de Cervantes).

En estos dos aspectos hay dos textos de obligada referencia. Uno es "Elementos de historia de la matemática" de N. Bourbaki y el otro es "La lógica del sentido" de G. Deleuze. Este último texto nos remite inmediatamente a L. Carroll, uno de cuyos textos reproduciremos en este trabajo.

2-. EL LENGUAJE FORMAL DE LA TEORIA DE CONJUNTOS:

De nuevo aquí se debe hacer más patente la relación entre el lenguaje formal y la lógica, la lógica que desde el tiempo de los griegos ha sido la base para lo que usualmente se llama una demostración en matemáticas. Sería importante hacer también un análisis de los problemas del formalismo lógico, pero esto está fuera de nuestro objetivo en este trabajo. No obstante, como problema importante debe, al menos, ser mencionado.

Para un estudio crítico al respecto, nos remitimos a Stephen C. Kleene ("Introducción a la metamatemática", ed. Tecnos), a O.Quine ("Lógica matemática", ediciones de la Revista de Occidente) y a N. Bourbaki ("los elementos de la historia de la matemática" y "teoría de Conjuntos").

Sin discutir pues la posibilidad de formalizar una teoría, veremos como Eisembreg encara la construcción del lenguaje formal, haciendo unas cuantas observaciones al respecto y añadiendo algunos comentarios ilustrativos.

Un primer punto es el referente al METALENGUAJE el cual es, según Eisemberg, el lenguaje que describe o estudia otro lenguaje. En igual relación estaría una METATEORIA respecto de una teoría. Es importante señalar aquí lo que desde Hilbert se hace manifiesto: una formalización estricta de una teoría conlleva la total abstracción del significado de la teoría objeto.
Como ejemplo de una tal abstracción podemos citar el siguiente:

Ejemplo de una teoría:

Alfabeto:

Está formado por los siguientes símbolos:

1) r y P con subíndices

2) Δ "determina" , (,)

Términos y fórmulas:

1) las letras son términos

2) Si P1, P2 y r son letras distintas, (P1, P2)Δr es una fórmula.

Axiomas y teoremas:

A1. Existe un solo r tal que (P1, P2)Δr

Definición 1: Si (P1, P2)Δr se dice que P1 y P2 están en r, o también que r pasa por P1 y P2.

A2. Existe por lo menos un P

A3. Dado un r, existen al menos dos P distintas que están en r.

A4. Dado un P, existen al menos dos r que pasan por P.

Teorema 1:

Existen por lo menos tres P distintas.

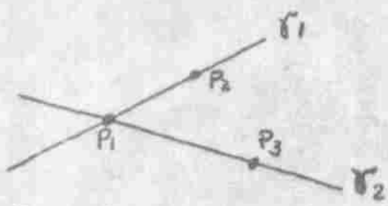
Dm.

Por A2. existe por lo menos un P. Sea P1. Por A4. existen dos r distintas, sean r1 y r2 que pasan por P1. Por A3. existen en r1 al menos dos P distintas, o sea que existe un P2 diferente de P1 tal que (P1,P2)Δr1 y en r2 existen dos P distintas, o sea que existe P3 diferente de P1 tal que (P1, P3)Δr2.

Por A1., como r1 es diferente de r2, entonces P2 es diferente de P3. Luego existen al menos tres P diferentes, P1, P2, P3.

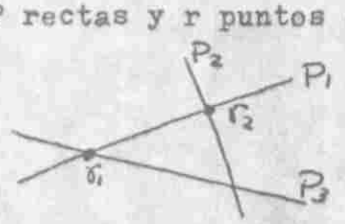
Interpretación 1: P puntos y r rectas de la geometría del espacio.

Ilustración:



Interpretación 2: P rectas y r puntos de la geometría del espacio.

Ilustración:

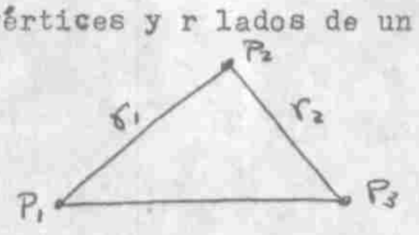


Interpretación 3 y 4: Igual que 1 y 2 en el plano.

Nota1: No se puede dar en la geometría de la recta pues no se cumple A4.

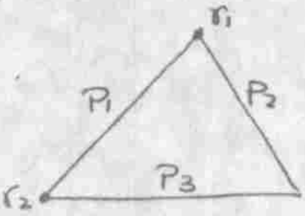
Interpretación 5: P vértices y r lados de un triángulo.

