agotan su objeto, y una articulación de este tipo, por mas sugestiva que sea, no fundamenta una metodología para el análisis de los discursos: este esquema de seis funciones es demasiado general como para permitir una taxonomía y una sintaxis apropiadas, y al mismo tiempo, demasiado particular, ya que versa únicamente sobre la comunicación verbal (que no explica, además, el aspecto sincrético), con exclusión de todos los otros sistemas semióticos. …

3. Resulta claro, por otra parte, que el lenguaje, además de comunicación, es también producción de sentido, de significación. No ese reduce a la simple transmisión de un saber sobre el eje “yo”/”tu”, como podría sostener cierto funcionalismo; complementariamente, el lenguaje se desarrolla, por así decirlo, por el mismo, por lo que es, con una organización interna propia, a la que la simple teoría de la comunicación –tomando, en cierto modo, el punto de vista externo- no parece poder explicar.
4. Aunque independientemente de Bühler, de Jakobson o de Martinet y de toda la corriente funcionalista, la filosofía anglo-sajona del lenguaje – con J. L. Austin-comparte con ellos, más allá de una terminología y unas preocupaciones diferentes, un mimo fin, el de explicar el lenguaje como operación intersubjetiva, pero esforzándose por integrar en él una porción mayor de la actividad humana. El acto de habla (“speech act”, según J. R. Searle), que ha sido progresivamente elaborado, y, sobre todo, la pragmática (en el sentido norteamericano) sobrepasan el límite de la mera “comunicación”, al interesarse por sus condiciones de uso, y aportan –no obstante su terminología, a veces poco coherente debido a una amalgama filosófico-lingüística- una contribución nada despreciable para el estudio de la actividad del lenguaje. …
5. Para escapar a una concepción demasiado mecanicista (arraigada en el modelo de la información) o demasiado restrictiva (atenta a los parámetros “extra-lingüísticos) de la comunicación, es indispensable situar esta noción clave en un contexto más amplio. Las actividades humanas, en su conjunto, son generalmente consideradas como desarrollándose sobre dos ejes principales: el de la acción sobre las cosas, mediante la cual el hombre transforma la naturaleza – es el eje de la producción-, y el de la acción sobre los otros hombres, creadora de las relaciones intersubjetivas que fundamentan la sociedad –es el eje de la **comunicación.** …
6. En la medida en que la comunicación se localiza entre sujetos y que los valores vertidos en los objetos puestos en circulación (valores pragmáticos o cognoscitivos, descriptivos o modales) son considerados como constitutivos del ser del sujeto (que se encuentra constantemente en aumento o en disminución de su ser), es evidente que el destinador y el destinatario no pueden seguir siendo tratados como abstracciones, como posiciones vacías de

emisor y de receptor,; son por el contrario, sujetos competentes, tomados en un momento de su devenir, inscritos cada uno en su propio discurso. …

8. Otra interrogante, aún sin respuesta, es la planteada por la distinción -bastante fácil de reconocer, pero difícil de explicar- entre la comunicación recibida y la **comunicación asumida**. El discurso psicoanalítico ha evidenciado la separación que existe entre los mecanismos que aseguran la aprehensión de la significación y los procedimientos, más conocidos, que presiden su apropiación, su integración en la axiología ya existente. Sucede como si el sujeto receptor solo pudiese entrar en plena posesión del sentido cuando dispusiese previamente de un querer y de un poder-aceptar; dicho de otro modo, como si pudiese ser definido por cierto tipo de competencia receptiva, que, a su vez, constituiría el objetivo primero y último del discurso del enunciador. Si asumir la palabra del otro es, en cierto modo, creer en ella, entonces el hacerla asumir significa decir para se creido. Así considerada, la comunicación (como uno se lo imagina un poco apresuradamente) es menos un hacer-saber que un hacer-creer y un hacer-hacer. …" (Greimas & Cuortés, 1982)

De las anteriores aproximaciones puede inferirse la gran complejidad de los procesos comunicativos y del lenguaje, que aún no logran explicar claramente cómo es que se producen. Sin embargo aparecen algunas claves que nos muestran que debe haber una cierta sintonía y elementos comunes entre quienes participan de un proceso comunicativo, y que este no se limita a una "simple" transmisión de una idea, sino que esta mediado por una gran cantidad de elementos propias de dicha comunicación, que incluso involucra todo un sistema de valores individuales y colectivos.

El ser humano crea y recrea continuamente el mundo mediante el lenguaje, es su herramienta y su sustento.

> "Además de la información, el lenguaje construye cierta imagen del mundo, de quienes lo usan, de las acciones que realizan sobre ese mundo y de sí mismo, en este caso, sus procedimientos son tan retóricos como metalingüísticos. Estas mediaciones consolidan culturalmente el sentido como sistema dinámico, social y

público del cual pueden echar mano los sujetos en sus actos vitales de existencia" (Cárdenas Páez, 2007)

Sin pretender dar por terminada esta aproximación a dos conceptos fundamentales para este trabajo, se retoman las palabras de Carlos Guevara, donde se condensan algunos de los elementos más importantes:

> "Por otra parte, emplearé la categoría lenguaje, cuando me refiera a la facultad humana de significar la realidad, de simbolizar el mundo, de darle sentidos diversos a su devenir, actividades que no se reducen al uso de una lengua determinada en sus aspectos oral o escrito, sino que amplían sus horizontes (los de tal lengua) e incorporan otras múltiples manifestaciones y potencialidades, no propiamente verbales, que se constituyen en instrumentos y estrategias que llenan de sentidos la realidad, la expresan y, en síntesis, la significan. Sin esta facultad del lenguaje –según el mismo Chomsky- no es posible la existencia de la lengua, que es la herramienta que mejor revela la facultad del lenguaje. Pero más aún, sin la facultad del lenguaje no sería siquiera posible pensar ni la realidad ni lo humano; habría una inconsciencia total del mundo, es decir, el ser no acontecería, no sería un ser histórico pues su acontecer, de acuerdo con Heidegger, se da como evento del lenguaje (recuérdese además la afirmación de Marx de que el lenguaje es tan viejo como la conciencia)." (Guevara A., 2007)

1.2 ¿QUÉ SE ENTIENDE POR MATEMÁTICAS?

Para comenzar a indagar sobre esta pregunta es conveniente remitirse a la etimología de la palabra matemática, pues yendo a su origen pueden aclararse algunos aspectos importantes, entre los que se destacan que no es algo intrínseco y natural al ser humano sino que se considera algo que necesita aprenderse, o sea que desde sus primeras concepciones ya se asumía el termino mismo como algo que implica -guardando las debidas proporciones históricas y de sentido- relación en términos actuales con los procesos de enseñanza y aprendizaje, que luego serán retomados más adelante.

Inicialmente veamos la etimología de la palabra *matemática*:

> La palabra «matemática» (del griego μαθηματικά, «cosas que se aprenden») viene del griego antiguo μάθημα (*máthēma*), que quiere decir «campo de estudio o instrucción». El significado se contrapone a μουσική (*musiké*) «lo que se puede entender sin haber sido instruido», que refiere a poesía, retórica y campos similares, mientras que μαθηματική se refiere a las áreas del conocimiento que sólo pueden entenderse tras haber sido instruido en las mismas (astronomía, aritmética). Aunque el término ya era usado por los pitagóricos (*matematikoi*) en el siglo VI a. C., alcanzó su significado más técnico y reducido de «estudio matemático» en los tiempos de Aristóteles (siglo IV a. C.). Su adjetivo es μαθηματικός (*mathēmatikós*), «relacionado con el aprendizaje», lo cual, de manera similar, vino a significar «matemático». En particular, μαθηματική τέχνη (*mathēmatikḗ tékhnē*; en latín *ars mathematica*), significa «el arte matemática». (Health)

En este mismo sentido de encontrar repuesta a la pregunta ¿Qué son las matemáticas?, y luego de revisar diferentes fuentes se encuentra que no existe una respuesta única y concertada, las respuestas son múltiples y variadas, y dependen tanto de quien la responde como de su intencionalidad particular.

En un acercamiento para intentar de alguna forma responder a esta inquietud, se tomaran dos autores, que si bien no proponen respuestas concretas o incluso similares, si son complementarias de alguna forma, pues muestran las matemáticas desde una definición que involucra un desarrollo histórico como en el caso de Jorge Bosch, o proponiendo una definición donde se integra al sujeto, con entes externos y sus acciones y operaciones sobre ellos como lo hace Angel Ruiz.

En el caso de Jorge Bosch su libro ya tiene varias décadas de haberse publicado, pero presenta en términos generales una visión amplia del devenir histórico que no permite proponer una definición simple y concreta:

> “Hasta hace relativamente poco tiempo era muy fácil de responder a la pregunta: “¿qué es la matemática?”. La respuesta universalmente aceptada era: “la matemática es la ciencia que estudia los números y las figuras”. En efecto: hasta mediados del siglo XIX, todas las teorías matemáticas poseían carácter numérico o bien estudiaban ciertas configuraciones geométricas. Si bien no cabe duda acerca de la gran importancia en los alrededores de esta fecha ciertas nociones bastante abstractas y complejas, como las de función, límite, derivada e integral, también es cierto que estos conceptos se referían a números (reales o complejos), por lo cual puede afirmarse que el análisis matemático del siglo XIX era fundamentalmente de carácter numérico.
>
> El algebra, por su parte, estudiaba la resolución de ecuaciones; pero estas también ecuaciones numéricas. No había nada en la matemática de la primera mitad del siglo XIX que escapara al dominio de los números o de las figuras geométricas.
> Pese a las profundas transformaciones sufridas por la matemática en el lapso que se extiende desde Grecia clásica hasta mediados del siglo XIX, puede decirse que el objeto de las matemáticas fue siempre el mismo, a saber; el estudio de números y figuras. Pero en la segunda mitad de ese siglo hicieron su aparición algunas ideas que en poco tiempo cambiaron por completo esa fisonomía aparentemente inconmovible. Se trató al principio de ideas aisladas que no hallaron en forma inmediata la adhesión unánime de los matemáticos profesionales; fueron ellas la lógica matemática de Boole, la teoría de conjuntos de Cantor, la fundamentación de

> la aritmética de Frege y Dedekind, y la metodología axiomática de Hilbert y Peano. Sólo en la primera década del siglo XX estas ideas aisladas e inconexas fueron integrando una nueva visión estructural de la ciencia matemática.
> Lo que ahora es la matemática si debe en gran parte a ese fenómeno de integración de ideas nuevas que se operó en los comienzos de nuestro siglo." (Bosch, 1971)

Y más adelante finalizando el libro afirma a manera de cierre y conclusión:

> "Si se desea dar una respuesta breve –y por tanto imperfecta e insuficiente- a la pregunta que sirve de titulo a este libro ("Que es la matemática"), tal vez no sea desatinado decir que la matemática actual es el estudio de las diversas estructuras y de las relaciones entre ellas. Esta respuesta –como todo el libro, por otra parte- es sólo de carácter cultural: no da información concreta acerca de los resultados a que han llegado los matemáticos, sino que señala en forma esquemática y simplista la situación de la matemática en el marco general del pensamiento. Tarea muy ardua seria dar en un libro elemental y breve una idea de lo que es la matemática desde el punto de vista de sus resultados concretos y de los conocimientos positivos con que opera. Estos han llegado a adquirir una grado tal de complejidad, que para entender el enunciado de los grandes problemas que preocupan a los matemáticos contemporáneos, se requieren un entrenamiento previo y un acopio de conocimientos que solo pueden adquirirse en varios años de estudio especializado.
> En este libro he dado mi opinión –exenta de todo ánimo polémico- acerca de los grandes rasgos históricos del pensamiento matemático. En cuanto a la obra de los creadores de la matemática actual, mi posición es la única razonable: matemática es lo que ellos hacen, y ahí se acaba toda discusión" (Bosch, 1971)

Igualmente para Angel Ruiz, intentar una definición de matemáticas no es una tarea sencilla, e involucra varios aspectos importantes que deben discriminarse antes de ponerlos juntos e intentar dar respuesta a la pregunta en cuestión:

> "Las matemáticas son conocimiento de 'lo general' (una manera de hablar) en el mundo que, como todo conocimiento, surge en una relación entre el sujeto y el objeto (ella misma un factor real). Ahora bien, cuando introducimos el vocablo 'lo general'

para las matemáticas no pensamos en "universales" (como Aristóteles) que existen en la realidad; para nosotros, se trata de percepciones humanas sobre el mundo: los conceptos de número 2, de 3 o de 526, nacen de condiciones de la realidad. Los substratos materiales para estos conceptos (abstracciones) son objetos empíricos de las matemáticas. Lo mismo sucede con las nociones de plano, recta, y punto. Evidentemente, no encontramos puntos, planos, rectas y números bailando en el mundo empírico (son conceptos), pero es fácil comprender que éstos poseen referentes en la realidad material. Podría sugerirse que propiedades generales del mundo como la diversidad o la extensión son fundamento de partes de las matemáticas; también podría sugerirse la continuidad física. En todo esto no se debe olvidar que la creación de conceptos e, incluso, la percepción de objetos empíricos que sustentan estos conceptos, depende mucho de nosotros: nuestro ojo, nuestra mente, condiciona lo que vemos. Es decir: vemos y conocemos lo que nuestra realidad nos permite. En esta condición, en lo que somos, participan factores biológicos y físicos pero también sociales (culturales e históricos). Esto es importante: lo que vemos es en buena parte nuestra realidad y sus fronteras. Vemos diversidad, pero se podría decir que todo lo que existe es una sola cosa (recuérdese aquella tensión en la Grecia Antigua entre unidad y diversidad: Parménides y Heráclito). Vemos continuidad en la materia, pero los espacios inter y subatómicos nos señalan lo contrario. Lo que vemos y los conceptos con los que comprendemos el mundo dependen de lo que somos y de los límites de nuestros sentidos en particular; por eso, con la creación de instrumentos técnicos superiores, varía nuestra percepción de lo que existe. El cielo estrellado de Aristóteles y Ptolomeo no podía ser el mismo que el de Galileo con su telescopio: el 'tamaño' y la cantidad sí importan." [Ruiz, A.: El desafío de las matemáticas, p. 54]…

Sin embargo, es decisivo entender que las matemáticas son también producto de la acción del sujeto de una manera relevante; más aun, las acciones del sujeto (físicas, abstraídas o mentalizadas) son objetos de esa práctica. Por eso:

"En la comprensión de los objetos empíricos de las matemáticas debe pensarse también en el sujeto: por ejemplo, nuestra capacidad de repetir acciones (en el tiempo) refiere también a la diversidad y a la continuidad. El número, otro ejemplo, no debe verse solamente como algo que encontramos en el objeto físico al margen de nosotros; también lo encontramos al repetir y organizar nosotros acciones. El contar

> no refiere solo al mundo externo, también al interno: a nosotros. De igual manera, el medir no refiere solo a un mundo 'medible' sino, también, a nuestra acción. La conclusión: algunas de nuestras acciones son también substrato material de conceptos matemáticos. Acciones físicas humanas de repetir, agrupar, asociar, revertir, son objetos de las matemáticas, y con las mentales que las 'replican' en nuestros cerebros sucede lo mismo. (...) Ahora bien, nos repetimos para que no haya duda alguna: estas acciones no son ajenas a la realidad física externa al sujeto; las cosas 'se agrupan', los procesos físicos se 'repiten' o se 'devuelven', ellos mismos, sin nosotros.'' [Ruiz, A.: El desafío de las matemáticas, p. 55]…
>
> Ahora podemos resumir nuestra respuesta a la pregunta: ¿qué son las matemáticas? ''Combinación de entes extraídos del mundo exterior al sujeto pero, también, de sus acciones y operaciones. Las matemáticas se construyen aquí: acciones sobre nociones extraídas de la realidad o acciones humanas, sobre ellas mismas o sobre otras acciones y operaciones. Acciones sobre acciones: un territorio fértil para la abstracción matemática. Con el correr de la historia humana, las matemáticas de las abstracciones, acciones y operaciones sobre ellas mismas, llegaron a ocupar su corazón: conjuntos de construcciones mentales cada vez más alejadas de lo intuitivo y empírico.
>
> Tanto que, hoy en día, a veces, nos da la impresión que nunca tuvieron contacto con ese mundo. En ese laberinto complejo de acciones y operaciones sobre acciones y operaciones u otros nuevos conceptos extraídos del mundo empírico, la lógica ocupa un lugar privilegiado''. [Ruiz, A.: El desafío de las matemáticas, p. 56] (Ruiz Zuñiga, 2003)

Otro aspecto que se desea resaltar, y que aparentemente no tiene mayor significancia, pero que en realidad es fundamental, pues de ahí se derivan muchas situaciones particulares; es el hecho de hablar de “las matemáticas” (en plural) y no de “la matemática” (en singular). Aparentemente y desde el uso cotidiano no hay mayor diferencia entre estos términos, e incluso puede pensarse que el término en singular da una mayor consistencia y coherencia, mientras el término en plural da la idea de división y multiplicidad. Pero es precisamente el término “matemáticas” en plural, el que más se acomoda a la realidad, pues lo común es que no haya una matemática completa y univoca, lo común es encontrar varias divisiones que incluso tienen sus propias características y símbolos particulares; ese es el caso de la aritmética, la geometría, el cálculo, la lógica, el algebra, los conjuntos, etc, que aunque se complementan y funcionan bajo los mismos principios y reglas, tienen sus propias particularidades y limitantes.

