

**LAS SITUACIONES PROBLEMA MEDIADORAS DE APRENDIZAJES
SIGNIFICATIVOS DE LA ECUACIÓN LINEAL**



TRABAJO FINAL DE MAESTRIA

FALNER GUERRA

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
MEDELLÍN, COLOMBIA**

2013.

**LAS SITUACIONES PROBLEMA MEDIADORAS DE APRENDIZAJES
SIGNIFICATIVOS DE LA ECUACIÓN LINEAL**

FALNER GUERRA

**TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR
EL TÍTULO DE:
MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES**

ASESOR:

JOSE ALBERTO RUA VASQUEZ

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
MEDELLÍN, COLOMBIA**

2013

Dedicatoria

A Dios y a mi familia.

Agradecimientos

- Al maestro José Alberto Rúa Vásquez quien orientó la realización de esta propuesta de trabajo.
- A mi hermano Richard por su apoyo constante.

Resumen

Título del trabajo: las situaciones problema mediadoras de aprendizajes significativos de la ecuación lineal.

Autor: Falner Guerra

Institución en la que labora: Institución Educativa Ciudad Don Bosco

El aprendizaje de las ecuaciones lineales es fundamental para el estudio del álgebra, su enseñanza en la secundaria se ha enfocado principalmente en la aplicación de algoritmos, esta forma de enseñanza lleva a que gran parte de los estudiantes no las comprendan y es una práctica que en muchos casos termina siendo un ejercicio de aprendizaje memorístico que luego es olvidado por la mayoría. Esta problemática no es ajena a los estudiantes de secundaria de la Institución Educativa Ciudad Don Bosco a los que se aplicó una prueba diagnóstica que permitió establecer las falencias que presentan en el manejo de ecuaciones lineales. Este trabajo tiene como finalidad el diseño de una unidad didáctica basada en situaciones problema como una alternativa para el aprendizaje significativo de la ecuación lineal.

Palabras claves: ecuación lineal, aprendizaje significativo, situaciones problema.

Abstract

Title of the work: problem situations mediated by the meaningful learning of lineal equations

Author: Falner Guerra

Institution that works: Educations Institution Ciudad Don Bosco

The learning of linear equations is essential for the study of the algebra, his teaching in the secondary has primarily focused on the applications of algorithms, this form of teaching that most of the students do not understand them and it's a practice that ends up being an exercise in rote learning. This practice is forgotten by the most of students. This problem is no stranger to high school students for the educational institution “city Don Bosco”, who applied a diagnostic test that allowed to establish the flaws that present in the handling of linear equations. This work aims at the design of a didactic unit based on situations problem as an alternative to the meaningful learning of linear equation.

Keywords: Linear equation, significant learning, problem situation.

TABLA DE CONTENIDO.

Resumen..... 5

TABLA DE CONTENIDO. 7

1. Introducción..... 9

2. Planteamiento y Justificación del Problema. 11

3. Objetivos. 15

 3.1. Objetivo general..... 15

 3.2. Objetivos Específicos. 15

4. Marco Teórico. 16

5. Metodología. 27

6. Prueba Diagnóstica..... 29

7. Unidad Didáctica. Ecuación Lineal..... 37

 7.1. Presentación. (Para orientación del docente)..... 37

 7.2. Objetivos. 39

 7.2.1. Objetivo general..... 39

 7.2.2. Objetivos específicos..... 39

 7.3. Secuencia didáctica. 40

 7.3.1. Motivación..... 40

 7.3.2. Origen de las ecuaciones..... 42

 7.3.3. Problemas a resolver. 52

 7.3.4. Del lenguaje verbal al lenguaje simbólico. 63

 7.3.5. Aplicación de algoritmos y resolución de problemas..... 76

 7.3.6. Evaluación de la unidad didáctica. 88

8. Conclusiones y Recomendaciones. 89

 8.1. Conclusiones..... 89

 8.2. Recomendaciones. 91

9. Anexos. 92

 Anexo 1. Prueba diagnostica 92

10. Bibliografía..... 97

INDICE DE TABLAS.

| | |
|--|----|
| Tabla 1. Resultados prueba diagnóstica grado octavo 8°..... | 31 |
| Tabla 2. Resultados prueba diagnóstica grado 9°..... | 32 |
| Tabla 3: Resultados pruebas diagnóstica grado décimo 10°..... | 33 |
| Tabla 4. Resultados prueba diagnóstica grado once 11°..... | 34 |
| Tabla 5. Resultados prueba diagnóstica grados 8°, 9°, 10° y 11°..... | 35 |
| Tabla 6. Porcentaje de respuestas por grupo..... | 36 |
| Tabla 7. Secuencia paso del lenguaje verbal al lenguaje simbólico..... | 64 |
| Tabla 8. Secuencia del lenguaje verbal al planteamiento de ecuaciones..... | 71 |

1. Introducción.

Las matemáticas le han posibilitado al hombre entender el mundo que lo rodea, a su vez es fundamental en el desarrollo tecnológico y en la solución de problemas de la vida cotidiana.

Una parte importante de las matemáticas son las ecuaciones lineales porque posibilitan la transición de la aritmética al álgebra y su manejo es una competencia básica a desarrollar en el ciclo de la enseñanza básica y media.

En la escuela, la enseñanza de las ecuaciones lineales se ha enfocado principalmente en la aplicación de algoritmos, lo que da como resultado aprendizajes de forma mecánica, esto lleva a que gran parte de los estudiantes no las comprendan y esta práctica termina siendo un ejercicio de aprendizaje memorístico que luego es olvidado por la mayoría, situación que se evidencia cuando en clases posteriores se le pregunta a un estudiante por conceptos concernientes a la ecuación lineal y las respuestas generalmente son: “no sé”, “eso no lo hemos visto”, “usted no nos ha enseñado eso”.

Las dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar son en parte resultado de este proceso de enseñanza que le da mayor importancia al manejo de algoritmos haciendo poco énfasis en la parte conceptual y contextual a partir de situaciones concretas que motiven el aprendizaje de este tema.

Este trabajo tiene por objeto el diseño de una unidad didáctica para la enseñanza de ecuación lineal que a partir de situaciones problema posibiliten en los estudiantes la adquisición de aprendizajes significativos.

2. Planteamiento y Justificación del Problema.

“El aprendizaje de álgebra no es una labor sencilla, las mismas características que la distinguen, hacen que su aprendizaje no sea sencillo. Los estudiantes se sienten más cómodos y seguros, al trabajar con objetos concretos, como lo es en aritmética, pero en álgebra, los objetos que se manejan son abstracciones que requieren de un esfuerzo cognitivo significativo por parte del alumno”. (Pérez, 2010).

“El aprendizaje del álgebra supone un cambio en el pensamiento del estudiante, siendo la dificultad para muchos principiantes la transición desde lo que se puede considerar un modo informal de representación y resolución de problemas, al modo formal”. (Pérez, 2010).

Desde los lineamientos curriculares se propone el estudio del Álgebra a partir de las ecuaciones lineales y la resolución de problemas.

La ecuación lineal desempeña un rol primordial en la enseñanza-aprendizaje del álgebra, y en general, en la vida escolar de los estudiantes, ya que además de incluirse en todos los currículos de álgebra al nivel básico y medio superior, desempeña un papel central en temas de otras asignaturas.

A gran parte de los estudiantes de educación básica y media se les dificulta el logro de aprendizajes significativos en este tema, problemática que se evidencia en el grado de asimilación que alcanzan. Esto se debe en parte a que en el proceso de enseñanza se hace mayor énfasis en el manejo de algoritmos, lo que lleva a los estudiantes a realizar un aprendizaje mecánico.

El trabajo con las ecuaciones lineales de primer grado contribuye al desarrollo de las siguientes competencias:

- Desarrollo del pensamiento matemático en la medida que traduce desde el lenguaje natural al simbólico y formal.
- Manejo expresiones que contienen formulas y símbolos.
- Uso de los diferentes tipos de representación de las ecuaciones de primer grado y la relación de acuerdo con el propósito,
- Interpretación del lenguaje simbólico.
- Analizar, reflexionar y criticar un modelo matemático y sus resultados.

“Respecto al álgebra, se considera que en un primer momento generaliza patrones aritméticos y posteriormente se constituye en una potente herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio, es por ello que debe involucrar entre otros aspectos el uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación, las estructuras algebraicas como medio de representación y sus métodos como herramientas en la resolución de problemas, la función y sus diferentes formas de representación, el análisis de relaciones funcionales y de la variación en general para explicar de qué forma un cambio en una cantidad produce un cambio en otra, y la contextualización de diversos modelos de dependencia entre variables, todos éstos desarrollos propios del pensamiento variacional” (MEN., Lineamientos curriculares - Matemáticas, 1998).

En los estándares básicos de competencia en matemáticas en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos se propone para los grados 6° y 7°, el siguiente estándar: “Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones” y para los grados 8° y 9° “Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales”.

Como puede apreciarse en los enunciados anteriores, el estudio del álgebra es fundamental en la educación matemática, y el aprendizaje de la ecuación lineal es considerado la base para abordar el estudio del álgebra.

La mayoría de autores que evalúan el proceso de enseñanza de las ecuaciones lineales en los ciclos de básica y media, coinciden en afirmar que este privilegia una enseñanza mecánica que da como resultado aprendizajes memorísticos de algoritmos para encontrar el valor de la incógnita en una ecuación dada.

Luego de aprender los algoritmos para la solución de ecuaciones se trabajan unos cuantos problemas de manera superficial, que se resuelven mediante el planteamiento y solución de ecuaciones. Esta forma de enseñar la ecuación lineal no privilegia o no da la suficiente importancia a la resolución de problemas.

Esta problemática no es ajena a los estudiantes de secundaria de la Institución Educativa Ciudad Don Bosco a los que se aplicó una prueba diagnóstica que permitió establecer las falencias que presentan en el manejo de ecuaciones lineales.

Teniendo en cuenta la problemática anterior, se proponen la siguiente pregunta y objetivos:

¿De qué manera incorporar la metodología de situaciones problema en el diseño de una unidad didáctica para abordar la ecuación lineal, que posibilite en los estudiantes la adquisición de aprendizajes significativos?

3. Objetivos.

3.1. Objetivo general.

3.1.2. Incorporar la metodología de situaciones problema en el diseño de una unidad didáctica para abordar la ecuación lineal.

3.2. Objetivos Específicos.

3.2.1. Emplear la estrategia del planteamiento y solución de situaciones problema como mediación en el proceso de enseñanza que permita el aprendizaje significativo al abordar la ecuación lineal.

3.2.2. Diseñar una unidad didáctica para la enseñanza de la ecuación lineal que aproxime aprendizajes significativos.

4. Marco Teórico.

En los estándares básicos de competencia para matemáticas, en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos se propone para los grados 6° y 7°, el siguiente estándar: “Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones” y para los grados 8° y 9°: “Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales”.

Desde los lineamientos curriculares se propone que las matemáticas, lo mismo que otras áreas del conocimiento, hacen parte del proceso educativo para contribuir al desarrollo integral de los estudiantes con la perspectiva de que puedan asumir los retos del siglo XXI.

Para alcanzar este objetivo la educación matemática debe propiciar aprendizajes que hagan énfasis en el aprendizaje de conceptos, procedimientos y procesos de pensamiento ampliamente aplicables y útiles para aprender cómo aprender.

Se espera entonces que los aprendizajes alcanzados por los estudiantes en el área de las matemáticas les permita dar sentido al mundo que los rodea, comprender los significados que otros construyen y desarrollar la capacidad de pensamiento y de reflexión lógica.

Muchas de las dificultades de los estudiantes para comprender las nociones matemáticas, y de los maestros para acompañarlas adecuadamente, tiene su origen en el desconocimiento de los procesos cognoscitivos, afectivos y socioculturales que se movilizan, durante la acción educativa.

“El aprendizaje de las matemáticas en la escuela está íntimamente vinculado con la didáctica utilizada por el docente en el aula. ... la forma en que el maestro aplica los planes pedagógicos puede ser causal de problemas de aprendizaje (así como los buenos maestros pueden compensar fallas en los planes y deficiencias en su aplicación, con esfuerzo y sacrificio personal)

Las técnicas de enseñanza... pueden generar dificultades en los alumnos porque los objetivos parciales de la enseñanza cotidiana se plantean a distancias muy grandes de las capacidades de los estudiantes... En general, las diversas formas de incidencia de los problemas de técnicas pedagógicas dan lugar a trastornos generales del aprendizaje.” (Betancur, 1997).

Lo anterior permite plantear que si bien son varias las dificultades externas al proceso de enseñanza que afectan el aprendizaje de los estudiantes, también es cierto que el docente tiene una gran responsabilidad en este. En muchas ocasiones cuando los estudiantes presentan bajo rendimiento académico los docentes tienden a responsabilizar al estudiante, a la falta de acompañamiento de la familia y a la falta de responsabilidad de los mismos, en el proceso académico, en ningún momento se mira él como principal responsable del aprendizaje de sus estudiantes independientemente de las dificultades que presenten. Se parte de la base que un docente tiene la preparación suficiente, para haciendo lectura de las características de sus estudiantes, determinar las estrategias necesarias para que alcancen aprendizajes significativos que les permitan desempeñarse mejor en el mundo que habitan.

