

DOMINIOS HIPERBÓLICAMENTE CONVEXOS CON ESTRECHOS

por

Juan Humberto Arango Escalante

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al Título de

Doctor en Ciencias Matemáticas

Director: Dr. Diego Mejía Duque

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Septiembre 2009

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por COLCIENCIAS, contrato 1118-405-20316 y DIME.

Resumen

Se introduce el concepto de **estrecho**, en términos hiperbólicos, para un subdominio del disco unidad. Si el dominio es hiperbólicamente convexo, se caracteriza la existencia de estrechos en términos euclidianos mediante el concepto de **cuasidisco**. Se propone una **clasificación** de los estrechos y se exhiben algunos ejemplos.

Además, para la clase $K_h(\alpha)$ de las funciones hiperbólicamente convexas normalizadas, se obtienen dos cotas inferiores de su constante de Bloch: una justificada analíticamente y otra mejor basada en información gráfica y numérica, las cuales apoyan una conjetura acerca del valor exacto de la constante.

Contenido

Introducción	vi
1 PRELIMINARES	1
2 DOMINIOS CON ESTRECHOS Y UNA CARACTERIZACIÓN EUCLIDIANA	5
3 CLASIFICACIÓN DE ESTRECHOS	21
4 EJEMPLOS DE ESTRECHOS	42
5 LA CONSTANTE DE BLOCH DE $K_h(\alpha)$	49
5.1 Una cota inferior para la constante de Bloch de $K_h(\alpha)$	52
5.2 Cota mejorada	55
Bibliografía	58

Agradecimientos

Me gustaría agradecer primero a Juan Carlos López por su colaboración en la transcripción de la tesis y en el diseño de las gráficas; a los profesores Jorge Mejía Laverde, por su cuidadosa lectura de las pruebas y sus sugerencias acerca de la claridad de las mismas, Carlos Mario Parra y Volker Stallbohm.

Quiero expresar también mi gratitud hacia la Universidad, por la oportunidad de poder hacer el doctorado aquí en Medellín y por las facilidades brindadas para la terminación del programa.

Finalmente, quiero agradecer muy especialmente a los profesores Diego Mejía Duque y Christian Pommerenke por sus orientaciones y sugerencias durante el desarrollo del trabajo.

Introducción

El presente trabajo está dividido en dos partes.

En la primera (capítulos 2, 3 y 4) se introduce el concepto de *estrecho* para un conjunto abierto y conexo G en la geometría hiperbólica (aunque podría estudiarse en otras geometrías). Si G es hiperbólicamente convexo, se caracteriza la existencia de estrechos (definida en términos hiperbólicos) mediante el concepto de *cuasidisco* (usualmente definido en términos euclidianos). Además, se propone una clasificación natural de los estrechos y se dan algunas propiedades de cada uno de los dos casos. Finalmente, se exhiben algunos ejemplos de estrechos de ambas clases.

En la segunda parte (capítulo 5) se estudia el problema de la constante de Bloch de la clase $K_h(\alpha)$ de las funciones hiperbólicamente convexas normalizadas. Se obtienen cotas inferiores para ella: una justificada analíticamente y otra mejor basada en información gráfica y numérica, las cuales apoyan una conjetura acerca del valor exacto de la constante.

En el **capítulo 1** se describe brevemente la *geometría hiperbólica*, usando el modelo de Poincaré, esto es, en $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$. La *métrica hiperbólica* permite definir la distancia en \mathbb{D} , que se preserva bajo $\text{Möb}(\mathbb{D})$, o sea la clase de las transformaciones de Möbius de la forma

$$T(z) = c \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

con $a \in \mathbb{D}$ y $c \in \mathbb{T} := \partial\mathbb{D}$ (llamadas automorfismos de \mathbb{D}).

En esta geometría es natural la definición de *convexidad (hiperbólica)* en términos de segmentos de recta (hiperbólicas) o geodésicas, de manera análoga al caso euclidiano. Los dominios h-convexos y las funciones $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ h-convexas (analíticas y univalentes, con $f(\mathbb{D})$ h-convexo) han sido estudiados por L. Cruz, W. Ma, D. Mejía, D. Minda, Ch. Pommerenke, entre otros (véase especialmente [MaMi94], [MaMi99], [MeP]). Si G es un subdominio propio de \mathbb{C} simplemente conexo, el teorema de Riemann (Riemann mapping theorem) garantiza la existencia de una función $h : \mathbb{D} \rightarrow G$ holomorfa y biyectiva; esta función h permite definir la geometría hiperbólica en G (independiente de h).

También se enuncia una versión general del *lema de Ahlfors* basada en las llamadas *métricas ultrahiperbólicas*, estudiadas por Ahlfors en [A].

En el **capítulo 2**, se introduce el concepto de *estrecho*; lo que se busca es expresar, en términos puramente hiperbólicos, un tipo de irregularidad común en muchos dominios problemáticos o extremales para algunos problemas clásicos en *Teoría Geométrica de Funciones*.

Para dominios h-convexos, es particularmente destacable el Teorema 2, que puede entenderse como una caracterización de la existencia de estrechos en términos euclidianos; pero

también, como una caracterización del concepto de *cuasidisco* en términos hiperbólicos. En la prueba, son esenciales, además de la convexidad hiperbólica (que se usa repetidamente), la ley hiperbólica del coseno y la ley euclidiana de senos.

De las varias definiciones conocidas de cuasidisco, hemos preferido, por su simpleza, la definición 3 (ver [P92]). Otras definiciones equivalentes están en [L].

En el **capítulo 3**, se prueba (teorema 3) que los estrechos (si existen en un dominio h-convexo) deben estar en el infinito (en \mathbb{T}). En la demostración, se usan, de nuevo, la h-convexidad, la ley hiperbólica del coseno y la ley euclidiana de senos, además del hecho de que todo dominio h-convexo es un dominio de Jordan con frontera rectificable, lo cual fue probado por B. Brown en [Br].

Como corolario de este teorema, se tiene que todo dominio h-convexo hiperbólicamente acotado tiene que ser un cuasidisco.

La parte fundamental del capítulo es la *clasificación* de los estrechos. El caso regular es el que más se acomoda a la idea intuitiva de estrecho. El teorema 4 proporciona una caracterización más simple que la definición general, para el caso regular.

El teorema 5 afirma que si un dominio h-convexo tiene un estrecho irregular en un punto, en una vecindad de dicho punto, el dominio no puede estar contenido en un ángulo de Stolz. En la prueba, son esenciales la h-convexidad, la ley hiperbólica del coseno y una propiedad geométrica de los llamados "lentes". El recíproco del teorema no se cumple, como lo muestra el ejemplo 3.

En el **capítulo 4** se exhiben algunos ejemplos de estrechos regulares e irregulares, empezando por el más simple: la cúspide. El ejemplo 4 relaciona el tema de los estrechos con el del último capítulo.