En palabras de Angel Ruiz:

> "Sigamos con nuestras premisas teóricas. Una de las primeras consecuencias de los resultados de Gödel, nos parece, establece claramente que la matemática no puede seguir considerándose como un cuerpo teórico sólido, seguro, único, absoluto y verdadero. Es conveniente pensar en la existencia de varias matemáticas. No como expresión de una visión historicista a lo Spengler, ni tampoco como producto de una actitud convencionalista. En el mismo sentido, tampoco pensamos que los resultados que mencionamos antes deben interpretarse en el sentido de considerar a las matemáticas como varios sistemas axiomáticos; esta multiplicidad axiomática es resultado o expresión de la naturaleza misma de las matemáticas. La misma diversidad histórica que ha distinguido entre geometría, álgebra, análisis, y demás cuerpos matemáticos, también es señal de esa naturaleza.
> Se puede usar el término "matemática" y contraponerlo con el de "matemáticas" sin que esto traicione la naturaleza de estas disciplinas. O bien puede verse la matemática como la participación simbiótica de diferentes disciplinas cuyas fronteras, objetos y métodos son cada vez más menos rígidos, y en la cual, más bien, intervienen unos en otros" (Ruiz Zuñiga, 2003)

Además desde un punto de vista pedagógico, que es el objeto de este trabajo, esta diferenciación nos empieza a esclarecer que así como hay una diversidad de "matemáticas", debe pensarse igualmente cuando nos remitimos a los procesos de enseñanza y aprendizaje. Pero sin olvidar tampoco que a pesar de esta aparente diversidad en el fondo hay una unidad que le da coherencia y sentido al que hacer matemático:

> "Queremos ser enfáticos en lo siguiente. Los métodos de las matemáticas en sus diferentes disciplinas se intercambian, se integran. Y conforme avanza la historia de las matemáticas y su cortejo de abstracción, es fácil encontrar más y más elementos

> en común, y sin duda, se ha vuelto esencial potenciar la unidad y la generalidad de los métodos y objetos matemáticos para su construcción teórica.
> En la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas conviene tener las dos perspectivas. Por un lado, la afirmación de la diversidad matemática, que refiere a sustentos históricos y empíricos (ofreciendo amplios recursos didácticos) Y, a la vez, mostrar los rasgos de unificación, de convergencia de los diferentes métodos. En las matemáticas existe un especial sentido de transdisciplinariedad." (Ruiz Zuñiga, 2003)

Surge entonces la pregunta sobre ¿cuál puede ser entonces la validez de los diferentes métodos matemáticos y su validación?, pues si en realidad hay tal diversidad entonces como pueden las matemáticas tener cierta unicidad de criterios y métodos que sean aplicables a todo su aparato con igualdad para todos:

> "Sin duda, es un asunto capital. Lo abordamos de la siguiente manera: "Los métodos usados por los matemáticos para validar sus construcciones teóricas no son cualesquiera. Es decir, se trata de edificios conceptuales rigurosamente pegados, con colecciones de resultados integrados por principios de deducción aceptada. Estos métodos de organización de los entes y resultados matemáticos corresponden de manera abstracta al mundo. Son formas de organización de lo real no solo originadas en (puestas por) el sujeto (como Piaget) sino, también, en el objeto mismo: formas de organización de la naturaleza, que tomamos y comprendemos en esa relación compleja entre nosotros los humanos y nuestro entorno. Esto asociado a que las nociones básicas del edificio matemático son abstraídas del contacto con el mundo, constituye una base para valorar especialmente los mecanismos de validación establecidos colectiva e históricamente por los matemáticos. Los criterios de validación de las teorías matemáticas son construcciones históricas, por lo tanto variables en el tiempo, sujetos a cambios, errores y defectos. Su progreso, sin embargo, ha sido constatable, y hoy ofrece principios muy sólidos de rigor y pertinencia que permiten asegurar resultados teóricos 'confiables' aunque, evidentemente, dentro de las fronteras establecidas por el estatus epistemológico de las matemáticas. Todo esto presupone que no cualquier cosa es matemática, que no

toda abstracción o construcción mental hecha por los humanos es matemática y puede, en consecuencia, corresponder, de la manera que hemos sugerido aquí, a la realidad. Hagamos una acotación adicional en torno a este asunto: los criterios de validez lógica y coherencia deductiva en las matemáticas son extraordinariamente valiosos. Esto es un punto de partida. No obstante, como hemos visto aquí, se debe tener cuidado. Además, tampoco sugerimos que el quehacer abstracto de las matemáticas se reduce a la deducción lógica. Que se use la deducción lógica en la práctica matemática y, específicamente, que el rigor lógico sea un requisito en la comunicación de resultados entre los matemáticos, no quiere decir que las matemáticas sean reducibles a la deducción lógica. La larga experiencia del logicismo y los otros proyectos fundacionales nos confirman esta conclusión. Hemos insistido a lo largo de este trabajo en señalar como motor de las matemáticas una práctica de acciones y operaciones mentales sobre otros conjuntos de objetos, acciones y operaciones, en un doble influjo primigenio: epistemológicamente, el mundo empírico y el sujeto." [Ruiz, A.: El desafío de las matemáticas, pp. 57, 58] (Ruiz Zuñiga, 2003)

1.3 ¿CÓMO RELACIONAMOS TODO ESTO?

Luego de la aproximación a los conceptos de lenguaje, comunicación y matemáticas, es válido decir refiriéndonos a este respecto en palabras de Vergnaud cuando afirma que: “Las matemáticas no son un lenguaje, son un conocimiento” (Otero, 2013)

Lo primero que se observa luego de una revisión bibliográfica es que el estudio de las matemáticas vista como un fenómeno comunicativo y de lenguaje, no es una inquietud nueva ni fácil de abordar entre los estudiosos de los procesos de enseñanza y aprendizaje, y aunque esta problemática es aceptada como una de las de mayor incidencia en todo el proceso educativo en general, cobra mayor relevancia cuando se trata específicamente de las matemáticas. Los autores como tal se nutren de múltiples y diversas fuentes para tratar de validar y explicar sus hallazgos a la luz de teorías y conocimientos previamente aceptados, pero reconociendo también que son solo aportes puntuales, que no permiten afirmar nada con contundencia sobre los temas particulares que se abordan, ya sea por que las muestras no son lo suficientemente amplias o porque necesitan de un análisis más profundo.

Otro aspecto relevante es que todos los autores concuerdan en que es una problemática demasiado amplia y compleja, que debe ser abordada por un grupo amplio de profesionales de diversas áreas; entre las diferentes formas de aproximación se destacan entre otros: los procesos cognitivos, la epistemología genética, la lingüística, la psicología, la psicolingüística,… solo por mencionar algunas de las diferentes formas de abordar este problema. Cada uno a su manera se aproxima a un tópico en particular, pero no deja de reconocer que es una visión parcial del problema, pues en toda comunicación no pueden aislarse fácilmente los entornos, que a su vez son los que determinan realmente los diferentes procesos comunicativos.

Quienes más se han dedicado al estudio de estos conceptos y cómo funcionan en la práctica, y especialmente desde la educación, han sido los psicólogos: “No podemos perder de vista que la pedagogía, desde hace varios siglos, ha corrido pareja con las concepciones de la psicología, conductista primero y cognitivista y constructivista después.”…… (Cárdenas Páez, 2007), pero como lo resalta el mismo autor Alfonso Cárdenas, es también conveniente resaltar que su interés se centra básicamente en la explicación de los actos humanos, a través de observaciones sistemáticas donde predomina la racionalidad, olvidando los procesos y privilegiando los resultados; esta situación en particular no desmerita en nada los conocimientos adquiridos, pero si pone de manifiesto la forma en que se aborda esta problemática, y le da una caracterización muy particular.

También esto en parte explica el gran reto de la educación matemática en aspectos como su simbología o su terminología particular, que no es fácil de transmitir a los estudiantes, y que no se debe como generalmente se piensa a una mala o inapropiada presentación, o a la incapacidad o desinterés de los estudiantes, sino que tiene un trasfondo mucho más complejo.

Igualmente se van presentando algunos aportes particularmente desde la pedagogía que pretenden ampliar estas concepciones:

> “En esta dirección, puede ser útil, desde un punto de vista pedagógico, una concepción de lenguaje que supera la condición de medio e instrumento, a favor del fenómeno discursivo, como luego entre la producción e interpretación del sentido; que pueda hacer posible la comprensión de estructuras generales de conocimiento y modos de actuar de manera pública y socialmente aceptada, a tenor de sistemas dinámicos y regulados de “signos”; que afiance la descripción del fenómeno y la pregunta. Lo contrario, pensamos, contribuye poco a establecer una pedagogía si no verdadera al menos más consistente del lenguaje.” (Cárdenas Páez, 2007)

Y no se puede olvidar tampoco que en el mundo actual la educación debe moverse al compás de los tiempos, y ante unas exigencias que están cambiando radicalmente, la respuesta debe ser igualmente contundente:

> “Las posturas más contemporáneas ubican a la educación como un escenario y por tanto incorporan agencias socializadoras como la ciudad, las tecnologías de la información, la otredad y los nuevos sociales y culturales entre otros.

> Mirar hacia afuera o hacia adentro pierde significación cuando se trata de dar cuenta de un conjunto como lo es el caso de la educación, lo privado y lo público cobran sentidos diferentes ya no sólo se trata de preguntar ¿de qué manera se significa?, sino de romper las clasificaciones y los comportamientos para dirigir la acción al sujeto." (Peña Rodriguez, 2007)

Específicamente sobre la enseñanza de las matemáticas, a este respecto Olga Lucia León, propone algunos aspectos que se deben entonces privilegiar en la enseñanza de las matemáticas:

> "La pregunta por el tipo de discurso pedagógico que caracteriza a una comunidad, y en particular a la comunidad de educadores matemáticos, exige la necesidad de hacer explícitos tres aspectos que determinan la producción de ese discurso. En primer lugar está el tipo de acción cultural que determina la naturaleza profesional del educador matemático en un ámbito social; en segundo lugar, el tipo de problemas que resuelve y los instrumentos que usa para ello y, en tercer lugar, el uso de formas de comunicar necesarias para la acción profesional" (León Corredor, 2004)

Y en términos de la comunicación, también se refiere en particular en referencia a los componentes constitutivos del contenido del discurso pedagógico del educador matemático:

> "Las formas de comunicar se relacionan con los dos aspectos anteriores [..el saber didáctico de las matemáticas escolares y el saber sociocultural y político de un sistema educativo…]; el contenido didáctico del discurso pedagógico está determinado por las formas de aprehensión y constitución de los objetos matemáticos, que por su naturaleza abstracta requieren sistemas semióticos para su constitución, manipulación, expresión y aprehensión. Esta característica configura un espacio muy particular para la comunicación en matemáticas y de dificultad para la acción didáctica. Las relaciones matemáticas se expresan en el lenguaje natural, pero la exploración de sus propiedades y formulación precisa se realiza con sistemas semióticos como el algebraico, el figural o cartesiano, entre otros, es decir, se requiere de más de un sistema semiótico para elaborar un saber

> matemático y para usarlo como herramienta de aprehensión y transformación de contextos culturales.
>
> El profesor requiere manejar no solo esas posibilidades de representación de los sistemas, sino también formas comunicativas y del contenido cultural de los consolidad. Así se generan formas de descripción, explicación y argumentación que caracterizan una secuencia discursiva que comunica un sentido matemático en el proceso de tratamiento o de conversión de los registros semióticos.
>
> De esta manera el discurso pedagógico del educador matemático presenta una estructura que involucra relaciones entre diferentes formas de representación semiótica, entre tramas argumentativas constituidas desde una trayectoria histórica de saberes matemáticos, y de reformas curriculares y tipos de normas sociales, sociomatemáticas y matemáticas, que determinan un discurso anclado a factores epistemológicos, cognitivos, comunicativos, socioculturales, políticos y tecnológicos.” (León Corredor, 2004)

Para finalizar este aparte, se cita nuevamente a Carlos Guevara, pero esta vez cambiando sus palabras pero no el sentido de la afirmación, ya que el autor hace referencia en este aparte específico del texto al lenguaje de la poesía, pero que puede ser igualmente reescrito para las matemáticas, pues en una fórmula matemática sin duda hay mucho de poesía en la medida que construye mundos y permite soñar en otros tantos:

> “Así, en la dimensión del lenguaje, y como resultado de misteriosas operaciones que tienen lugar por las relaciones entre signos, se altera profundamente la percepción de la realidad y las formas mismas de la conciencia; es decir, se da el lenguaje poético que guarda y concentra una mayor originalidad, una manera diferente de aproximarse al mundo, que es inalcanzable a través del lenguaje ordinario y cotidiano.” (Guevara A., 2007)

2. DIFICULTADES COMUNICATIVAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

El problema central que nos convoca es la dificultad que se presenta en los diferentes procesos de enseñanza y aprendizaje con relación a los aspectos comunicativos que hay en dichas relaciones. Por su propia complejidad y para brindar una visión más amplia de la problemática, no nos debemos centrar en un grado particular o un tema específico, pues la intención central de este trabajo es mostrar lo complejo y apasionante de dichas relaciones, y que no son propias de un grado o tema en particular, sino que siempre están presentes en el ámbito de las matemáticas, y en especial en sus procesos de enseñanza y el aprendizaje, con el fin de resaltar tales dificultades para que al hacerse conscientes se puedan abordar con la intensión de superarlas.

Estas dificultades se acentúan en la medida que los docentes desconocen que ahí hay un problema importante, y cada paso que se da, llevará el lastre de un concepto mal entendido o incompleto, que se verá relejado tarde o temprano como un error o un desconocimiento por parte del estudiante, generándole a su vez malestar y desconcierto.

Ante el surgimiento de la pregunta: ¿Por qué no entienden matemáticas los estudiantes?, surgen otras preguntas paralelas: ¿Será que no logro hacerme entender?, ¿Falta motivación?, ¿Es una consecuencia del entorno difícil (en todos los aspectos) de los estudiantes?, ¿?,..y este juego de dudas nos remite a pensar múltiples problemáticas de toda índole, que van desde las condiciones y el interés de los estudiantes, pasando por dificultades institucionales y del sistema educativo en general, hasta los problemas socio políticos más relevantes de nuestro mundo actual; para poder hacer un diagnóstico “real” de ese(esos) estudiante(s) en particular que parece(n) no entender.

Al final cuando solo quedan el docente y el estudiante, aparece la más básica de las relaciones entre ellos: La Comunicación. Y solamente allí cuando los docentes empiezan a observar sus prácticas como una relación comunicativa entre ellos y los estudiantes, se empiezan a develar situaciones particulares que son generalmente el punto de partida de todos los trabajos que a este respecto se han consultado. Afloran grandes dificultades, pues el docente y el estudiante hablan lenguajes diferentes, y no solo hay una mediación

directa del lenguaje común sino que aparece la matemática con toda una simbología, una sintaxis y una semántica propia que hace que esta comunicación en particular requiera de una reinterpretación, de una traducción adicional que complica aun mas todo el proceso.
En las aulas confluyen múltiples lenguajes totalmente diferentes entre sí: el lenguaje cotidiano (donde el del docente y el del estudiante que casi siempre son diferentes), el lenguaje del aula (muy estandarizado) y el lenguaje matemático (altamente codificado y especializado); situación esta que obliga a que el más simple de los conceptos deba ser múltiplemente traducido desde que lo enuncia el docente, hasta que lo recibe el estudiante (y esto sin contar el proceso de retroalimentación propio de la clase).

2.1 DIFICULTADES

Hablar de dificultades en educación es una constante a todo nivel y en todas las áreas, pero cuando se piensa en matemáticas específicamente esta percepción se aumenta, y se considera socialmente que la *dificultad* es un requerimiento de las matemáticas, e inclusive se piensa en los matemáticos como personas excepcionales o extrañas, que se parecen mucho al estereotipo cinematográfico del “científico loco”, pero que condiciona de fuertemente la idea que se tiene de este saber desde el punto de vista socio-cultural.

En educación las dificultades son muchas, a todo nivel y más en una sociedad como la nuestra que aún se autodenomina como “en vía de desarrollo”, pero en este ejercicio en particular aunque no se pretenden minimizar ni olvidar las enormes dificultades que históricamente padece nuestro sistema educativo, y que están enmarcadas en otras macro problemáticas sociales aún más complejas y de diversa índole, se pretenden asumir solo las dificultades que se originan básicamente en el aula de matemáticas a razón de su desarrollo y cotidianidad, sin olvidar que no se pueden desligar completamente de los contextos y los individuos particulares, pero si analizarse desde esa óptica en particular.

Las dificultades en matemáticas pueden observarse básicamente en dos aspectos: dificultades con los **algoritmos de las operaciones**, y en un marco mucho más general las dificultades en la **resolución de problemas**, siendo este segundo aspecto es donde se hacen más notorias, pues es aquí donde los estudiantes presentan las mayores dificultades.

Sobre las dificultades en la elaboración del *concepto de número* y sobre los *algoritmos de las operaciones,* Jaime Martínez en su libro "Enseñar Matemáticas a alumnos con necesidades educativas especiales", aporta varias reflexiones al respecto. Cabe anotar que el título del libro aparentemente es orientado a un segmento particular de estudiantes, pero al revisarlo más detenidamente se encuentra en la introducción y en palabras del mismo autor: "[Este]…es un libro al servicio del maestro y de la maestra de Educación especial y de Educación Primaria. Uno u otro, en mayor o menor medida, tienen que ocuparse del alumnado que no aprende, que muestra incapacidad, que se queda descolgado del resto de los compañeros." (Martínez Moreno, 2010)

Refiriéndose específicamente sobre las prácticas docentes en la iniciación de los estudiantes en el concepto de número, el autor señala las principales características que tienen los métodos y procedimientos que emplean para la iniciación de los estudiantes de 3, 4 y 5 años en el mundo del número[2]:

> "Las practicas docentes en la actual iniciación del alumno en el número. Los problemas derivados.
>
> 1. **Los números son, y sólo son, su representación**
>
>   El sistema de iniciación pone de manifiesto que el maestro entiende que el número es la palabra (dos, cuatro, ocho) o el grafo (2, 4, 6, 9), o ambas cosas. El trabajo más sistemático que se desarrolla en clase se refleja en esto. El núcleo de todos los ejercicios atiende precisamente a esta circunstancia: que aprendan la palabra y su grafía. Lo demás es más anecdótico, como de relleno. …Como decía

[2] Solamente se retoman algunos apartes textuales que dan la idea general de las dificultades en cada procedimiento, y se aclara que el orden no presupone su importancia

Bertrand Russell, el número es lo que caracteriza a ciertos conjuntos, precisamente a aquellos que tienen ese número. Los niños deben trabajar este establecimiento de equivalencias para explorar e iniciarse en el número. …

2. **En la iniciación numérica se emplean un número muy limitado de contextos numéricos**

…Evidentemente, no se trata de que en la iniciación se trabajen exhaustivamente todos los contextos. Esto sería imposible, pero si se deben clarificar ciertos aspectos. En muchas ocasiones, las dificultades que tiene un niño a la hora de trabajar los números vienen de exigencias en determinados contextos, cuando la representación mental que tiende de los mismos está en contextos distintos. Por ejemplo, suele ser muy frecuente que la iniciación de los niños en educación infantil la hagan manejando un material continuo, como son las Regletas de Cuisenaire, y al mismo tiempo el enfoque general del trabajo responda a un planteamiento basado en materiales separados.