El **aprendizaje significativo** tiene lugar en un proceso a través del cual una misma información se relaciona, de manera no arbitraria y sustantiva (no literal), con un aspecto relevante de la estructura cognitiva del individuo. En este proceso la nueva información interacciona con una

estructura de conocimiento específica denominada "concepto subsumidor (o subsunzor)" o, simplemente, "subsumidor", existente en la estructura cognitiva de quien aprende. (Moreira, La teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel, 1983).

El "subsumidor" es un concepto, una idea, una proposición que ya está en la estructura cognitiva y sirve de "anclaje" para la nueva información de modo que ésta adquiera, de esta manera, significado para el individuo.

El aprendizaje significativo se produce entonces cuando una nueva información "se ancla" en conceptos relevantes (subsumidores) preexistentes en la estructura cognitiva. De esta manera nuevas ideas, conceptos, proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos, proposiciones, estén adecuadamente claros y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y funcionen como punto de anclaje de los primeros.

Para que tenga lugar un aprendizaje significativo han de darse dos condiciones fundamentales:

La primera es que el estudiante manifieste disposición para aprender el nuevo contenido, es decir que la intención del estudiante sea querer comprender aquello que estudia.

La segunda condición requiere de la presentación al estudiante por parte del docente de un material potencialmente significativo. Un material es potencialmente significativo si es relacionable con la estructura cognitiva del que aprende de manera no arbitraria y sustantiva y si existen ideas de anclaje (subsumidores) adecuados en el sujeto que permitan la interacción con el nuevo material que se le presenta.

Manifiestar disposición para aprender, enmarca la importancia que tiene la motivación en el proceso de aprendizaje.

El tema de la motivación en el aprendizaje, es una problemática que aunque es identificada ampliamente, como una de las razones por la que los estudiantes no aprenden de manera significativa, no se le da en muchas ocasiones la suficiente importancia.

“La mayoría de los especialistas coinciden en definir la motivación como un conjunto de procesos implicados en la activación, dirección y persistencia de la conducta” (Domenéch, 2002).

La motivación está constituida por los factores capaces de provocar, mantener y dirigir la conducta hacia un objetivo. A nivel de la escuela podría entenderse como el interés de un estudiante para hacer el trabajo que le permita aprender un material de tipo académico.

Existen dos tipos de motivación la *motivación intrínseca* y la *motivación extrínseca*, la primera puede definirse como aquella que procede del mismo sujeto y tiene lugar cuando se realiza una actividad por el solo placer de realizarla, no hay presencia de incentivos externos.

La segunda proviene del exterior y tiene lugar cuando el individuo actúa movido por factores como una calificación, las felicitaciones de un adulto, un premio o un castigo, entre otros. Si bien los estudiantes se mueven en los dos tipos de motivación, la extrínseca y la intrínseca la mayoría de autores que trabajan la motivación, recomiendan ayudar a potenciar en

los estudiantes el alcance de la motivación intrínseca, la cual proviene del mismo sujeto, lo que implica que él mismo pueda motivarse.

Son muchas las estrategias para posibilitar en los estudiantes aprendizajes significativos una de ellas es el interés de esta propuesta y tiene que ver con la enseñanza basada en situaciones problema. Con la implementación en el proceso de enseñanza de situaciones problema se pretende motivar y posibilitar en los estudiantes aprendizajes significativos en el tema de la ecuación lineal.

“El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problema procedentes de la cotidianidad, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas” (MEN., Lineamientos curriculares - Matemáticas, 1998).

Desde los lineamientos curriculares para el área de matemáticas se propone que la resolución de problemas debe ser eje central del currículo de matemáticas, y como tal, debe ser un objetivo primordial de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática que la permee en su totalidad y provea un contexto en el que las herramientas y conceptos matemáticos sean aprendidos.

Un contexto en el que tenga lugar la resolución de problemas posibilita que los estudiantes adquieran confianza en el uso de las matemáticas, aumenta la capacidad de

comunicarse matemáticamente y a su vez el desarrollo de la capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel.

Las investigaciones que han reconocido la resolución de problemas como una alternativa para aprender matemáticas, proponen considerar en el currículo escolar de matemáticas los siguientes aspectos:

- Formulación de problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas.
- Desarrollo y aplicación de diversas estrategias para resolver problemas.
- Verificación e interpretación de resultados a la luz del problema original.
- Generalización de soluciones y estrategias para nuevas situaciones de problemas.

(Planas, 2008) define el término problema como una situación, planteada con finalidad educativa, que propone una cuestión matemática cuyo método de solución no es inmediatamente accesible al alumno o grupo de alumnos que intenta resolverla, porque no dispone de un algoritmo que relacione los datos y la incógnita o de un proceso que identifique automáticamente los datos con la conclusión, y por lo tanto debería buscar, investigar, establecer relaciones, implicar sus afectos, etc. Para afrontar una situación nueva.

No es lo mismo hacer un ejercicio que resolver un problema, resolver un ejercicio es la aplicación de un algoritmo en forma mecánica, mientras que resolver un problema, significa dar una explicación coherente a un conjunto de datos relacionados dentro del contexto.

La enseñanza a través de la resolución de problemas es una alternativa para modificar el desarrollo habitual de las clases de matemáticas. Los problemas son un medio para generar en los estudiantes procesos de pensamiento, es una herramienta para formar sujetos con capacidad autónoma, críticos y reflexivos, capaces de preguntarse por los hechos, sus interpretaciones y explicaciones, de tener sus propios criterios modificándolos si es preciso, y de proponer soluciones.

La enseñanza mediante resolución de problemas exige un clima educativo que favorezca la confianza de cada estudiante en sus propias capacidades de aprendizaje, en su propio criterio, donde no sientan temor a equivocarse, cambiar razonadamente de opinión o decir “no sé”; un ambiente donde puedan disfrutar con los retos y con la propia actividad intelectual; donde se valoren los procesos y los progresos de cada estudiante y no solo sus respuestas; donde se tengan en cuenta los diferentes puntos de vista para abordar o solucionar un problema; donde se formulen preguntas pertinentes en torno a las situaciones y se cuiden las generalizaciones; donde se revisen las propias creencias.

La resolución de problemas es de suma importancia en la enseñanza de las matemáticas porque puede posibilitar que los estudiantes experimenten la utilidad de la matemática en diferentes contextos y situaciones del mundo que les rodea.

La actividad de resolver problemas en el desarrollo de las matemáticas ha dado lugar a algunas propuestas sobre su enseñanza, entre las cuales las más conocidas son las de los investigadores Polya , Alan Schoenfeld y Miguel de Guzmán.

(Polya, 1978) formuló cuatro etapas esenciales para la resolución de un problema, que constituyen el punto de arranque de todos los estudios posteriores:

1. Comprender el problema: resume la información dada y que se desea determinar.

- ¿Cuál es la incógnita?
- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición para determinar la incógnita?
- ¿Es insuficiente, redundante, contradictoria?

2. Concebir un plan: expresa la relación entre los datos y la incógnita a través de una ecuación o fórmula. Busca patrones.

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿O ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
- ¿Conoce un problema relacionado con este? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.
- He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo? ¿Podría utilizar su resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?
- ¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.

- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere solo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿En qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?

- ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

3. Ejecución del plan: resuelve la ecuación, evalúa la fórmula, identifica el término constante del patrón, según sea el caso.

- Al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos.
- ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

4. Visión retrospectiva: es la más importante en la vida diaria, porque supone la confrontación con contexto del resultado obtenido por el modelo del problema que hemos realizado, y su contraste con la realidad que queríamos resolver.

- ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?

- ¿Puede obtener el resultado de forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

De otro lado Alan Schoenfeld (Barrantes, 2006) identifica cuatro factores relevantes para la resolución de problemas:

Recursos cognitivos: entendidos como nuestros conocimientos matemáticos generales, tanto de conceptos y resultados como de procedimientos (algoritmos).

Heurística: es el conjunto de estrategias y técnicas para resolver problemas que conocemos y estamos en capacidad de aplicar.

Control o meta cognición: es la capacidad de utilizar lo que sabemos para lograr un objetivo.

Creencias: se refiere a aquellas creencias y opiniones relacionadas con la resolución de problemas y que pueden afectarla favorable o desfavorablemente.

Para la resolución de problemas Miguel de Guzmán (Guzman, 1993) propone:

1. Familiarización con el problema.
2. Búsqueda de estrategias.
3. Poner en práctica la estrategia.
4. Revisar el proceso y sacar consecuencias de él.

En la familiarización del problema se debe actuar sin prisas, pausadamente y con tranquilidad. Hay que tener una idea clara de los elementos que intervienen: datos, relaciones e incógnitas. Una vez que se ha entendido se buscan las estrategias que permitan resolverlo. Se apuntan las ideas que surgen relacionadas con el problema.

Tras acumular varias estrategias se escoge una para implementarla. Si no se encuentra la solución se devuelve a la fase anterior y se reinicia el trabajo.

Una vez hallada la solución se hace la revisión del proceso y se extraen las consecuencias de él, se reflexiona sobre el camino seguido y de ser posible se extienden estas ideas a otras situaciones.

5. Metodología.

El estudio de casos es un método de investigación aplicado en las ciencias humanas y sociales que implica un proceso de indagación caracterizado por el examen sistemático y en profundidad de casos de entidades sociales o entidades educativas únicas. El estudio de casos constituye un campo privilegiado para comprender los fenómenos educativos.

La finalidad del estudio de casos es conocer cómo funcionan todas las partes del caso para crear hipótesis, atreviéndose a alcanzar niveles explicativos de supuestas relaciones causales encontradas entre ellas, en un contexto natural concreto y dentro de un proceso dado.

El estudio de casos es un método de investigación cualitativa que se ha utilizado ampliamente para comprender en profundidad la realidad social y educativa.

Para Yin (1989) citado en (Álvarez, 2012) el estudio de caso consiste en una descripción y análisis detallados de unidades sociales o entidades educativas únicas.

Según (Stake, 1999) la nota distintiva del estudio de casos está en la comprensión de la realidad objeto de estudio. El estudio de casos es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes.

Yin (1989) citado en (Álvarez, 2012), enfatiza en la contextualización del objeto de investigación empírica dirigida a investigar un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto real.

Para la elaboración de este trabajo se hace una aproximación a un estudio de caso. Inicialmente se eligió el problema enmarcado en la enseñanza de las ecuaciones lineales, luego se indago por los autores que han trabajado esta problemática con el fin de justificar el planteamiento de este problema. Luego se aplicó una prueba diagnóstica (ver anexo 1) con la cual se confirma que la problemática planteada no es ajena a la descrita por los autores expertos en el tema, luego se planteó el marco teórico en el que se presenta como alternativa la solución de situaciones problema como estrategia a implementar en la enseñanza de las ecuaciones lineales, dicha estrategia se plasma en el diseño de la unidad didáctica. Finalmente se presentan las conclusiones.

6. Prueba Diagnóstica.

El panorama descrito en el planteamiento y justificación del problema no es ajeno a muchas de las instituciones educativas del departamento de Antioquia y de la ciudad de Medellín.

En el departamento de Antioquia los resultados arrojados en las Pruebas Saber 2012 (Diagnóstico de matemáticas en Antioquia, 2012) para el álgebra son los siguientes:

- Desconocimiento general de las operaciones con polinomios.
- Ausencia de competencias para realizar las diferentes operaciones con entidades algebraicas.
- Ausencia de las propiedades básicas de la factorización y expansión de polinomios en 2 o 3 variables.
- Limitaciones severas para la formulación en términos algebraicos del enunciado de un problema.
- No hay evidencia en las respuestas de un raciocinio lógico que permita construir una idea para buscar soluciones a un problema dado.
- Los enunciados de los problemas se leen mal y no se comprende la pregunta o preguntas que hacen.

La **Institución Ciudad Don Bosco**, ubicada en el barrio Robledo Aures (Medellín), es una institución animada por la **Comunidad Salesiana** que atiende niños y jóvenes en situación de vulnerabilidad en asocio con el Instituto Colombiano de Bienestar Familiar (**ICBF**), de la que hace parte la Institución Educativa Ciudad Don Bosco, en la que se aplicó la prueba diagnóstica

(ver anexo 1) a 62 estudiantes de los grados 8° 9° 10° y 11°, en el tema de **la Ecuación Lineal**.

El objetivo de esta prueba fue medir los conocimientos de los estudiantes respecto a:

- ¿Qué es una ecuación?
- Identificación de expresiones que son ecuaciones lineales.
- Resolución de una ecuación para encontrar el valor de la incógnita.
- Despeje de una variable a partir de una fórmula dada.
- Reconocimiento de conjuntos numéricos de acuerdo a la solución de ecuaciones.
- Relacionar una situación con una ecuación que describa dicha situación.
- Solución de problemas a partir del planteamiento de ecuaciones lineales.
- Crear una situación a partir de una ecuación dada.