El problema de la *constante de Bloch* para las funciones convexas normalizadas se ha resuelto para los casos euclidiano y esférico.

Si C es la clase de las funciones $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ analíticas y univalentes normalizadas por $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$ tales que $f(\mathbb{D})$ es euclidianamente convexo, entonces

$$R_f := \sup\{d_e(f(z), \partial f(\mathbb{D})) / z \in \mathbb{D}\},$$

es el *radio de Bloch* de f (d_e es la distancia euclidiana) y $R_c := \inf\{R_f / f \in C\}$ es la *constante de Bloch* de C . Szegő probó que $R_c = \frac{\pi}{4}$ (Véase [S]).

El caso esférico fue resuelto por D. Minda. Dada $\alpha \in (0, 1]$, sea $K_s(\alpha)$ la clase de las funciones $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ analíticas y univalentes normalizadas por $f(0) = 0$ y $f'(0) = \alpha$ tales que $f(\mathbb{D})$ es esféricamente convexo.

$$R_s(\alpha) := \inf\{\rho_f / f \in K_s(\alpha)\},$$

donde

$$\rho_f := \sup\{d_s(f(z), \partial f(\mathbb{D})) / z \in \mathbb{D}\}$$

es la *constante de Bloch* de $K_s(\alpha)$ (d_s es la distancia esférica). En [Mi86] se prueba que $R_s(\alpha) = \frac{\alpha\pi}{4}$.

En el **capítulo 5** se estudia el caso hiperbólico. Primero se obtiene una fórmula para la densidad de la métrica hiperbólica de un "lente" general (asimétrico), que generaliza el caso estudiado por D. Minda en [Mi86].

Mediante este lema y el lema de Ahlfors, se obtienen dos cotas inferiores para la *constante de Bloch* de $K_h(\alpha)$, la clase de las funciones $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ analíticas y univalentes normalizadas por $f(0) = 0$ y $f'(0) = \alpha \in (0, 1]$ tales que $f(\mathbb{D})$ es hiperbólicamente convexo. La primera cota, bastante buena para valores pequeños de α , se prueba analíticamente. La segunda, aun mejor, está justificada por información gráfica y numérica.

Finalmente, se conjetura que el valor exacto de la constante de Bloch de $K_h(\alpha)$ es

$$\frac{1}{2} \log \frac{1 + \tan\left(\frac{\pi\alpha}{4}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi\alpha}{4}\right)},$$

correspondiente a la función (extremal) cuyo rango es el lente simétrico. Esta conjetura está respaldada por un resultado parcial acerca de la clase de las funciones *fuertemente hiperbólicamente convexas*, subconjunto propio de $K_h(\alpha)$, estudiadas por L.Cruz y D.Mejía en [CMe].

Capítulo 1

PRELIMINARES

GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Al disco unitario $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ se lo dota con su *métrica hiperbólica* definida como

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z) |dz| := \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

La métrica hiperbólica permite definir la *distancia hiperbólica*:

Dados $a, b \in \mathbb{D}$,

$$d(a, b) := d_{\mathbb{D}}(a, b) := \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \lambda_{\mathbb{D}}(z) |dz|,$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los caminos rectificables γ contenidos en \mathbb{D} con extremos a y b .

Puede probarse que este ínfimo es en realidad un mínimo que se satisface cuando γ es la *geodésica hiperbólica* (o h-geodésica) entre a y b , que es el arco del círculo ortogonal a $\mathbb{T} := \partial\mathbb{D}$ con extremos en dichos puntos. Además,

$$d(a, b) = \operatorname{arctanh} \left| \frac{a - b}{1 - \bar{a}b} \right| = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right|}{1 - \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right|}.$$

La distancia hiperbólica se preserva bajo automorfismos del disco; esto es, si $T \in \operatorname{Möb}(\mathbb{D})$, entonces $d(a, b) = d(T(a), T(b))$.

Un dominio G en \mathbb{D} se denomina *hiperbólicamente convexo* (ó h-convexo) sii para cualquier par de puntos a, b de G , la h-geodésica \widehat{ab} entre a y b está contenida en G . Todo dominio h-convexo es simplemente conexo y es un dominio de Jordan. Si G es h-convexo y $a, b \in \partial G$ (la frontera euclidiana de G), se puede probar que $\widehat{ab} \subseteq \partial G$ o $\widehat{ab} - \{a, b\} \subseteq G$.

Ley (hiperbólica) del coseno: En un triángulo hiperbólico (h-triángulo) limitado por

geodésicas de longitudes p, q, r , donde θ es el ángulo formado por dos de ellas, opuesto a la que tiene longitud r , se tiene

$$\cos \theta = \frac{\cosh(2p) \cosh(2q) - \cosh(2r)}{\sinh(2p) \sinh(2q)}.$$

Ley (hiperbólica) del seno: Si, además, η es el ángulo formado por las geodésicas de longitudes p y r , entonces

$$\frac{\operatorname{sen} \eta}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{\sinh(2q)}{\sinh(2r)}.$$

Para un estudio detallado de la geometría hiperbólica, véase [B].

Una función $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ conforme (analítica e inyectiva) se denomina hiperbólicamente convexa (h-convexa) si $f(\mathbb{D})$ es h-convexo.

Si f es h-convexa y $\sigma, \tau \in \operatorname{Möb}(\mathbb{D})$, entonces $\sigma \circ f \circ \tau$ es h-convexa.

Esto permite reducir el estudio de las funciones h-convexas a la clase $K_h(\alpha)$ de las

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

h-convexas normalizadas por las condiciones $f(0) = 0$ y $f'(0) = \alpha$, con $0 < \alpha \leq 1$. (Si $\alpha = 1$, $K_h(\alpha)$ se reduce a la identidad en \mathbb{D}).

Generalización.

Además del disco unitario \mathbb{D} , se utilizan otros modelos para la geometría hiperbólica.

Sean G un subdominio propio de \mathbb{C} simplemente conexo y $h : \mathbb{D} \rightarrow G$ conforme (biyectiva y analítica). La función h permite definir la geometría hiperbólica en G de la siguiente manera:

Métrica hiperbólica:

$$\lambda_G(z) = \frac{1}{|h'(h^{-1}(z))| (1 - |h^{-1}(z)|^2)}$$

para $z \in G$.

Distancia hiperbólica: Si $a, b \in G$, $d_G(a, b)$ se define como $\inf \int_\gamma \lambda_G(z) |dz|$, donde el ínfimo se toma sobre todos los caminos rectificables γ contenidos en G con extremos a y b . Puede probarse que este ínfimo es un mínimo, que se cumple si $\gamma = h(\widehat{zw})$, donde $z = h^{-1}(a)$

y $w = h^{-1}(b)$. Esta geodésica \widehat{ab} está contenida en una h-recta (ortogonal a ∂G , donde esto tenga sentido).