3. **No se suele establecer distinción entre la aplicación de la cadena numérica y la cardinal**

En los ejercicios que proponen a los alumnos no se distingue entre la pura aplicación de la cadena numérica a una sucesión de objetos a contar, y la capacidad del establecer el cardinal de un conjunto de elementos, que coincide, precisamente, con el número que le corresponde al último elemento contado. Es decir, se actúa como si esta distinción fuera totalmente evidente para el alumno o, para ser más precisos, como si este aspecto pasara desapercibido para los maestros. Contar y cardinar no es lo mismo. …

4. **El material que se emplea en el aprendizaje no se estructura adecuadamente**

Salvo en muy escaso número de ejercicios, los objetos que van a servir de modelo o ejemplo a los alumnos se presentan de una misma manera: objetos separados, carentes de estructura, ordenación interna, pautas reconocibles, etc. Por ejemplo, no aparecen ejercicios en que objetos reales agrupados y desagrupados sirvan de modelo de los distintos números: tres cerezas unidas y una suelta, …

5. **No se establecen relaciones entre los diversos números**

En el proceso de iniciación del niño al número no se obtienen números por agregación de otros menores, ni se descubre cuantos números más pequeños hay anidados dentro de uno mayor, si se somete a los alumnos a ejercicios que pongan en conexión y relación a unos números con otros. …

6. **La mayor parte de las actividades se desarrollan en soporte papel**

Esto es, en educación infantil, a través de fichas. Es descorazonador contemplar como los libros de texto (las fichas en educación infantil) se han apoderado de la escuela. …Esto es muy preocupante, puesto que se sustituye una experiencia temprana por su simbolización y su representación. Lo más grave es que en estos estadios ni siquiera se ha constituido esa experiencia temprana. En el aula los niños ni cuentas, ni predicen, ni estiman, ni calculan. Todo tiene que versar sobre dibujos pequeños para que quepan en un folio apaisado A4. …

7. **Los dibujos que se presentan a los niños como modelo de los distintos números son ambiguos y conducen a la confusión**

… Por ejemplo: para el uno se pone una cabeza de niño, con sus ojos, boca, nariz, etc., pero también aparece la nariz y/o la boca como modelo para del número uno; para el dos, los dos ojos solos…las mesas y las sillas corren la misma suerte que las manos, valen igual para el uno que para el cuatro…

8. **Se emplea muy poco el material didáctico específico para el entrenamiento del niño en el sentido del número**

El único material que se emplea de vez en cuando, además del papel y lápiz y de los modelos que se usan para introducir los números, son los regletas, los número en color de Cuisenaire. No hay encajables, dominós, cartas, fichas, tableros, ábacos, etc. Evidentemente, tampoco material audiovisual interactivo, o cosa que se le parezca.” (Martínez Moreno, 2010)

Y sobre las dificultades en los algoritmos de la suma afirma:

> "Las dificultades generales que señalaremos a continuación no son aplicables en exclusiva a los problemas de sumar y restar, sino que son predicables a todos los problemas. Porque los problemas aditivos son los primeros a los que se enfrenta e l niño, y lo hace a una edad muy temprana. Comienza con los problemas de multiplicación al menos cuando han pasado dos curso desde que empezó con el primer problema de sumar. Dos años, a estas edades, es mucho trayecto de vida: un tercio, respecto al niño de seis años, y un cuarto, respecto el niño de ocho años. Por ello, estas dificultades se colocan dentro de este tipo de problemas." (Martínez Moreno, 2010)

Las dificultades generales que presenta y desarrolla en el libro son:

- Falta de madurez de los alumnos y de experiencias previas
- Bajo nivel lector
- El tamaño de los números
- La secuencia de los datos
- La situación de la incógnita (ubicación en el enunciado)
- Carencia de esquemas comunes

Y con relación a la multiplicación:

"Las muchas dificultades que plantean las estructuras multiplicativas a los alumnos no han sido descubiertas recientemente. Ya en el siglo XV un matemático italiano llamado Pacioli se quejaba del desconcierto y la turbación que le producía el contemplar como la multiplicación, con ciertos números obtenía un número menor al del multiplicado, contradiciendo así uno de los mandatos de la biblia que daba lugar a pocas interpretaciones: "Creced y multiplicaos"

En general, el problema principal deriva, y es común a otros muchos aprendizajes escolares, de la necesidad de que los niños construyan en la escuela, tempranamente respecto a su desarrollo mental y en poco tiempo, conceptos que han tardado siglos en desarrollarse." (Martínez Moreno, 2010)

Y al respecto de algunos problemas estructurales en la multiplicación enumera algunos:

> "Una primera incursión en las dificultades nuevas que aportan los problemas de multiplicar y dividir nos hace ver que, en la vida diaria, no siempre se cumple sus exigencias. Veamos algunas situaciones:
>
> - Muchos cálculos no pueden ser exactos, sino aproximados. Además, pueden fijarse en el grado de aproximación que se precise
> - En algunos tipos de problemas (especialmente en los que requieren una división) para obtener el resultado hay que contemplar la plena significación de todas las partes de la operación y no solo el resultado d la misma
> - El hacho, cada vez más generalizado, de que dos o tres productos no siempre valgan dos o tres veces el precio de uno, sino algo menos. Cualquier persona que pasee por una superficie comercial puede darse cuenta de que esta es una práctica cada vez más corriente
> - No existen "cambios redondos" en determinadas magnitudes, pues, por ejemplo, el cambio de una divisa es otra depende mucho del lugar, del día, de la comisión, etc. Lo mismo ocurre con los intereses de los préstamos, las ganancias o pérdidas de las acciones en la bolsa de valores, etc.
> - En los problemas de velocidad, espacio y tiempo se tienen que considerar aspectos como el cansancio, la resistencia, el tipo de terreno, etc. Lo contrario apenas tiene que ver con la realidad. Un coche que circule a 100Kms/h durante 10 horas no hace mil kilómetros, por que el conductor se detiene a descansar, transcurre por tramos en que no puede mantener esa velocidad, etc.
> - Hay operaciones que resuelven problemas de estimación y que, naturalmente dan un resultado exacto que es, sin embargo una estimación " (Martínez Moreno, 2010)

Para las dificultades en la *resolución de problemas*, la situación varía y se debe casi exclusivamente a la dificultad para entender los diferentes enunciados, a este respecto afirma Duval:

> "Todas las dificultades relativas a los problemas se basan principalmente sino exclusivamente en la **comprensión de los enunciados** de esos problemas. Para verlo con claridad, es necesario centrar la atención en los siguientes dos puntos. De una parte, la comprensión del enunciado de un problema requiere necesariamente una tarea de conversión. De otra parte, para efectuar esta conversión es necesario discriminar en el enunciado la designación de los objetos pertinentes (ahora prefiero este término al de información)" (MarcadorDePosición1)

Esta afirmación se ve corroborada por Mª del Carmen Chamorro cuando no solo refiere las dificultades en la resolución de problemas a la interpretación de los enunciados, sino que además afirma que este no es un problema de capacidades intelectuales de los estudiantes como podría pensarse:

> "Los últimos estudios sobre alumnos que fracasan en la resolución de problemas ponen de manifiesto que estos alumnos tienen dificultades para interpretar los diferentes elementos que componen el contexto de un problema, así como para seleccionar la informaciones pertinentes que intervienen en la resolución. Se sabe, además, que la causa del fracaso tiene que ver con ciertos disfuncionamientos en la actividad de representación, tales como, por ejemplo, la falta de control en la selección de las informaciones pertinentes, o la influencia excesiva del contexto, que originan, por ejemplo, los alumnos no utilicen conocimientos operatorios que ya poseían.
>
> Por ello, interpretaciones anteriores, que achacaba el origen del fracaso de los alumnos a causas generales como una capacidad intelectual inferior o diferente, deben desestimarse, y así, en la actualidad, las investigaciones van dirigidas a entender la gran distancia que existe a veces, entre lo que el alumno es potencialmente capaz de hacer y lo que hace realmente frente a una situación dada, lo que lleva aparejado una nueva manera de proceder frente a los alumnos en situación de fracaso" (Chamorro Plaza, 2004)

En referencia específica a la forma en que generalmente se formulan los enunciados de un problema, Mª del Carmen Chamorro afirma:

> “El enunciado de un problema es un escrito matemático particular que tiene características propias, podríamos, incluso, decir que es un género literario bien caracterizado que necesita para su comprensión, la adquisición de ciertas claves y alguna dosis de entrenamiento.” (Chamorro Plaza, 2004)

Y más adelante complementa diciendo:

> “Se dice frecuentemente que las matemáticas son un lenguaje, lenguaje que es aprendido por el niño, en simultáneo en el caso de los primeros aprendizajes lógico-matemáticos, y generalmente con posteridad a la lengua materna; y en ambos casos no puede negarse que existen muchas interacciones entre estos dos lenguajes.
>
> Muchas de las dificultades que se han encontrado en la resolución de problemas aritméticos simples, nada tienen que ver con la mala comprensión o ejecución de los algoritmos, son de otra naturaleza. Conciernen a la lectura y comprensión del enunciado, a la selección y organización de los informaciones pertinentes dadas en el anunciado, a la traducción de esta organización en términos matemáticos.” (Chamorro Plaza, 2004)

Es entonces desde esta óptica se puede afirmar que es más un problema de traducción entre el lenguaje cotidiano y el lenguaje matemático formalizado, y que para ello el estudiante debe estar preparado y entrenado para esta labor:

> “Ahora bien, la noción de traducción está ligada a la de modelización matemática, en tanto que las matemáticas son un lenguaje que sirva para expresar, *de otra manera*, los datos del problema, a efectos de poder tratar el problema de una manera más general y abstracta, por lo que esa traducción el lenguaje matemático no es fácil ni instantánea. …
>
> ….Sabemos que esta traducción sólo puede llevarse a cabo en un nivel de operatización que supone la existencia previa de una representación ya estructurada del problema por parte del alumno. En otras palabras: esta traducción sólo es posible cuando el alumno controla ya el problema en cuestión y puede hace uso de un proceso de modelización. Por tanto, una de las cuestiones de los que nos ocuparemos más adelante, tiene que ver con la adquisición y

operacionalizacion de una representación del problema por parte del alumno" (Chamorro Plaza, 2004)

Ya ubicado el origen de la problemática, el interés se centra ahora en la observación detallada de cuáles son los elementos que constituyen el enunciado y como se puede transmitir de mejor forma a los estudiantes.

Cobran entonces interés los llamados operadores semánticos, cuya definición toma la autora de Ehrlich: "*Los operadores semánticos son unidades semánticas que reúnen, en una sola palabra, un concepto y una expresión verbal, y que ejercen una función específica en el enunciado, marcando, según el caso , un proceso de acumulación o comparación(…)Un operador semántico viene definido por su función en el enunciado del problema, y no por sus propiedades informativas intrínsecas"* (Ehrlich, 1990)

Lo importante de este concepto y que se ha comprobado experimentalmente, es que, una misma operación, dependiendo de sus características semánticas, puede ser fácilmente resulto por la mayoría de los estudiantes, o por el contrario dar lugar a fracasos masivos.

De igual manera la autora presenta lo que denomina los Factores de comprensión de los enunciados, que son los que permiten que un estudiante logre entender el enunciado de un problema en particular, y que como se observa no tiene relación con los algoritmos de las operaciones:

"En la comprensión de un enunciado, los alumnos ponen en juego diferentes tipos de representación cognitivas entre las que establecen correspondencias: de tipo lingüístico, icónico, y ligadas al escrito matemático y su correspondencia oral.

- **Los conocimientos pragmáticos de los alumnos**

  Muchos enunciados se encuentran ligados a las prácticas corrientes de resolución de problemas en la clase, provienen en su mayoría de manuales escolares que siguen una tradición, tanto en cuanto a temas como a redacción. La familiaridad del alumno con tales enunciados, lo que sabe que tiene que hacer habitualmente, el papel que cumplen los datos numéricos, etc., influyen en su comprensión del enunciado. …

– **Los conocimientos del mundo**

  Cuando se desconoce el funcionamiento de la bolsa, es prácticamente imposible resolver un problema que trate sobre ella, por mucho que solo comporte una sencilla sustracción; faltan conocimientos sobre el mundo. Inversamente, la resolución de ciertos problemas requiere el distanciamiento de los conocimientos que tenemos sobre situaciones familiares demasiado concretas.

– **Las competencias lingüísticas**

  Tienen que ver con cuatro niveles de análisis: el nivel pragmático (interpretar lo que ha querido decir el autor del enunciado), nivel de la representación semántica, nivel morfosintáctico (estructura de las frases, tiempos verbales, etc.), nivel gráfico (disposición del enunciado, presencia de esquema, tablas, figuras, dibujos, etc.).

– **Las capacidades perceptivas**

  Están relacionadas, sobre todo, con la exploración visual y la discriminación perceptiva.

– **La capacidad de representarse el problema**

  Fundamentalmente a través de un escrito matemático, y poner en marcha procedimientos de verificación y control que permitan completar o modificar las significaciones.

– **Las competencias lógicas**

  La comprensión de los sistemas de reglas condiciona la estrategia de resolución. Las interfases entre pensamiento natural y lógica formal son comunes. Se sabe, y Wermus lo ha puesto de manifiesto en sus trabajos, que la lógica espontánea de los niños y la lógica de predicados no funcionan de la misma forma, y que las operaciones de conjunción y disyunción de atributos son sustituidos por amalgamas de predicaos que funcionan de manera distinta." (Chamorro Plaza, 2004)

En este mismo texto y a manera de ilustración se presenta un ejemplo clásico conocido como "La edad del capitán", propuesta en Grenoble en el año 1980 entre estudiantes de 7 y 8 años, donde se les proponía el siguiente problema: "En un barco hay 26 corderos y 10 cabras ¿Qué edad tiene el capitán?", y donde la gran mayoría de estudiantes dieron una respuesta basada en los datos numéricos del problema, mostrando así dificultades en la resolución del problema debido a la incomprensión del enunciado, y que no se relacionaba con la parte numérica u operativa del mismo.

2.2 SEMIÓTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Históricamente el lenguaje no se ha desarrollado de forma lineal, sino que ha sido un proceso complejo y diverso. Y aunque en esa intención por representar el mundo no se puede determinar exactamente como sucedió, si sabemos que el lenguaje cotidiano desde sus inicios necesito representar también cantidades y relaciones aritméticas, y lo hizo en algunas ocasiones aún antes de que representara su lenguaje oral como lo afirma en su escrito Luis Puig:

> "Hoy sabemos, gracias a descubrimientos arqueológicos recientes, que los primeros signos escritos que crearon un pueblo sumerio en el sur de Mesopotamia y uno elamita en Susa, en el actual Irán —el desarrollo de cuyos sistemas de escritura se ha podido reconstruir paso a paso desde sus inicios alrededor del 3500 antes de nuestra era— fueron signos aritméticos" (Puig, 1994).

Y más adelante en el mismo texto muestra como en la geometría griega, el lenguaje empleado se diferencia del cotidiano, y más específicamente refiriéndose a como los signos están ya en vez de los objetos mismos de estudio:

> Árpád Szabó ha argumentado que la geometría griega era primitivamente una especie de μτορὶα, una indagación empírica sobre las propiedades de las figuras geométricas, basada en la vista. Por eso, cuando, como hace Euclides, los objetos de la geometría se definen desprendiéndose de las propiedades sensibles de las figuras geométricas trazadas en la tierra, como medios de organización de éstas ("Un punto es lo que no tiene partes." "Una línea es una longitud sin anchura."), esas definiciones han de acompañarse del postulado de las condiciones mismas del discurso en el que ha de dialogar el lector (Puig, 1994).

Sin pretender hablar de una supremacía de una forma de lenguaje sobre otro, si es claro que no es gratuita la aparición inicial del lenguaje matemático en forma representativa paralela al lenguaje cotidiano oral.

Para este autor también es claro que la simbología matemática se ha ido transformando y acomodando a las diferentes circunstancias, de acuerdo a múltiples necesidades y entornos, y se requiere analizar este hecho como una evolución que permita visualizar no tanto el signo por sí mismo, sino cómo encaja en un sistema comunicativo mucho más amplio:

> Sin embargo, desde el punto de vista en que yo quiero situarme, una semiótica de las matemáticas no ha de centrarse en el estudio de los signos, sino de los sistemas de significación y los procesos de producción de sentido. Entonces, esa diferencia entre un "signo artificial" —que sería el propiamente matemático y cuyos modos de uso o de asignación de referentes específicos habría que estudiar— deja de ser crucial, para colocar en primer plano el sistema de signos considerado globalmente — o los sistemas de signos—, y lo que hay que calificar de "matemático" no es sólo un tipo particular de signos, sino sobre todo determinados sistemas de signos —es decir, no hay que hablar de sistemas de signos matemáticos sino de sistemas matemáticos de signos, y sólo en el interior de tales sistemas matemáticos habrá que estudiar el modo particular de combinación en que se presentan signos cuya materia de la expresión es heterogénea. (Puig, 1994)

Las tesis centrales de este autor apuntan a un contexto semántico del lenguaje usado en matemáticas, y pueden ser presentados en forma reducida en los siguientes ocho enunciados (Puig, 1994):

> I. Los textos matemáticos se producen mediante sistemas matemáticos de signos estratificados y con materias de la expresión heterogéneas.
> II. La heterogeneidad de la materia de la expresión se manifiesta en la presencia en los textos de segmentos de lenguaje natural, algebraico, figuras geométricas y otros diagramas, etc.

