"Se asigna a los signos lógicos y de la teoría de conjuntos una 'fuerza' creciente en el orden enumerado:

$$=, \in, \neg, \vee, \&, \Rightarrow, \Leftrightarrow \quad "$$

Nosotros consideramos que tal jerarquía no existe y que esta simplificación es más bien una fuente de confusión teórica. Es mejor, cuando haya lugar a confusión,usar los signos de puntuación.

4-. TEOREMAS Y AXIOMAS:

Este apartado se dedica a puntualizar la forma como se reconocerán las verdades de la teoría.

En cuanto a la definición de los axiomas, con sus dos tipos: los axiomas esquema y los axiomas explícitos, es bueno anotar como Bourbaki, definiendo aquí las constantes de una teoría como aquellas letras que aparecen en los axiomas explícitos de la teoría, no tiene necesidad de definir letras ligadas ni libres y puede hacer una sencilla presentación de lo que llama texto demostrativo (lo que Eisenberg llama deducción) sin ningún peligro de confusión. Este enfoque es posible, en esencia, por la forma como presenta los cuantificadores, forma muy elegante por cierto, pero algo difícil de capatar. Esto último es tal vez lo que puede mover a Eisenberg a adoptar otro camino. (Cfr. Bourbaki, E1 22 y E1 32).

La forma de obtener verdades de la teoría, a partir de otras verdades de la misma, lo cual Eisenberg llama deducción,es la que nos va a dar lugar a importantes observaciones y aclaraciones.

Traducimos los párrafos pertinentes:
"Sea C una fórmula y $\mathcal{A}$ una lista dada de fórmulas. Si C es el eslabón final de una lista $\mathcal{D}$ de fórmulas de tal manera conformada que todo eslabón S de $\mathcal{D}$ cumpla al menos una de las siguientes conclusiones:
(D1) S está en la lista $\mathcal{A}$
(D2) Antes que S hay dos eslabones de $\mathcal{D}$ de la forma R y R $\Rightarrow$ S.
Si además (y aquí aparece el problema) ninguna letra ligada en

C está libre en ninguna fórmula de $\mathcal{A}$, se dice que $\mathcal{D}$ es una deducción de C a partir de $\mathcal{A}$.

Nota 1. Se entiende que con toda lista $\mathcal{A}$ se pueden incorporar los axiomas de la teoría para servir como premisas en cualquier deducción.

Nota 2. La notación par indicar que de la lista $\mathcal{A}$ hay una deducción para C es $\mathcal{A} \vdash C$. Esto no quiere decir que todas las premisas de la deducción están en $\mathcal{A}$ puesto que además pueden haber axiomas.

Nota 3. Cuando hay una deducción de una fórmula P a partir de premisas que son todas axiomas se escribe consecuentemente $\vdash P$.

Nota 4. El significado intuitivo de $\mathcal{A} \vdash C$ es el de que C es una verdad condicionada a la verdad de las premisas de $\mathcal{A}$; y en ese mismo sentido, los axiomas son las expresiones de las verdades fundamentales de la teoría.

Nota 5. Toda fórmula que pueda ser deducida de los axiomas se llama teorema. En particular los axiomas son teoremas.

La conclución establecida antes de las notas anteriores es la que tildamos de impreciza. Veamos porqué.

Ante todo, tal como se definieron letras ligadas y libres, si en una fórmula R no está la letra x, entonces x es libre en R. Esto significaría que en toda deducción de una fórmula C en la cual x está ligada, dicha letra x tiene que aparecer en todas las premisas y que además lo debe hacer en forma ligada.

Observemos algunos casos, aunque para hacerlo debemos usar la teoría que se expondrá en el Cap. 3.

1-. Sea la fórmula $(y=y$ ó $y\neq y) \Rightarrow x=x$. Entonces, como $y=y$ ó $y\neq y$ es un axioma, se puede hacer la siguiente deducción:

$\mathcal{D}$

$$\left.\begin{array}{l} y=y \text{ ó } y\neq y \\ (y=y \text{ ó } y\neq y) \Rightarrow x=x \end{array}\right\} \mathcal{A}$$
$x=x$

Osea $\mathcal{A} \vdash x=x$. Pero esto según la regla de prueba 3.3 nos permite decir que $\mathcal{A} \vdash (\forall x)(x=x)$, pero como en $y=y$ ó $y\neq y \Rightarrow x=x$ x está libre, entonces de $\mathcal{A}$ no hay deducción para $(\forall x)(x=x)$, lo cual es una contradicción.

2-. Consideremos la siguiente deducción:

$\mathcal{D}$

$x \in X \Rightarrow x \in X$ ó $x \in X$

$(x \in X \Rightarrow x \in X$ ó $x \in X) \Rightarrow (x \in X \Rightarrow x \in X$ ó $x \in X$ ó $(\forall x)(x \neq x))$

$(x \in X \Rightarrow x \in X$ ó $x \in X)$ ó $(\forall x)(x \neq x)$

Esto según el Modus ponens (1.1, pág. 11) sería una deducción para la última fórmula, pero resulta que en la primera premisa x está libre y en la conclusión ligada.

Examinando la justificación de 1.1, lo que aparece implícito es que la condición impuesta a las deducciones para variables ligadas y libres no se refiere a premisas que sean axiomas.

En consecuencia, proponemos la siguiente aclaración en este punto:

Decimos que $\mathcal{D}$ es una deducción a partir de $\mathcal{A}$ de C y escribimos: $\mathcal{A} \vdash C$ si:

i) a) $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ son listas de fórmulas

b) En la lista $\mathcal{A}$ no hay axiomas

c) $\mathcal{D}$ es una lista finita con una o más fórmulas.

$\mathcal{A}$ es una lista con un número finito de fórmulas o sin fórmulas.

ii) C es la última fórmula de $\mathcal{D}$.

iii) Las letras ligadas de C deben estar ligadas en las fórmulas de $\mathcal{A}$ donde ellas aparezcan.

iiii) Cada fórmula S de $\mathcal{D}$ tiene que cumplir al menos una de las siguientes condiciones:

a) S es axioma.

b) S está en $\mathcal{A}$.

c) Hay antes que S dos fórmulas: R y $R \Rightarrow S$.

Consideramos que en esta forma no hay lugar a equívocos. Así si C tiene una deducción $\mathcal{D}$ puede ser:

1) C es un axioma.
2) C figura en $\mathcal{Q}$.
3) C es implicada por un axioma (aquí están los ejemplos problemáticos).
4) C es implicada por una fórmula de $\mathcal{Q}$.
5) C es implicada por una fórmula que a su vez es implicada por una fórmula de $\mathcal{Q}$.

Como un comentario final a la deducción y su consecuencia inmediata, el Modus ponens, transcribimos a continuación el texto de L. Carroll "Lo que dijo la tortuga a Aquiles", tomado del libro " Matemática Demente" del mencionado autor, ed. Cuadernos Marginales.

Aquiles creyó haber ganado a la tortuga y se había instalado muy cómodamente en su espalda.

«Así, ¿acabaste ya la carrera?», dijo la tortuga. «Aun cuando consistiera en una serie infinita de distancias. Me parece que un sabio, o algo por el estilo, dijo hace tiempo —habiendo olvidado su nombre— que esto no era posible.»

«Y, sin embargo, he ganado», dijo Aquiles. «Puede no ser verdad, pero es un hecho. *Solvitur ambulando*. ¿No ves que las distancias *disminuyen* constantemente? Así que...»

La tortuga lo interrumpe: «¿Y en qué no aumentan (también) constantemente? ¿Entonces?»

«En ese caso yo no estaría *aquí*» Aquiles *humiliter*, «y, en cuanto a ti, habrías ya dado muchas veces la vuelta al mundo, al mismo tiempo.»

«Tú me adulas —me allanas—, quiero decir» dijo la tortuga. «Porque hay en ti un gran peso y no un error. Bien, y ahora, quisieras oír de mis labios la carrera, que muchos creen haber concluido con uno o dos pasos, pero que, en realidad, consiste, repito, en un número infinito de distancias, cada una de ellas mayor que la precedente, en progresivo aumento, siempre, hasta la muerte.»

«Por supuesto» dijo el guerrero, el griego, sacando de su casco (pocos eran entonces los griegos con bolsillos) un enorme libro de notas, y una pluma. «Y habla por favor muy despacio, por cuanto aún no se ha inventado la estenografía.»

«Yo pensaba en la muy guapa primera proposición de Euclides «murmuró la tortuga como en sueños; «¿Tú amas a Euclides?»

«¡Con locura!» respondió, «tanto como podría amar a un tratado que no se podrá publicar en muchos siglos.»

«Bien, pues ahora, consideramos una pequeña parte que se elabora dentro de la primera proposición: sólo dos pasos, dos pasos justos, la conclusión se extrae a partir de ellos. Ten la bondad de inscribir en tu agenda. Y para mayor comodidad, llamémosles A, B, C, finalmente Z:

A) Dos cosas que son iguales referidas a una tercera, son iguales entre sí.

B) Los dos lados de este triángulo son iguales referidas a un tercero.

Z) Los dos lados de este triángulo son iguales entre sí.

»Todo lector de Euclides admitirá, o al menos en eso sueño, que se sigue lógicamente de A y B, y que, si uno admite la verdad de A y B, estará *obligado* a aceptar la tercera verdad de Z.

»¡Sin duda! El más niño del liceo, desde el momento en que el liceo se invente, es decir, dentro de algunos miles de años, aceptará eso por lógico.

»Y, si un lector no había admitido la validez de A y B, podría aceptar, sin embargo, la validez de la inferencia.»

»Ese lector debe existir: él diría, si A y B son verdaderas, Z debe ser cierta, si se acepta la proposición hipotética. Ese lector haría bien en abandonar a Euclides y dedicarse al fútbol.»

»Y, ¿no podría haber igualmente un lector que dijera: sí, A y B son verdaderas, pero no acepto la proposición diptética?»

»Ciertamente puede haberlo. Y eso otro haría también mejor en dedicarse al fútbol.»

»Y ninguno de esos dos lectores» continuó la tortuga, «está por ahora, lógicamente, obligado a aceptar la verdad de Z.»

«Exactamente», Aquiles asintió.

»Bien, ahora quisiera que me consideraras como un lector, como un lector, de la segunda especie, y que me fuerces, lógicamente, a aceptar Z como verdadero.»

»Una tortuga jugando al fútbol sería...» comenzó Aquiles «una anomalía» se apresuró a interrumpir la tortuga. «No deambules alrededor del punto, ni preguntes por él. Obtengamos Z primero, luego el fútbol.»

»¿Estoy entonces obligado a forzarte a aceptar Z?» dijo Aquiles con acento soñador. «Y tu postura actual es que aceptas A y B, pero no aceptas la hipotética.»

»Llamémosla C», dijo la tortuga.

»Pero tú no admites que:

C) »Si A y B son verdaderas, Z debe ser verdadera.»

»Esa es mi postura actual», respondió la tortuga.

»Me veo obligado, entonces, a rogarte que aceptes C.»

»Lo haré tan pronto como hayas registrado en tu libro de notas. ¿Qué otras cosas has apuntado?»

»Sólo unos pocos memoranda» dijo Aquiles, dando nerviosamente la vuelta a las páginas, unas pocas memorandas de las batallas que les acometen...»

»Pleno de hojas en blanco, ya veo» dijo la tortuga estridentemente. «Las necesitaremos todas», y un escalofrío recorrió el cuerpo de Aquiles.

»Ahora, escribe al dictado:

A) — »Lo que es igual a un tercer término, es igual entre sí.

B) — Las dos caras del triángulo son iguales a un tercero.

C) — Si A y B son verdaderas, Z debe ser verdadera.

Z) — Las dos caras del triángulo son iguales entre sí.

»Tú deberías llamar a esto D, y no Z. Viene inmediatamente después de los otros tres. Si admites la verdad de A, B y C, no tienes más remedio que admitir la validez lógica de Z.»

»¿Por qué necesariamente?

»Por cuanto se deduce, lógicamente, de la serie. Si A, B y C son verdaderos, Z *debe forzosamente,* serlo también» repitió la tortuga pensativa. «Esta es otra hipotética. Y, si yo me equivocara en esta verdad, podría ver fácilmente la verdad de A, B y C, pero no así la verdad de Z, ¿es o no es cierto?»

«Lo es» contestó el héroe ingenuo. «Y una tal estupidez sería un fenómeno prodigioso. Sin embargo, posible. Así que necesito pedirte que admitas otra hipotética.»

«No me opongo a ello. Por el contrario, me siento deseoso de aceptarlo, tan pronto lo hayas inscrito en tu libro de notas. La llamaremos:

D) Si A y B y C son verdaderas, Z debe serlo.

¿Lo has registrado?»

«¡Por supuesto!» exclamó, resplandeciente, Aquiles, al tiempo que regresaba la pluma a su dorado estuche. «Y, por fin, llegamos a las Indias, concluimos al fin en Cathay esta carrera abstracta: Ahora que aceptas, con un rostro que la más abstracta fatiga ilumina, la validez de A, de B, de C y de D, se sobreentiende que *tienes* que aceptar Z.»

«¿Debo?» dijo con inocencia la tortuga. «Arrojemos una luz más clara sobre esto. Yo acepto A y B y C y D. Supongamos que, a pesar de todo, me obstino —con la ciega perseverancia de una línea recta— en negar Z?»

«En ese caso, la lógica te agarraría por el pescuezo, te aplastaría —o, como tú dices, te allanaría— más de lo que yo puedo hacerlo, hasta convertirte en espectro de ti misma: ¡en una Falsa Tortuga! Pero, ¡ponte la camisa de fuerza de la lógica!» le contestó Aquiles haciendo gala de la voz provocativa que posibilita el (siempre, como veremos, soñando) triunfo. «La lógica te diría: no tienes más remedio que huir a un lugar sin pensamientos. ¡Ahora que has aceptado A y B y C y D, *tienes* que aceptar Z! Así que, como ves, no tienes elección: estás entre la Lógica —la espada— y la pared —eso que no nos contesta, un definitivo silencio.»

«Cualquier cosa que la Lógica —sin necesidad de tanto vano discurso— tenga a bien decirme, merece pasar a la *escritura*» dijo la Tortuga. Así que anótalo en tu libreta, por favor, y olvida en esa escritura las hipérboles. Lo llamaremos:

E) Si A y B y C y D son verdaderas, Z debe ser verdadera. Hasta que yo no haya admitido la validez de *eso,* no necesito aún admitir la validez de Z. Así que es éste un paso totalmente necesario, ¿lo ves?»

«Lo veo» dijo Aquiles; y había en su voz un tono de infinita tristeza, como si su vida se hubiera convertido en una serie infinita de distancia.

Al llegar a este punto, el narrador se vio obligado a resolver un urgente asunto bancario, y forzado a abandonar a nuestros amigos, no pudo repasar el esbozo hasta unos meses más tarde. Cuando al fin lo hizo Aquiles, todavía estaba sentado sobre el caparazón de la tortuga, y escribía en su libro de notas, ya muy abarrotado. La tortuga estaba diciendo:

«¿Has registrado esta primera etapa? A no ser que haya perdido la cuenta, representa la etapa mil uno. Todavía nos quedan varios millones. Y me pregunto si me podrías hacer un favor, a título pura y exclusivamente personal —considerando los aportes que este nuestro pasado coloquio ha elaborado para uso de los lógicos del XIX—, ¿tendrías inconveniente en adoptar una frase que compuso mi prima la Falsa Tortuga y en dejar que te vuelva a bautizar como Aquél, que rechazando nuestras instrucciones, ha venido a instruirnos?»

«Como gustes» respondió el luchador cansado, con los tonos vacíos de la desesperación, escondiendo su rostro tras dos manos de sombra. «A condición expresa de que tú también te dejes rebautizar con algo que nunca manó de los labios de tal Falsa Tortuga: Ligero, Asesino, Tortura.»

3 cartas a 3 sin palabra