Los resultados que se obtuvieron por grado fueron los siguientes:

Tabla 1. Resultados prueba diagnóstica grado octavo 8°.

29 estudiantes presentaron la prueba.

| PREGUNTA | RESPUESTAS | | | |
|----------------|---|---|---|------------------------------|
| | Estudiantes que responden correctamente | Estudiantes que responden incorrectamente | Estudiantes que responden parcialmente bien | Estudiantes que no responden |
| 1 | 3/29 = 6,89% | 2/29 = 6,89% | 17/29 = 58,6% | 8/29 = 27,6% |
| 2 | 1/29 = 3,4% | 16/29 = 55,17% | 9/29 = 31% | 3/29 = 10,34% |
| 3 | 14/29 = 48,27% | 12/29 = 41,37 | 1/29 = 3,4% | 2/29 = 6,89% |
| 4 | 2/29 = 6,89% | 18/29 = 62% | 0% | 9/29 = 31% |
| 5 | 3/29 = 10,34% | 21/29 = 72,41% | 0% | 5/29 = 17,25% |
| 6 | 10/29 = 34,42% | 18/29 = 62% | 0% | 1/29 = 3,4% |
| 7 | 3/29 = 10,34% | 15/29 = 51,72% | 4/29 = 13,8% | 7/29 = 24,1% |
| 8 | 1/29 = 3,4% | 15/29 = 51,72% | 1/29 = 3,4% | 12/29 = 41,37% |
| 9 | 1/29 = 3,4% | 6/29 = 20,68% | 2/29 = 6,89% | 21/29 = 72,41% |
| 10 | 1/29 = 3,4% | 4/29 = 13,8 % | 0% | 24/29 = 83% |
| TOTALES | 12,7% | 43,5% | 11,7% | 32% |

Tabla 2. Resultados prueba diagnóstica grado 9°.

16 estudiantes presentaron la prueba.

| PREGUNTA | RESPUESTAS | | | |
|----------------|---|---|---|------------------------------|
| | Estudiantes que responden correctamente | Estudiantes que responden incorrectamente | Estudiantes que responden parcialmente bien | Estudiantes que no responden |
| 1 | 6/16 = 37,5% | 1/16 = 6,25% | 8/16 = 50% | 1/16 = 6,25% |
| 2 | 0% | 11/16 = 68,75% | 5/16 = 31,25% | 0% |
| 3 | 12/16 = 75% | 3/16 = 18,75% | 0% | 1/16 = 6,25% |
| 4 | 1/16 = 6,25% | 15/16 = 93,75 | 0% | 0% |
| 5 | 5/16 = 31,25% | 10/16 = 62,5% | 0% | 1/16 = 6,25% |
| 6 | 5/16 = 31,25% | 11/16 = 68,75% | 0% | 0% |
| 7 | 3/16 = 18,75% | 6/16 = 37,5% | 4/16 = 25% | 3/16 = 18,75% |
| 8 | 3/16 = 18,75% | 6/16 = 37,5% | 0% | 7/16 = 43,75% |
| 9 | 3/16 = 18,75% | 7/16 = 43,75% | 0% | 6/16 = 37,5% |
| 10 | 1/16 = 6,25% | 6/16 = 37,5% | 2/16 = 12,5% | 7/16 = 43,75% |
| TOTALES | 30,3% | 41,8% | 11,7% | 16,2% |

Tabla 3: Resultados pruebas diagnóstica grado décimo 10°.

8 estudiantes presentaron la prueba.

| PREGUNTA | RESPUESTAS | | | |
|----------------|---|---|---|------------------------------|
| | Estudiantes que responden correctamente | Estudiantes que responden incorrectamente | Estudiantes que responden parcialmente bien | Estudiantes que no responden |
| 1 | 1/8 = 12.5 | 4/8 = 50% | 3/8 = 37,5% | 0% |
| 2 | 2/8 = 25% | 5/8 = 62,5% | 1/8 = 12.5 | 0% |
| 3 | 5/8 = 62,5% | 3/8 = 37,5% | 0% | 0% |
| 4 | 1/8 = 12.5 | 6/8 = 75% | 0% | 1/8 = 12.5 |
| 5 | 3/8 = 37,5% | 4/8 = 50% | 0% | 1/8 = 12.5 |
| 6 | 3/8 = 37,5% | 5/8 = 62,5% | 0% | 0% |
| 7 | 3/8 = 37,5% | 3/8 = 37,5% | 1/8 = 12.5 | 1/8 = 12.5 |
| 8 | 4/8 = 50% | 2/8 = 25% | 0% | 2/8 = 25% |
| 9 | 2/8 = 25% | 2/8 = 25% | 0% | 4/8 = 50% |
| 10 | 0% | 2/8 = 25% | 3/8 = 37,5% | 3/8 = 37,5% |
| TOTALES | 30% | 45% | 10% | 15% |

Tabla 4. Resultados prueba diagnóstica grado once 11°.

9 estudiantes presentaron la prueba.

| PREGUNTA | RESPUESTAS | | | |
|----------------|---|---|---|------------------------------|
| | Estudiantes que responden correctamente | Estudiantes que responden incorrectamente | Estudiantes que responden parcialmente bien | Estudiantes que no responden |
| 1 | 5/9 = 55,55% | 2/9 = 22,22% | 2/9 = 22,22% | 0% |
| 2 | 2/9 = 22,22% | 4/9 = 44,44% | 3/9 = 33,33% | 0% |
| 3 | 6/9 = 66,66% | 3/9 = 33,33 % | 0% | 0% |
| 4 | 2/9 = 22,22% | 6/9 = 66,66% | 0% | 1/9 = 11.11% |
| 5 | 6/9 = 66,66% | 2/9 = 22,22% | 0% | 1/9 = 11.11% |
| 6 | 5/9 = 55,55% | 4/9 = 44,44% | 0% | 0% |
| 7 | 2/9 = 22,22% | 3/9 = 33,33% | 2/9 = 22,22% | 1/9 = 11.11% |
| 8 | 1/9 = 11.11% | 2/9 = 22,22% | 1/9 = 11.11% | 5/9 = 55,55% |
| 9 | 2/9 = 22,22% | 2/9 = 22,22% | 1/9 = 11.1% | 3/9 = 33,33% |
| 10 | 0% | 2/9 = 22,22% | 1/9 = 11.11% | 6/9 = 66,66% |
| TOTALES | 35% | 34% | 12% | 19% |

Haciendo el análisis de todos los grupos los resultados fueron los siguientes:

Tabla 5. Resultados prueba diagnóstica grados 8°, 9°, 10° y 11°.

62 estudiantes presentaron la prueba.

| PREGUNTA | RESPUESTAS | | | |
|----------------|---|---|---|------------------------------|
| | Estudiantes que responden correctamente | Estudiantes que responden incorrectamente | Estudiantes que responden parcialmente bien | Estudiantes que no responden |
| 1 | 14/62 = 22,58 % | 9/62 = 14,51 % | 30/62 = 48,38 % | 9/62 = 14,51 % |
| 2 | 5/62 = 8,06 % | 36/62 = 58,06% | 18/62 = 29,03 % | 3/62 = 4,83 % |
| 3 | 37/62 = 59,67 % | 21/62 = 33,87 % | 1/62 = 1,61 % | 3/62 = 4,83% |
| 4 | 6/62 = 9,67 % | 45/62 = 72,58 % | 0% | 11/62 = 17,74 % |
| 5 | 17/62 = 27,41 % | 37/62 = 59,67 % | 0% | 8/62 = 12,9 % |
| 6 | 23/62 = 37,09 % | 38/62 = 61,29 % | 0% | 1/62 = 1,61 % |
| 7 | 11/62 = 17,74% | 27/62 = 43,64 % | 11/62 = 17,74 % | 12/62 = 19,35 % |
| 8 | 9/62 = 14,51 % | 25/62 = 40,32 % | 2/62 = 3,22% | 26/62 = 41,93 % |
| 9 | 8/62 = 12,9 % | 17/62 = 27,41 % | 3/62 = 4,83 % | 34/62 = 54,83% |
| 10 | 2/62 = 3,22 % | 14/62 = 22,58 % | 6/62 = 9,67 % | 40/62 = 64,51 % |
| TOTALES | 21,4 % | 43,4% | 11,5% | 23,7% |

El porcentaje de respuestas en la prueba diagnóstica fue el siguiente: el 21,4% respondieron correctamente, el 43,4 % respondieron incorrectamente, el 11,5% respondieron de manera parcialmente correcta y el 23,7 % no respondieron.

Teniendo en cuenta que la enseñanza está organizada por niveles se podría pensar que un estudiante de 11° debería tener mayores conocimientos, en este caso sobre la ecuación lineal, que

un estudiante de un grado inferior. En la siguiente tabla puede apreciarse que a diferencia del grado 8° (grado en el que se inicia el trabajo con las ecuaciones lineales), los grados 9°, 10° y 11° presentan un manejo de las ecuaciones muy similar. Esto evidencia un problema en la enseñanza de las matemáticas como que puede tener relación con la enseñanza de forma mecánica.

Tabla 6. Porcentaje de respuestas por grupo.

| Grado | Porcentaje de estudiantes que responden correctamente | Porcentaje de estudiantes que responden incorrectamente | Porcentaje de estudiantes que responden parcialmente bien | Porcentaje de estudiantes que no responden |
|--------------|--|--|--|---|
| 8° | 12,7% | 43,5% | 11,7% | 32% |
| 9° | 30,3% | 41,8% | 11,7% | 16,2% |
| 10° | 30% | 45% | 10% | 15% |
| 11° | 35% | 34% | 12% | 19% |

A nivel general gran parte de los estudiantes presentan dificultades en la mayoría de conceptos relacionados con la ecuación lineal, principalmente en el paso del lenguaje verbal al simbólico y viceversa y en la solución de problemas.

Con base en la información arrojada en la prueba diagnóstica, los lineamientos curriculares en matemáticas, los estándares básicos en competencias para matemáticas, el marco teórico y la metodología de situaciones problema se propone la siguiente unidad didáctica en ecuaciones lineales.

7. Unidad Didáctica. Ecuación Lineal.

7.1. Presentación. (Para orientación del docente)

La presente unidad didáctica se diseñó teniendo en cuenta las dificultades que presentan los estudiantes para pasar del lenguaje verbal al lenguaje algebraico, el planteamiento y solución de ecuaciones lineales de primer grado y la solución de problemas con ecuaciones lineales de primer grado.

La interpretación del lenguaje verbal que debe ser traducido a un lenguaje formal para construir expresiones algebraicas y con ellas generar ecuaciones que permitan resolver problemas del contexto, crea una barrera para la utilización real del álgebra.

Para alcanzar un aprendizaje significativo de los procesos algebraicos se requiere dotar las actividades de significado dentro del contexto del estudiante que permitan un aprendizaje concreto que posteriormente se use en la aplicación del álgebra en contextos reales.

Analizando los Lineamientos Curriculares y los Estándares de Competencias, se puede identificar que el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita, contribuye al desarrollo de las siguientes competencias:

- formular, plantear, transformar y resolver problemas
- utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas

- dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer, cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz.

Para el diseño de la unidad didáctica se tuvo en cuenta la Ley General de Educación, los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias, estos últimos son una guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden en cada una de las áreas fundamentales del conocimiento, estos a su vez proponen generar en los estudiantes un aprendizaje significativo y comprensivo de los conocimientos matemáticos a nivel conceptual y procedimental que les permita ser competentes.

De acuerdo con los estándares, las ecuaciones lineales con una incógnita hacen parte del pensamiento variacional y sistemas algebraicos, correspondiente a los grados octavo y noveno de la educación básica secundaria, enmarcadas en el estándar: “construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada”.

Por tal motivo en la unidad didáctica se tuvieron en cuenta los cinco procesos generales de la actividad matemática: formular, plantear y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar; y ejercitar procedimientos y algoritmos.

7.2. Objetivos.

7.2.1. Objetivo general.

Posibilitar aprendizajes significativos en el tema de la ecuación lineal a partir de las situaciones problema.

7.2.2. Objetivos específicos.

7.2.2.1. Conocer el origen de las ecuaciones lineales.

7.2.2.2. Identificar algunas aplicaciones que pueden tener las ecuaciones lineales en la cotidianidad.

7.2.2.3. Utilizar el lenguaje algebraico para traducir enunciados, plantear ecuaciones lineales, aplicando las nociones de igualdad y equilibrio en diferentes sistemas de representación.

7.2.2.4. Resolver problemas haciendo uso de ecuaciones.

7.2.2.5. Aplicar los algoritmos que se emplean para la solución de ecuaciones lineales con una incógnita.

7.3. Secuencia didáctica.

7.3.1. Motivación.

Para muchos estudiantes la matemática es aburrida y no tiene aplicación en lo que ellos requieren. Con la presentación del video “importancia y uso de las matemáticas” se busca que los estudiantes reconozcan algunas de las aplicaciones de la matemática en situaciones concretas y se motiven y se dispongan para el aprendizaje de las ecuaciones lineales.