III. Los textos matemáticos llevan inscritos deícticos[3] que refieren entre sí elementos de segmentos de naturaleza diferente.

IV. Gracias a estos deícticos, se inscriben en el texto indicaciones de *traducciones* entre los elementos mutuamente referidos, que son marcas que el propio texto lleva del campo semántico a partir del cual el lector ha de producir sentido.

V. Los objetos de los que tratan las matemáticas son creados en un movimiento fenómenos/medios de organización por los sistemas matemáticos de signos que los describen, y, ya que ese movimiento de ascenso de los fenómenos a los medios de organización no se desarrolla siempre en el mismo nivel, es decir, lo que se toma como fenómenos que piden ser organizados por nuevos medios no está en un mundo inmutable, cuyo conjunto de fenómenos fuera el objeto de estudio de las matemáticas, las matemáticas generan su propio contenido. Un aspecto importante de ese movimiento puede denominarse "abstracción".

VI. El que los sistemas matemáticos de signos sean el producto de un proceso de abstracción progresiva, ya sea en la historia de las matemáticas o en la historia personal de un sujeto empírico, hace que los que realmente se usan estén formados por estratos provenientes de distintos momentos del proceso, relacionados entre sí por las correspondencias que éste ha establecido.

VII. La lectura/transformación de un texto/espacio textual puede hacerse entonces usando distintos estratos del sistema matemático de signos, recurriendo a conceptos, acciones o propiedades de conceptos o acciones, que están descritos en alguno de los estratos.

VIII. En esas modificaciones de estratos de lenguaje que conducen a identificar conceptos o acciones, desempeña un papel importante la autonomización de las transformaciones de la expresión con respecto al contenido, de modo que éstas

[3] Deíctico: La **deixis** es la parte de la semántica y la pragmática relacionada con las palabras que sirven para indicar otros elementos. Palabras como *tú*, *hoy*, *aquí*, *esto*, son **expresiones deícticas** que sirven para señalar personas, situaciones, lugares, etcétera. En pragmática, las expresiones deícticas dependen, para su correcta interpretación del contexto del hablante sobre todo del contexto físico de los elementos extralingüísticos. Los **deícticos** son las palabras que se interpretan en relación con la situación de comunicación. Los deícticos necesitan que se muestre de algún modo a qué se refieren. Si se usan oralmente se puede indicar o mirar aquello de lo que se está hablando. Si se emplean por escrito, remiten a algo ya mencionado o por mencionar, y sólo se llenan de contenido al contextualizarse. Si alguien dice: *Tendrás que llevarlo allí mañana*, si la persona a quien se dirige no conoce el contexto, no será capaz de entender a qué se refiere la oración.

puedan efectuarse de acuerdo con las reglas sin tener que contrastar el resultado de las transformaciones de la expresión con respecto al contenido, en cada uno de los pasos, sino sólo eventualmente o una vez se ha dado por concluido el conjunto de transformaciones.

3 ¿CÓMO APRENDEMOS MATEMÁTICAS?

En la enseñanza convergen de alguna manera todas las fuerzas sociales y todos los campos del conocimiento, por esto cada quien se aproxima de una forma particular y también es claro que tampoco se tendrá una respuesta concreta a tan mayúsculo intento. El interés ahora se centra en responder de alguna forma a la pregunta ¿Cómo se aprenden las matemáticas?, pues de su respuesta depende la forma en que debamos afrontar dicho problema.

Son variadas las respuestas a esta pregunta, y sobretodo provienen de una amplia gama de ramas del conocimiento; tenemos a la psicología, la lingüística, la neurolingüística, la medicina, la biología, la epistemología, la filosofía, la pedagogía, la sociología, entre otras, intentando dar respuesta a esta inquietud, pero como era de esperarse solamente se han logrado hasta ahora respuestas parciales. Cada vez entendemos un poco mas este respecto y los modelos anteriores se van adecuando paulatinamente a las nuevas exigencias. El otro problema fundamental consiste en ¿cómo llevar a la práctica lo que recientemente hemos comprendido sobre la forma en que aprendemos sin generar traumatismos en los diferentes sistemas y modelos educativos?

Recordemos que para establecer un modelo educativo y definir la escuela en un contexto particular, se parte de lo que se sabe en educación para hacer dicha elaboración, y además hay que tener en cuenta que los sistemas educativos se caracterizan por ser siempre demasiado lentos y pesados, lo que exige una enorme cantidad de trabajo y esfuerzo para lograr cualquier tipo de cambio en su interior. Y adicionalmente debemos tener en cuenta que en la educación se trabaja con y para seres humanos, lo que dificulta aun mas cualquier intento de renovación o cambio; los resultados generalmente no se pueden verificar a corto plazo.

En la búsqueda por entender como es el proceso de conceptualización de los diferentes procesos matemáticos, se encuentran varias teorías y acercamientos teóricos y prácticos que dan cuenta de algunos aspectos relevantes, pero ninguno da una respuesta total a este interrogante y solamente aborda aspectos parciales.

En este trabajo en particular se abordará este interrogante básicamente desde dos autores contemporáneos: Raymond Duval con sus estudios sobre Sistemas Semióticos de Representación y Gérard Vergnaud con la teoría de los Campos Conceptuales.

Ambos autores coinciden en varios aspectos como en el enfoque cognitivista que ambos le dan a sus trabajos, pues intentan explicar la forma en que se aprenden las matemáticas, y llegan a conclusiones similares, como por ejemplo que la verdadera dificultad de las matemáticas no se encuentra en los conceptos propios del área sino en la forma en que estos son transmitidos y apropiados por los sujetos.

3.1 REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Una de las primeras preguntas que surgen sobre la educación en matemáticas es ¿Qué caracteriza la actividad matemática?, pues de su respuesta depende la forma en que se aborde dicha problemática. Para responder a esta inquietud nos remitimos en particular a Raymond Duval, autor contemporáneo quien de tiempo atrás viene investigando sobre los diferentes problemas que surgen en la enseñanza de las matemáticas, y que van desde saber que contenidos enseñar hasta analizar las razones estructurales de los problemas de comprensión que enfrentan la mayoría de estudiantes en todos los niveles educativos.

A este respecto el autor manifiesta:

- Para explicar los obstáculos por lo que pasan los estudiantes para comprender un concepto matemático no es suficiente analizar su complejidad epistemológica.
- La diferencia entre la actividad matemática requerida para matemáticas y la requerida para otros dominios de conocimientos no son los conceptos sino que se deben tener en cuenta las siguientes tres características.

1. La importancia de las representaciones semióticas.

En el desarrollo histórico de las matemáticas se puede evidenciar que el desarrollo de las representaciones semióticas fue una condición esencial para el desarrollo del pensamiento matemático. Por ejemplo, los cálculos dependen del sistema de representación

2. La paradoja cognitiva de acceso a objetos de conocimientos.

Paradoja que resulta al tratar de conciliar por un lado el uso de representaciones de un objeto matemático y por el otro lado la necesidad de no confundir esas representaciones con el objeto mismo.

El autor identifica el problema crucial de la comprensión matemática como el conflicto entre estos dos requerimientos.

3. La gran variedad de representaciones semióticas usadas en matemáticas.

La actividad matemática necesita tener diferentes sistemas de representación semiótica que pueden ser usados libremente de acuerdo a la tarea o de acuerdo a la pregunta planteada.

En este punto es importante detenerse un poco en el término "representación" empleada por el autor, pues existe una gran variabilidad semántica en el empleo de este, pero que se puede reducir a tres grandes oposiciones, que dan sentido al término de acuerdo a la posición que se tome como referencia:

lenguaje / imagen

mental / material

subjetivo / objetivo

Donde el problema es entonces saber si alguna de estas oposiciones son suficientes para dar cuenta de la diversidad de representaciones utilizadas en matemáticas

El término representación lo emplea entonces Duval por tres razones fundamentales:

- La noción de representación está en el centro del análisis del conocimiento científico
- Los desarrollos del conocimiento científico están ligados al cambio de la concepción de representación (naturaleza puramente mental –Descartes y Kant-, semiótica –Frege, Hilbert y Turing, y la revolución científica)
- El análisis semiótico

Y termina uno de los apartes de su libro diciendo:

> "Así, cuando estudiamos la variedad de los tipos de representaciones semióticas utilizadas en matemáticas, nos referimos siempre a los objetos matemáticos y no a los conceptos; esto, por lo demás, con frecuencia se consideran como representaciones mentales asemióticas. Para comprender la actividad matemática, la noción de objeto es tan fundamental, sino mas, que la de concepto. No se trabaja sobre los conceptos; se trabaja sobre los objetos (números, funciones…) que tienen propiedades. En otros términos lo importante es la dupla {*signo*, objeto} o {*representación semiótica*, objeto}" (Duval, Los problemas fundamentales en el

> aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo, 2004)

Duval se ubica entonces en desde las representaciones y sus implicaciones para el estudio de los procesos enseñanza y aprendizaje de las matemáticas:

> “El aprendizaje de las matemáticas constituye un campo de estudio privilegiado para el análisis de actividades cognitivas fundamentales como lo son la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas, incluso la comprensión de textos. Es por esto que es necesaria la utilización de varios sistemas de expresión y de representación distinta a los del lenguaje natural o las imágenes.
>
> En matemáticas, las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma. Es esencial no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones. Toda confusión entre objeto y su representación, provoca en un plazo más o menos amplio, una pérdida de comprensión; los conocimientos adquiridos se hacen rápidamente inutilizables por fuera de su contexto del aprendizaje, sea por no recordarlos, o porque permanecen como representaciones inherentes que no sugieren ninguna transformación productora. No puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación” (Duval, Semiosis y pensamiento humano:registros semioticos y aprenizajes intelectuales, 1999)

Es claro pues que en el dominio de la didáctica de las matemáticas puede emplearse el termino de representación tanto para los procesos facilitadores del aprendizaje como también para los procesos inhibitorios.

Cuando se desea entonces estudiar las diferentes representaciones, es necesario recurrir a la noción de sistema. Y esto nos lleva a conclusiones como que una representación no puede ser comprendida por fuera del sistema que la originó. En referencia directa a Saussure dice: “…un signo puede significar algo solo gracias a las relaciones de oposición que pueda tener con otros signos. Un signo es tal, solo al interior de un conjunto de otros signos; su sentido está ligado a un valor de elección en relación con otros posibles. Para él, no hay signo aislado o que pueda ser comprendido independientemente de otros signos.”

Y además afirma:

> “De manera más fundamental, un sistema semiótico comporta reglas, más o menos explicitas, que permiten combinar los signos entre sí de tal manera que la asociación formada tenga también un sentido. Las posibilidades de combinación son las que dan a u sistema semiótica inventiva y la permiten efectuar a su interior transformaciones de expresión o de representación. Estas reglas determinan el funcionamiento del sistema, su sintaxis en sentido amplio. Cada sistema semiótico, pues, puede tener un funcionamiento diferente: no todos los sistemas tienen las mismas reglas y algunos sistemas semióticos pueden ser más exigentes que otros.
>
> En lugar de hable de sistema semiótico de representación, hemos escogido el término “registro”. En francés, la palabra registro se emplea habitualmente para indicar diferentes maneras de utilizar la lengua para expresarse o de utilizar un teclado de música. Históricamente, esta es la palabra que empleó Descarte en el primer libro de su Geometría (1637) **para distinguir la escritura algebraica de las curvas y su representación figural.** Entonces, ¿por qué no tomarlo?” (Duval, Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo, 2004)[4]

La forma de análisis de las dificultades de los estudiantes para la comprensión de las matemáticas consiste en poder disociar y diferenciar las diferentes variables que intervienen en la resolución de los diferentes problemas planteados, pues de no ser así, afirma Duval: “no se logrará una observación sistemática, y sobre todo, no habrá una interpretación controlable y transferible”

Con referencia a los sistemas semióticos de representación Duval distingue dos tipos de registros:

---

[4] En este aparte del documento en todas las citas de Raymond Duval, las negrillas, cursivas y encomillados son tomadas directamente del texto original.

Los que llama **registros monofuncionales** que pueden ser usados para una sola función cognoscitiva: este es el caso del procesamiento matemático en general. Un ejemplo concreto de este tipo de registros es la representación algebraica de una función.

Y **los registros multifuncionales** que llenan una amplia gama de funciones cognoscitivas: comunicación, procesamiento de información, concientización, imaginación, etc. La representación gráfica es entonces un buen ejemplo de un registro multifuncional.

Los registros monofuncionales son creados explícitamente para su uso en la comunidad matemática y los procesos toman la forma de algoritmo. Son artificiales y abstractos.

Los registros multifuncionales apelan a la intuición, a la experiencia y el bagaje cultural del individuo. En un sistema multifuncional los procesos **nunca** pueden ser convertidos en algoritmos

A modo de comparación en el uso de ambas formas de registro Duval menciona que a diferencia de los registros monofuncionales, los registros multifuncionales parecen ser directamente accesibles a los estudiantes. Pero esto es muy engañoso, entre otras cosas porque la manera matemática de usar los registros multifuncionales es muy distinta a la del uso cotidiano. Empezando con el uso del lenguaje natural.

Y además afirma:

> “Las matemáticas y los profesores de matemáticas privilegian conmucha frecuencia los registros monofuncionales o técnicos sobre los registros plurifuncionales, no solo porque son más potentes sino porque permiten desarrollar algoritmos, es decir, una secuencia de reglas operatorias o de procedimiento; por ejemplo, los algoritmos de las operaciones aritméticas con la escritura decimal, los algoritmos con estructura fraccionaria, aquellos para la resolución de una ecuación (primer o segundo grado) o de un sistema de ecuaciones, los del cálculo de derivadas…. Estos tratamientos tipo algorítmico que tienen aplicación en problemas no-matemáticos (físicos, económicos,

arquitectónicos, de gestión…) y que los profesores de matemáticas tienden a privilegiar con mucha frecuencia.

Pero si la adquisición de algoritmos puede plantear dificultades que de hecho siempre son sobrepasadas por casi todos los alumnos, no siempre es este el caso en los registros plurifuncionales. De ahí, igualmente, la idea de que el lenguaje no tendría lugar en la actividad matemática y no jugaría ningún papel en la comprensión de las matemáticas, lo cual acarrea reales dificultades a nivel de la enseñanza. De ahí mismo, incluso, la idea opuesta, pero igualmente ilusorio, de que el empleo espontáneo del lenguaje ordinario en las discusiones (orales) de grupo, sería lo único suficiente para reintroducir el registro de la lengua natural, el cual había sido proscrito en las conceptos de los comienzos de la didáctica un poco antes y después de la reforma de las “matemáticas modernas”.

A pesar de todo, los registros monofuncionales son los que se toman como registros de referencia cuando se busca analizar la adquisición de los conocimientos matemáticos, dejando de lado los objetos matemáticos. Esto por lo regular enceguece frente al mayor problema en la formación inicial: **las dificultades más importantes y las más decisivas de cambio de registro no se dan entre dos registros de tipo monofuncional sino entre un registro de tipo monofuncional y uno de tipo plurifuncional.** Igualmente, el pasaje de un registro plurifuncional discursivo (la lengua natural) a un registro plurifuancional no discursivo (las figuras geométricas) no constituye un pasaje simple o evidente como con mucha frecuencia se cree. Estos problemas no aparecen solo a propósito de la designación de los objetos sobre las figuras. Más adelante veremos la importancia y complejidad de estos problemas analizando textos de demostración geométrica”

Y refiriéndose específicamente al tema del lenguaje, más adelante agrega:

“Si tomamos la cuestión del “lenguaje” en matemáticas, aludiendo con este término solo a la utilización de la lengua, se observa que su utilización puede proceder de muy diferentes tipos de actividad cognitiva: puede ser utilizado con fines de tratamiento como en el caso de las demostraciones en geometría, pero igualmente es utilizado con fines de descripción, de explicitación o comentario, es decir, en relación con representaciones de otro registro. Y, en la enseñanza, las actividades de conversión que implican un discurso en lengua natural, toman una predominancia muy particular, no solo por la importancia de los enunciados para los problemas, sino también por la importancia de los intercambios orales, en los cuales la expresión está alejada de las exigencias de control y de precisión que solo la expresión escrita permite." (Duval, Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo, 2004)

En la siguiente tabla se hace presenta un breve resumen de los dos tipos de registro

Tabla 1 Clasificación de los diferentes registros movilizados en matemáticas. La letra en cursiva indica el o los tratamientos característicos del tipo de registro

	REPRESENTACIÓN DISCURSIVA	REPRESENTACIÓN NO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONALES Los tratamientos no son algoritmicos	Lengua natural *asociaciones verbales* (conceptuales) *descripción, definición, explicación* razonamiento: • *argumentación a partir de observaciones, de creencias*… • *deducción válida a partir de definición o de teoremas*	Figuras geométricas planas o en perspectiva (configuraciones de formas en 0, 1, 2,3 D) *aprehensión operatoria y no solamente perceptiva* *construcción con instrumentos,* *modelación de estructuras físicas* (ej: cristales, moléculas)

REGISTROS MONOFUNCIONALES Los tratamientos son principalmente algoritmicos	Sistemas de escritura: • numéricas • (binaria, decimal, fraccionaria …) • algebraicas • simbólicas (lenguas formales) *cálculo literal, algebraico, formal*…	Gráficos cartesianos (visualización de variaciones) *cambio de sistema de coordenadas,* *interpolación, extrapolación*

En palabras del mismo autor veamos cómo define desde una preocupación mas operativa estos cuatro tipos de registros de representación:

> “Los registros dicursivos son los que utilizan una lengua. En estos registros se pueden formular **proposiciones** o transformar expresiones. Estas proposiciones y esas expresiones son representaciones que tienen dos características decisivas: Pueden ser verdaderas o falsa y pueden “derivarse” las unas de las otras. De las representaciones discursivas solo se puede tener una *aprehensión sucesiva, secuencial.*
>
> Los registros no discursivos son aquellos que, al contrario, muestran formas o **configuraciones de formas** así como organizaciones. De este tipo de representaciones solo se puede tener una *aprehensión sinóptica.*
>
> Los registros plurifuncionales son registros que se utilizan en todos los dominios de la vida cultural y social. Tienen la ventaja de prestarse a un espectro extremadamente amplio de tratamiento.
>
> Los registros monofuncionales son registros “derivados” (en el sentido en que Benveniste habla de sistemas semióticos creados por derivación). Estos registros derivados de alguna manera especializados en un solo tratamiento. De allí, su

> carácter “técnico”, es decir, “formal”: **las reglas que determinan el empleo de los signos y de los símbolos se hacen exclusivamente en función de su forma.** Esto es lo que, por lo demás, los hace más potentes y más seguros que los que son efectuados en un registro plurifucional” (Duval, 2004)

La distinción de la noción de registro aporta al análisis de la actividad matemática en el sentido que permite ver en detalle lo que ocurre con las diferentes representaciones y especialmente como se transforman.

“La actividad intelectual consiste esencialmente en la transformación de las representaciones semióticas en la perspectiva de elaborar nuevas representaciones. Todo progreso de conocimientos en matemáticas pasa por este trabjo de trnsformación. Ahora bien, hay dos grandes tipos de transformación en una representación semiótica: los tratamientos y las conversiones” (Duval, 2004)

Tratamiento: Es la transformación de una representación en otra representación de un mismo registro. Es decir, que se realiza al interior de un mismo registro, y solo bajo las reglas de ese sistema en particular.

El tratamiento es la transformación más importante desde el punto de vista matemático.

Conversión: Es una transformación de la representación de un objeto en un registro, en otra representación del mismo objeto pero en otro registro, es el paso de un registro a otro. Se conserva el mismo objeto, pero se explicita de otra manera. Esta situación el autor la ejemplifica con en ejercicio tomado de un manual de estudiantes de grado 8º:

“*m* es la semisuma de *a* y de *b*”: $m = \frac{a+b}{2}$

“*m* es igual a la suma de la mitad de *a* y la mitad de *b*”: $m = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$

Además aclara que la conversión presenta dos características que hacen que cognitivamente sea una operación más compleja:

- Está orientada, y siempre es necesario saber cuál es el registro de partida y cuál es el registro de llegada
- Puede ser congruente o no-congruente. Esto es que no siempre se logra que la nueva representación sea congruente en todos los sentidos, en otras palabras no es muy transparente (palabra usada por el autor) el paso de un registro a otro.

La conversión es el factor decisivo para el aprendizaje, porque ayuda a discriminar en una representación dada lo que es matemáticamente relevante y lo que no.

Se puede entonces afirmar que gran parte de la dificultad en el aprendizaje de las matemáticas se da en tres aspectos fundamentales (Duval, Semiosis y pensamiento humano:registros semioticos y aprenizajes intelectuales, 1999):

1. La diversificación de los registros de representación semiótica
2. La diferenciación entre representante y representado o, al menos, entre forma y contenido de una representación semiótica
3. La coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica disponibles

En la enseñanza actual generalmente se da más énfasis al tratamiento que a la conversión, y cuando se realizan conversiones se enfatiza más la conversión en una dirección que en otra. Por ejemplo desde el caso particular del algebra se nota que hay un mayor énfasis en las representaciones algebraicas de una función que en su registro gráfico, y de igual forma se da más énfasis al paso del registro algebraico al gráfico.

En particular sobre la enseñanza de las matemáticas igualmente afirma:

“En los diferentes niveles de enseñanza de la matemática se puede observar la persistencia de un encerramiento entre representaciones que no provienen del mismo sistema semiótico. El pasaje de un mismo sistema de representación a otro, o la movilización simultánea de varios sistemas de representación en el transcurso de un mismo recorrido intelectual, fenómenos tan familiares y tan frecuentes en la actividad matemática, para nada son evidentes o espontáneos para la mayoría de los alumnos” (Duval, Semiosis y pensamiento humano:registros semioticos y aprenizajes intelectuales, 1999)

3.2 CAMPOS CONCEPTUALES

En la búsqueda por entender como es el proceso de conceptualización de los diferentes procesos matemáticos, se encuentran varias teorías y acercamientos teóricos y prácticos que dan cuenta de algunos aspectos relevantes, pero ninguno da una respuesta total a este interrogante y solamente aborda aspectos parciales.

Desde este punto de vista podemos pensar en Gérard Vergnaud como una figura contemporánea muy importante, que desde su trabajo ha venido complementando de alguna forma las ideas de Piaget, ya que ha ido un poco más allá y estudiado por ejemplo el desarrollo cognitivo en los adultos, y los procesos de aprendizaje en la escuela y en el trabajo (Vergnaud G. , 2013), y además ha logrado relacionar la ideas de Piaget con las de Vygotski, labor esta que no se veía muy factible desde los ámbitos académicos, pero que al autor se le facilitan además de sus estudios al respecto, por hablar francés y ruso, lo que le permite ahondar en ciertos sentidos y significados que para otra persona pasarían desapercibidos (Otero, 2013).

En este sentido uno de los acercamientos más importantes actualmente, provienen de este autor, quien ha venido desarrollando la teoría de los Campos Conceptuales:

> "El objetivo de la teoría de los campos conceptuales es proporcionar un encuadre teórico a las investigaciones sobre las actividades cognitivas complejas especialmente referidas a los aprendizajes científicos y técnicos. Se trata de una teoría psicológica del concepto, o mejor dicho, de la conceptualización de lo real; permite localizar y estudiar las filiaciones y las rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual. Esta teoría permite igualmente analizar la relación entre conceptos en tanto que conocimientos explícitos y los invariantes operatorios implícitos en las conductas del sujeto en situación; la teoría explicita también las relaciones entre significados y significantes. Los ejemplos que la ilustran han sido tomados en diversos campos conceptuales: las estructuras aditivas, las estructuras multiplicativas, la lógica de clases, el álgebra.
>
> La teoría de los campos conceptuales es una teoría cognitivista, que pretende proporcionar un marco coherente y algunos principios de base para el estudio del

> desarrollo y del aprendizaje de competencias complejas, especialmente las que se refieren a las ciencias y las técnicas. Debido a que ofrece un marco para el aprendizaje, es de interés para la didáctica.
> Su principal finalidad es la de proporcionar un marco que permita comprender las filiaciones y las rupturas entre conocimientos, en los niños y los adolescentes, entendiendo por "conocimientos" tanto los saber-hacer como los saberes expresados. Las ideas de filiación y de ruptura se refieren igualmente a los aprendizajes del adulto, pero estos últimos se efectúan bajo restricciones que son más del orden de los hábitos y de sesgos de pensamiento adquiridos que relativos al desarrollo del aparato psíquico. En el niño y en el adolescente los efectos del aprendizaje y del desarrollo cognitivo intervienen siempre de manera conjunta.
> La teoría de los campos conceptuales no es específica de las matemáticas; pero ha sido elaborada primeramente para dar cuenta de procesos de conceptualización progresiva de las estructuras aditivas, multiplicativas, relaciones número-espacio, y del álgebra." (Vergnaud G. , 1990)

Como puede verse esta teoría de los Campos Conceptuales, sirve para abordar igualmente otras formas de conocimiento. Una de las premisas fundamentales es que "el conocimiento es adaptación", y desde esta teoría se busca entender cómo es que los sujetos logran conceptualizar alguna idea, y específicamente nos ayudan a comprender mejor el rol de la experiencia en este proceso.

Vergnaud diferencia para su análisis, lo que denomina la "forma operatoria " y la "forma predicativa" del conocimiento, diferenciando así entre lo que un sujeto puede hacer y lo que puede decir o verbalizar sobre eso que él hace. En la mayoría de situaciones es más fácil hacer algo en concreto que intentar decirlo con palabras. La "forma operatoria" es entonces actuar en situación (gestos, selección de información, invariantes operatorios, reglas de acción,…), y la forma "predicativa" es la enunciación de relaciones entre objetos. A este respecto la Dra. Rita Otero, ejemplifica esta situación proponiéndole a un deportista de alto rendimiento que explique con palabras la forma en que realiza una determinado movimiento, y lo que seguramente ocurrirá es que el deportista se quede corto en sus explicaciones, pues el mecanismo de dicho movimeinto ya lo tiene totalmente interiorizado e intentar describirlo con palabras será prácticamente imposible, pues hay pequeñas, múltiples y sutiles variaciones de las cuales el deportista tal vez ni sea consciente en el momento de su ejecución; lo que nos lleva a concluir que las palabras no dan cuenta del conocimiento operatorio (Otero, 2013).

Desde la operatividad y complejidad del cerebro esta afirmación puede entenderse con la analogía de que el cerebro actúa en paralelo (varias operaciones simultáneas), mientras las palabras son secuenciales.

La teoría de los campos conceptuales trasforma la dualidad **sujeto-objeto** en **esquema–situación** ("tarea"); dicho de otra forma ya no asume la relación básica donde el sujeto conceptualiza por arte de magia un objeto, ahora lo asume como un esquema que ya tiene incorporado el sujeto y con el que debe afrontar una situación real una "tarea concreta", y en la medida que ese esquema sea el adecuado el sujeto podrá dar solución a la tarea propuesta específica. Si el esquema no es el adecuado, no podrá resolverlo.

Por lo tanto los individuos poseen una variedad de esquemas que les sirven para solucionar ciertos problemas en particular, y el aprendizaje entonces es poder adaptar esos esquemas que ya se tienen a situaciones nuevas.

Una aproximación mas detenida a este concepto de esquema, lo proporciona Verganud:

> De ahí resultan varios niveles de definición:
> *Definición1:* el esquema es una organización invariante de la actividad para un tipo dado de situaciones. Esto no significa que exista un esquema único para ese tipo dado de situaciones, a menudo existen varias.
> *Definición 2:* el esquema se compone necesariamente de cuatro componentes:
> – una meta, sub-metas y anticipaciones;
> – reglas de acción, de búsqueda de información y de control;
> – invariantes operatorias: conceptos-en-acción y teoremas-en-acción;
> – posibilidades de inferencia en situación
>
> La primera definición incluye tres ideas esenciales, que no es superfluo resaltar:
> – El esquema va dirigido a un tipo de situaciones. Podemos entonces asociarle cuantificadores universales, que permiten definir su alcance y sus límites. El esquema es pues universal, tanto como el concepto.

> – La que es invariante es la organización, no la conducta observable; los esquemas no son estereotipadas, no es éste el caso para la mayoría de los esquemas: ellos engendran conductas distintas en función de las variables en situación
>
> – El esquema no organiza únicamente la conducta observable, sino también la actividad de pensamiento subyacente.
>
> La segunda definición es analítica. Resulta cómodo comentar primeramente las reglas de acción de la búsqueda de información y de control, ya que estas reglas aseguran la función generativa del esquema, la que es la más inmediatamente responsable del transcurrir temporal de la conducta y la actividad. (Vergnaud G. , 2013)

Los esquemas explican entonces porque ni las llamadas “competencias” ni la actividad son reductibles solamente a la conducta observable, y es entonces necesario recurrir a otros conceptos.

> De ahí se deriva un cierto cuadro del desarrollo: un campo conceptual aparece entonces como un medio para comprender mejor el rol de la experiencia.
>
> Un campo conceptual es justamente lo que permite analizar y relacionar entre sí las competencias formadas progresivamente. Las continuidades y las rupturas son entonces consideradas desde el punto de vista de la conceptualización, pero considerando este concepto en un sentido amplio, el de la identificación de los objetos de pensamiento y de sus propiedades en el transcurso mismo de la actividad en situación.
>
> La expresión lingüística y la disposición en formas simbólicas de representación (existe gran variedad de ellas) agregan peso y estabilidad a las formas conceptuales así elaborados en el transcurso del desarrollo, y acuden al auxilio de la conceptualización implícita en la acción. Pero el primer desafío de la psicología en tanto ciencia cognitiva es poner en evidencia las formas de conceptualización subyacentes a la actividad, las que son a la vez fuente y producto de esta actividad. Se trata de la principal razón teórica para la introducción, dentro de la definición de esquema, del concepto de invariante operatoria. (Vergnaud G. , 2013)

En este orden de ideas es también importante definir con claridad dos conceptos a los que se han hecho referencia:

> Un concepto-en-acción es un concepto considerado pertinente dentro de la acción en situación. Un teorema-en –acción es una proposición considerada como verdadera dentro de la acción en situación. …
>
> …Estos conocimientos-en-acción son calificados aquí con la expresión “invariantes operatorias” a fin de subrayar por medio del léxico que estos conocimientos no son necesariamente explícitos, ni explicables, ni aún conscientes en el caso de algunos de ellos. (Vergnaud G. , 2013)

En una aproximación al concepto de actividad, el autor ejemplifica como en situaciones diferentes una persona puede mostrar más experticia que otras para realizar una labor determinada (solucionar un problema matemático, la atención al cliente en un taller automotriz y la forma de un operario muy hábil de intentar explicar cómo arreglar una bomba hidráulica), mostrando además que la habilidad se consigue a través de la práctica, y de qué forma cada nueva situación que se va resolviendo contribuye a esa “forma operatoria del conocimiento”, enriqueciéndola y diversificándola.

Esta forma de actividad la condensa en el término *gesto* como un prototipo del hacer humano, y lo descompone en cuatro componentes:

- Una meta (o submetas), organizada de manera secuencial y jerárquica
- La secuencia, la regulación y los ajustes necesarios en función de las condiciones continuamente cambiantes
- La identificación de los objetos y sus propiedades como, color, peso, temperatura, velocidad, distancia, etc.
- El cálculo ininterrumpido y automático de las acciones a realizar en cada momento

Un ejemplo de interés es el caso concreto del gesto en un maestro:

Tomemos otro registro de actividad, el de la palabra, del discurso, del diálogo; y consideremos por ejemplo la organización de la actividad de un maestro en su clase. Los componentes enunciados más arriba se hallan nuevamente presentes, especialmente:

- La meta: compartir con los alumnos un cierto número de juicios de hacho o de valor, inducir preguntas y para ello pasar por ciertas sub-metas acerca de tal o cual punto, tal o cual análisis, tal o cual argumentación. Apuntar eventualmente a despertar el interés en distintos grupos del auditorio.
- La regulación y el ajuste de los argumentos, de la retórica, del tono con el cual se dicen las cosas. Esta adaptación descansa a la vez sobre una evaluación por parte del maestro acerca de las expectativas y de las reacciones posibles de los alumnos sobre sus hipótesis, sobre la interpretación de las expresiones en sus caras.

La actividad es a la vez repetición y variación. No se puede comprender el pensamiento presente en la actividad humana si no se percibe el doble carácter semántico y oportunista. Uno no repite sin sistema y reglas, uno no se adapta a la contingencia, a la variedad y a la novedad sin categorías de pensamiento para captar y elaborar la información pertinente. (Vergnaud G. , 2013)

Aparece entonces una definición de lo que es un concepto proporcionada por el mismo autor:

Esto nos conduce a definir un concepto como un triplete de tres conjuntos distintos, no independientes entre ellos, pero distintos:

Concepto = def (S, I, L)

S es el conjunto de las situaciones que le dan sentido al concepto

I es el conjunto de las invariantes operatorias que estructuran las formas de organización de la actividad (esquemas) susceptibles de ser evocadas por estas situaciones

> **L** es el conjunto de las representaciones lingüísticas y simbólicas (algebraicas, gráficas, etc.) que permiten representar los conceptos y sus relaciones. Por ende las situaciones y los esquemas que evocan

> El investigador que desea comprender el desarrollo cognitivo en el transcurso de la experiencia, incluso la experiencia escolar, se ve pues llevado a tomar como objeto de estudio un conjunto de situaciones y un conjunto de conceptos, es decir un campo conceptual.

> *Definición:* un campo conceptual es a la vez un conjunto de situaciones y un conjunto de conceptos. El conjunto de situaciones cuyo dominio progresivo implica una variedad de conceptos, de esquemas y de representaciones simbólicas en estrecha conexión; el conjunto de los conceptos que contribuyen a dominar esas situaciones. (Vergnaud G. , 2013)

El mismo autor propone cual ha sido el aporte de la teoría de los Campos Conceptuales en la idea de la conceptualización:

> Se ha enfrentado a menudo a Vygotski y Piaget en torno a los dos puntos cruciales que son, por una parte, los roles respectivos de la acción y del lenguaje dentro de la conceptualización, y por otra parte el peso de la experiencia individual y de la cultura dentro d la formación de las competencias y del pensamiento. Se puede apreciar en esta presentación un esfuerzo por integrar estos dos mayores aportes a la psicología cognitiva; no se oponen, sino que se complementan de manera útil. Sólo es necesario ser más precisos y rigurosos que uno u otro en las definiciones, en el análisis de los ejemplos, n la articulación de los distintos problemas teóricos planteados por la organización de la acción, del lenguaje, de la comunicación, y de la actividad de los individuos dentro de la cultura. …

> ….El punto menos desarrollado por esos tres autores (Piaget, Vyotski y Bruner) sigue siendo el de la ayuda a la conceptualización. Cuando se desea analizar dicha ayuda se cae rápidamente en el acompañamiento del lenguaje. En cierto modo es comprensible, en la medida en que el lenguaje interviene en la

> conceptualización, pero es al mismo tiempo insuficiente, ya que la formación de invariantes operatorias es la base de la conceptualización, en el transcurso mismo de la actividad. (Vergnaud G. , 2013)

Todo lo anterior y teniendo en cuenta los objetivos de este trabajo nos permite afirmar que la principal función como “mediadores” en el aula es seleccionar las situaciones propuestas de la mejor manera posible, o sea en forma: secuencial, progresiva y pertinente.