Ilustración:



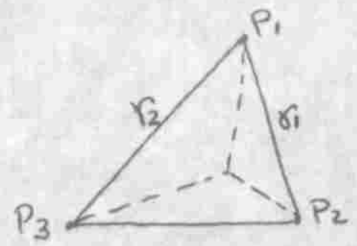
Interpretación 6 : P lados y r vértices de un triángulo.

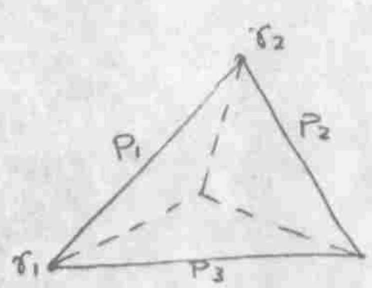
Ilustración:



Interpretación 7 y 8: P y r vértices y aristas (aristas y vértices) de un tetraedro.

Ilustración:





Interpretación 9: P sean los elementos a, b, c y r los conjuntos (a,b) (b,c) y (c,a)

Ilustración: P1 es a, P2 es b, P3 es c
r1 es (a,b), r2 es (c,a)

Como puede notarse, no interesó el significado de P1, P2 y r para la construcción de la teoría.

La metateoría sería la descripción e investigación de las propiedades del sistema formal particular de la teoría objeto.

Aquí nos parece pertinente transcribir del libro de Kleene "Introducción a la metamatemática" lo siguiente:

"Desde el punto de vista de la metateoría, la teoría objeto no es, en rigor, una teoría tal y como primeramente entendimos el término, sino un sistema de objetos desprovistos de significado, semejantes a las posiciones de un juego de ajedrez y sujetos a manipulaciones mecánicas que se asemejan, por su parte, a los movimientos en dicho juego. La teoría objeto es descrita y estudiada como un sistema de símbolos y objetos construídos a base de símbolos. Los símbolos son considerados, simplemente, como tipos varios de objetos susceptibles de ser reconocidos. Para fijar nuestras ideas podemos imaginarlos, concretamente, como marcas sobre el papel; o, por decirlo de un modo más preciso, en cuanto abstraídos de nuestra experiencia con símbolos como marcas sobre el papel. (La teoría de la demostración ha de ser, en cierta medida, abstracta, puesto que supone la construibilidad de secuencias de símbolos arbitrariamente largas, aun cuando la cantidad de papel y tinta en el mundo es finita). Los restantes objetos del sistema son analizados únicamente en lo que se refiere al modo de su composición a base de símbolos. Por definición, esto es todo lo que constituirá a un sistema formal en objeto de estudio de la metamatemática.". (1)

Para una mayor información se remite al texto citado, capítulos III y IV.

En cuanto a las varias reglas que especifican el lenguaje formal, se podrían unificar en: los signos específicos, de igualdad (=) y de pertenencia (∈), que ya son signos que no toda teoría lógica tiene, pues son específicos de las teorías igualitarias de predicado y de la teoría de conjuntos respectivamente. (Cfr. "Description de la mathematique formelle" de N. Bourbaki).

Otro aspecto que se debe mencionar es el de los signos de puntuación, los cuales, si bien tienen el efecto de hacer más expedita la lectura, no son absolutamente indispensable en el lenguaje formal. En efecto, varias formalizaciones presentan formas que hacen innecesario el uso de todo tipo de signos de puntuación.

En el uso de las comillas simples, para designar el nombre de agregados, es decir, para lograr hacer una distinción entre los objetos y sus nombres, creemos que hay alguna confusión en el texto y que la cita de Carroll, muy bella y oportuna, puede no ser suficientemente aclaratoria, sobre todo para lectores que no ten

gan mucha experiencia con el idioma inglés. La traducción literal del texto, en este punto, es: " Cualquier sucesión de símbolos de el lenguaje formal, escritos unos después de otros, se dirá que es un agregado. Un agregado puede consistir en un solo símbolo. Así 'x', '$\in$' y '$x\in X$' son agregados. .
En la frase presente se hizo mención a tres agregados especificos. Pero un agregado individual es una expresión del lenguaje formal, no una expresión en el metalenguaje. Por lo tanto, tenemos que usar los nombres de los tres agregados y no los tres agregados mismos. Esto se hizo de acuerdo con la siguiente convención:
En el metalenguaje, los nombres de los agregado del lenguaje formal se forman con el uso de comillas simples. Los agregados de un símbolo $\neg$, $\vee$, $\forall$, $\subset$, $=$, $\in$, $($, $)$ que no son letras pueden usarse como nombres ellos mismos.".