Descripción de la actividad.

1. Presentar a los estudiantes el Video: “Importancia y uso de las Matemáticas”

<http://www.youtube.com/watch?v=JVhOdEWT6cw>

2. Luego de ver el video con los estudiantes el docente puede establecer con ellos un dialogo alrededor de las siguientes preguntas:
 - a. ¿En qué consiste la teoría de números?
 - b. ¿Quién es el creador de la teoría de juegos?
 - c. ¿En el lenguaje binario, como se escribirían los números 17 y 21?
 - d. Teniendo en cuenta la explicación que se hace en el video de cuantas maneras diferentes se pueden sentar en la mesa redonda 6 personas, responda de cuantas maneras diferentes se sentaran 7 personas.

Nota: el docente puede generar otras estrategias que le permitan reflexionar con sus estudiantes acerca del tema propuesto en el video.

Tarea 1.

Escriba 5 ejemplos en los que usted hace uso de las matemáticas.

7.3.2. Origen de las ecuaciones.

Objetivo: conocer el origen de las ecuaciones lineales.

Presentación.

Para los estudiantes es común pensar que la matemática es aburrida y que fue construida por unas cuantas personas que no tenían nada que hacer. A ellos se les dificulta reconocer que los conceptos matemáticos con los que se cuenta, son el resultado de un proceso histórico en el que el hombre tratando de resolver los problemas que se le han ido presentando ha construido estos conceptos, los cuales son herramientas que permiten entender el mundo que habitamos.

En este apartado se pretende que el estudiante conozca como surgieron las ecuaciones lineales.

Descripción de la actividad.

1. Por grupos se realiza la lectura del siguiente texto “Breve Historia De Las Ecuaciones Lineales”.

Breve Historia de las Ecuaciones Lineales.

Fue la necesidad de solucionar problemas prácticos lo que condujo al nacimiento de la matemática.

A través de la historia los seres humanos han buscado las maneras de comprender los fenómenos que forman parte de la vida cotidiana.

En el proceso de explicar los diferentes fenómenos, se han construido herramientas y modelos que han hecho más fácil la tarea de resolver problemas concretos cuya finalidad es la de favorecer la forma de vida de las comunidades. Muchos de estos problemas pueden ser solucionados mediante el planteamiento de ecuaciones lineales.

Una de las historias más interesantes de las matemáticas tiene que ver con la historia de las ecuaciones. Es común creer que el descubrimiento de una fórmula matemática se debe a una sola persona, pero la historia de las ecuaciones es un rompecabezas en el que participan piezas de distintas épocas, personajes y culturas. Hoy en día pueden considerarse ecuaciones de primer grado a aquellas que surgieron de un modo primitivo en las grandes culturas orientales y su empleo inicia con la búsqueda de resolver problemas de la cotidianidad.

Egipto (aproximadamente 4000 años. A.C).

Los primeros rudimentos de lo que hoy se conoce como álgebra lineal se han encontrado en el documento matemático más antiguo con el que se cuenta hoy día: el papiro Rhind, que data aproximadamente del año 1600 a.C., es un documento matemático proveniente del antiguo Egipto, actualmente se conserva en el British Museum con algunos fragmentos en el Brooklyn Museum, fue escrito por el sacerdote egipcio Ahmes hacia el año 1650 a.C. y exhumado en Tebas en 1855.

El papiro de Rhind contiene ecuaciones de primer grado, donde la incógnita aparece representada por un "ibis" que significa escarbando en el suelo, posiblemente por su aplicación a la agrimensura. Este documento contiene 85 problemas redactados en escritura hierática y fue concebido originalmente como un manual práctico para los no iniciados. Según el propio Ahmes,

este texto es una copia de uno más antiguo (2000-1800 a.C.), algunos de cuyos documentos proceden quizá de periodos más antiguos.

Una ecuación lineal que aparece en el papiro de Rhind responde al problema siguiente:
 "Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24". En notación moderna, la ecuación sería:

$$x + \frac{1}{7}x = 24$$

La solución se obtenía implementado un método que hoy se conoce con el nombre de "método de la falsa posición" o "regula falsi", el cual consistía en tomar un valor concreto para la incógnita, luego se probaba si este verificaba la igualdad, si la verificaba se tenía la solución, si no, mediante cálculos obtenían la solución exacta.

Supóngase que el valor elegido para la incógnita fuera 7, al sustituir este valor en la x se obtendría: $7 + \frac{1}{7} \cdot 7 = 8$. Pero 8 es distinto de 24, se trata de una falsa posición. Para encontrar la posición verdadera usaban fracciones.

| Posición | Solución |
|----------|----------|
| 7 | 8 |
| x | 24 |

❖ $\frac{7}{x} = \frac{8}{24}$

❖ $7 \cdot 24 = 8 \cdot x$

❖ $168 = 8x$

$$\diamond \frac{168}{8} = x$$

$$\diamond 21 = x$$

$$\diamond x = 21$$

La solución es $21 = 3 \cdot 7$. Ya que $3 \cdot 7 + \frac{1}{7} \cdot 7 = 24$

Generalmente, el cálculo de la solución correcta no era tan fácil como en este caso e implicaba numerosas operaciones con fracciones unitarias (fracciones cuyo numerador fuera la unidad). En cuanto al simbolismo, solamente en algunas ocasiones utilizaban el dibujo de un par de piernas andando en dirección de la escritura o invertidas, para representar la suma y resta, respectivamente.

El álgebra egipcia no utilizaba prácticamente ningún simbolismo. En definitiva, los egipcios solucionaban problemas de una incógnita que vienen a ser equivalentes a nuestra resolución de ecuaciones lineales. Sin embargo, los procesos seguidos eran puramente aritméticos y no constituían para los egipcios un tema distinto como podía ser la resolución de ecuaciones.

Mesopotamia - Babilonia (aproximadamente 4000 años. A.C).

En Mesopotamia, el álgebra alcanzó un nivel más alto que en Egipto, ya que los babilonios resolvían problemas concretos que involucraban ecuaciones de primer y segundo grado, ecuaciones cúbicas y cuadráticas, y sistemas de ecuaciones lineales y no lineales.

Los documentos matemáticos que se conservan de la época son tablillas de arcilla blanda donde se imprimía el texto con una varilla y luego se cocían en hornos para endurecerlas. Estos documentos han sido menos vulnerables al paso del tiempo que los papiros egipcios, por lo que se dispone actualmente de una mayor información de la matemática mesopotámica que de la egipcia. La mayoría de las tablillas con contenido matemático se encuentran en las Universidades de Columbia, Pennsylvania y Yale, las cuales fueron suministradas por un yacimiento arqueológico de la antigua ciudad de Nipur.

Un ejemplo de los problemas que resolvían en esa época, que data del último periodo sumerio hacia el año 2100 a. C, es el siguiente:

“Existen dos campos cuyas áreas suman 1800 yardas cuadradas. Uno produce granos en razón de $\frac{2}{3}$ de saco por yarda cuadrada, mientras que el otro produce granos en razón de $\frac{1}{2}$ saco por yarda cuadrada. Si la producción total es de 1100 sacos, ¿cuál es el tamaño de cada campo?” (Boyer, 1994)

Los babilonios resolvían los problemas algebraicos de manera verbal, no usaban símbolos especiales. A menudo aparecen las palabras us (longitud), sag (anchura) y aja (área), con las cuales representaban las incógnitas, no porque dichas incógnitas representaran tales cantidades geométricas, sino porque muchos problemas algebraicos posiblemente surgieron de situaciones geométricas y esta terminología terminó por imponerse. Un indicio de que esto era así, es que los babilonios no tenían ningún reparo en sumar una longitud con un área o un volumen.

China.

Las civilizaciones china e hindú se remontan a lo que se conoce hoy en día como Edad Potámica. La civilización china tuvo su cuna en la cuenca de los ríos Yangtze y Amarillo y el primer imperio chino data del año 2750 a.C., aunque algunos historiadores creen que estuvo más cerca del año 1000 a.C.

El documento matemático que tiene por nombre *Chou Pei Suan Ching*, escrito en forma de diálogo entre un príncipe y su ministro es considerado el texto chino más antiguo de contenido matemático.

Un tratado matemático muy importante es el *Chui-chang suan-shu* o los *Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático*, poco antes de la dinastía Han (200 a.C.- 220 a.C.). Esta obra ejerció una gran influencia en los libros matemáticos chinos posteriores; incluye 246 problemas sobre agrimensura, agricultura, impuestos, cálculo, resolución de ecuaciones y propiedades de los triángulos rectángulos. En muchos casos la resolución de problemas conduce a sistemas de ecuaciones lineales utilizando números positivos y negativos.

Los *Nueve Capítulos* recuerdan en cierta manera a la matemática egipcia por su uso del método de la “falsa posición”, pero la invención de este procedimiento, lo mismo que el origen de la matemática china en general, parece haber sido independiente de toda influencia occidental.

Mayor interés histórico y matemático despierta el *SSu-yüan yü- Chien* o “Espejo Precioso de los Cuatro Elementos” escrito por Chu Shih-Chieh en 1303. Los cuatro elementos a los que se

refiere el título, que son el cielo, la tierra el hombre y la materia, representan las cuatro incógnitas de una ecuación. Este libro marca la cota más alta que alcanzó el desarrollo del álgebra china, y en él se estudian sistemas de ecuaciones simultáneas y ecuaciones individuales de grados tan altos como catorce.

La civilización Hindú.

En la matemática hindú las importantes contribuciones se han realizado en periodos separados por largos intervalos de tiempo.

La primera época matemática se conoce como el periodo de los Sulvasutras o “regla de la cuerda”, que terminó hacia el siglo II d.C. Este nombre hacía alusión a la operación de extender o tensar las cuerdas para efectuar mediciones y guardar los datos obtenidos según unas reglas marcadas. Estos conocimientos geométricos, algo primitivos, sirvieron para la planificación de templos y construcciones de altares.

La segunda época de la matemática hindú, conocida también como el “periodo alto”, abarca desde el año 200 d.C. al año 1200 d.C. Este periodo es el más importante en lo referente al álgebra hindú, ya que ésta alcanzó su plenitud gracias a cuatro destacados matemáticos: Aryabhata (nacido el 476), Brahmagupta (nacido el 598), Mahavira (sigloIX) y Bhaskara (1114-1185).

Muchos de los trabajos de los matemáticos indios, estaban motivados por la astronomía y la astrología.

La primera obra que se conoce de este periodo fue la del matemático Aryabhata: Aryabhatiya, libro bastante análogo a los Elementos de Euclides.

Ambas obras son recopilaciones de desarrollos anteriores compiladas por un único autor. Pero a diferencia de los Elementos, Aryabhatiya está compuesta por 123 estrofas métricas y no tiene ninguna relación con la metodología deductiva.

Uno de los grandes progresos de la matemática hindú en la rama del álgebra fue el uso de abreviaturas de palabras y algunos símbolos para describir las operaciones. No había ningún símbolo para la adición, una tilde sobre el sustraendo indicaba sustracción, otras operaciones se designaban con palabras clave o abreviaturas. Por ejemplo ka, de la palabra “karama” indicaba raíz cuadrada. Para las incógnitas utilizaban palabras que denotaban colores. Este simbolismo permitió clasificar el álgebra hindú como cuasi simbólica. Los problemas y sus soluciones correspondientes se escribían en este estilo cuasi simbólico, y sólo se daban los pasos y no iban acompañados de justificaciones ni demostraciones.

La cultura Árabe.

La península arábiga estaba habitada en el siglo VI por nómadas del desierto, los beduinos, que no sabían leer ni escribir. En esta época apareció el profeta Mahoma, quien en medio siglo consiguió formar un estado “mahometano” con centro en La Meca. En el año 622 muere Mahoma, pero esto no entorpece la expansión de la cultura islámica. En aproximadamente veinte años conquistaron Damasco, Jerusalén y Alejandría; en el siglo VIII ocupan España y Marruecos.

Su despertar intelectual fue gracias al califa Al-Mamun quien ordenó traducir todas las obras griegas existentes al árabe y fundó la Casa de la Sabiduría en Bagdad, donde los miembros de esta especie de universidad estudiaban las obras antiguas e investigaban en el terreno científico.

Al álgebra contribuyeron antes que nada con el nombre. La palabra álgebra viene de un libro escrito en el año 830 por el astrónomo Mohamed ibn Musa al-Khowârizmî, titulado Al-jabr w'al muqâbala, que significa restauración y simplificación.

Al-jabr w'al muqâbala es muy próxima al álgebra elemental moderna, ya que este libro presenta la exposición directa y elemental de la resolución de ecuaciones, en especial de las de segundo grado. Esto se debe a que a los árabes les gustaba seguir una argumentación lógica, correcta y clara de las premisas a la conclusión, así como una organización sistemática. El álgebra árabe tiene influencias babilónicas, hindúes y griega.