Y en palabras de Vergnaud:

El mediador asume así la responsabilidad de escoger situaciones y de ofrecerlas al aprendiz, de clarificar la meta de la actividad, de contribuir a la organización de dicha actividad, incluyendo la toma de información y la asunción del control, de hacer emerger, el menos parcialmente, los conceptos y los teoremas pertinentes, de facilitar las inferencias en situación. La puesta en palabras y en símbolos de los conocimientos, de las situaciones y de las reglas que organizan la actividad conforma una parte no desdeñable de la actividad del mediador, pero solo una parte. Lo primero y esencial es la elección de las situaciones. Por otra parte la comunicación entre el mediador y el aprendiz se encuentra sometida a las mismas ambigüedades que cualquier otra comunicación: existe una brecha entre los dichos del mediador y el sentido que él les da, y el sentido que entiende el aprendiz, en función de su propio sistema de invariantes. El referirse a las situaciones se mantiene inevitable. (Vergnaud G. , 2013)

Resumiendo, la apropiación de una cultura por parte de un individuo depende necesariamente de su propia actividad, incluyendo su propio trabajo de construcción o de reconstrucción de los conceptos que constituyen esa cultura. También depende intensamente de la ayuda que pueda recibir de su entorno, y por lo tanto de la calidad de las mediaciones de las cuales se beneficia. La mejora de la educación y de la formación, el desarrollo de las competencias en el trabajo, dependen pues en gran medida de la mejora en la profesionalidad de los mediadores. (Vergnaud G. , 2013)

4. ESTRATEGIAS COMUNICATIVAS EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

4.1 MATEMÁTICA ESCOLAR COMO LENGUAJE

Cuando se observa en la práctica y en detalle la forma en que se construyen los diferentes conceptos matemáticos por parte de los estudiantes, se llega a la conclusión que todo el proceso se puede enfocar en la construcción del lenguaje matemático. Esta afirmación se hace más evidente y se aclara cuando se observa el paso entre la aritmética y el algebra, pues el estudiante que ya posee unos conocimientos de aritmética, los debe resignificar en el algebra.

Dicha tensión, afirman Filloy y Rojano, es el resultado de la necesidad de dotar de un nuevo sentido (a través del uso) a las nuevas operaciones y conceptos, lo que a su vez dotará de nuevos significados a las expresiones algebraicas representadas por los mismos signos (de la aritmética) o versiones más elaboradas de ellos. (Rojano, 1994)

El problema entonces se traslada a la ***noción de sentido*** que un estudiante puede darle a una expresión matemática determinada, y que a su vez va a estar mediada por diferentes factores semánticos y sintácticos.

Ahora bien, cuando se pretende estudiar la relación entre lenguaje y matemáticas, se debe escoger para dicho análisis una de las tres posibilidades que hay para hacerlo (Rojano, 1994):

- El lenguaje de las matemáticas,
- Matemáticas y lenguaje, y
- Las matemáticas como lenguaje

Y esto es fundamental ya que cada una de estas determinará aspectos fundamentales de la investigación como por ejemplo la metodología.

La primera de estas posibilidades genera bastante controversia, pues aunque el lenguaje matemático cumple con ser un sistema de comunicación estructurado para el que existe un contexto de uso y ciertos principios combinatorios formales, que es lo que define un lenguaje; para muchos no es entendido como tal porque carecer de algunas funciones propias de un lenguaje en un sentido mas amplio, como son la función apelativa, la emotiva e inclusive la fática; y aunque en ocasiones se pudiera hablar en términos de una “estética matemática”, tanto por su orden, la forma elegante de su presentación o el profundo sentido de sus afirmaciones, sería más apropiado hablar de los *lenguajes de las matemáticas*, ya que generalmente cada una de sus ramas tiene elementos particulares en su lenguaje y formas de representación, además se usan en contextos muy particulares y restringidos.

4.2 CARACTERIZACIÓN Y USO DE LIBROS Y TEXTOS EN MATEMÁTICAS

Otro aspecto fundamental en la enseñanza de las matemáticas y que generalmente es poco analizado, es el uso de los textos escolares y su influencia en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Dado que una de las herramientas más empleadas en la enseñanza de las matemáticas son los libros de texto, merecen un corto análisis, pues es a través de ellos que se comunican muchas de las ideas y conceptos matemáticos. En este sentido la evolución de los textos matemáticos ha sido muy similar en todas partes, y han pasado de ser unos libros pesados, de letra pequeña, con un lenguaje muy poco accesible y con muy pocas graficas e ilustraciones, ha ser todo un derroche de color y calidad de impresión. Podría hacerse aquí un paralelo con las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación), que visualmente tienen una gran riqueza, pero que no garantizan otro tipo de procesos ya que requieren de otra forma de acercamiento.

La inquietud en este caso se centra en la influencia que estos textos tienen no solo en los estudiantes sino también en los docentes. Con los avances en la impresión los textos, cada vez se llenaron mas de ilustraciones y gráficas, pero surge entonces la pregunta si estas mejoras si contribuyen realmente en el proceso educativo, o por el contrario no son más que adornos que poco ayudan y por otro lado confunden. Más adelante se tratará el tema de los cambios de sistemas de representación y sus implicaciones desde la óptica de Raymond Duval

Es común en nuestro medio que los docentes empleen en sus clases o se guíen en su preparación de diferentes libros de texto, pero también es sabido que igualmente elaboran sus planeaciones pensando más en seguir los derroteros propuestos por algún texto en particular, o se aferran a un solo texto y lo desarrollan paso a paso, sin permitir a los estudiantes visiones más generales e incluso diferentes de un determinado tema; todo esto no mas pensando desde una óptica de las diferentes formas de aprendizaje.

A nivel de la educación en nuestro país es bien conocida la “guerra de editoriales” que tiene lugar cada fin de año para conquistar a los docentes e instituciones, y que entre otras bondades ofrecen desde algún equipamiento institucional, hasta la promesa de facilitar a los docentes su engorrosa tarea de planeación. Otras artimañas bien conocidas son las de reeditar, corregir y mejorar un texto que lleva algún tiempo en el mercado, o proporcionar en un solo libro y de manera casi mágica las “últimas estrategias” a nivel mundial.

Sin pretender desmeritar la labor de las editoriales en general, que entre otras cosas se considera meritorio; si es conveniente resaltar que ningún texto puede ser escrito para las particularidades de un grupo específico, y tampoco la metodología se adapta completamente. Los textos son entonces una buena herramienta de trabajo para los estudiantes y los docentes, y no se puede negar que en ocasiones son casi imprescindibles, pero no son más que apoyos.

Históricamente los libros de texto procuran presentarnos el *status quo*, de las directrices académicas y pedagógicas imperantes en un país, época o lugar determinado, siendo entonces otro instrumento de poder que ayuda a la propagación de las ideas dominantes, tanto desde lo que se explicita como desde lo que se . Por las fuertes influencias extranjeras que siempre hemos tenido en el país, podemos hacer en este caso particular un paralelo con España, pues gran parte de nuestras editoriales y modelos educativos nos han llegado por desde allí; hacemos referencia al artículo denominado “Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX”, de M. Teresa González Astudillo y Modesto Sierra Vázquez, donde los autores describen el desarrollo histórico de los textos escolares en ese país, y del cual tomaremos su propuesta metodológica para el análisis de los textos.

> “Desde el punto de vista histórico, en la transmisión del conocimiento, ha constituido un hito importante la aparición del libro escolar, que se puede considerar un elemento cultural reflejo de la manipulación social que selecciona unos contenidos frente a otros, que impone una determinada forma de estructurarlos y que propone a la siguiente generación cierto tipo de problemas con unas herramientas semióticas y no otras. En este sentido, Choppin (1980) considera que el libro de texto es «a la vez apoyo del saber en tanto que impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos y contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de alumnos como de profesores; es instrumento de poder, dado que contribuye a la uniformización lingüística de la disciplina, a la nivelación cultural y a la propagación de las ideas dominantes». Por ello, es interesante estudiar la contribución que los libros de texto han tenido en la historia de la educación matemática analizando la variedad y riqueza de sus contenidos, la incidencia en el aula, su función como transmisor de contenidos socialmente aceptados… Además, «los libros de texto determinan en la práctica la enseñanza más que los decretos de los distintos gobiernos». (Schubring, 1987)” (González Astudillo & Sierra Vásquez, 2004)

En cuanto a los textos escolares en nuestro país, comparados con España, se destaca que son muy similares en forma, intención y contenido, e inclusive coinciden en los años de su utilización; y sobresalen tres momentos: el comienzo de su masificación antes de mediados de siglo, las “matemáticas modernas” de los años 70’s y luego la continua adaptación de los textos a las diversas exigencias y propuestas de los diferentes gobiernos.

En Colombia entonces, actualmente están orientados por los Lineamientos curriculares y los Estándares de competencias, procurando acomodarse de la mejor forma posible a todos los requerimientos que pudieran hacérsele.

Sin embargo son notorias algunas de sus falencias:

- Generalmente no están contextualizados y emplean términos muy generales pero que igualmente no son de uso cotidiano de los estudiantes
- Son textos atemporales que poco o nada tienen que ver con la realidad
- Es muy común encontrarles errores
- Para nuestro país específicamente proponen el desarrollo por competencias, pero en realidad siguen trabajando por temas
- Es común que las actividades sean aisladas o de relleno y no tengan continuidad entre secuencias
- Algunos gráficos e ilustraciones tienden a confundir o sirven de distractores
- No hay acompañamiento al docente sobre su óptima utilización
- Su costo es elevado

Específicamente con respecto al aspecto comunicativo, que es el objetivo, la invitación es a que se reevalúan los diferentes textos con una visión amplia de sus aportes reales, para esto se propone hacer una revisión concienzuda de los diferentes libros de texto escolares empleando una metodología basada en el artículo antes mencionado y que se puede condensar en la siguiente tabla:

Tabla 2 Matriz de categorías y dimensiones utilizadas en el análisis de textos escolares

CATEGORÍAS, DIMENSIONES Y PERFILES.

Categorías		Dimensiones	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	1	Estructura del problema	Clásica	Aplicación	Explicación
	2	Descripciones teóricas	Formales	Formales-intuitivas	Intuitivas
	3	Símbolos utilizados en las tablas	Sin tablas	Con símbolos matemáticos	Con iconos
	4	Símbolos utilizados en las gráficas	Literal	Utilización de números	Elementos explicativos
	5	Tipos de expresiones simbólicas	Familias	Específicas	Variadas
Semántica	6	Fenomenología	Matemáticas	Realistas	Reales
	7	Tipos de descripciones	De conceptos	De reglas	De relaciones
	8	Tipos de tablas	Sin tablas	Descripción local	Cuadros de variación
	9	Tipos de gráficas	Ideogramas	Ábacos	Mensajes topológicos
	10	Significado de las expresiones simbólicas	Objeto	Regla	Proceso
Pragmático-didáctica	11	Función de los ejercicios	Rutinarios	Aplicación	Deducción
	12	Papel de las definiciones	Estructurales-teóricas	Aplicación a problemas	Interpretación
	13	Actividades relacionadas con las tablas	Sin tablas	Construcción	Interpretación/Construcción
	14	Actividades gráficas	Visualización	Construcción	Interpretación/Construcción
	15	Papel de las expresiones simbólicas	Ejemplificación	Escolar	Social
Socio-cultural	16	Influencia social y adaptación al currículo	No hay	Contexto intemporal	Contexto actual
	17	Influencias didácticas	Clásica	Adaptada al currículo	Novedosa
	18	Aplicación de las tablas	Sin tablas	Elemento auxiliar	Categoría de objeto
	19	Presentación de las gráficas (estática/dinámica)	Descontextualizada	Impresa	Nuevas tecnologías
	20	Complejidad de las expresiones simbólicas	Clásicas	Sencillas	Complejas

Para evitar errores de interpretación a continuación se transcriben los diferentes criterios para la utilización de dicha tabla:

> "En primer lugar se ha intentado contextualizar cada uno de los periodos, exponiéndose las orientaciones oficiales que se establecieron en ellos, para poder analizar los libros a la luz de dichas consideraciones. Fundamentalmente se han

utilizado los programas oficiales elaborados por el Ministerio de Educación para poder completar esta fase.

Posteriormente se hace un análisis de la forma de presentación de los puntos críticos en cada uno de los libros, estudiando las formas de expresión matemática que en ellos se incluyen. Se ha de tener en cuenta que la forma en que se expresan los conceptos matemáticos, no sólo en los libros de texto sino en prácticamente cualquier medio y bajo cualquier soporte es muy variada. Se considera que los principales modos de representación (Janvier, 1987) son cuatro: **descripciones verbales, tablas de datos, representaciones gráficas y expresiones simbólicas**. Para cada una de estas formas de representación se han ido seleccionando sucesivas unidades de información procedentes de los textos estudiados, sobre las que se ha procedido a realizar el análisis. Asimismo, como según Rojano (1994) y Palarea (1999), «se detecta, sin embargo, la ausencia de un paradigma para el estudio del sistema matemático de signos, que abarque sus aspectos sintáctico, semántico, pragmático y sociocultural», se realizó un análisis basado en las siguientes categorías:

• **Sintáctico**, ya que cada símbolo se puede considerar susceptible de ser insertado en secuencias junto con otros símbolos mediante unas reglas que garantizan la coherencia interna y la validez.

• **Semántico**, puesto que los signos se consideran en relación con su significado matemático y sus relaciones con conceptos de otras ciencias.

• **Pragmático-didáctico**, siempre que el signo se considere en relación con la utilización que se hace de él desde el punto de vista didáctico para, por ejemplo, resaltar unas características del concepto que representa frente a otras. En este sentido, una representación puede ser más adecuada que otra, en función del uso que se vaya a hacer de ella. La utilización puede indicarnos si son representaciones sólo de lectura, si hay que completar, si tenemos una fuente de datos, un ejemplo, prototipo o ilustración de algo, o bien si están integradas en una actividad. Incluso tendremos que tener en cuenta algunos aspectos que pueden estar relacionados con las herramientas que se están utilizando en un determinado momento; por ejemplo, cuando hacemos gráficas con calculadoras gráficas, hemos de tener en cuenta: la escala usada, la ventana definida en la calculadora...

• **Sociocultural**, que hace referencia a símbolos, términos y cualidades de estos símbolos, y términos característicos de una determinada época o de una determinada cultura o sociedad. Muchos de los símbolos matemáticos son intemporales, desde el momento de su introducción no ha variado su uso. Actualmente, con la introducción de las nuevas tecnologías, veremos cómo las necesidades tecnológicas han impuesto algunas variaciones en estos símbolos.

Se ha elaborado un instrumento para el análisis, definiéndose veinte dimensiones agrupadas en las cuatro categorías anteriores. En cada dimensión se han considerado tres modalidades. Esto ha permitido clasificar los manuales en tres perfiles según la modalidad dominante:

• **Expositivo (E)**. Son libros en los que se considera el conocimiento matemático como una acumulación de enunciados, reglas y procedimientos aislados, y relativamente inconexos y desconectados de la realidad, pero que poseen una estructura matemática, típicamente deductiva, en la que, partiendo de las definiciones de los conceptos, se deducen los teoremas y se exponen algunos pocos ejemplos: es una estructura ciertamente prescriptiva. Esta estructura implica, en cuanto a la enseñanza, que los objetivos son conceptuales: incita a la exposición magistral y a la ejercitación repetitiva. Este tipo de libros induce a un aprendizaje de tipo memorístico, en los que importa más la estructura matemática que la comprensión de los conceptos, a pesar del énfasis que se pone en las definiciones y teoremas.

• **Tecnológico (T)**. Se conciben las matemáticas como una organización lógica de enunciados, reglas y procedimientos que se emplean como técnicas o destrezas para pensar sobre los conceptos y aplicarlos a diversas situaciones. Las distintas ramas de las matemáticas aparecen totalmente desconectadas. A partir de objetivos terminales u operativos, y por medio de una estructura secuencial en la enseñanza, se intenta una ejercitación productiva, proponiéndose para ello numerosas aplicaciones con la intención de dotar de sentido a las distintas reglas. Aunque los procedimientos y conceptos están organizados y estructurados de una forma lógica, se hace más énfasis en la memorización de reglas y la aplicación en ejercicios y problemas.

• **Comprensivo (C)**. Se conciben las matemáticas como un instrumento para interpretar la realidad entendida ésta en sentido amplio. En este caso se parte de objetivos flexibles, de forma que para conseguirlos se requiere la experimentación, por lo que el tipo de enseñanza adecuada es la realizada por descubrimiento, permitiendo de esta forma la construcción de redes conceptuales. El aprendizaje de las matemáticas se adquiere mediante el establecimiento de una red de relaciones con otros contenidos que pueden ser matemáticos o no, dando así sentido a las matemáticas. Se considera que los conceptos se adquieren partiendo de situaciones propias de la realidad que permiten la construcción de conceptos y reglas.

En la tabla anterior se presentan de manera sintética las categorías y las dimensiones utilizadas. Para cada categoría se consideran cinco dimensiones, una por cada uno de los sistemas de representación: descripciones verbales (distinguiendo entre problemas y definiciones), tablas de datos, representaciones gráficas y expresiones simbólicas. La lectura horizontal permite comparar las tendencias de los diferentes tipos de texto. La lectura vertical permite identificar las diferentes dimensiones que se han tenido en cuenta, lo que da una visión global del tipo de análisis realizado." (González Astudillo & Sierra Vásquez, 2004)[5]

[5] Los resaltados son de los autores

2.3 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Propuestas para mejorar el desempeño de los estudiantes

Las propuestas para mejorar el desempeño de los estudiantes especialmente en lo que tiene que ver con la resolución de problemas, generalmente parten de la necesidad de realizar un trabajo previo, que le proporcione al estudiante las herramientas suficientes para enfrentar los diferentes tipos de problema, y donde es importante tener en cuenta la mayor cantidad de variables que permitan que la presentación de un enunciado si sea entendido por los estudiantes.