Sean G, G_0 regiones propias de \mathbb{C} simplemente conexas y $\rho : G \rightarrow [0, +\infty)$ semicontinua superiormente tal que $\{z \in G / \rho(z) = 0\}$ es discreto.

$\rho(z) |dz|$ se llama una *semimétrica conforme* en G . Si ρ es de clase C^2 , su *curvatura (gaussiana)* es

$$K_\rho(z) = -\frac{\Delta \log \rho(z)}{\rho^2(z)} \quad \text{para } z \in G.$$

La métrica hiperbólica de G tiene curvatura constante de valor -4 .

Definición 1 Se dice que $\rho(z) |dz|$ es una **métrica ultrahiperbólica** en G sii dado $z_0 \in G$ con $\rho(z_0) > 0$, existen U vecindad de z_0 y $\rho_0 : U \rightarrow \mathbb{R}^+$ de clase C^2 tales que $\rho_0(z_0) = \rho(z_0)$ y, para cada $z \in U$, $\rho_0(z) \leq \rho(z)$ y $K_{\rho_0}(z) \leq -4$. Se dice que ρ_0 es una **métrica soporte** de ρ en z_0 .

Sea $\rho(z) |dz|$ una métrica ultrahiperbólica en G . Si $f : G_0 \rightarrow G$ es holomorfa no constante y

$$\rho_0 : G_0 \rightarrow [0, +\infty)$$

está definida por $\rho_0(z) = \rho(f(z)) |f'(z)|$, entonces $\rho_0(z) |dz|$ es una métrica ultrahiperbólica en G_0 .

Versión general del lema de Ahlfors: Si $\rho(z) |dz|$ es una métrica ultrahiperbólica en G , entonces $\rho \leq \lambda_G$.

Véase [Mi83].

Nota 1 En la métrica y en la distancia hiperbólicas, con frecuencia se trabaja con una normalización diferente a la utilizada aquí, con lo cual algunas de las expresiones (como por ejemplo la ley del coseno) cambian ligeramente. Hemos preferido la presente normalización para simplificar las fórmulas de la segunda parte (capítulo 5).

Definición 2 Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ analítica y $z_0 \in \mathbb{T}$.

a) Si existe

$$c = \lim_{z \rightarrow z_0, z \in \Delta} f(z),$$

donde Δ es cualquier ángulo de Stolz en z_0 , se nota $f(z_0) := c$ y se llama el **límite angular** de f en z_0 .

b) Si, además, existe

$$d = \lim_{z \rightarrow z_0, z \in \Delta} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

para cualquier ángulo de Stolz en z_0 , se nota $f'(z_0) := d$ y se llama la **derivada angular** de f en z_0 .

Usaremos la siguiente versión del lema de Julia-Wolff (véase [P92]):

Lema 1 de Julia-Wolff: Si $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ es analítica, $f(0) = 0$, $z_0 \in \mathbb{T}$ y existe $f(z_0) \in \mathbb{T}$, entonces existe $f'(z_0) \in \mathbb{C}_\infty$ y $1 \leq |f'(z_0)| \leq +\infty$.

Capítulo 2

DOMINIOS CON ESTRECHOS Y UNA CARACTERIZACIÓN EUCLIDIANA

En lo que sigue, consideraremos a G como un subdominio de \mathbb{D} , J su frontera euclidiana y J' su frontera hiperbólica. Obsérvese que $J' = J \cap \mathbb{D}$. Además, para $z, w \in \mathbb{D}$, notaremos su distancia hiperbólica como $d(z, w)$; esto es,

$$d(z, w) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \alpha(z, w)}{1 - \alpha(z, w)},$$

donde

$$\alpha(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right|.$$

Definición 3 *Un cuasidisco G en \mathbb{C} es un dominio de Jordan tal que existe una constante $M > 0$ con la propiedad de que dados $a, b \in J := \partial G$, se tiene que $\text{diam } J(a, b) \leq M |a - b|$, donde $J(a, b)$ es el arco con menor diámetro euclidiano de J entre a y b y donde $\text{diam } J(a, b)$ denota el diámetro euclidiano de $J(a, b)$.*

Existen múltiples equivalencias de esta definición y abundante literatura sobre los cuasidiscos y las funciones cuasiconformes, relacionadas con ellos. Véase, por ejemplo, [L], [LV] y [P92].

Definición 4 *G tiene **estrechos** si y sólo si existen sucesiones de puntos a_n, b_n en J' , discos hiperbólicos (h -discos) D_n de h -centro z_n y h -radio $r_n \leq 1$ y h -rectas S_n tales que*

$$z_n \in S_n \cap D_n \subseteq G,$$

a_n y b_n están en lados diferentes de S_n y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(a_n, z_n)}{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(b_n, z_n)}{r_n} = 0.$$

Nota 2 La cota 1 para r_n no es esencial; podría tomarse otra constante positiva. En algunos casos (ver en el siguiente capítulo la clasificación de estrechos) puede tomarse r_n constante (por ejemplo igual a 1) e incluso S_n fija.

Teorema 1 Si G tiene estrechos, entonces G no es un cuasidisco.

Prueba. Sean $a_n, b_n, D_n, z_n, r_n, S_n$ como en la definición y supongamos que G es un cuasidisco. Entonces existe $M > 1$ tal que dados $a, b \in J$, el diámetro euclidiano

$$\text{diam } J(a, b) \leq M |a - b|.$$

Como $r_n \leq 1$, entonces

$$d(a_n, z_n) = \frac{d(a_n, z_n)}{r_n} r_n \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Análogamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n, z_n) = 0,$$

luego (por la desigualdad triangular)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = 0;$$

o sea que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \text{ donde } \alpha_n = \frac{|a_n - b_n|}{|1 - \overline{a_n} b_n|}$$

y para n grande, $\alpha_n < \frac{1}{4M}$.

Si $w \in J(a_n, b_n)$ (el arco de menor diámetro J entre a_n y b_n , que existe por ser G un cuasidisco y, por lo tanto, un dominio de Jordan), entonces

$$|w - a_n|, |w - b_n| \leq \text{diam } J(a_n, b_n) \leq M |a_n - b_n| < \frac{1}{4} |1 - \overline{a_n} b_n|,$$

luego

$$|1 - \overline{a_n}w| \geq |1 - \overline{a_n}b_n| - |\overline{a_n}(b_n - w)| \geq \frac{3}{4}|1 - \overline{a_n}b_n|$$

y

$$\beta := \frac{|w - a_n|}{|1 - \overline{a_n}w|} \leq \frac{4M|a_n - b_n|}{3|1 - \overline{a_n}b_n|} = \frac{4M}{3}\alpha_n < \frac{1}{3}.$$

Por consiguiente, $w \in \mathbb{D}$ y

$$d(w, a_n) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} < \frac{1}{2} \log 2,$$

luego

$$J(a_n, b_n) \subseteq D_h \left(a_n, \frac{1}{2} \log 2 \right) \subseteq \mathbb{D}.$$

