COMENTARIOS AL CAPITULO II

5-. CALCULO PROPOSICIONAL:

Se presentan cuatro axiomas esquema que son suficientes para dar el valor a los conectores $\neg$ (no) y $\vee$ (ó), es decir para elaborar todo el cálculo proposicional.

El texto llama Reglas de Prueba a las formas de acortar deducciones, una de las cuales ya había aparecido en el Cap. I. Dichas reglas de prueba es lo que otros libros llaman Criterios de Demostración. Y llama metateoremas a fórmulas que por su forma son ciertas, no importa el valor de verdad de sus componentes. Es lo que otros textos denominan Tautologías.

En la pág. 18, refiriéndose al criterio del tercio excluso primero, y luego a las leyes de la doble negación, se hace una mención al "teorema de incompletez" de Gödel. Además hace una juiciosa observación sobre las Tablas de Verdad y sus limitaciones, la cual queremos resaltar pues compartimos plenamente la posición de darle poca importancia a dichas tablas en el desarrollo del cálculo proposicional.

Hasta la presentación de la regla de prueba 2.18, inclusive, estamos plenamente de acuerdo con el desarrollo que del tema hace el texto. En este punto, sin embargo, pensamos que es conveniente introducir el Criterio de la Deducción, puesto que se puede hacer naturalmente allí, como en efecto lo hacemos en seguida. Además esto simplifica notablemente las justificaciones y metapruebas que hay a continuación, tal como lo ilustraremos con algún ejemplo. Anotamos igualmente (y esto como una crítica general) que en el texto no se hace un buen uso de ese poderoso criterio de demostración, lo cual también señalaremos recurriendo a algunos ejemplos.

Veamos pues primero una justificación del criterio de la deducción en el punto de desarrollo de la teoría anotado, es decir después de la regla de prueba 2.18.

2.19' Criterio de la Deducción:

Sean P y Q fórmulas y $\mathcal{A}$ una lista de premisas. Si añadimos P a la lista $\mathcal{A}$ o sea hacemos $\mathcal{A}$, P y resulta que $\mathcal{A}, P \vdash Q$, entonces $\mathcal{A} \vdash P \Rightarrow Q$.

Justificación:

Sea D1,D2,......Di,......Dn una deducción de Q en $\mathcal{A}$,P.
Recordemos que cada eslabón de la deducción debe cumplir alguna de las dos condiciones. Además que Dn es la fórmula Q; o sea que se debe demostrar que $\mathcal{A} \vdash P \Rightarrow Dn$.
Se usará un procedimiento recurrente (paso a paso).

$\mathcal{A} \vdash P \Rightarrow D1$, $P \Rightarrow D2, \ldots\ldots,$ $\mathcal{A} \vdash P \Rightarrow Dn$.

sea i $\notin$ $1 \leq i \leq n$ y supongamos que $\mathcal{A} \vdash P \Rightarrow Dj$ para todo $j < i$. (Si i=1 es claro que $\mathcal{A} \vdash P \Rightarrow D1$, pues D1 está en $\mathcal{A}$, es axioma o es P).
Veamos que $\mathcal{A} \vdash P \Rightarrow Di$.
Hay que considerar dos posibilidades para Di: Primera: que Di está en $\mathcal{A}$ ó es axioma ó es P. Si está en $\mathcal{A}$ ó es axioma, por 2.18, tenemos que: $\mathcal{A} \vdash P \Rightarrow Di$. Si es P entonces $\vdash P \Rightarrow Di$ por 2.7.
Segunda posibilidad: que para algún $j < i$ y algún $k < i$, Dk es $Dj \Rightarrow Di$.
Entonces por la hipótesis:

$\mathcal{A} \vdash P \Rightarrow Dj$ (1)

$\mathcal{A} \vdash P \Rightarrow (Dj \Rightarrow Di)$ (2)

Veamos que en este caso también $\mathcal{A} \vdash (P \Rightarrow Di)$.
En efecto:

$\mathcal{A} \vdash$ no $Dj \Rightarrow$ noP contrarrecíproco de (1)

$\vdash (Dj \Rightarrow Di) \Rightarrow$ (no $Di \Rightarrow$ no Dj) por 2,10

$\mathcal{A} \vdash$ (no $Di \Rightarrow$ no Dj) $\Rightarrow$ (no $Di \Rightarrow$ no P) por 2.5

$\vdash$ (no $Di \Rightarrow$ no P) $\Rightarrow (P \Rightarrow Di)$ por 2.10

Luego $\mathcal{A} \vdash P \Rightarrow (P \Rightarrow Di)$ por silogismos
Además $\vdash$ (noP $\Rightarrow (P \Rightarrow Di)$) AE 2 y $\vdash$ P ó noP 2.8, o sea

$\mathcal{A} \vdash P \Rightarrow Di$ por 2.13

Se concluye que para todo i de 1 a n $\mathcal{A} \vdash P \Rightarrow Di$, o sea que en particular: $\mathcal{A} \vdash P \Rightarrow Q$.

Nota: La regla de prueba 2.19' se demuestra con las Reglas de prueba 2.18 y anteriores. Es pues lícito usarla para justificaciones y pruebas del 2.18 en adelante. Así:

2.19' Regla de prueba.
Si P y Q son fórmulas y $\mathcal{A} \vdash P$, $\mathcal{A} \vdash Q$, entonces $\mathcal{A} \vdash P \wedge Q$.
Justificación:
Supongamos noP ó noQ (premisa además de $\mathcal{A}$)
Como $\mathcal{A} \vdash (no(P \wedge Q) \Rightarrow P)$, $\mathcal{A} \vdash (no(P \wedge Q) \Rightarrow Q)$ por 2.18
Entonces $\mathcal{A} \vdash noP \Rightarrow (P \wedge Q)$, $\mathcal{A} \vdash noQ \Rightarrow (P \wedge Q)$ por 2.10
Luego $\mathcal{A}$, (noP ó noQ) $\vdash P \wedge Q$ por 2.12
Entonces $\mathcal{A} \vdash$ (noP ó noQ) $\Rightarrow P \wedge Q$ por 2.19'
Además $\vdash no(P \wedge Q) \Rightarrow$ (noP ó noQ) por 2.9
Luego $\mathcal{A} \vdash no(P \wedge Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ por silogismo, y como
$\vdash P \wedge Q \Rightarrow P \wedge Q$ por 2.7, entonces: $\mathcal{A} \vdash P \wedge Q$ por 2.13.

2.20 Regla de prueba.
Sean P, Q y R fórmulas. Si $\mathcal{A} \vdash P \Rightarrow Q$ y $\mathcal{A} \vdash P \Rightarrow R$, entonces
$\mathcal{A} \vdash P \Rightarrow Q \wedge R$.

Justificación:
Si añadimos a $\mathcal{A}$ la premisa P, en $\mathcal{A}$,P son teoremas Q y R y por tanto $Q \wedge R$, luego por criterio de la deducción: $\mathcal{A} \vdash P \Rightarrow Q \wedge R$

Nota: Compárese esta simple justificación con una reconstrucción completa siguiendo el camino que el texto indica y se verá palpable la brevedad de la que hicimos.

2.21 Regla de prueba. Método de la contradicción.
Sea C una contradicción (es decir una fórmula de la forma $Q \wedge noQ$).
Si $\mathcal{A} \vdash noP \Rightarrow C$, entonces $\mathcal{A} \vdash P$.

Justificación:
Como $\mathcal{A} \vdash (noP \Rightarrow Q \wedge noQ)$, entonces: $\mathcal{A} \vdash noP \Rightarrow Q$ y $\mathcal{A} \vdash noP \Rightarrow noQ$, osea $noQ \Rightarrow P$ y $Q \Rightarrow P$, luego por disyunción de casos $\mathcal{A} \vdash P$.

Nota: Damos en seguida una regla de prueba alterna a 2.21, justificada con el criterio de la deducción.

2.21' Regla de Prueba.
Sea P una fórmula y $\mathcal{A}$ una lista de premisas. Si añadiendo noP a la lista de premisas se obtiene una contradicción C, es decir se tiene $\mathcal{A}$, noP $\vdash$ C, entonces $\mathcal{A} \vdash P$.

Justificación:

Por el criterio de la deducción $\mathcal{A} \vdash \text{no}P \Rightarrow C$ y por el anterior $\mathcal{A} \vdash P$.

2.22 Regla de prueba.

Si alguna contradicción es deducible de $\mathcal{A}$, entonces toda fórmula es deducible de $\mathcal{A}$.

Justificación:

Sea $Q \wedge \text{no}Q$ deducible de $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A} \vdash Q$ y $\mathcal{A} \vdash \text{no}Q$ y por lo tanto, si P es una fórmula cualquiera, $\mathcal{A} \vdash Q \Rightarrow P$ por 2.18, luego por 1.1 $\mathcal{A} \vdash P$.

Nota: Damos esta última prueba para resltar el uso del método de la contradicción en el siguiente sentido: cuando se usa este criterio, lo que se hace es partir de una teoría con premisas $\mathcal{A}$ que se presume que no es contradictoria, o que al menos no se le ha encontrado la contradicción (sino el uso de cualquier Regla de Prueba sería trivial). Añadiendo noP como premisa, es decir en otra teoría que denotamos $\mathcal{A}$, noP, es donde se encuentra la contradicción, lo que indica que no se podía añadir noP a la teoría $\mathcal{A}$.

Consideramos también que Eisenberg podría haber definido la comparación de teorías como lo hace Bourbaki. (Cfr. Bourbaki E1 24)

Una teoría T' es más fuerte que una teoría T, si tiene los mismos signos, los mismos axiomas esquema y los axiomas de T son teoremas de T'.

Con esta definición es inmediato el criterio siguiente: si una teoría T' es más fuerte que una teoría T, todos los teoremas de T son teoremas de T'.

Teoría $\mathcal{A}$

Axiomas y premisas	Fórmulas teoremas
$\mathcal{A}$	~~P⇒Q es teorema~~. Hay deducción para $P \Rightarrow Q$.

Teoría $\mathcal{A}$, P

Axiomas y premisas	Fórmulas teoremas, entre ellos
$\mathcal{A}$ y P	P Hay deducción para Q

En el uso del criterio de la deducción lo que se está haciendo es un paso a una teoría más fuerte, es decir $\mathcal{A}$,P es más fuerte que $\mathcal{A}$.

Con esto terminamos los comentarios al capítulo II.