Una primera aproximación en este sentido se refiere a la manera en que se les hace un acompañamiento más personalizado a los estudiantes, teniendo en cuenta sus formas de aprendizaje:

> "El modelo de La Garanderie (La Garanderie, 1980) tiene interés, no tanto por la clasificación de individuos en auditivos o visuales, sino por las técnicas próximas a la metacognición que usa, y que podrían facilitar muy bien la representación del problema por parte del niño, y con ello la posibilidad de extraer significaciones al discurso del problema y las acciones que en él se dan. Las investigaciones (Denis, 1989), han demostrado que pedir a los sujetos que están resolviendo un problema, que expliquen y verbalicen sus acciones, o que traten de representarse el problema mediante imágenes mentales, produce una mejora notable en el éxito que tienen estos sujetos, y ello por el papel de modelo que juegan las imágenes en la resolución de problemas.
>
> Así, por ejemplo, se saber que para los individuos visuales:
>
> - La resolución visual del problema precede a su resolución
> - La representación es el punto de partida de la búsqueda de la solución
> - La representación es, a menudo, conjuntista y describe los estados
>
> Para los auditivos:
>
> - La representación esquemática materializa una reflexión que se está haciendo en ese momento
> - La representación acompaña la resolución y se termina con la solución
> - La representación trata de los operadores de transición de un estado a otro
>
> La utilidad del material para la resolución de un problema es también distinta para unos y para otros. Dentro de este método, juegan un papel importante las

entrevistas individuales con los alumnos, que los ayudan a ejercitar los gestos mentales y las evocaciones, a la vez que permiten al profesor conocer los procesos mentales de los alumnos." (Chamorro Plaza, 2004)

Otros aportes además de vincular los problemas a contextos más cercanos, plantean una estructuración que permitan la conceptualización de las diferentes ideas:

"La enseñanza correctiva de los problemas debe buscar:

- Que el aprendizaje de la numeración y de las operaciones se dé en contextos significativos, referenciados, comprensibles para los alumnos.
- Que la oferta de tipos distintos de problemas sea muy amplia, abarque todas las situaciones que modelizan estos y se presenten en el momento en que los alumnos sean capaces de conceptualizarlos
- Que se evalúen, o que formen parte de estructuras más complejas; aquellos tipos de problemas en los que se haya entrenado previamente el alumno
- Que se entrene al alumno en las situaciones concretas en las que él no tenga ninguna experiencia, ni posibilidad de tenerla. Seremos más precisos en este aspecto cuando nos ocupemos con detenimiento, en todas y cada una de las situaciones" (Martínez Moreno, 2010)

Otra propuesta que igualmente apunta a contribuir en las deficiencias en la resolución de problemas se retoma de Mª del Carmen Chamorro, esta mucho más elaborada y que además ayuda a poner en la práctica parte de las ideas sobre las representaciones previamente abordados:

"Por tanto,, la cuestión a plantear es: ¿qué tipos de ayudas didácticas , que impidan los disfuncionamientos de la representación, puede ofrecer un profesor al alumno?

- **La multipresentación**

  La multipresentación tiene como objeto enriquecer el contexto dado en el enunciado del problema, proporcionando para ello al alumno, varios enunciados que responden a la misma estructura. Se trata de versiones distintas de un mismo problema que se proporcionan bien para ser resultados a la vez, o para que el alumno escoja el que quiere resolver, y en él, por ejemplo, se cambian longitudes de cuerdas, por edades de personas o por números naturales, conservando siempre las mismas relaciones numéricas e idéntico procedimiento de solución. En la presentación simple se daría únicamente uno de los tres problemas a resolver.

Las experiencias realizadas en este sentido por Julo (Julo, 1995) han permitido comprobar cómo el nivel de éxito pasa, para ciertos problemas, del 44% al 68% de éxito a favor de la multirepresentación, y lo que es más interesante, que en el caso de los alumnos que fracasan en la resolución de problemas, el porcentaje pasa del 21% al 40%.

El hecho de poner en marcha una ayuda como esta, que afecta solo el disfuncionamiento de la representación del problema, pues no hay cambios que impliquen un cambio en los conocimientos necesarios para resolver uno u otro enunciado, produce una mejora indiscutible tanto en la población escolar general como en los alumnos que fracasan. Cuando el alumno escoge el problema, tienen oportunidad de seleccionar aquel que tiene un contexto semántico y pragmático que le resulta más claro o más familiar, y su efecto en la resolución es inmediato. Los factores afectivos, culturales y relacionales intervienen en la resolución del problema con la misma intensidad que los factores intelectuales y cognitivos.

- **Actuar sobre los entornos del problema**

– *Entorno inmediato del problema:* Mejorar o dar consignas para la resolución, material que se da a la vez que el problema (esquemas, dibujos, etc.), creas un buen ambiente de trabajo de la clase, procedimiento de trabajo, etc. También en general, todo lo que tiene que ver con la presentación del problema: características lingüísticas, operadores semánticos, contextos semánticos, factores que se han analizado previamente.

– *Segundo entorno:* Ayudas que permitan tomar en cuenta todos los elementos disponibles para resolver el problema y que no se encuentran presentes en el entorno inmediato: fichas de ayuda, soportes informáticos, trabajo preliminar para recordar ciertas cosas, hacer referencia a problemas anteriores análogos, discutir el enunciado, redactarlo de nuevo, etc. Su misión es preparar la representación.

– Tercer entorno: Ayudas que solo actúan cuando se necesitan, cuando hay un bloqueo por ejemplo, cuando se constata que el aluno va a confundirse o está perdido, etc.

Se trata en cualquier caso, de ayudar al alumno a construir una mejor representación del problema, no de ayudarle guiándole a través de los procedimientos de resolución como habitualmente se hace.

- **Comentar la tarea**

  Tiene por objeto facilitar la comprensión de la consigna dada en el enunciado, tratando de hacerla más explícita, para evitar así los problemas generados por el contrato didáctico del estilo de los de “La edad del capitán”, y orientar a la vez al alumno sobre el tipo de actividad que puede llevar a cabo. Comentarios añadidos al enunciado, como: haz un esquema, diseña un programa de construcción geométrica, usar una tabla. Etc., son a veces decisivos y marcan la línea de división entre la correcta resolución del problema y el fracaso.

- **Añadir tareas al enunciado.**

  Se trata de añadir al texto del enunciado tereas cuya resolución va a permitir una mejor comprensión del mismo y un mejor tratamiento de los datos e informaciones contenidos en él. Las tareas pueden ir desde la simple lectura en voz alta del enunciado, a una nueva redacción del mismo, pasando por la dramatización de la situación que relata el enunciado (cuando ello es posible), la eliminación de informaciones inútiles contenidas en el enunciado, etc. Todo ello a condición de no hacer del problema algo aún más complejo y pesado. Su misión es ayudar al alumno a construir una representación correcta del problema.” (Chamorro Plaza, 2004)

4.4 LA IMPORTANCIA DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

Una primera pregunta puede ser: ¿Y para qué hablar de historia en matemáticas? Aunque pareciera que la historia no tiene mayor relación con las matemáticas, encontramos que en este caso particular no se puede dejar de lado el desarrollo histórico, pues las matemáticas en sí mismas aunque parecen verdades absolutas y preexistentes, corresponden realmente a un desarrollo histórico particular, que se ha venido desarrollando por los seres humanos en las diferentes épocas y en el contexto de las sociedades, y que por lo tanto sus "verdades" son socio-históricamente relativas.

En el siguiente texto se retoma este importante aspecto:

> "En parecido sentido vuelve a reflexionar Kline (1992, p.16) en su excelente texto de Historia de las Matemáticas: Las cuidadas y ordenadas exposiciones que se hacen en los cursos habituales no muestran en absoluto los conflictos del proceso creativo, las frustraciones, y el largo y arduo camino que los matemáticos han tenido que recorrer para llegar a construir una estructura importante. [...], el conocimiento de cómo han avanzado los matemáticos dando traspiés, a veces en la oscuridad más absoluta, hasta llegar a reunir las piezas individuales de sus resultados, debería animar a cualquier principiante en la investigación. La Historia de la Ciencia con sus grandezas y miserias, sus momentos estelares y sus épocas oscuras, pone de manifiesto el proceso dinámico de la actividad científica como desarrollo a veces penoso y sinuoso, pero siempre abierto y vivo, en proceso permanente de cambio, y cuyo conocimiento, además de estimular los valores científicos y el espíritu crítico, puede propiciar en el estudiante el desarrollo de la creatividad por emulación, es decir, un impulso hacia la intervención en el devenir de la ciencia mediante la investigación, como hemos visto que insinúa Kline." (González Urbaneja, 2004)

En efecto, la Matemática en su forma más pura se presenta a sí misma como un acumulado de conocimientos teóricos, que posee un lenguaje propio y que se caracteriza por una excepcional coherencia lógica interna. No obstante, la incorporación de elementos de la Historia de la Matemática a los procesos de enseñanza aprendizaje, permite visualizar el íntimo e innegable vínculo existente entre esta disciplina y la dinámica socio-cultural humana de la que es producto.

Otro aspecto igualmente relevante es la relación que existe entre la pedagogía matemática y los diferentes contextos históricos en los que se originaron los diferentes conceptos, pues cuando son presentados a los estudiantes generalmente son muy diferentes a las ideas originales por un proceso de evolución continua y de su interrelación con otras realidades y circunstancias; por lo tanto no deben desligarse entre sí, ya que pueden generan en los estudiantes ideas distorsionadas sobre los diferentes conceptos, y el enclave histórico por el contrario puede llenarlos de sentido y significado.

> "…muchos de estos cambios, que han sido fundamentales para que las ciencias y su enseñanza sean concebidas como las conocemos ahora, son totalmente ajenos a nuestra experiencia, ya que en la mayoría de los casos ha sido introducidos de forma muy sutil, y por lo mismo, han sido casi imperceptibles a los contemporáneos respectivos. Ahora, en retrospectiva, por ejemplo, nos parece absolutamente inverosímil que "científicos" de la talla del propio Newton, o Kepler, hayan sostenido ideas que ahora nos parezcan más cercanas a la hechicería o la magia." (Garciadiego, 1997)

En este aspecto nuevamente surge una dificultad lingüística que se hace obvia, y es debida a que cada tiempo tiene sus formas particulares de expresarse, lo que no ayuda una fácil interpretación de los sentidos y significados que pretendía darle el autor. Es común que hagamos constantes referencias a los clásicos, pero realmente casi nadie los ha leído por diferentes motivos, ya sea porque son muy difíciles de leer (entre otras cosas por las enormes diferencias idiomáticas), o porque tampoco se consiguen con facilidad.

Un claro ejemplo de esto lo presenta Alejandro Garciadiego:

> “Retrocedamos una vez más a nuestro tema de la geometría plana euclidiana. Esto nos permite estudiar la proposición algebraica
>
> $$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
>
> Expresada en los siguientes términos:”*si una línea recta es cortada al azar, el cuadrado sobre todo el igual a los cuadrados sobre los segmentos y dos veces el rectángulo contenido por los segmentos”.* ¿Cuál de las dos versiones estará más al alcance de nuestros estudiantes?” (Garciadiego, 1997)

Por lo tanto nuestro papel como docentes, trasladando la invitación que en el texto hace Garciadiego a los historiadores, es *explicar* y *analizar,* y no únicamente *describir* los estadios anteriores del desarrollo de las matemáticas.

De igual forma en “El papel y algunas condiciones para la utilización de la Historia de las Matemáticas como recurso pedagogico” (Chavez Barboza & Salazar Soto, 2003) enumeran basados en varios autores, algunos ítems que resaltan el devenir histórico como elemento fundamental en la comprensión misma de las matemáticas, su aplicación y sus alcances:

- Actividad humana cuyos conceptos de verdad, de evidencia y de demostración son históricamente relativos.
- Empresa con vida propia y en transformación constante.
- Obra construida gracias a la contribución de muchos matemáticos, que vivieron diversas circunstancias y en distintos contextos histórico culturales, lo que la convierte en un elemento de la historia cultural humana
- Respuesta a necesidades humanas específicas.
- Disciplina con problemas e incertidumbres, los cuales la experiencia histórica muestra que se tarda años e incluso siglos para resolverse.

- Ciencia cuyo desarrollo presenta retrocesos, errores y rupturas epistemológicas.
- El desarrollo de la creencia en una Matemática como producto de la creación humana.
- La integración de la Matemática con otras disciplinas como la Religión, la ciencia, el arte, la política, la guerra la Historia, la Geografía, la Filosofía y la literatura.
- El reconocimiento de la evolución histórica del lenguaje simbólico de la Matemática.

La dimensión histórica de la Matemática es una herramienta que permite responder a preguntas tales como: ¿por qué algo es así? o ¿para qué sirve realmente?, y aunque se trabaje con conceptos abstractos, la Historia de la Matemática permite contextualizar los temas y ubicarlos tanto espacial como temporalmente los elementos que llevan al hombre hacia el descubrimiento de las ideas matemáticas están sumergidas en el contexto cultural de las civilizaciones. Pues no se puede olvidar que el estudio de las ideas matemáticas está unidad con el contexto cultural que las engloba.

Antes de iniciar es bueno que revisar una de las ideas en las que se fundamentan las matemáticas: el concepto de **número**, y ver además de que ha tenido un desarrollo y una evolución propia, que está íntimamente ligado a la época y al lugar donde se empleo.

En el libro “El sentido numérico: cómo la mente crea las matemáticas”, Stanislas Dehaene (matemático y neuropsicólogo), afirma:

> “En 1954, en pleno auge del constructivismo de Piaget, Tobias Dantzing escribió: *“El ser humano, aún en sus estados primarios de desarrollo, posee una facultad la cual, por no encontrar un mejor nombre, llamaré sentido numérico. Esta facultad le permite reconocer que algo ha cambiado en una colección pequeña cuando, sin su conocimiento directo, un objeto ha sido eliminado o agregado a la colección*” ” (Deahene, 2002)

De igual forma, considera que:

> “ciertas facultades numéricas se encuentran genéticamente impresas en nuestro cerebro las cuales, como nuestra facultad para distinguir colores, son el resultado

> de un proceso evolutivo de adaptación por selección natural. Poseemos un "órgano cerebral" dedicado a la representación aproximada y geométrica de los conceptos numéricos, el cual sirve de base intuitiva para la adquisición y manipulación de las nociones aritméticas elementales " (Deahene, 2002).

El concepto de número comienza a formarse entre los cuatro y los cinco años. También se sabe que el sentido del número en el hombre es limitado, pues para determinar una cantidad recurre consciente o inconscientemente a dos mecanismos básicos:

•Comparación de simetrías

•La agrupación mental o el computo (acción de contar)

El en referencia específica sobre el "arte de contar", se puede igualmente decir que:

• Es un proceso mental complejo.

• Es un atributo exclusivamente humano.

• Conlleva a la noción de pluralidad.

• Le debemos el extraordinario progreso que hemos logrado al expresar nuestro universo en términos numéricos.

• Para contar se requiere de una colección de objetos en sucesión ordenada.

Se puede llegar a la idea clara y lógica del número sin recurrir al artificio de contar.
Podemos establecer entre dos colecciones de objetos cual tiene mayor, sólo, sin contar, solo estableciendo una comparación. En sí, estableciendo una correspondencia biunívoca, que consiste en atribuir a cada objeto de un conjunto un objeto de otro, y continuar así hasta que uno o ambos conjuntos se agoten.

Por ejemplo del concepto primitivo de número, dado por la Lengua *thimshian* de una de las tribus de la Columbia Británica, tienen siete conjuntos de términos numéricos diferentes:

1. Para objetos chatos y los animales
2. Para objetos redondos y el tiempo
3. Para contar personas
4. Para objetos grandes y árboles
5. Para las canoas

6. Para las medidas
7. Para contar objetos distintos de los anteriores.(resultado de un desarrollo posterior)

Retomando la afirmación de sobre el concepto de número de Oswald Spengler:

> “No hay ni puede haber número en sí. Hay varios mundos numéricos porque hay varias culturas. Encontraremos diferentes tipos de pensamiento matemático y, por lo tanto, diferentes tipos de números: uno indio, otro árabe, otro antiguo, otro occidental. Cada uno es radicalmente propio y único, cada uno es la expresión de un sentimiento del universo; cada uno es un símbolo, cuya validez está exactamente limitada aun en lo científico; cada uno es un principio de un ordenamiento de lo producido, en que se refleja, lo más profundo de un alma única, centro de una cultura única”. (Deahene, 2002)

Terminemos este aparte con las palabras de Pedro Miguel González:

> “En la Historia de las Matemáticas el profesor puede encontrar un medio de autoformación para la comprensión profunda de las Matemáticas y sus dificultades de transmisión lo que permitirá suavizar el camino que conduce de la Enseñanza al Aprendizaje; un instrumento para desarrollar la capacidad de renovación y adaptación pedagógicas y una metodología que permita plantear activamente el aprendizaje como un redescubrimiento. Como dice Kline: *se puede comprimir la historia y evitar muchos de los esfuerzos y trampas inútiles, pero no es posible darla de lado*. Además, la Historia de las Matemáticas es una fuente inagotable de material didáctico, de ideas y problemas interesantes y también, en un alto grado, de diversión y recreo intelectual, en suma de enriquecimiento personal, científico y profesional, que el profesor puede aprovechar para motivar su labor de transmisión del conocimiento, desdramatizando la Enseñanza de las Matemáticas. Finalmente la Historia de las Matemáticas como lugar de encuentro entre las ciencias y las humanidades, es un instrumento magistral para enriquecer culturalmente la Enseñanza de la Matemática e integrarla de forma armónica e interdisciplinar en el currículum académico.” (González Urbaneja, 2004)

CONCLUSIONES

- Dado que el lenguaje natural es la principal forma de comunicarnos, cobra especial interés el lenguaje matemático como tal, pues este nos permite comunicar ideas y conceptos mas allá de la realidad misma, y esto exige otras formas de entender el mundo, que van ligadas en este caso en particular a un lenguaje extracotidiano como el de las matemáticas. Esta necesidad específica hace que estas requieran ser enseñadas paralelamente al lenguaje natural, retomando así su significado original de ser “lo que se puede aprender”

- Una de las conclusiones más importantes se extrae de los estudios del enfoque cognitivo en que se fundamentó el presente trabajo (Vergnaud y Duval), y tiene que ver con que el mayor problema para el aprendizaje de las matemáticas no es la dificultad de los conceptos propios del área, sino en la forma en que estos son transmitidos a los estudiantes, resaltando así la importancia del propósito inicial de este trabajo.