El libro de Al-Khowârizmî contiene además de la resolución de ecuaciones, que ocupa aproximadamente la mitad del libro, reglas para operar con expresiones binómicas, incluyendo productos tales como $(10 + x)(10 - x)$, demostraciones geométricas para la resolución de ecuaciones, y por último una gran variedad de problemas que sirven para ilustrar los casos tratados en los seis capítulos ya citados, por ejemplo:

“Muere un hombre dejando dos hijos y legando un tercio de su capital a un extraño el hombre deja unas propiedades que valen diez dirhams y una reclamación de deuda de diez dirhams a sus hijos”.

2. Luego de la lectura se hará un conversatorio, se sugiere hacerse a partir de las siguientes preguntas:
 - a. ¿En qué cultura o culturas tuvieron origen las ecuaciones lineales?
 - b. ¿Qué uso daban antiguamente a las ecuaciones lineales?
 - c. ¿Qué significado tiene la palabra álgebra?
 - d. ¿Cómo se conoce hoy lo que los babilonios y egipcios hicieron con respecto a las ecuaciones?
 - e. Diga el nombre de tres matemáticos que hayan influido con el desarrollo del álgebra.
 - f. ¿Los chinos y los Indues contribuyeron al desarrollo del álgebra? Si la respuesta es afirmativa cuales fueron sus contribuciones.

Tarea 2.

Averigüe como era el sistema de numeración egipcio y escriba los siguientes números: 7, 19, 27, 43, 99, 171 y 873.

7.3.3. Problemas a resolver.

Presentación.

Las ecuaciones lineales tienen múltiples aplicaciones en la vida de las personas. A continuación se presentan 39 situaciones problema que requieren del planteamiento de ecuaciones lineales para encontrar la solución, estas hacen referencia a diferentes contextos en los que pueden tener aplicación las ecuaciones lineales.

Objetivo: Identificar algunas de las aplicaciones que pueden tener las ecuaciones lineales en la cotidianidad.

Descripción de la actividad.

- a. Conformar equipos de trabajo, 2 o 3 estudiantes (**estos grupos así conformados funcionaran durante el proceso de enseñanza aprendizaje de la ecuación lineal**).
- b. De las 39 situaciones problema que se presentan a continuación cada equipo elegirá 5. El profesor debe por que los problemas sean elegidos en su mayoría.

Problemas a resolver.

Cotidianidad.

1. El colegio de Kevin se encuentra a 30 *km (kilometros)* de su casa, y debe llegar a las 7 de la mañana, si el tráfico se mueve a una velocidad que en promedio se aproxima a $60 \frac{km}{h}$ *kilometros por hora* . ¿A qué hora debe salir Kevin de su casa para llegar a tiempo?

Nota: tiempo = distancia dividida entre la velocidad de desplazamiento

2. ¿Cuántos minutos hay en 4 horas y en 4.7 horas?

3. Daniel quiere comprar unos tenis de marca que le cuestan \$202000. Su padre le plantea el siguiente problema:

Tres cestos contienen 575 manzanas. El primer cesto tiene 10 manzanas más que el segundo y 15 más que el tercero. ¿Cuántas manzanas hay en cada cesto?

Después de plantearle el problema decide darle el dinero que recoja después de vender las manzanas que hay en el tercer cesto.

Si cada manzana se vende a \$900. ¿El dinero que recibe Daniel le alcanza para comprar los tenis que quiere o le queda faltando?

4. Una madre decide repartir \$31000 en entre sus tres hijos Arley, camilo y Sebastián de la siguiente manera: camilo recibe \$2000 menos que Arley y \$4000 más que Sebastián.

¿Cuánto recibe cada uno?

5. Para la elección del personero en una institución educativa se presentaron tres candidatos A, B y C, el número de votos fueron 900. B obtuvo 50 votos menos que A y 80 votos más que C. ¿Cuántos votos obtuvo el candidato triunfante?

6. En una clase hay 60 estudiantes entre mujeres y hombres. El número de mujeres excede en 15 al duplo de los hombres ¿cuántas mujeres y cuantos hombres hay en la clase?
7. Un padre pone 16 problemas a su hijo con la condición de que por cada problema que resuelva recibirá \$12000 y por cada problema que no resuelva perderá \$5000. Después de trabajar en los 16 problemas el muchacho recibe \$73000. ¿Cuántos problemas resolvió y cuántos no resolvió?
8. Santiago envaso 300 litros de leche en 120 botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase utilizo?
9. Un abuelo de 70 años de edad quiso repartir entre sus nietos cierta cantidad de dinero. Si les daba \$30000. a cada uno le sobraba \$60000. y si les daba \$50000 le faltaba \$100000. ¿Cuántos nietos tiene? ¿Qué cantidad de dinero quería repartir?
10. Juan puede comprar con el dinero que dispone, 24 papayas y 20 manzanas ó 36 papayas y 15 manzanas. Si puede comprar solo manzanas. ¿cuál es la cantidad máxima que puede comprar?
11. De un juego de 32 cartas se saca primero “x” cartas y 3 más, luego se saca la mitad de lo que resta. Si todavía le quedan 10 cartas ¿cuantas cartas sacó la segunda vez?

12. Ocho amigos que estaban en un restaurante deben pagar en partes iguales la suma de \$200000, como algunos de ellos no llevaron dinero, a los restantes les tocó pagar \$15000 más cada uno. ¿Cuántos no pagaron?
13. Estiven tiene \$20000 en monedas de \$100 y \$200, si tiene 22 monedas. ¿Cuántas son de \$100 y cuántas de \$200?
14. En el piso bajo de un hotel hay x habitaciones. En el segundo piso hay doble número de habitaciones que en el primero; en el tercero la mitad de las que hay en el primero. ¿Cuántas habitaciones tiene el hotel?
15. Una organización agrupa a sus asociados en tres categorías y los distingue por el color de su carné; blancos, azules y amarillos. El total de asociados es 285. El número combinado de amarillos y azules es mayor en 15 unidades que el doble del número de blancos. El número combinado de blancos y azules es mayor en 45 unidades que el triple del número de amarillos. Determinar el número de miembros que pertenecen a cada categoría.

Geometría.

16. Dos ángulos suman 180° y el duplo del menor excede en 45° al mayor. Hallar los ángulos.
17. Juan Pablo debe pintar una cancha circular de radio 10 m. Un galón de pintura alcanza para pintar un área de $78,5 \text{ m}^2$. Cuantos galones debe comprar Juan Pablo para pintar la cancha.
18. Encuentre los ángulos internos de un triángulo A, B y C, sabiendo que B mide 40° más que C y A mide 40° más que B.
19. El perímetro de un espejo circular es de 251 cm. ¿Cuál es el radio del espejo?
20. Se tiene un terreno rectangular. El largo del terreno es dos veces más que su ancho. Si el perímetro del terreno es 114 m. calcule el ancho del terreno.
21. ¿Cuál tendrá que ser el radio de una pista de atletismo de forma circular para que la vuelta completa sea de 400 m?
22. Encuentre la medida del lado de un triángulo equilátero cuyo perímetro es 21,3 cm.

Comercio.

23. Alejandro trabaja en un puesto de verduras, hoy vendió 2 *Kg* de naranjas y 5 *Kg* de guayaba por \$8350. y 4 *Kg* de naranjas y 2 *Kg* de guayaba por \$12850. Calcular el precio de los kilogramos de naranja y de guayaba.
24. El día del estreno de una película en 3d se vendieron 600 entradas, por las que se recaudaron \$19.625.000. Si la entrada para un adulto cuesta \$40.000 y para un niño cuesta \$15.000. ¿Cuántos niños y cuantos adultos ingresaron a ver la película?
25. Un fabricante de muebles produce mensualmente 80 escritorios que vende al doble de lo que le cuesta fabricarlos. Si tiene unos costos fijos de \$1400000 mensuales, ¿Cuál es el costo de Cada escritorio, si sus utilidades son de \$380000?
- Nota:** $utilidad = ingreso\ total - costo\ total$
26. Una compañía de dulces fabrica una popular barra de chocolate en forma rectangular que tiene por medidas 10 *cm* de ancho, 20 *cm* de largo y 2 *cm* de grosor. A causa de un incremento de costos, la compañía ha decidido reducir en un 10 % el volumen de la barra, sin cambiar el grosor y el largo. ¿Cuál debe ser el ancho del nuevo producto?
27. Una persona decide invertir \$1000000 en dos empresas diferentes *A* y *B*. Al final del primer año, *A* y *B* tuvieron rendimientos de 6% y 5% respectivamente, sobre las

inversiones originales. ¿Cuál fue la cantidad invertida en cada empresa si la utilidad total fue de \$55000?

Física.

28. Un carro que viaja hacia el norte parte al mismo tiempo que otro viaja hacia el sur. La velocidad del carro que viaja hacia el sur es 1,5 veces la velocidad del que viaja hacia el norte. Al cabo de dos horas se encuentran separados entre sí 300 Km.
¿Cuál es la velocidad de cada uno?
29. Dos ciclistas parten de un mismo punto y se mueven en direcciones opuestas en línea recta. Después de 4 horas de iniciado el recorrido se encuentran a 260 Km. ¿Cuál es la velocidad de cada uno si la diferencia de velocidades es 5Km?
30. Un meteorito, inicialmente está a 200 millones de millas de distancia de la tierra. Este meteorito viaja en dirección cercana a la tierra con una velocidad de 3 millones de millas por semana. ¿Cuántas semanas deben pasar antes de que el meteorito este a 100 millones de millas de la tierra?
31. Dos carros recorren la misma distancia. La velocidad del carro 1 es de $112 \frac{m}{s}$ menos que la velocidad del carro 2. El tiempo del carro 1 duro para recorrer dicha distancia fue de 3 minutos y el del carro 2 fue de 16 minutos. Calcular la distancia recorrida por ambos carros.

Química.

32. Balancear la reacción $C_2H_6 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$.

Nota: para encontrar la solución se deben encontrar los valores de x, y, z tales que el número de átomos sea el mismo en ambos lados de la ecuación.

Para realizar el balanceo de ecuaciones químicas es necesario hacer uso de sistemas de ecuaciones lineales. Este problema no pretende inmiscuirse en el área de la química, pero si muestra una de las aplicaciones que pueden tener las ecuaciones lineales.

El balanceo obedece a la ley de la conservación de la materia. En general las soluciones deben ser enteras, pero en algunos casos se permiten soluciones no enteras.

Zona rural.

33. Un campesino compró un terreno rectangular, que tiene por largo el doble de la medida que tiene de ancho. Si el campesino uso *36 metros* de cerca para cercar todo el terreno, ¿cuáles son las medidas del terreno?

34. Un granjero lleva al mercado una cesta de huevos, con tan mala suerte que tropieza y se le rompe $\frac{2}{5}$ de la mercancía. Entonces vuelve al gallinero y recoge 21 huevos más, con lo que ahora tiene $\frac{1}{8}$ más de la cantidad inicial. ¿Cuántos huevos tenía al principio?

Juegos.

35. Adivina el número haciendo la siguientes instrucciones:

35.1. Piensa un número

35.2. Súmale cinco

35.3. Multiplica el resultado por dos

35.4. A lo que quedo réstale 4

35.5. El resultado divídelo entre dos

35.6. A lo que quedo réstale el número que pensaste

35.7. El resultado es 3

36. Busca una estrategia ubicando dígitos de tal forma que las filas, las columnas y las diagonales del cuadrado que aparece abajo sumen 15. Para ello, parte de un número inicial, situado en la segunda casilla. Los demás números se relacionan con el número inicial.

| | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|
| Doble del siguiente del Inicial | Número inicial, número natural | Siguiente del número inicial |
| Anterior del anterior del inicial | Siguiente del siguiente del inicial | Quíntuple del inicial disminuido en 6 |

| | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------|
| Triple del anterior del inicial | Siguiente del doble del inicial | Anterior al Inicial |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------|

Escribe el proceso realizado y la estrategia utilizada para la solución del cuadrado mágico.

37. Un grifo A llena una piscina en 8 horas, otro grifo B llena la misma piscina en 10 horas.

Hallar el tiempo que se deben dejar abiertos los grifos A y B para llenar la piscina.

38. Una investigación hecha por Icollantas mostro que el tiempo de llenado de un neumático para camión depende de tres variables: dureza del caucho (a), presión atmosférica (b) y presión del compresor de aire (d). como resultados se obtuvo la siguiente fórmula para dicho tiempo:

$$t = \frac{3 \bar{b} + 2\bar{a}}{5} - \frac{-3\bar{d} - 2 \bar{8a}}{4}$$

Hallar el tiempo de llenado usando los siguientes datos arrojados por la investigación:

$$a = 6; b = 12; d = \frac{1}{4}$$

39. Un tanque de agua de 60 litros vierte, cada hora, medio litro de agua. ¿Qué tiempo debe transcurrir para que se vacíe la mitad del tanque?

- c. De las 5 situaciones escogidas cada equipo selecciona una y la soluciona. Muy seguramente habrán estudiantes que expresen no ser capaces de solucionar la situación problema escogida. En este caso el docente les pedirá que busquen una solución y la argumenten así esta no sea correcta.
- d. Cada equipo presenta al resto del grupo la solución encontrada
- e. Finalmente el docente después de las presentaciones hechas por los equipos, realiza una apreciación sobre el trabajo de cada equipo y hace la introducción a la importancia que tiene el tema de las ecuaciones lineales como herramienta para solucionar los problemas elegidos.