Pero a_n y b_n están en lados diferentes de la geodésica S_n , luego tiene que existir un

$$w_n \in S_n \cap J(a_n, b_n)$$

que cumple lo anterior, o sea que

$$\gamma_n := \frac{|a_n - w_n|}{|1 - \overline{a_n}w_n|} \leq \frac{4M|a_n - b_n|}{3|1 - \overline{a_n}b_n|} \leq 2M\alpha_n \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, w_n) = 0.$$

De manera análoga puede verse que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n, w_n) = 0.$$

Como $w_n \notin D_n$ (de lo contrario $w_n \in S_n \cap D_n \subseteq G$ y $w_n \in J(a_n, b_n) \subseteq \partial G$), entonces

$$r_n \leq d(w_n, z_n) \leq d(w_n, a_n) + d(a_n, z_n).$$

Haciendo $c := 8M$, vemos que la función

$$\sigma : [0, 1/4M) \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\sigma(t) = \left(\frac{1+t}{1-t} \right)^c - \frac{1+2Mt}{1-2Mt}$$

es creciente, ya que si $0 < t < \frac{2}{c}$, entonces

$$\frac{2M}{(1-2Mt)^2} < c \leq \frac{c(1+t)^{c-1}}{(1-t)^{c+1}},$$

luego $\sigma'(t) > 0$. Por consiguiente, $\sigma(t) \geq \sigma(0) = 0$. O sea que, para n grande,

$$\frac{1+2M\alpha_n}{1-2M\alpha_n} \leq \left(\frac{1+\alpha_n}{1-\alpha_n} \right)^c \quad \text{y} \quad \gamma_n \leq 2M\alpha_n,$$

luego

$$\begin{aligned} d(w_n, a_n) &= \frac{1}{2} \log \frac{1+\gamma_n}{1-\gamma_n} \leq \frac{1}{2} \log \frac{1+2M\alpha_n}{1-2M\alpha_n} \leq \\ \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+\alpha_n}{1-\alpha_n} \right)^c &= cd(a_n, b_n) \leq c(d(a_n, z_n) + d(z_n, b_n)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$r_n \leq (c+1)d(a_n, z_n) + cd(z_n, b_n)$$

y (dividiendo por r_n)

$$1 \leq (c+1) \frac{d(a_n, z_n)}{r_n} + c \frac{d(z_n, b_n)}{r_n} \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$, lo cual es absurdo. ■

Teorema 2 *Si G es h -convexo: G tiene estrechos si y sólo si G no es un cuasidisco.*

Prueba. El teorema 1 da cuenta de una implicación. Sólo falta ver que si no existe $M > 0$ tal que dados $a, b \in J$, $\text{diam } J(a, b) \leq M|a-b|$, entonces G tiene estrechos. Como los automorfismos de \mathbb{D} preservan los cuasidiscos, podemos suponer que $0 \in G$.

Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, existirán $a_n, b_n \in J$ tales que

$$\text{diam } J(a_n, b_n) > n |a_n - b_n|. \quad (2.1)$$

Teniendo en cuenta la compacidad de J y tomando subsucesiones, podemos suponer que las sucesiones $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ convergen (euclidianamente) a, digamos, a_0 y b_0 en J . Además, ya que estamos considerando el diámetro euclidiano,

$$|a_n - b_n| < \frac{1}{n} \text{diam } J(a_n, b_n) < \frac{2}{n} \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $a_0 = b_0$.

Veamos que $a_0 \in \mathbb{T}$, razonando por el absurdo.

Supongamos, por el momento, que $a_0 \in \mathbb{D}$. Existen, entonces, $a, b \in J$ cercanos a a_0 y $R \in (0, 1)$ tales que

$$a_0 \in J(a, b) \subseteq \mathbb{D}_R := \{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}.$$

Haciendo

$$r := \frac{1}{4} \min \{d(a, a_0), d(b, a_0)\},$$

podemos considerar que

$$a_n, b_n \in J(a, b) \cap D_h(a_0; r)$$

(el disco hiperbólico).

Definamos $c := 2d(a, b)$ y $f : \mathbb{D} - \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(w) = \frac{\cosh(2d(a, w)) \cosh(2d(b, w)) - \cosh c}{\sinh(2d(a, w)) \sinh(2d(b, w))},$$

y sea

$$G_0 := (\overline{G} \cap \overline{\mathbb{D}_R}) - (D_h(a; r) \cup D_h(b; r)).$$

Como G_0 es un subconjunto no vacío y compacto de $\mathbb{D} - \{a, b\}$ y f es continua, existe $w' \in G_0$ donde f alcanza su valor máximo en G_0 .

Si en el h-triángulo $aw'b$, θ' es el ángulo en w' , entonces (por la ley del coseno) $\cos \theta' = f(w')$. Como $w' \notin \mathbb{T}$, $0 < \theta' < \pi$, luego $-1 < f(w') < 1$.

Sean, por ahora, n fijo y $z \in J(a_n, b_n) - \{a_n, b_n\}$. Véase la figura 1. Si en el h-triángulo azb , γ es el ángulo en z , entonces $f(z) = \cos \gamma \leq f(w') = \cos \theta'$, luego $\gamma \geq \theta'$. Sea $a_n \in J(a, z)$ (el caso $a_n \in J(b, z)$ es análogo); así, $b_n \in J(z, b)$.