- De las mayores dificultades en la comprensión de las matemáticas son los diferentes lenguajes utilizados, y esto se debe en gran parte a la forma en que fueron construidos, ya que son el producto de la mezcla de múltiples culturas, y por ende están cargados de diversos contextos espacio-temporales particulares, que igualmente deben ser tenidos en cuenta; recuérdese que la geometría la heredamos de Grecia, los números actuales provienen de la cultura Árabe, el cero nos llego de la India, y así cada época y cultura ha hecho sus aportes.

- Los docentes debemos tener muy claro cuál es el objetivo particular de la enseñanza en cada momento y verificar si se está apropiando adecuadamente, pues un concepto mal elaborado y elaborado a medias, será un vacio muy difícil de llenar o incluso conlleve a incurrir en errores en el futuro. Desde las matemáticas esta afirmación no es tan simple de llevar a cabo, ya que los diferentes conceptos se elaboran gradualmente y se interrelacionan de formas muy complejas; es más una invitación a estar muy atentos a este desarrollo conceptual en los estudiantes

- En los diferentes análisis y ejemplos presentados se pudo observar que los estudiantes presentan dificultades para llevar a cabo la traducción de los problemas del lenguaje verbal al lenguaje matemático y viceversa, sobre todo cuando estos problemas no están contextualizados, por lo tanto es fundamental tener siempre como referencia al estudiante y su entorno socio cultural, pues de esto depende en gran parte la forma de abordar los diferentes problemas; la necesidad puede ser entonces un cambio o la ampliación de algún contexto particular

- Los docentes emplean los textos escolares como una importante herramienta de apoyo, pero también deben ser críticos sobre sus contenidos, propuestas didácticas y pedagógicas, para poder contextualizarlos, pues de lo contrario se convierten en otro obstáculo del aprendizaje para los estudiantes. Por lo tanto se recomienda trabajar con un variado número de textos que permitan una visión más general de los diferentes temas tratados en clase, y no sean las editoriales quienes impongan las planeaciones y estrategias pedagógicas.

- Otro aspecto relevante en la educación matemática es la estrecha relación que debe existir con la *Historia de las matemáticas*, pues dentro de la necesidad de contextualizar los contenidos es fundamental que los estudiantes reconozcan que los conocimientos matemáticos tienen un origen concreto y por lo general surgen de la necesidad de resolver problemas cotidianos; y que igualmente vislumbren que los contenidos propuestos generalmente fueron desarrollados por varios matemáticos y tardaron bastante tiempo en desarrollarse y acomodarse hasta la forma en que los conocemos hoy en día. Además la historia de las matemáticas y en un contexto más amplio la historia de las ciencias, puede ser un vinculo importante con otras áreas del conocimiento

- En todo proceso de aprendizaje siempre se debe tener en cuenta que no todos los estudiantes aprenden de la misma forma y por ende debemos adecuar nuestras formas de enseñar y evaluar, a las necesidades concretas y especificas de cada estudiante, y esta premisa cobra aún más relevancia cuando nos referimos al área de matemáticas. En este punto es necesario hacer una referencia e invitación explícita a lo que se denomina **Evaluación Formativa** y todo lo que ella implica.

- La pregunta de investigación se resolvió en la medida que se lograron hacer aportes concretos al mejoramiento del desempeño de los estudiantes desde diferentes fundamentos teóricos a las prácticas de aula, asumidas desde el lenguaje y la comunicación

- Se lograron los objetivos propuestos, pues en el desarrollo del presente trabajo se pone de manifiesto la importancia fundamental del lenguaje y la comunicación en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; y abordando de forma analítica algunas de las dificultades que se presentan en esta relación, en unos casos se aclaran teóricamente las posibles causas, y en otros inclusive se proponen alternativas de acción desde los diferentes autores trabajados.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

- Aunque parezca algo evidente, nunca estará de más destacar la importancia de la función del docente de matemáticas como mediador del conocimiento, y esto implica que además de la actitud, la disposición y el respeto por la labor educativa, tiene que ser idóneo en el área. Si algo diferencia a un docente de matemáticas es la especificidad de su discurso, y por tanto debe tener el conocimiento necesario tanto del discurso matemático como de las estrategias pedagógicas

- Resaltar el papel fundamental de los docentes de primaria en el desarrollo de estas competencias matemáticas, pues son la base de algo que se construirá durante toda la vida, y cualquier deficiencia repercutirá más delante de múltiples formas. Este aspecto es especialmente crítico en nuestro medio, ya que no todos los docentes de primaria tienen una formación fuerte en matemáticas y esta falencia se nota en muchos aspectos

- Las matemáticas no solo se aprenden en el aula de clase, existen otros contextos institucionales y extraescolares igualmente importantes que deben ser tenidos en cuenta a la hora de planear y llevar al aula unos contenidos particulares y la forma en que se hace. Desde los estándares básicos de competencias que actualmente se trabajan en el país, textualmente se propone "Partir de situaciones de Aprendizaje Significativo y comprensivo de las matemáticas"

- Específicamente en nuestro país se viene trabajando desde una perspectiva de Competencias Básicas, y aunque la discusión sobre la pertinencia o no de estas aún está abierta, lo que sí es claro, es que después de más de una década de trabajar con ellas, todavía no han sido debidamente apropiadas e implementadas en la mayoría de instituciones educativas; pero siendo la herramienta y guía de trabajo en el área, es fundamental hacerles una revisión detenida y concienzuda, ya que pueden como están planteadas pueden ser una buena oportunidad para replantear la didáctica de las matemáticas en beneficio de nuestros estudiantes

RECOMENDACIONES

- Es necesario un diálogo abierto y una reflexión constante sobre la labor que desempeñan los docentes de matemáticas, pues las exigencias del medio y las necesidades puntuales de los estudiantes, exigen una adecuada capacitación y un continuo intercambio de experiencias. Es muy desafortunado escuchar que se hagan referencias a los docentes del área tan poco alentadoras como que: se limita a “dictar” sus clases, transcribe libros completos en los tableros, aborda aisladamente las diferentes temáticas o no hay variedad de recursos didácticos en las clases

- A nivel institucional desde el aula de clase hasta el ministerio de educación, debe pensarse en profundizar sobre la real incidencia del lenguaje en los diferentes procesos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pues aunque es esencial a todo nivel, en este caso en particular se oculta detrás de la cotidianidad del lenguaje, y por esto escapa fácilmente a los intentos de análisis, convirtiéndose de muchas formas en generador de errores y dificultades. Tal vez las mas llamadas a esta reflexión son las facultades de educación, y aunque en nuestro país en la mayoría de ellas se han hecho importantes aproximaciones y aportes (como se evidencia en muchas de las referencias empleadas en este trabajo), todavía no es un tema de amplia divulgación, sobre todo teniendo en cuenta que los actuales lineamientos y estándares de competencias tienen su fundamentación teórica en estas propuestas cognitivas

- Un tema que aunque no es directamente del ámbito de este trabajo, actualmente no puede evadirse, es el uso de las **TIC** (Tecnologías de la Información y la Comunicación). La invitación es a que se aproveche la gran cantidad de recursos de todo tipo que actualmente están a nuestra disposición gracias a estas tecnologías. Pero hacerlo de forma consciente y razonada, para que sean realmente aportes significativos y no otra fuente de dificultades. Esto no es tan sencillo como podría pensarse, pues de los mayores problemas en la gran cantidad de información disponible es la ambigüedad, la superficialidad, e incluso más grave, su falta de veracidad en muchos de sus contenidos; y es responsabilidad nuestra revisarlos y "ajustarlos" previamente, y como docentes debemos prepararnos adecuadamente para asumir y aprovechar de la mejor manera posible esta nueva gran posibilidad educativa

- Finalmente invitar a pensar que no todo está acabado, que cada día estamos aprendiendo y especialmente que como docentes somos constructores de futuro.

Anexo A MODELO FICHAS DE REVISIÓN DOCUMENTAL

<table>
<tr><th colspan="7">FICHA DE REVISIÓN DOCUMENTAL</th></tr>
<tr><td colspan="7">A. Datos bibliográficos del libro/artículo</td></tr>
<tr><td colspan="7">Nombres y Apellidos de los Autores: MARIA DEL CARMEN CHAMORRO PLAZA</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Año de publicación</td><td>2000</td><td>2001</td><td>2002</td><td>2003</td><td colspan="2">2004 X</td></tr>
<tr><td>2005</td><td>2006</td><td>2007</td><td>2008</td><td>2010</td><td>Pais: España</td></tr>
<tr><td colspan="7">Título del artículo/libro:
Leer, comprender, resolver un problema matemático escolar</td></tr>
<tr><td colspan="7">Nombre del libro: Los Lenguajes de las ciencias
Instituto Superior de Formación del Profesorado / Colección: Aulas de verano Serie: Principios
Ministerio de Educación, Cultura y Deporte / Secretaria general de educación y formación profesional</td></tr>
<tr><td>Volumen:</td><td>Número:</td><td colspan="5">Editorial</td></tr>
<tr><td colspan="7">Base de datos donde se encontró el libro/artículo: Biblioteca Facultad de Educación U de A</td></tr>
<tr><td colspan="7">Ruta de Búsqueda (palabras clave o descriptores): Lenguaje, matemáticas</td></tr>
<tr><td colspan="7">B. Datos centrales</td></tr>
<tr><td colspan="7">1.Resumen
El tratamiento didáctico de la resolución de problemas ha tomado poco en consideración las dificultades que tienen su origen en la lectura y comprensión de los enunciados, así como la necesidad de hacer un trabajo previo de la representación de la situación evocada por el problema. También se analizan factores semánticos y pragmáticos de los alumnos.</td></tr>
<tr><td colspan="7">2.Objetivos de la investigación o propósitos del artículo:
Analizar las dificultades que surgen en la resolución de problemas matemáticos en el aula de clase, desde una visión de la didáctica de las matemáticas, y brindar algunos aportes concretos</td></tr>
<tr><td colspan="7">3. Conclusiones
✓ La necesidad de hacer un trabajo previo de los diferentes problemas matemáticos a trabajar con los estudiantes
✓ Las mayores dificultades no son de origen operativo sino de interpretación y entendimiento de los enunciados de los problemas</td></tr>
<tr><td colspan="7">4. Tendencia: (Aquí se describe la tesis central planteada en el texto):
Es un trabajo orientado a la didáctica de las matemáticas, y más específicamente a las dificultades que surgen en la comprensión de los enunciados de los diferentes problemas matemáticos escolares, y se fundamenta en teorías cognitivas.
Este libro es un trabajo conjunto con varios autores entre los que se cuentan Duval y Vergnaud, quienes también aportan con tres artículos en y donde la autora es la directora editorial</td></tr>
<tr><td>5. Las referencias bibliográficas centrales son</td><td colspan="6">En su mayoría las referencias usadas sirven ante todo como sustento teórico al trabajo investigativo que viene desarrollando la autora, y abarcan desde 1982 a 2003. Sin embargo se destacan:
• Ehrlich, S. (1990). Sémantique et mathématiques. Paris: Nathan.
• La Garanderie, A. d. (1980). Les profils pédagogiques. Éditions du Centurio.</td></tr>
</table>

BIBLIOGRAFIA

Bosch, J. (1971). *Qué es la matemática.* Buenos Aires, Argentina: Editorial Columba.

Cárdenas Páez, A. (2007). Sentido y Lenguaje. En H. P. Reeder, *Lenguaje: Dimensión lingüística y extralingüística del sentido* (págs. 265-280). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Chamorro Plaza, M. d. (2004). Leer, comprender, resolver un problema matemático escolar. En c. y. Ministerio de educación, *Los lenguajes de las ciencias* (págs. 175-202). Madrid, España: Secretaria técnica general.

Chavez Barboza, E., & Salazar Soto, J. (2003). El papel y algunas condiciones para la utilización de la Historia de las Matemáticas como recurso pedagogico". *Uniciencia , 20* (2).

D´Amore, B. (2006). *Didáctica de las Matemáticas.* Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Deahene, S. (2002). El sentido numérico: cómo la mente crea las matemáticas. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana , IX* (1), 97-103.

Denis, M. (1989). *Image et cognition.* Paris: P.U.F.

Duval, R. (2004). ¿Cómo describir para explicar? La(s) práctica(s) del lenguaje que la enseñanza de las ciencias y de las matemáticas exige y contribuye a desarrollar. En c. y. Ministerio de educación, *Los lenguajes de las ciencias* (págs. 37-88). Madrid, España: Secretaria tecnica general.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo* (Edición en castellano ed.). (M. Vega Restrepo, Trad.) Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de educación y pedagogía, Grupo de educación matemática.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (2ª ed.). (P. Lang, Trad.) Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano:registros semioticos y aprenizajes intelectuales.* Cali, Colombia: Universidad del Valle , Grupo de educación matemática.

Ehrlich, S. (1990). *Sémantique et mathématiques.* Paris: Nathan.

Gallego-Badillo, R. (1996). *Discurso constructivista sobre las ciencias experimentales.* Santafé de Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Bibliografía

Garciadiego, A. (1997). Pedagogía e historia de las ciencias, ¿Simbiosis innata? En A. Garciadiego, F. Rodriguez Consuegra, & L. Vega, *El velo y la trenza* (págs. 17-34). Bogotá, Colombia: Editorial Universidad Nacional.

Giménez, J. (1994). *Lenguaje verbal y matemáticas: Separación sin raleciones. Estado de la investigación.* Universitat Rovira i Virgili.Tarragona. Soc. de Prefessors de Matemàtiques de les comarques Meridionals de Catalunya.

González Astudillo, M. T., & Sierra Vásquez, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas.Los puntos críticos de la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias , 22* (3), 389-408.

González Urbaneja, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma* (45), 17-28.

Greimas, A. J., & Cuortés, J. (1982). *Semiótica. Diccionario razonado de la teoría del lenguaje* (Vols. V. Diccionarios,10). (E. Ballón Aguirre, & H. Campodónico Carrión, Trads.) Madrid, España: Editorial Gredos, S.A.

Guevara A., C. (2007). Lengua, lenguaje y significación de la realidad. En H. P. Reeder, *Lenguaje: Dimensión lingüística y estralingüística del sentido* (págs. 331-340). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Health, T. (s.f.). *Wikipedia*. Recuperado el 16 de Enero de 2014, de A history of Greek Mathematics, Oxford, Clarendon Press: http://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1ticas

Julo, J. (1995). *Representation des problémes et réussite en mathématiques.* Rennes: P.U.R.

La Garanderie, A. d. (1980). *Les profils pédagogiques.* Éditions du Centurio.

León Corredor, O. L. (2004). Didáctica de las matemáticas y el desarrollo de un discurso pedagógico. En M. Montoya Castillo, & C. Guevara Amórtegui (Coordinadores), *Lenguaje y escuela: Proyecciones contemporáneas* (págs. 59-62). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Martínez Moreno, J. (2010). *Enseñar matemáticas a los alumnos con necesidades educativas especiales* (2ª ed.). Madrid, España: Wolters Kluwer España, S.A.

Mesa Betancur, O. (2004). *Competencias matemáticas, una propuesta conceptual.* Medellín, Colombia: Colección Otras Palabras.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares para Matemáticas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Bibliografía

Ministerio de Educación Nacional y ASCOFADE (Asociación Colombiana de Facultades de. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá: Ministerio de Educación nacional.

Otero, R. (2013). Pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo, didáctica y competencias. *XII Encuentro de enseñanza de las ciencias y las matemáticas.* Medellín: Universidad de Antioquia.

Peña Rodriguez, F. (2007). Lo interno y lo externo en la intención significativa. En H. P. Reeder, *Lenguaje: Dimensión lingüística y extra lingüística del sentido* (págs. 281-288). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Puig, L. (1994). *Semiótica y matemáticas.* Universitat de València. Valencia España: Ediciones Episteme,S. L.

Rico, L. (1995). *Errores en el aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá.

Rojano, T. (1994). La matematíca escolar como lenguaje. Nuevas perpectivas de investigación y enseñanza. (M. Departamento de matemática educativa del Cinvestav-IPN, Ed.) *12 (1)*, 45-56.

Ruiz Zuñiga, A. (2003). *Historia y filosofía de las matematicas.* (E. d. Distancia, Ed.) San José, Costa Rica: UNED.

Vergnaud, G. (2013). ¿Pourquoi la théorie des champs conceptuels? ¿Por qué la teoría de los campos compceptuales? *Infancia y Aprendizaje , 36* (2), 131-161.

Vergnaud, G. (2004). La representación entre el sentido común y el análisis científico. En c. y. Ministerio de educación, *Los lenguajes de las ciencias* (págs. 25-36). Madrid, España: Secretaria tecnica general.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los Campos Conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques , 10* (2,3), 133-170.

Vergnaud, G. (204). Matemáticas: ¿Qué sentido dar a la idea de una cultura general en matemáticas? En c. y. Ministerio de educación, *Los lenguajes de las ciencias* (págs. 9-24). Madrid, España: Secretaria técnica general.

Wiske, M. S. (2003). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica.* Buenos Aires, Barcelona, México: Paidós.