Nota: Muy posiblemente algunos estudiantes sean capaces de solucionar el problema elegido desde sus propias lógicas, es decir con razonamientos claros en el que no halla presencia de un lenguaje algebraico, ni planteamiento claros de ecuaciones, pero si argumentos válidos que sustenten las respuestas dadas. Esta situación da pie para explicar a los estudiantes que por medio del lenguaje algebraico se pueden formalizar ecuaciones que hacen más sencillo la solución de los problemas seleccionados.

7.3.4. Del lenguaje verbal al lenguaje simbólico.

Objetivo: Utilizar el lenguaje algebraico para traducir enunciados en ecuaciones lineales.

Presentación.

El nacimiento del algebra tuvo lugar cuando los matemáticos empezaron a interesarse por las operaciones que se podían hacer con cualquier número, más que por los mismos números, y así pudo darse el gran paso de la aritmética al algebra.

La utilización de letras dentro del ambiente matemático es muy antigua, ya que los griegos y romanos las utilizaban para representar números bien determinados.

Las ecuaciones y sus soluciones son de mucha importancia en casi todos los campos de la tecnología y de la ciencia. Una fórmula es el enunciado algebraico de que dos expresiones representan al mismo número. Por ejemplo, la fórmula del área de un círculo es: $A = \pi r^2$. El símbolo A representa el área, lo mismo que la expresión: πr^2 , pero aquí el área se expresa en términos de otra cantidad, el radio: r .

A menudo es necesario resolver una fórmula para una letra o símbolo que aparecen en ella. En la práctica es necesario plantear ecuaciones para ser resueltas y no siempre es fácil identificar la información que nos lleva a la ecuación.

Los problemas de aplicación no vienen en forma “resuelva la ecuación”, sino que son relatos que suministran información suficiente para resolverlos y para hacerlo se debe traducir el lenguaje verbal al lenguaje matemático.

En la enseñanza de las ecuaciones lineales, el paso del lenguaje verbal al simbólico se hace generalmente de una manera abrupta en la que los estudiantes no tienen la posibilidad de entender este proceso, por eso a continuación se propone una guía en la que se muestra paso a paso como puede trabajarse con los estudiantes este proceso.

Descripción de las actividades.

1. El docente explica a los estudiantes de manera gradual como se da el paso del lenguaje verbal al lenguaje algebraico, para ello puede seguir la siguiente secuencia:

Del lenguaje verbal al lenguaje algebraico

Para explicar el cambio del lenguaje verbal al lenguaje simbólico se van a tomar números naturales para mostrar operaciones aritméticas, luego se mostraran estas mismas operaciones con la letra x , la cual debe interpretarse como un número cualquiera.

Tabla 7. Secuencia paso del lenguaje verbal al lenguaje simbólico.

| Expresión escrita | Expresión aritmética | Expresión algebraica |
|-------------------|----------------------|----------------------|
| El doble de 100 | $2(100)=200$ | |
| El doble de x | | $2x$ |
| El triple de 100 | $3(100)=300$ | |

| | | |
|--|----------------------------------|----------------------------|
| El triple de x | | $3x$ |
| El cuádruple de 200 | $4(200)=800$ | |
| El cuádruple de x | | $4x$ |
| La mitad de 250 | $\frac{1}{2} 250 = 125$ | |
| | Ó | |
| | $250 \div 2 = 125$ | |
| La mitad de x | | $\frac{1}{2}x$ |
| Un tercio de 33 | $\frac{1}{3} 33 = 11$ | |
| | Ó | |
| | $33 \div 3 = 11$ | |
| Un tercio de x | | $\frac{1}{3}x$ |
| Los tres cuartos de 100 | $\frac{3}{4}(100)$ | |
| Los tres cuartos de x | | $\frac{3}{4}x$ |
| El 80% de 100 | $\frac{80}{100} 100 = 0,8 (100)$ | |
| El 80% de x | | $\frac{80}{100}x = 0,8 x$ |
| El 25% de 200 | $\frac{25}{100} 200 = 0,25(200)$ | |
| El 25% de x | | $\frac{25}{100}x = 0,25 x$ |
| El consecutivo o el sucesor de 72 | 73 | |

| | |
|--|---|
| El consecutivo o el sucesor de x, con x perteneciente a los enteros | $x + 1$ |
| El anterior o antecesor de 100 | 99 |
| El anterior o antecesor de x, con x perteneciente a los enteros | $x - 1$ |
| Tres números consecutivos cualesquiera | 48, 49, 50 |
| Tres números consecutivos cualesquiera | $x; x + 1; x + 2$ Ó $x - 1; x; x + 1$ |
| Los siguientes tres números consecutivos de 1223 | 1224, 1225, 1226 |
| Los siguientes tres números consecutivos de x | $x + 1; x + 2; x + 3$ |
| Tres números pares consecutivos | 82, 84, 86 |
| Tres números pares consecutivos | 1. $2x$ 2. $2x + 1$ 3. $2x + 2$ Ó 1. $2x$ 2. $2x + 2$ 3. $2x + 4$ |
| Tres números impares consecutivos | 1. $2x + 1;$ 2. $2x + 1 + 1$ 3. $2x + 2 + 1$ |

Ó

1. $2x + 2 + 1$

2. $2x + 2 + 1$

3. $2x + 4 + 1$

| | |
|---|--|
| El resultado de sumar un número a 5 | $5 + x$ |
| La suma de algún número y 11 | $x + 11$ |
| El resultado de restar a 9 algún numero | $9 - x$ |
| 7 por algún numero | $7x$ |
| Dos veces la suma de un número más 4 | $2(x + 4)$ |
| La raíz cuadrada de un numero | \sqrt{x} |
| Dos números , uno el triple del otro | $x , 3x$ |
| Dos números cuya razón es dos tercios | $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \rightarrow 2x, 3x$ |
| Tres números proporcionales a 2, 3 y 4 | $2x , 3x , 4x$ |
| Tres números inversamente proporcionales | $\frac{x}{2} ; \frac{x}{3} ; \frac{x}{4}$ |

2. Luego de que el estudiante se capaz de pasar expresiones sencillas de lenguaje verbal al simbólico el docente va un poco más allá, explicándoles a los estudiantes como a partir de un enunciado (situación problema) se puede plantear una ecuación. Para ello puede apoyarse en los conceptos sobre álgebra y en la secuencia que se presentan a continuación:

Definición y características del álgebra.

Carácter del álgebra y su diferencia con la aritmética: el concepto de cantidad en álgebra es más amplio que en aritmética.

En **Aritmética** las cantidades se representan por **números** y estos expresan valores determinados. Así, 20 expresa un solo valor que es veinte; para expresar un valor mayor o menor que este es necesario escribir un número distinto de 20.

En álgebra, para lograr la generalización, las cantidades se representan por medio de letras, las cuales pueden representar todos los valores. Así, a representa el valor que se le quiera asignar, y por tanto puede representar 20 ó más de 20 o menos de 20, depende de la elección que se haga, aunque conviene advertir que cuando en un problema se asigna a una letra un valor determinado, esa letra no puede representar, en el mismo problema, un valor distinto del que le ha sido asignado.

Notación algebraica: los símbolos usados en álgebra para representar las cantidades son los números y las letras.

Los números se emplean para representar cantidades conocidas y determinadas. Las letras se emplean para representar toda clase de cantidades, ya sean conocidas o desconocidas

Las cantidades conocidas se expresan por las primeras letras del alfabeto: $a, b, c, d \dots$

Las cantidades desconocidas se representan por las últimas letras del alfabeto:

$u, v, w, x, y, z.$

Una misma letra puede representar distintos valores diferenciándolos por medio de comillas; por ejemplo: a', a'', a''' , y se leen ***a prima, a segunda, a tercera***, o también por medio de subíndices; por ejemplo: a_1, a_2, a_3 , y se leen ***a sub uno, a sub dos, a sub tres***.

Ecuación: una ecuación es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas y que solo se verifica o es verdadera para determinados valores de las incógnitas.

Las incógnitas se representan por las últimas letras del alfabeto $x, y, z, u, v.$

La expresión $5x + 2 = 17$ es una **ecuación**, porque es una igualdad en la que hay una incógnita, la x , y esta igualdad solo se verifica, o sea que solo se verifica para el valor $x = 3$. Si sustituye la x por 3 se tiene que:

$$5 \cdot 3 + 2 = 17, \text{ o sea } 17 = 17.$$

Por el contrario si se le da a x un valor distinto de 3, la igualdad no se verifica o no es verdadera.

La igualdad $y^2 - 5y = -6$ es una ecuación, porque es una igualdad que solo se verifica para $y = 2$ e $y = 3$.

En efecto, sustituyendo la y por 2, se tiene: $2^2 - 5 \cdot 2 = -6 \rightarrow 4 - 10 = -6 \rightarrow -6 = -6$

Si se hace $y = 3$, se tiene: $3^2 - 5 \cdot 3 = -6 \rightarrow 9 - 15 = -6 \rightarrow -6 = -6$

Pero si se da a y un valor distinto de 2 ó 3, la igualdad no se verifica.

Tabla 8. Secuencia del lenguaje verbal al planteamiento de ecuaciones.

Escriba las siguientes ecuaciones con una incógnita.

| EXPRESIÓN ESCRITA | ECUACION QUE SIMBOLIZA LA EXPRESION ESCRITA |
|---|--|
| La suma de tres números consecutivos es 20 | $x + (x + 1)(x + 2) = 20$ |
| La suma de dos números impares consecutivos es 18 | $(2x + 1) + (2x + 3) = 18$ |
| La suma de dos números pares consecutivos es 26 | $2x + (2x + 2) + (2x + 4) = 26$ |
| Un número más su séptima parte es 18 | $x + \frac{x}{7} = 18$ |
| La suma de dos números consecutivos es 16 | $x + (x + 1) = 16$ |
| La suma de tres números consecutivos es 20 | $x + (x + 1) + (x + 2) = 20$ |
| La suma de cuatro números consecutivos es 42 | $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 42$ |
| La suma de dos números impares consecutivos es 18 | $(2x + 1) + (2x + 3) = 18$ |
| La suma de tres números pares consecutivos es 26 | $2x + (2x + 2) + (2x + 4) = 26$ |
| La suma de tres múltiplos de 3 consecutivos es 84 | $3x + 3(x + 1) + 3(x + 2) = 84$ |
| La suma de tres múltiplos de 5 consecutivos es 115 | $5x + 5(x + 1) + 5(x + 2) = 115$ |

La suma de cuatro números proporcionales a 2 $2x + 3x + 4x + 5x = 54$
, 3, 4 y 5 es 54

La suma de cuatro números inversamente $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 345$
proporcionales a
2, 3, 4 y 5 es 345

- Una vez finalizada la actividad anterior cada equipo de trabajo analizara los ejemplos que se presentan a continuación sobre “como plantear ecuaciones”. A partir de este análisis cada equipo elige una de las 5 situaciones problema escogidas al inicio y le plantearan la ecuación correspondiente. Luego cada equipo socializa el problema con su ecuación correspondiente y con el criterio del docente definen si la ecuación está bien planteada, en caso de no estarlo realizan las correcciones pertinentes con el apoyo del docente.

Ejemplos. Como plantear ecuaciones.

Ejemplo 1.

Expresar algebraicamente que las edades de Johan y Esteban sin conocerlas suman 84 años

Soluciones:

Primera opción

Como no se conoce el valor de las edades, se puede asignar a la letra x la cantidad de años que tiene Johan y a y la cantidad de años que tiene Esteban.

Al simbolizar con las letras x y y las edades de Johan y Esteban ya se puede simbolizar algebraicamente lo que pide el problema así:

$$x + y = 84$$

Segunda opción.

1. Se le asigna a la letra x la cantidad de años que tiene Juan
2. Si las edades de Juan y Esteban suman 84 años, y la edad de Juan es x años, entonces:

$$x + \text{edad de Esteban} = 84 \text{ años}$$

3. Si $x + \text{edad de Esteban} = 84 \text{ años}$, entonces:

$$\text{edad de Esteban} = 84 - x$$

4. Finalmente teniendo definidas las edades de Juan y Esteban, algebraicamente el problema queda expresado así:

$$x + 84 - x = 84$$

Tercera opción.

1. Se le asigna a la letra x la cantidad de años que tiene Esteban
2. Si las edades de Juan y Esteban suman 84 años, y la edad de Esteban es x años, entonces:

$$x + \text{edad de Juan} = 84 \text{ años}$$

3. Si $x + \text{edad de Juan} = 84 \text{ años}$, entonces:

$$\text{edad de Juan} = 84 - x$$

4. Finalmente teniendo definidas las edades de Juan y Esteban, algebraicamente el problema queda expresado así:

$$x + 84 - x = 84$$

Ejemplo 2.

Diofanto vivió en Alejandría en algún momento comprendido entre los siglos I y III de nuestra era. De su vida personal solo se conoce el siguiente acertijo. Recogido de una colección griega de rompecabezas y que, según se cuenta, se grabó en su tumba:

Dios condescendió a que fuera un muchacho durante un sexto de su vida; cuando se añadió un duodécimo, sus mejillas adquirieron barba; Él le encendió la luz del matrimonio después de un séptimo, y en el quinto año después de su enlace, Él le concedió un hijo. Pero ¡ay! siendo un niño débil y de concepción tardía, cuando alcanzo la edad de la mitad de la vida de su padre la gélida tumba lo acogió. Después de consolar la pena con la ciencia de los números durante cuatro años, llegó al final de su vida.

Las palabras quizá no sean tanto una descripción detallada de las circunstancias familiares de Diofanto como un tributo al hombre cuya innovadora notación aportó nuevos métodos para solucionar problemas como el anterior. La capacidad de expresar enunciados matemáticos con claridad, carentes de verbosidad confusa, abrió la puerta a nuevas técnicas.

Haciendo un análisis general del epitafio de Diofanto, esta pregunta ¿Cuánto años tenía cuando murió?, si se traduce el enunciado, y la edad de su muerte se representa con la letra x , el epitafio dice que fue un muchacho durante $\frac{x}{6}$ años, que pasaron otros $\frac{x}{12}$ años antes de que le brotara pelo en la cara, y que se casó después de transcurridos otros $\frac{x}{7}$ años. 5 años más tarde tuvo un hijo, que vivió $\frac{x}{2}$ años, y cuatro años después expiro su último aliento. La suma de todos estos intervalos de tiempo es igual al número de años que vivió Diofanto, es decir x .

Por tanto la ecuación que se obtiene es:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

x → Representa los años que vivió Diofanto

$\frac{x}{6}$ → Representa los años que vivió Diofanto divididos entre 6

$\frac{x}{12}$ → Representa los años que vivió Diofanto divididos entre 12

$\frac{x}{7}$ → Representa los años que vivió Diofanto divididos entre 7

$\frac{x}{2}$ → Representa los años que vivió Diofanto divididos entre 2

7.3.5. Aplicación de algoritmos y resolución de problemas.

Objetivos.

1. Aplicar los algoritmos que se emplean para la solución de ecuaciones lineales con una incógnita
2. Resolver problemas haciendo uso de ecuaciones

Descripción de las actividades.

1. Explicación del docente de los algoritmos que se emplean para resolver ecuaciones lineales. Par la explicación el docente puede apoyarse en el siguiente texto:

Como resolver ecuaciones.

Raíces o soluciones.

Las raíces o soluciones de una ecuación son los valores de las incógnitas que verifican o satisfacen la ecuación, es decir, que sustituidas en lugar de las incógnitas, convierten la ecuación en identidad.

Ejemplo:

En la ecuación $5x - 6 = 3x + 8$ la raíz es 7 porque haciendo $x = 7$ se tiene:

$5 \cdot 7 - 6 = 3 \cdot 7 + 8$ ó sea $29 = 29$ donde se aprecia que 7 satisface la ecuación.

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita tienen una sola raíz.

Resolver una ecuación es hallar sus raíces, o sea el valor o los valores de las incógnitas que satisfacen la ecuación

Axioma fundamental de las ecuaciones: si con cantidades iguales se verifican operaciones iguales los resultados serán iguales.

Reglas que se derivan de este axioma:

1. Si a los dos miembros de una ecuación se suma una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.
2. Si a los dos miembros de una ecuación se resta una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.
3. Si a los dos miembros de una ecuación se multiplican por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.
4. Si a los dos miembros de una ecuación se dividen por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.
5. Si a los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia, o si a los dos miembros se extrae una misma raíz, la igualdad subsiste.

La transposición de términos: la transposición de términos consiste en cambiar los términos de una ecuación de un miembro al otro.

Ejemplo:

1. Sea la ecuación $5x = 2a - b$

Si se suma b a los dos miembros de esta ecuación, la igualdad subsiste (regla 1), y se tendrá:

$5x + b = 2a - b + b$ y como $-b + b = 0$, queda $5x + b = 2a$, donde ve $-b$, que estaba en el segundo miembro de la ecuación dada pasa al primer miembro con signo $+$.

2. Sea la ecuación $3x + b = 2a$

Restando b a los dos miembros de esta ecuación, la igualdad subsiste

(Regla 2), y se tiene:

$3x + b - b = 2a - b$ y como $b - b = 0$, queda $3x = 2a - b$, donde $+b$ que estaba en el primer miembro de la ecuación dada, pasa al segundo miembro con signo $-$

Términos iguales con signos iguales en distinto miembro de una ecuación, pueden suprimirse:

Ejemplos:

1. En la ecuación $x + b = 2a + b$ el término b con signo $+$ en los dos miembros. Este término puede suprimirse, quedando $x = 2a$ porque equivale a restar b a los dos miembros.

2. En la ecuación $5x - x^2 = 4x - x^2 + 5$, está el término x^2 con signo $-$ en los dos miembros. Este se puede suprimir, obteniéndose $5x = 4x + 5$ porque equivale a sumar x^2 a los dos miembros.

Cambio de signos: los signos de todos los términos de una ecuación se pueden cambiar sin que la ecuación varíe, esto puede hacerse multiplicando los dos miembros de la ecuación por -1 , con lo cual la igualdad no varía. (Regla 3).

Ejemplo:

En la ecuación $-2x - 3 = x - 15$, al multiplicar ambos miembros por -1 todos los términos de cada miembro, se tiene:

$2x + 3 = -x + 15$, que es la ecuación dada pero con los signos de todos sus términos cambiados.

Explicación del docente sobre la metodología seguida por Polya para resolver problemas. Para la explicación puede apoyarse en el siguiente texto el cual presenta 4 ejemplos resueltos con esta metodología.

Metodología de Polya para Resolver Problemas.

La resolución de problemas debe llevar a que el alumno sea un ser creativo, que invente nuevos problemas y posibles soluciones que no hayan sido exploradas. Para Polya resolver problemas es una cuestión de habilidad práctica, como por ejemplo: nadar. La habilidad práctica se adquiere mediante la imitación y la acción, al tratar de nadar se imita los movimientos de pies y manos que hacen las personas que logran así mantenerse a flote, y finalmente se aprende a nadar practicando la natación. El profesor que desee desarrollar en sus alumnos la actitud para resolver problemas, debe motivar y despertar el interés facilitando el mayor número posible de ocasiones de imitación y práctica. Si el maestro quiere desarrollar en sus alumnos proceso mental que corresponde a las preguntas y sugerencias anteriores, deben emplearse tantas veces como vengan al caso de un modo natural. Cuando el maestro resuelve un problema ante la clase debe dramatizar un poco sus ideas y emplear las preguntas claves. El alumno descubre, sin duda, la manera de utilizar las preguntas y sugerencias adquiriendo conocimientos más importantes que los de un simple hecho matemático.

De acuerdo con Polya, es tonto contestar a una pregunta que no se comprende, es deplorable trabajar con un fin que no se desea, sin embargo, tales errores se cometen con frecuencia. Se deben escoger problemas adecuados, ni muy fáciles, ni muy difíciles, y debe dedicarse un cierto tiempo a exponerse de un modo natural e interesante. El enunciado verbal debe comprenderse, el alumno debe separar las principales partes del problema: incógnita, datos y condición. A continuación se analizan los siguientes problemas sobre ecuaciones lineales, utilizando las cuatro reglas de oro de Polya:

Problema 1.

La cabeza de un pez mide 10 cm, la cola es tan larga como la cabeza más la mitad de su tronco, el tronco es tan largo como la cabeza y la cola juntas. ¿Cuánto mide el pez?

Los conceptos básicos para que el estudiante resuelva este problema es el de ecuaciones de primer grado. Para hacer interesante el problema, puede pensarse que el cuerpo del pez consta de tres partes, en su orden: cabeza, tronco y cola, que la suma de las medidas de cada parte del cuerpo será la medida total del pez, y de menor a mayor de acuerdo con el tamaño de las partes, se tiene la cabeza, la cola y el tronco. El pez en mención es uno de la dimensión de un salmón puesto que su cabeza tiene un promedio aproximado de 10 cm.

Comprensión del problema.

Los datos del problema son la medida de la cabeza **10 cm**, el tronco y la cola del pez. La incógnita es un número que represente la medida del pez. Las condiciones del problema son las siguientes: La cola es tan larga como la cabeza más medio tronco. El tronco es tan largo como la cabeza y la cola juntas. Conocidas las relaciones anteriores entre las partes del cuerpo, se pregunta por la medida total del pez.

Concepción de un Plan.

La idea que permite concebir el plan es pensar que la medida del pez es la suma de las medidas de las partes del cuerpo del pez $p = x + y + z$. Para reducir el problema a otro más sencillo, podría ser uno con la misma incógnita y las mismas relaciones entre las partes del cuerpo, en este caso se conocerían las medidas de la cabeza y el tronco, respectivamente **10 cm y 60 cm**.

Medio tronco es **30 cm**, luego la cola mediría **40 cm** (la medida de la cabeza más medio tronco).

Sumando las partes **10 cm + 60 cm + 40 cm = 110 cm**, que es un pez bastante grande.

Regresando al problema original, se tomará una notación adecuada, sea **x** la cabeza, **y** el tronco y **z** la cola del pez. Las relaciones entre las partes del pez son:

$$x = 10 \text{ cm}$$

$$z = 10 \text{ cm} + \frac{y}{2} \text{ la cabeza medio tronco}$$

$$y = 10 \text{ cm} + z \text{ la cabeza y la cola juntas}$$

De esta manera, la condición es suficiente y necesaria para resolver el problema.

c. Ejecución del Plan.

$$x = 10 \text{ cm}$$

$$z = 10 \text{ cm} + \frac{y}{2} \rightarrow \text{ecuación 1}$$

$$y = 10 \text{ cm} + z \rightarrow \text{ecuación (2)}$$

Se presenta una incógnita en términos de la otra de la siguiente manera: reemplazando **1** en **(2)** para obtener **3**

$$z = 10 \text{ cm} + \frac{y}{2}$$

$$y = 10 \text{ cm} + z \rightarrow y = 10 \text{ cm} + 10 \text{ cm} + \frac{y}{2} \rightarrow y = 20 \text{ cm} + \frac{y}{2}$$

$$y = 20 \text{ cm} + \frac{y}{2} \rightarrow \text{ecuacion 3}$$

Despejando de **3** y , se tiene que $y = 40 \text{ cm}$

Remplazando el valor de y en la ecuación $z = 10 \text{ cm} + \frac{y}{2}$, se obtiene $z = 30 \text{ cm}$

El pez mide $p = x + y + z$, luego $p = 10 + 40 + 30 = 80$

Visión Retrospectiva.

La solución del problema es consistente con las condiciones del problema.

$$Z = 10 + Y/2 \text{ (Cola = Cabeza + medio tronco)}$$

$$30 = 10 + 40/2$$

$$Y = 10 + Z$$

$$40 = 10 + 30$$

Problema 2.

Tengo un criadero de pollos y conejos. En el criadero hay un total de 76 ojos y 124 patas,

¿Cuántos pollos y conejos tengo en el criadero?

Comprensión del Problema.

Los datos del problema son: 76 ojos y 124 patas que representan el número de ojos y de patas respectivamente. La incógnita son dos números que expresan la cantidad de pollos y la cantidad

de conejos. El problema tiene dos condiciones: una expresa que entre pollos y conejos se tienen 76 ojos en un criadero y la otra es que hay 124 patas entre todos los animales del criadero.

Para hacer este problema interesante, hay que tener en cuenta que cada pollo en condiciones normales tiene *2 ojos y 2 patas*, pero cada conejo también en condiciones normales *tiene 2 ojos y 4 patas* para moverse.

Concepción de un Plan.

La idea que permite concebir el plan es pensar que cada animal posee 2 ojos, cada pollo posee 2 patas y cada conejo posee 4 patas. Supóngase que en mi criadero tenga 10 pollos y 20 conejos. Por parte de los pollos se obtienen 20 ojos y 20 patas, mientras que de parte de los conejos se obtienen 40 ojos y 80 patas. Si se suma el total de ojos y de patas, existen 60 ojos y 100 patas. Pueden suponerse más cantidades de pollos y más cantidades de conejos para coincidir con el problema en mención.

Sean m la cantidad de pollos, y n la cantidad de conejos. Cada pollo tiene 2 ojos, la cantidad total de ojos de pollo es $2m$. Cada pollo tiene 2 patas, la cantidad total de patas de pollo es $2m$.

Cada conejo tiene 2 ojos, la cantidad total de ojos de conejo es $2n$. Cada conejo tiene 4 patas, el número total de patas de conejo es $4n$. Se obtienen entonces las relaciones:

$$2m + 2n = 76 \quad \text{y} \quad 2m + 4n = 124$$

Ejecución del Plan.

$2m + 2n = 76$ (1) el número total de ojos entre pollos y conejos es 76

$2m + 4n = 124$ (2) el número total de patas entre pollos y conejos es 124

Se resta la ecuación (1) de (2) y se obtiene $n = 24$.