Hasta aquí la traducción en lo pertinente a las comillas simples. Luego, dice de la importancia de esta distinción, remite a Quine y Suppes y transcribe la poesía de Carroll, cuya traducción intentamos:

"El nombre de la canción se llama 'ojos de salmón'",
(dijo el caballo blanco).
"Oh!, de veras, ese es el nombre de la canción? dijo Alicia,
  tratando de parecer interesada.
"No, usted no entendió", dijo el caballo blanco,
mostrándose un poco enfadado. "Así es como el nombre sellama.
El nombre realmente es 'El viejo viejísimo'.
"Entonces yo debería haber dicho "así es como la
  canción se llama". Se corrigió Alicia.
" No usted no debería:esto es
  algo muy distinto! La canción se llama
'caminos y medios': pero esto sólo es como ella se llama, sabe ud.!
"Bien entonces que es la canción" dijo Alicia,
que estaba en el momento completamente
aturdida.
"Iba hacia alládijo el caballo.
La canción realmente es.... "Luego
dando el compás lentamente con una mano
él comenzó (a cantar)

Una primera obsrvación que hacemos es que la convención no se sigue muy rigurosamente, ni aún en el momento de enunciada. En efecto, el primer párrafo concerniente al tema habla del agregado '$\in$' y por la convención dada se debiera hablar del agregado $\in$.

Pero creemos también que la complicación de escrituras excesivamente rigurosas para dar cuenta de esta distinción entre los objetos y sus nombres puede ser evitada rápidamente, dado que en cada caso el contexto indicará de qué se trata con sólo tener un poco de cuidado en la escritura.

Es muy importante para la ilustración de este punto la referencia que hace el texto al libro de Quine "Lógica matemática", secciones 4 a 6. Como el texto es escaso, haremos algunas citas al respecto:

"En las obras sobre la lógica de los enunciados y también en otros estudios fundamentales de matemáticas, el no distinguir claramente entre un objeto y su nombre ha producido confusión y controversias. Ordinariamente, no hay que atribuir el fallo en mantener esta distinción a ninguna estrecha semejanza entre el objeto y el nombre, incluso si resulta que el objeto es a su vez un nombre, pues incluso la discriminación entre un nombre y otro es una operación visual de tipo elemental. La dificultad más bien proviene de que se olvida que un enunciado acerca de un objeto debe contener un nombre del objeto y no el objeto mismo. Si el objeto es un hombre o ciudad, circunstancias físicas impiden que se cometa el error de usar el objeto en lugar de su nombre. Sin embargo, cuando el objeto es un nombre u otra expresión, el error se comete fácilmente." (2)

El texto de Eisenberg procede luego a enunciar el uso de las metavariables, como caractéres que en un texto del metalenguaje permiten hacer afirmaciones sobre agregados cualquiera, es decir tal como si los agregados en cuestión pudieran ser escogidos libremente dentro del conjunto de todos los agregados posibles. Vale la pena hacer una ampliación de este punto citando a Quine en la introducción de su libro "Lógica matemática".

"Pero si dejamos el tema y llevamos nuestra atención sobre el vocabulario, es fácil trazar una distinción superficial entre las verdades de la lógica y los enunciados verdaderos de otras clases. Un enunciado lógicamente verdadero tiene la siguiente peculiaridad: las partículas básicas tales como 'es', 'no', 'y', 'o', 'a menos que', 'si', 'entonces', 'ni', 'algunos', 'todos', etc., aparecen en el enunciado en tal forma que este es verdadero con independencia de sus demás ingredientes. Así, considérese el clásico ejemplo:

Si todo hombre es mortal y Sócrates es un hombre, entonces Sócrates es mortal.

Este enunciado no sólo es verdadero, sino que, además, lo es independientemente de los componentes 'hombre', 'mortal' y 'Sócrates'. No hay alteración posible de estas palabras que pueda convertir ese enunciado en una falsedad. Cualquier otro enunciado de la forma:

Si todo-____ es____y____es un____ entonces____es____

es igualmente verdadero, con tal que se rellene de la misma manera el espacio primero y el cuarto, el segundo espacio y el último, y finalmente el tercero y el quinto." (3).

El texto usa para indicar las metavariables la letra imprenta negrilla. Con fines prácticos en la escritura cursiva, se sugiere indicar las metavariables con un punto sobre el nombre de la metavariable así: $\dot{P}$ ó no $\dot{P}$.

A continuación se entra en la definición de letras ligadas y libres, cuestión esta que por el momento no puede ser entendida a cabalidad, pero cuya importancia se pondrá de manifiesto en la definición de lo que se entenderá por demostración, y esto únicamente después del capítulo 3 en donde se dan los primeros casos de variables ligadas.

3-. TERMINOS Y FORMULAS:

En la parte final de este apartado se da una forma de omitir puntuación, haciendo uso de una pseudo-jerarquización de los caracteres lógicos de la siguiente manera: