COMENTARIOS AL CAPITULO III

6-. CUANTIFICACIÓN:

En este capítulo dedicado al cálculo de predicados se harán observaciones a la forma como se describe y usa la sustitución, en primera instancia. Luego se criticará la presentación, para nosotros lamentable, del axioma esquema 5, axioma redundante como el mismo texto lo afirma y que, por lo mismo, no alcanzamos a captar el porqué se pone.

De nuevo haremos uso del criterio de la deducción en justificaciones y metapruebas, en las que, por no usarlo, el texto hace justificaciones complicadísimas.

Por último, definiremos y usaremos el = , es decir pasaremos a las teorías igualitarias con el fin de no dejar temas pendientes para el capítulo IV, como lo tiene que hacer el texto.

Pasemos a desarrollar estos comentarios.

El texto presenta como simple notación lo siguiente: si P es un agregado, x una letra y S un agregado, entonces se escribe $[S/x]$ P al agregado obtenido reemplazando cada ocurrencia de x en P por el agregado S.
Ejemplo: $[y/x]\ (\forall z)(x=z)$ es el agregado $(\forall z)(y=z)$.

Eisenberg no se preocupa más por el asunto y sigue empleando estas sustituciones sin advertencia alguna. Pero veamos lo que puede pasar:
Dice el axioma esquema 6: sea P una fórmula en la cual la letra x está libre y sea X un término, entonces: $(\forall x)P \Rightarrow [X/x]$ P es axioma.

Esto nos conduciría por ejemplo a:
$(\forall x)(x= (\iota y)\ (y=x)) \Rightarrow [((\iota y)(y=y)/x)\}]\ (x= (\iota y)\ (y=x)))$
$(\forall x)(x=(\iota y)(y=x))\} \Rightarrow (\iota y)(y=y)=(\iota y)(y=(\iota y)(y=y))\}$
sería un axioma, pero esto según los criterios de formación no es nada. P es $x= (\iota y)(y=x))$ y X es $(\iota y)\ (y=y))$.

Entonces por no definir bien los criterios de sustitución resulta que algo que no es siquiera fórmula resulta un axioma.

Es pues imperioso definir cúando son válidas las sustituciones y lo que resulta de ellas. (Cfr. Bourbaki)

Además el enunciado del axioma esquema 6 debe quedar así: Sea P una fórmula en la cual la letra x esté libre y X un término en el cual las letras ligadas de P no estén ligadas, entonces:
$(\forall x)P \Rightarrow [X/x]P$ es axioma.

Para ver la redundancia del axioma esquema 5, veamos cómo se sigue desarrollando la teoría.
Axioma esquema 7: Sea C una fórmula en la cual la letra x no aparece y P una fórmula en la cual x está libre. Entonces:
$(C \Rightarrow P) \Rightarrow (C \Rightarrow (\forall x)P)$ es un axioma.

De aquí se siguen (sin usar el axioma esquema 5)las siguientes reglas de prueba:

3.1 Especialización universal.
En el enunciado de esta regla de prueba también se debe tener cuidado con la sustitución, así: Sea P una fórmula donde x está libre y X un término tal que las letras ligadas en P estén libres en él. Si $\mathcal{A} \vdash (\forall x)P$ entonces $\mathcal{A} \vdash [X/x]P$.

Corolario: Sea P una fórmula donde x está libre. Si $\mathcal{A} \vdash (\forall x)P$ entonces $\mathcal{A} \vdash P$.

3.2 Regla de prueba.
Sea P una fórmula donde x está libre y X un término tal que las letras ligadas de P estén libres en él. Si $[X/x]P$ es falso, entonces $(\forall x)P$ es falso.

Nota: es el contraejemplo de $(\forall x)P$

Nota: Las justificaciones de 3.1 y 3.2 son inmediatas a partir del axioma esquema 6.

3.3 Generalización universal.

Sea P una fórmula donde x está libre. Si $\mathcal{Q} \vdash P$, entonces $\mathcal{Q} \vdash (\forall x)P$.

La justificación es inmediata del axioma esquema 7.

Corolario: Sea P una fórmula en la cual x es libre y la letra y no aparece; entonces: $\vdash (\forall x)P \Leftrightarrow (\forall y)([y/x]P)$.

Justificación:

i) Por axioma esquema 6: $(\forall x)P \Rightarrow [y/x]P$ y como en $(\forall x)P$ no está y, entonces: $(\forall x)P \Rightarrow (\forall y)([y/x]P)$.

ii) Por el axioma esquema 6: $(\forall y)[y/x]P \Rightarrow [x/y][y/x]P$, o sea $(\forall y)([y/x]P) \Rightarrow P$ y como en $(\forall y)([y/x]P)$ no está x, entonces: $(\forall y)([y/x]P) \Rightarrow (\forall x)P$.

Como se ve, la justificación del axioma esquema 5 es sumamente sencilla y de allí nuestro comentario de lamentar el que innecesariamente se postule como axioma.

Nota: En 3.3 podemos ver como se pueden cometer grandes errores si no se tiene en cuenta la condición de la deducción sobre las letras ligadas de la conclusión. Un buen ejemplo es el ejercicio L del capítulo III.

Para ilustrar el tercer comentario al capítulo, compárense las metapruebas larguísimas de 3.4 (pág.38) y 3.7 (pág. 40) propuestas por el texto, con las siguientes, usando el criterio de la deducción.

3.4 Metateorema.

Sea x libre en P y Q. Entonces: $\vdash (\forall x)(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((\forall x)P \Rightarrow (\forall x)Q)$.

Metaprueba:

Supongamos $(\forall x)(P \Rightarrow Q)$ cierto, Entonces: $P \Rightarrow Q$ lo es. Ahora, si además $(\forall x)P$ es cierto, P lo es, luego Q es cierto y por 3.3 :

$(\forall x)Q$ es cierto. O sea que: $(\forall x)(P \Rightarrow Q)$, $(\forall x)P \vdash (\forall x)Q$, luego, por el criterio de la deducción, tenemos que: $(\forall x)(P \Rightarrow Q) \vdash (\forall x)P \Rightarrow (\forall x)Q$ y de nuevo por el mismo criterio:

$\vdash (\forall x)(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((\forall x)P \Rightarrow (\forall x)Q)$

3.7 Metateorema.

Sean x e y libres en P. Entonces: $\vdash (\forall x)(\forall y)P \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P$.

Metaprueba:

Supongamos $(\forall x)(\forall y)P$ cierto, entonces: $(\forall y)P$ lo es y P lo es y $(\forall x)P$ y $(\forall y)(\forall x)P$ también, o sea lo que se iba a demostrar.

Nuestro último comentario al capítulo, referente a la igualdad, es motivado por el uso del teorema 4.2 del capítulo 4 como lema para la justificación de la regla de prueba 3.18.

Hay aquí dos alternativas: una, no hacer existencia única en el cálculo de predicados; otra, introducir el =. En esta última, se puede introducir el = sin, al propio tiempo, introducir el (Cfr. Bourbaki E1), lo que da lugar a las teorías igualitarias (no necesariamente la teoría de conjuntos). Eisenberg introduce el = en la teoría de conjuntos. Para no alejarnos del texto, sugerimos que: el axioma esquema 8, el axioma 1 (o de extensión) y los teoremas 4.1 y 4.2 se hagan antes de Existencia Unica, lo cual es perfectamente factible.