Este valor se reemplaza en la ecuación (1), y se obtiene $m = 14$.

En el criadero existen 14 *pollos* y 24 *conejos*.

Visión Retrospectiva.

Si existen en el criadero 14 *pollos* y 24 *conejos* pueden deducirse que por parte de los pollos existen 28 *ojos* y 28 *patas*, y por parte de los conejos existen 48 *ojos* y 96 *patas*.

Si se suma el total de los ojos se obtienen 76 *ojos* y un total de 124 *patas*. Se debe tener en cuenta que todo animal en condiciones normales tiene solo dos ojos, dos o cuatro patas a excepción de los peces y algunos insectos.

Cuando $m = 14$ y $n = 24$ se cumplen las igualdades:

$$2m + 2n = 76 \quad \text{y} \quad 2m + 4n = 124.$$

Problema 3.

Un ladrillo está en equilibrio en una balanza con $\frac{3}{4}$ de ladrillo y una pesa de $\frac{3}{4}$ libra. ¿Cuánto pesa el ladrillo?

Comprensión del problema.

Los datos del problema son: el ladrillo, $\frac{3}{4}$ de ladrillo, una pesa de $\frac{3}{4}$ de libra. La incógnita es un número que expresa el peso del ladrillo. La condición es que un ladrillo está en equilibrio con $\frac{3}{4}$

de él mismo, más una pesa de $\frac{3}{4}$ de libra. Un ladrillo normalmente pesa más que una libra, tómese la notación adecuada.

Sea x el peso del ladrillo, Y una libra.

Concepción de un plan.

La idea que permite concebir el plan es pensar que un ladrillo pesa $\frac{3}{4}$ de ladrillo más $\frac{1}{4}$ de ladrillo.

Es decir, $x = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}x$

La condición del p $x = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}y$

Ejecución del plan.

Las dos ecuaciones anteriores son equivalentes a la única ecuación:

$$\frac{1}{4}x = \frac{3}{4}y \quad \text{O sea} \quad x = 3y$$

Esto significa que cada ladrillo pesa 3 libras.

Visión Retrospectiva.

Si $x = 3y$ se cumple la igualdad en:

$$x = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}y$$

De donde finalmente se obtiene que: $3y = 3y$

2. Con base en los puntos anteriores los estudiantes en los equipos conformados resuelven los cinco problemas elegidos. Estos problemas deben ser entregados por escrito al docente.

7.3.6. Evaluación de la unidad didáctica.

El docente evaluara de manera constante el trabajo de los estudiantes tanto en el aula como fuera de ella.

Para evaluar el trabajo en el aula puede utilizar como estrategia la observación directa mediante la cual pueda valorar aspectos de las clases tales como: participación, progreso del aprendizaje, trabajo en equipo y comportamiento.

Para evaluar el trabajo fuera del aula utilizara como estrategia la elaboración de tareas. Se sugiere que estas una vez sean recibidas por el docente, este haga una serie de preguntas aleatorias para establecer quienes hicieron la tarea y quienes la copiaron.

Para determinar el nivel de aprehensión de los conceptos sobre el tema ecuación lineal.

Es fundamental que el docente:

1. valore el trabajo presentado por cada equipo de los 5 problemas
2. Aplique una prueba escrita en la que cada estudiante resuelva de manera individual una o dos situaciones problema.

8. Conclusiones y Recomendaciones.

8.1. Conclusiones.

- Las ecuaciones lineales permiten el paso de la aritmética al álgebra, razón por la que es fundamental que los estudiantes alcancen aprendizajes significativos en relación a esta parte de la matemática.
- La enseñanza de las ecuaciones lineales se ha caracterizado por el mayor énfasis que se hace en la parte algorítmica, esta práctica da como resultado el que los estudiantes alcancen aprendizajes memorísticos que rápidamente son olvidados y como consecuencia el aprendizaje adquirido tiene poca aplicabilidad en la cotidianidad.
- La enseñanza de las ecuaciones lineales mediada por las situaciones problema es una alternativa que puede posibilitar la motivación y el aprendizaje significativo en los estudiantes.
- La enseñanza mediante situaciones problema puede ser aplicada no solo en la enseñanza de la matemática sino también en otras áreas del conocimiento.
- Es fundamental que en los procesos de enseñanza aprendizaje la comunicación entre estudiante – docente y entre estudiante – estudiante, sea efectiva y tenga lugar en un ambiente de confianza de manera que se pueda posibilitar el trabajo en equipo y el trabajo colaborativo.

- El docente debe crear ambientes de aprendizaje tranquilos en los que el estudiante se sienta motivado para el aprendizaje.

8.2. Recomendaciones.

- Se espera que la siguiente propuesta pueda ser usada en la enseñanza de las ecuaciones lineales con el fin de evaluar sus alcances.

- De igual manera, sería deseable la continuidad del trabajo aquí propuesto, a través del diseño de secuencias didácticas que permitan la enseñanza de diferentes temáticas en el área de matemáticas.

- También se espera que este trabajo pueda motivar a los docentes a buscar diferentes alternativas que permitan mejorar sus procesos de enseñanza.

9. Anexos.**Anexo 1. Prueba diagnostica****MAESTRIA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES****UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA****LAS SITUACIONES PROBLEMA MEDIADORAS DE APRENDIZAJES****SIGNIFICATIVOS DE LA ECUACIÓN LINEAL****INSTITUCION EDUCATIVA CIUDAD DON BOSCO**

PRUEBA DIAGNOSTICA

TEMA: ecuaciones lineales

Nombre del estudiante: _____

Grado: _____ Fecha de aplicación: _____

Docente: Falner Guerra

Presentación: *la siguiente prueba tiene como finalidad medir los conocimientos que usted tiene en relación al tema de la ecuación lineal, por eso es muy importante resolverla con la mayor seriedad posible.*

1. Identificar cuáles de las siguientes expresiones son ecuaciones y cuáles no. Justifique su respuesta.

a. $3x \in 8$ si ____; no ____ . ¿Por qué? _____

b. $3x \neq -9$ **si** ____; **no** ____ . ¿Por qué? _____

c. $3x = -7$ **si** ____; **no** ____ . ¿Por qué? _____

d. $3x \leq 9$ **si** ____; **no** ____ . ¿Por qué? _____

e. $3x + 7 = 15$ **si** ____; **no** ____ . ¿Por qué? _____

2. En el siguiente ejercicio cada ecuación corresponde a un enunciado. Dentro del paréntesis asigne la letra que corresponde a la ecuación.

a. $x + 8 = 24$

b. $x - 8 = 24$

c. $8x = 24$

d. $x \div 8 = 24$

e. $8 \div x = 24$

- Andrés es 8 años mayor que Liliana. ¿Cuál es la edad de Andrés si Liliana tiene 24 años?

Ecuación (_____)

- Sara tiene 8 libros menos que Juan. Si Juan tiene 24 libros. ¿Cuántos libros tiene Sara?

Ecuación (_____)

- El profesor de artística dividió un rollo de pita entre 8 estudiantes. Cada estudiante recibió 24 centímetros de pita. ¿Cuántos centímetros tenía el rollo?

Ecuación (_____)

- Durante el mes de agosto cayeron 24 centímetros cúbicos de lluvia, este valor es 8 veces la cantidad que cayó en marzo. ¿Cuánta lluvia cayó en marzo?

Ecuación (_____)

En las preguntas 3, 4, 5 y 6 marque con una x la respuesta que considere correcta.

3. Resolver una ecuación significa:

- a. Hallar cualquier valor para la incógnita
- b. Hallar dos valores positivos y dos valores negativos para la incógnita
- c. Hallar el valor o los valores de la incógnita para que se conserve la igualdad
- d. Hallar un valor para la incógnita que no conserve la igualdad

4. Al despejar h en la expresión $A = \frac{b \cdot h}{2}$ se obtiene:

a. $h = \frac{b}{2A}$ **b.** $h = \frac{A}{2b}$ **c.** $h = \frac{A}{b}$ **d.** $h = \frac{2A}{b}$

5. Al resolver la ecuación $12x - 2 - x = 102$ se obtiene como solución:

a. $x = -9$ **b.** $x = 9$ **c.** $x = 8$ **d.** $x = -8$

6. El miércoles estuvieron ausentes algunos estudiantes de octavo. 37 de los 43 estudiantes asistieron.

La ecuación que se debe escoger para calcular el número de estudiantes que faltaron es:

- a. $y - 37 = 43$
- b. $y + 37 = 43$
- c. $y - 43 = 37$
- d. $y + 43 = 37$
7. ¿La expresión $x + 24 = 8$, tiene solución en el conjunto de los números naturales?

si ____ . no ____ . ¿Por qué? : _____

8. En una granja se crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas son 50, si se cuentan las patas son 134. ¿Cuántas gallinas y cuantos conejos hay? Escriba las ecuaciones (modelo matemático) que interpretan la situación.

Solución:

9. Se aplica un test de 23 preguntas a los estudiantes del grado noveno con preguntas de matemáticas. Por cada pregunta contestada correctamente se asignan 5 puntos y por cada pregunta contestada de forma incorrecta se quitan 2 puntos. Un estudiante obtuvo en total 94 puntos. ¿Cuántas preguntas respondió correctamente?

Solución:

10. Cree una situación que se acomode al modelo que presenta la ecuación $2x + 15 = 45$

10. Bibliografía.

- Diagnóstico de matemáticas en Antioquia.* (2012). Recuperado el 15 de septiembre de 2013, de http://antioquia.gov.co/PDF2/Diagnostico_matematicas_en_Antioquia.pdf
- Álvarez, C. Á. (Junio de 2012). *Gazeta de Antropología.* Recuperado el 7 de junio de 2013, de La elección del estudio de caso en investigación educativa.
- Baldor, A. (1983). *Álgebra elemental.* Madrid: Mediterraneo.
- Barrantes, H. (2006). Resolución de Problemas el trabajo de Allan Schoenfeld. *Resolución de Problemas el trabajo de Allan Schoenfeld* (págs. 1 - 9). Madrigal: Seminario Teórico.
- Bellos, A. (2011). *Alex en el país de los números.* D"vinni S.A.
- Betancur, O. M. (1997). *Criterios y Estrategias para la enseñanza de las matemáticas.* Santafé de Bogotá. DC.: Impreandes S.A.
- Boyer, C. B. (1994). *Historia de la matemática.* Alianza Universidad de Textos.
- Domenéch, F. J. (2002). *Universidad Jaume I de Castellón. Revista Docencia N°16. Reflexiones pedagógicas.* Recuperado el 2 de Septiembre de 2013, de <http://revistadocencia.cl/pdf/16web/2.%20Reflexiones%20Pedagogicas/Francisco%20Garc%EDa%20Baceti%20y%20Fernando%20D....pdf>
- Fortaleza, J. L. (2003). Ciencias Físicas en primaria y secundaria modelo y ejemplificaciones. En J. L. Fortaleza, *Ciencias Físicas en primaria y secundaria modelo y ejemplificaciones* (pág. 17 a 30). Madrid: CCS.
- Guzman, M. d. (1993). *Organizacion de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura.* Recuperado el 8 de Octubre de 2013, de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática: <http://www.oei.es/oeivirt/edumat.htm>
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares - Matemáticas.* Santafé de Bogotá.DC: Delfín Ltda.
- MEN. (2006). *Estandares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Santafé de Bogotá. DC.: Imprenta Nacional de Colombia.
- Moreira, M. A. (1983). *Instituto de Física da UFRGS.* Recuperado el 17 de Octubre de 2013, de <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/visionclassicavisioncritica.pdf>
- (1983). La teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel. En M. A. Moreira, *Material adaptado del capítulo 2 del libro Uma abordagem cognitivista ao ensino da física* (págs. 18 - 54). Porto Alegre: Editora da Universidade.

- Pérez, M. A. (2010). *Concepciones y enseñanza del concepto de ecuación lineal. Un estudio con profesores de bachillerato*. Recuperado el Septiembre de 2013, de http://www.matematicas.uady.mx/dme/docs/tesis/Tesis_MarioCaballero.pdf
- Planas, Á. A. (2008). *Matemática Inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible*. España: NARCEA, S.A. DE EDICIONES.
- Polya, G. (1978). *Como plantear y resolver problemas - How to solve it*. México: Trillas S.A.
- Said, J. H. (2004). Recuperado el 17 de Octubre de 2013, de Resolución de problemas matemáticos: <http://ommcolima.uco.edu/guias/TallerdeResolucionproblemas.pdf>
- Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones morata S.L.
- Vargas, L. S. (2011). *Universidad Interamericana de Puerto Rico*. Recuperado el 22 de octubre de 2013, de <http://cremc.ponce.inter.edu/360/revista360/matematica/Lina%20Llanos-%20Algebra.pdf>
- Vega, A. V.-M. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar*. España: NARCEA, S.A. DE EDICIONES.
- Vera, F. (1943). *Historia de las ideas matemáticas*. Bogotá: Editorial centro S:A.