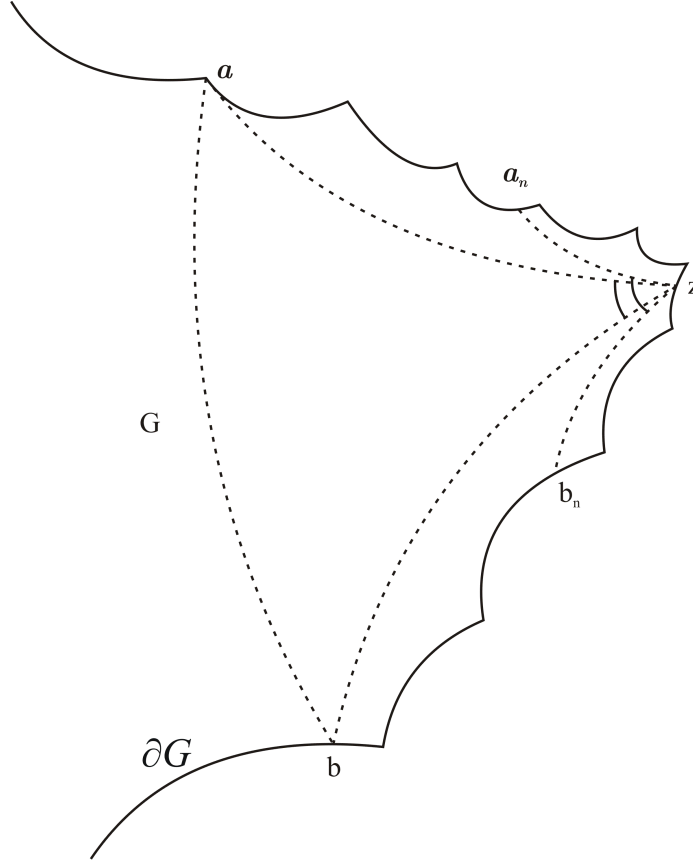


figura 1

Si en el h-triángulo $a_n z b_n$, θ es el ángulo en z , entonces (por la convexidad hiperbólica de G , el h-triángulo abz tiene que estar contenido en \overline{G} , luego en su interior no pueden estar ni a_n ni b_n) $\theta \geq \gamma \geq \theta'$. Tomando ahora el triángulo euclidiano $a_n z b_n$, sean ψ, φ, ψ' los ángulos en a_n, z, b_n respectivamente. Entonces (ya que $0 \in G$) $\varphi \geq \theta$ y (por la ley euclidiana de senos)

$$\frac{|z - b_n|}{|a_n - b_n|} = \frac{\text{sen } \psi}{\text{sen } \varphi} \leq \frac{1}{\text{sen } \varphi},$$

luego (aun si $\varphi \geq \pi/2$, en cuyo caso $|z - b_n| \leq |a_n - b_n|$)

$$|z - b_n| \leq k |a_n - b_n|, \text{ donde } k = \frac{1}{\text{sen } \theta'}.$$

Hagamos

$$C = \{|z' - z''| / |z', z'' \in J(a_n, b_n)\}.$$

Por la compacidad de $J(a_n, b_n)$, existen $z_1, z_2 \in J(a_n, b_n)$ tales que

$$|z_1 - z_2| = \max C = \text{diam } J(a_n, b_n).$$

Pero

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1 - b_n| + |b_n - z_2| \leq 2k |a_n - b_n|,$$

luego (por (2.1))

$$n |a_n - b_n| < \text{diam } J(a_n, b_n) \leq 2k |a_n - b_n|,$$

o sea que $n < 2k$, lo cual es absurdo, ya que k es independiente de n . Hemos probado que $a_0 \in \mathbb{T}$.

Como todos los conceptos involucrados son invariantes bajo rotaciones, podemos rotar a G y considerar $a_0 = 1$.

Sea $e_0 \in J$ lejos de $a_0 = 1$ (por ejemplo, e_0 puede ser el punto de J más alejado de 1); y sean J_1, J_2 los arcos de J entre 1 y e_0 , con J_1 por encima de J_2 , al menos cerca de 1.

Tomando subsucesiones si es necesario, podemos reducir el problema a los dos siguientes casos:

Caso 1, si $a_n, b_n \in J_1$ para cada n :

Es fácil ver que debe haber infinitos n 's tales que $a_n, b_n \in \mathbb{D}$ (si todos los a_n , excepto un número finito, estuvieran en \mathbb{T} , la convexidad hiperbólica de G implicaría que el arco $J(a_n, b_n)$ estaría "cerca" de $\partial\mathbb{D}$ para n grande, y la condición (2.1) no podría cumplirse); luego podemos tomar $a_n, b_n \in \mathbb{D}$ y $\text{Im } a_n, \text{Im } b_n \geq 0$ para toda n .

Por la h-convexidad de G , puede probarse que $J(a_n, b_n)$ está contenido en una región de diámetro

$$\leq \pi(2 - |a_n| - |b_n| + |a_n - b_n|) \quad (2.2)$$

(comparándolo con su perímetro).

Tomemos $|a_n| \geq |b_n|$ (el caso " \leq " es análogo). Para n grande, $|b_n| > \frac{1}{2}$, luego

$$\begin{aligned} |1 - \overline{b_n}a_n| &= \frac{1}{|b_n|} |b_n - |b_n|^2 a_n| > |b_n - |b_n|^2 a_n| \\ &= |(a_n - |b_n|^2 a_n) - (a_n - b_n)| \geq |a_n(1 - |b_n|^2)| - |a_n - b_n| \end{aligned}$$

y

$$|a_n(1 - |b_n|^2)| \geq \frac{1}{2} (1 - |b_n|) (1 + |b_n|) > \frac{1}{2} \frac{3}{2} (1 - |b_n|).$$

De (2.2) y (2.1),

$$n |a_n - b_n| < \text{diam } J(a_n, b_n) \leq \pi(2 - |a_n| - |b_n| + |a_n - b_n|),$$

luego

$$1 - |b_n| \geq \frac{1}{2} (2 - |a_n| - |b_n|) \geq \frac{1}{2} |a_n - b_n| \left(\frac{n}{\pi} - 1 \right),$$

por consiguiente,

$$|1 - \overline{b_n}a_n| > \frac{3}{4} \frac{1}{2} |a_n - b_n| \left(\frac{n}{\pi} - 1 \right) - |a_n - b_n| = |a_n - b_n| \left[\frac{3}{8} \left(\frac{n}{\pi} - 1 \right) - 1 \right],$$

o sea que

$$d_n := \frac{|a_n - b_n|}{|1 - \overline{b_n}a_n|} < \left(\frac{3n}{8\pi} - \frac{11}{8} \right)^{-1} \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Hemos probado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \log \frac{1 + d_n}{1 - d_n} = 0.$$

Sean $R = |e_0 - 1|$ y S la h-recta entre 1 y e_0 . Podemos suponer que

$$|a_n - 1|, |b_n - 1| < \frac{R}{4}$$

y

$$a_n, b_n \in J(1, a_1) =: J_3 \subseteq D_e(1; R/4)$$

para cada n .

Hagamos

$$A := \{d(z, w)/z \in J_3 \cap \mathbb{D} \text{ y } w \in J_2 \cap \mathbb{D}\}$$

y consideremos dos subcasos:

a) Si $\inf A = 0$: Aquí no usamos (2.1).

Existen sucesiones $(a'_n)_n$ en $\mathbb{D} \cap J_3$ y $(b'_n)_n$ en $\mathbb{D} \cap J_2$ tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a'_n, b'_n) = 0.$$

La geodésica hiperbólica $\widehat{a'_n b'_n}$ corta a S en un punto z_n ; y la frontera del disco euclidiano $D_e(1; R/4)$ corta a S en un punto z_0 .

Hagamos

$$r_0 := \begin{cases} 1, & \text{si } e_0 \in \mathbb{T}, \\ \min\{1, d(z_0, e_0)\}, & \text{si } e_0 \in \mathbb{D} \end{cases}$$

y

$$r_n := \begin{cases} 1, & \text{si } e_0 \in \mathbb{T}, \\ \min\{1, d(z_n, e_0)\}, & \text{si } e_0 \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

Podemos considerar $r_n \geq r_0$ para toda n , ya que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a'_n - b'_n| = 0,$$

luego $\lim_{n \rightarrow \infty} a'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b'_n = 1$ y entonces necesariamente $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(z_n, e_0) = +\infty.$$

Es claro, entonces, que $r_n \leq 1$ y si $D_n := D_h(z_n; r_n)$,

$$z_n \in S \cap D_n \subseteq G;$$

además, a'_n, b'_n están en lados diferentes de S ,

$$\frac{d(a'_n, z_n)}{r_n}, \frac{d(b'_n, z_n)}{r_n} \leq \frac{d(a'_n, b'_n)}{r_0} \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$, luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(a'_n, z_n)}{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(b'_n, z_n)}{r_n} = 0,$$

satisfaciéndose la definición 4.

b) Si $\inf A > 0$:

Tomemos $z_0 \in J_2 \cap D_e(1; R/4)$.

Para cada n , existe $w_n \in J(a_n, b_n)$ (compacto) tal que

$$|w_n - a_n| = \max \{|w - a_n| / w \in J(a_n, b_n)\}.$$

Sean S_n la h-recta por w_n, z_0 y z_n el punto de corte de la h-geodésica $\widehat{a_n b_n}$ con S_n .

Claramente a_n, b_n están en lados diferentes de S_n .

Sea, de nuevo,

$$d_n = \frac{|a_n - b_n|}{|1 - \overline{b_n a_n}|}$$

y hagamos

$$\gamma_n := \frac{|a_n - w_n|}{|1 - \overline{a_n w_n}|}.$$

Veremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(a_n, b_n)}{d(a_n, w_n)} = 0.$$

Si $\limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma_n > 0$, existen $\epsilon > 0$ y una subsucesión (que notaremos por la propia $(\gamma_n)_n$) tal que $\gamma_n \geq \epsilon$ para cada n . Así,

$$d(a_n, w_n) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \gamma_n}{1 - \gamma_n} \geq \frac{1}{2} \log \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} =: \epsilon_0 > 0,$$

luego (aun si $w_n \in \mathbb{T}$)

$$\frac{d(a_n, b_n)}{d(a_n, w_n)} \leq \frac{d(a_n, b_n)}{\epsilon_0} \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Sea, entonces, $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$. Podemos suponer que $\gamma_n < 1$ para toda n , o sea que $w_n \in \mathbb{D}$. En $J(a_n, b_n)$, existen u_n, v_n tales que

$$\text{diam } J(a_n, b_n) = |u_n - v_n|.$$

Por (2.1) y por la definición de w_n ,

$$n|a_n - b_n| < |u_n - v_n| \leq |u_n - a_n| + |a_n - v_n| \leq 2|a_n - w_n|$$

y

$$\begin{aligned} |1 - \overline{a_n}w_n| &\leq |1 - \overline{a_n}b_n| + |\overline{a_n}(b_n - w_n)| \leq \\ &|1 - \overline{a_n}b_n| + |b_n - a_n| + |a_n - w_n|, \end{aligned}$$

luego

$$\frac{1}{\gamma_n} \leq \frac{|1 - \overline{a_n}b_n|}{|a_n - w_n|} + \frac{2}{n} + 1$$

y

$$\frac{d_n}{\gamma_n} \leq \frac{|a_n - b_n|}{|a_n - w_n|} + d_n \left(\frac{2}{n} + 1 \right) < \frac{2}{n} + d_n \left(\frac{2}{n} + 1 \right) \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$, ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ (véase (2.3)).

Como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log \frac{1+x}{1-x}}{x} = 2,$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(a_n, b_n)}{d(a_n, w_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\frac{1}{2} \log \frac{1+d_n}{1-d_n}}{d_n} d_n}{\frac{\frac{1}{2} \log \frac{1+\gamma_n}{1-\gamma_n}}{\gamma_n} \gamma_n} = \frac{2}{2} 0 = 0.$$

Tomando subsucesiones, si es necesario, podemos ahora considerar dos posibilidades:

i) Si $d(a_n, w_n) \geq \frac{1}{2} \inf A$ para cada n : Denotemos por m el $\inf A$. Puede tomarse $d(a_n, b_n) < \frac{m}{4}$.

Hagamos $m' = \min \{1, \frac{m}{8}\}$, $r_n = m'$ y $D_n = D_h(z_n; r_n)$ para cada n .

Claramente

$$\frac{d(a_n, z_n)}{r_n}, \frac{d(b_n, z_n)}{r_n} \leq \frac{d(a_n, b_n)}{m'} \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$, luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(a_n, z_n)}{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(b_n, z_n)}{r_n} = 0.$$

Además, como $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, z_0) = +\infty$, podemos suponer que $m \leq d(a_n, z_0)$ para toda n , luego

$$r_n \leq \frac{m}{8} \leq m - d(a_n, b_n) \leq d(a_n, z_0) - d(a_n, z_n) \leq d(z_n, z_0).$$

También,

$$d(z_n, w_n) \geq d(a_n, w_n) - d(a_n, z_n) \geq \frac{m}{2} - d(a_n, b_n) > \frac{m}{4} > r_n,$$

luego (por ser G h-convexo)

$$S_n \cap D_n \subseteq \widehat{z_n z_0} \cup \widehat{z_n w_n} \subseteq G$$

(considerando los arcos abiertos).

ii) Si $d(a_n, w_n) < \frac{m}{2}$ para cada n : Haciendo $r_n := \min\{1, d(z_n, w_n)\}$ y tomando también $d(a_n, b_n) < \frac{m}{4}$ y $d(z_0, a_n) \geq m$, vemos que $r_n \leq 1$ y

$$\begin{aligned} d(z_0, z_n) &\geq d(z_0, a_n) - d(a_n, z_n) \geq m - d(a_n, b_n) > \\ \frac{3m}{4} &\geq \frac{m}{2} + d(a_n, b_n) > d(a_n, w_n) + d(a_n, z_n) \geq d(z_n, w_n) \geq r_n, \end{aligned}$$

luego

$$S_n \cap D_n \subseteq \widehat{z_n z_0} \cup \widehat{z_n w_n} \subseteq G$$

(considerando los arcos abiertos), ya que G es h-convexo.

Además,

$$\frac{d(a_n, z_n)}{1}, \frac{d(b_n, z_n)}{1} \leq d(a_n, b_n) \rightarrow 0$$

y si $r_n = d(z_n, w_n)$, entonces

$$\begin{aligned} r_n &\geq d(b_n, w_n) - d(b_n, z_n) \geq d(a_n, w_n) - d(a_n, b_n) - d(b_n, z_n) \geq \\ &d(a_n, w_n) - d(a_n, b_n) - d(b_n, a_n), \end{aligned}$$

luego, considerando subsucesiones si es necesario,

$$\frac{r_n}{d(b_n, z_n)} \geq \frac{r_n}{d(a_n, b_n)} \geq \frac{d(a_n, w_n)}{d(a_n, b_n)} - 2 \rightarrow +\infty$$

cuando $n \rightarrow \infty$, y entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(b_n, z_n)}{r_n} = 0;$$

análogamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(a_n, z_n)}{r_n} = 0.$$

En cualquiera de estos casos, vemos que G tiene estrechos.

Caso 2, si $a_n \in J_1$ y $b_n \in J_2$ para cada n :

J_1, J_2 no pueden cruzar más de una vez al eje real, debido a la convexidad hiperbólica de G . Además, por la h-convexidad de G y la condición (2.1), es fácil ver que

$$\text{diam } J(a_n, b_n) \leq 2|a_n - 1|$$

y

$$\text{diam } J(a_n, b_n) \leq 2|b_n - 1|$$

para n grande.

Sean α_n el ángulo entre $a_n - 1$ y el eje real ($\alpha_n = -\arg(1 - a_n)$), y β_n el ángulo entre $b_n - 1$ y el eje real. Podemos, entonces, considerar dos subcasos:

a) Si, cerca a 1, J_1 está por encima del eje real y J_2 está por debajo:

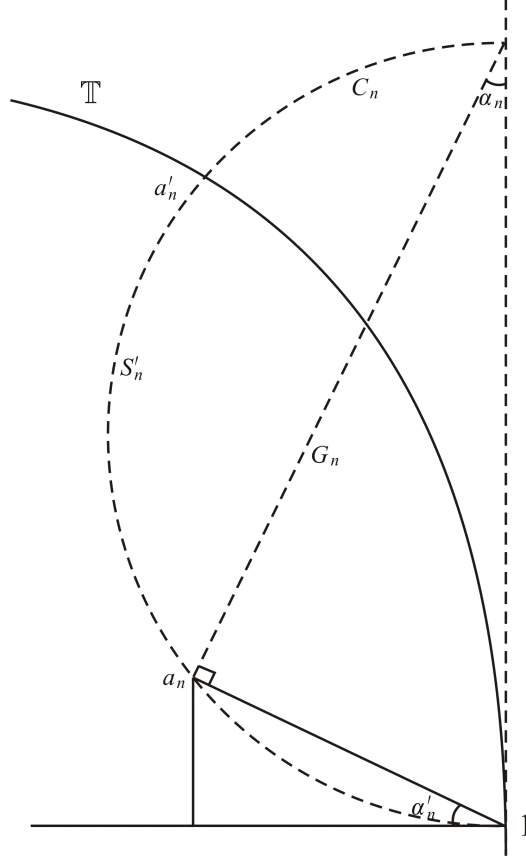


figura 2

Sean S'_n la h-recta por a_n y 1 , C_n el semicírculo euclidiano que contiene a S'_n con un extremo en 1 , a'_n el punto de corte de C_n con \mathbb{T} y G_n el dominio a la derecha limitado por S'_n y \mathbb{T} . Vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{diam } J(a_n, b_n) &\leq |a_n - 1| \leq \text{diam } G_n = |a'_n - 1| \leq \text{diam } C_n \\ &= \frac{|a_n - 1|}{\text{sen}^2 \alpha_n} = \frac{\text{Im } a_n}{\text{sen}^2 \alpha_n} \leq \frac{\text{Im}(a_n - b_n)}{\text{sen}^2 \alpha_n} \leq \frac{|a_n - b_n|}{\text{sen}^2 \alpha_n}, \end{aligned}$$

luego (véase la figura 2)

$$\text{sen}^2 \alpha_n \leq \frac{2|a_n - b_n|}{\text{diam } J(a_n, b_n)} < \frac{2}{n}$$

por la condición (2.1). Por consiguiente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

Así, para n grande, $\sin \alpha_n < \frac{1}{4}$, $1 - |a_n| > \frac{1}{2} |a_n - 1|$ y $|1 - a_n| < \frac{1}{2}$, luego

$$\left|1 - |a_n|^2\right| = (1 + |a_n|)(1 - |a_n|) > \frac{1}{2} |a_n - 1|$$

y

$$|\overline{a_n}(a_n - b_n)| \leq |a_n - b_n| < \frac{1}{n} \text{diam } J(a_n, b_n) < \frac{2}{n} |a_n - 1|,$$

por lo cual

$$|1 - \overline{a_n}b_n| = \left| \left(1 - |a_n|^2\right) + \overline{a_n}(a_n - b_n) \right| \geq \left|1 - |a_n|^2\right| - |\overline{a_n}(a_n - b_n)| \geq |a_n - 1| \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n}\right);$$

por consiguiente,

$$\frac{|a_n - b_n|}{|1 - \overline{a_n}b_n|} < \frac{2}{n \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n}\right)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

luego $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = 0$.

Tomando S como la h-recta contenida en el eje real (el intervalo $(-1, 1)$), y procediendo como en el subcaso **1-a**, vemos que G satisface la definición 4.

b) Si, cerca a 1, J_2 (y por tanto J_1) está por encima del eje real (el caso en que ambos arcos están por debajo es simétrico):

Podemos considerar $|b_n - 1| \leq |b_1 - 1|$ para cada n . Sean S_0 la h-recta por b_1 y 1, y $\gamma_n = \alpha_n - \beta_n$. Por la h-convexidad de G , b_n está por debajo de S_0 , que llega a 1 tangente al eje real; luego $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$.

En el triángulo euclidiano $a_n 1 b_n$, sea γ'_n el ángulo en b_n ; γ_n es el ángulo en 1. Por la condición (2.1) tenemos que

$$n |a_n - b_n| < \text{diam } J(a_n, b_n) \leq 2 |a_n - 1|,$$

al menos para n grande, luego, por la ley euclidiana de senos,

$$\sin \gamma_n = \sin \gamma'_n \frac{|a_n - b_n|}{|a_n - 1|} < \frac{2}{n}.$$

Por consiguiente, $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$, luego $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n + \gamma_n) = 0$.

Entonces, para n grande, se tiene (como arriba),

$$1 - |a_n| > \frac{1}{2} |a_n - 1|$$

y

$$|1 - \overline{a_n} b_n| \geq |a_n - 1| \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n} \right),$$

luego (como arriba)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = 0.$$

Si S es la h-recta entre 1 y e_0 , como en el subcaso **1-a**, se puede ver que G tiene estrechos.

■

Nota 3 *Esta demostración sugiere una manera natural de clasificar los estrechos.*

Capítulo 3

CLASIFICACIÓN DE ESTRECHOS

Consideraremos G un subdominio de \mathbb{D} , $J = \partial_e G$ y $J' = \partial_h G$.

Si G tiene estrechos y $a_n, b_n, D_n, z_n, r_n, S_n$ son como en la definición 4 :

Definición 5 Existen $(z_{n_k})_k$ subsucesión de $(z_n)_n$ y $z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ tales que $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = z_0$ (por la compacidad de $\overline{\mathbb{D}}$). Para cada límite subsecuencial z_0 de $(z_n)_n$, diremos que G tiene un **estrecho en** z_0 . Notaremos $(z_{n_k})_k$ como $(z_n)_n$.

Proposición 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = z_0 \in J$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = 0$.

Prueba.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(a_n, z_n)}{r_n} r_n = 0,$$

luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n - z_n|}{|1 - \overline{a_n} z_n|} = 0$$

y

$$|a_n - z_0| \leq \frac{|a_n - z_n|}{|1 - \overline{a_n} z_n|} (|1 - \overline{a_n} z_n| + |z_n - z_0|);$$

por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = z_0 \in J$, ya que $a_n \in J' \subseteq J$, que es cerrado.

Análogamente, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = z_0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n, z_n) = 0$, luego $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = 0$, ya que $d(a_n, b_n) \leq d(a_n, z_n) + d(z_n, b_n)$. ■

Nota 4 En adelante, consideraremos G h -convexo.

Teorema 3 Si G tiene un estrecho en z_0 , entonces $z_0 \in \mathbb{T}$.

Prueba. Sean (para $n \in \mathbb{Z}^+$) $a_n, b_n, D_n, z_n, r_n, S_n$ como arriba y supongamos que $z_0 \in \mathbb{D}$.

Como G es un dominio de Jordan, existe $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow J$ continua y sobreyectiva tal que φ es inyectiva en $[0, 2\pi)$ y $\varphi(2\pi) = \varphi(0)$. Puede tomarse $\varphi(\pi) = z_0$. Existe $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal

que si $t \in (\pi - \delta, \pi + \delta)$, entonces

$$|\varphi(t) - \varphi(\pi)| < \frac{1 - |z_0|}{2} \text{ y } z_0 \in J(a', b'),$$

donde $a' = \varphi(\pi - \delta)$ y $b' = \varphi(\pi + \delta)$, luego

$$|\varphi(t)| \leq |\varphi(t) - \varphi(\pi)| + |\varphi(\pi)| < \frac{1 - |z_0|}{2} + |z_0| = \frac{1 + |z_0|}{2} =: R.$$

Así, (por la continuidad de φ) $|a'|, |b'| \leq R$ y

$$z_0 \in J(a', b') \subseteq \mathbb{D}_R := \{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}.$$

Hagamos

$$r := \frac{1}{4} \min \{d(a', z_0), d(b', z_0)\},$$

$$G_0 := (\overline{\mathbb{D}_R} \cap \overline{G}) \setminus (D_h(a'; r) \cup D_h(b'; r))$$

y definamos $f : \mathbb{D} \setminus \{a', b'\} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(w) = \frac{\cosh(2d(a', w)) \cosh(2d(b', w)) - \cosh(2d(a', b'))}{\sinh(2d(a', w)) \sinh(2d(b', w))}.$$

Como f es continua y G_0 es compacto, existe $w' \in G_0$ tal que $f(w) \leq f(w')$ para cada $w \in G_0$. Además, podemos tomar $J(a_n, b_n) \subseteq D_h(z_0; r) \cap J(a', b')$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.

Si en el h-triángulo $a'w'b'$, θ_0 es el ángulo en w' , entonces (por la ley del coseno) $\cos \theta_0 = f(w')$ y $0 < \theta_0 < \pi$ (ya que $w' \in \mathbb{D}$). Fijemos, por ahora, $n \in \mathbb{Z}^+$ y

$$z \in J(a_n, b_n) \setminus \{a_n, b_n\}.$$

En el h-triángulo $a'zb'$, sea γ el ángulo en z . Como $z \in G_0$,

$$f(z) = \cos \gamma \leq f(w') = \cos \theta_0,$$

luego $\gamma \geq \theta_0$.

Sea $a_n \in J(a', z)$ (análogamente si $a_n \in J(z, b')$); luego $b_n \in J(z, b')$. Véase la figura 3. Por la convexidad hiperbólica de G , a_n está hacia afuera del h-segmento $\widehat{a'z}$ respecto a G y b_n está hacia afuera de $\widehat{b'z}$ respecto a G ; luego el ángulo θ en z del h-triángulo $a_n z b_n$ es $\geq \gamma$; por consiguiente $\theta \geq \theta_0$. Si en el e-triángulo $a_n z b_n$, los ángulos son Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 en a_n, z, b_n respectivamente, entonces $\Psi_2 \geq \theta$, y por lo tanto $\Psi_2 \geq \theta_0$.

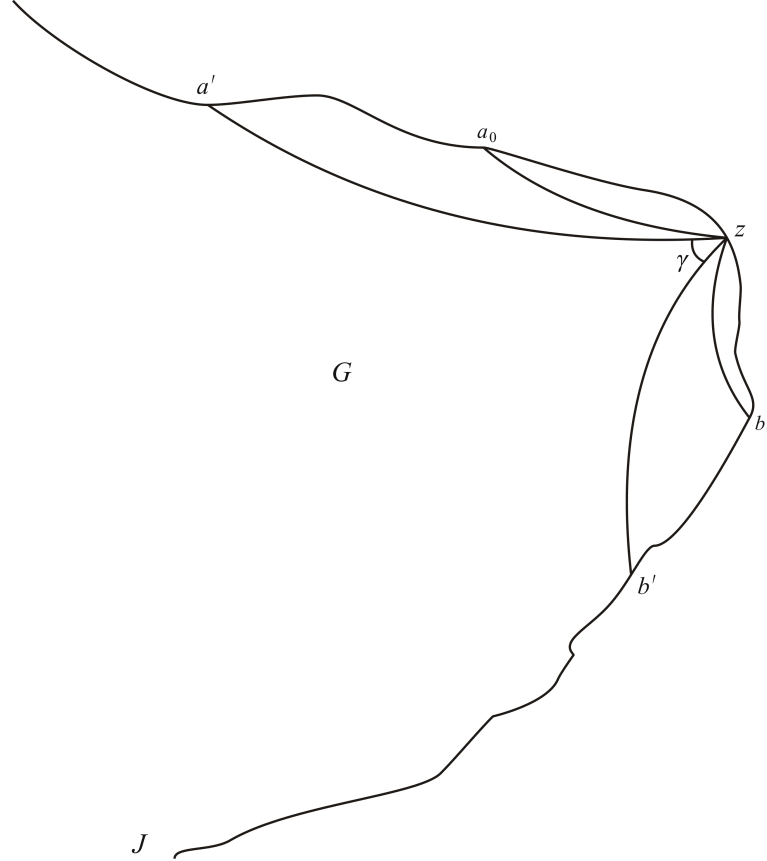


figura 3

Por la ley (euclidiana) de senos,

$$\frac{|z - b_n|}{|a_n - b_n|} = \frac{\text{sen } \Psi_1}{\text{sen } \Psi_2} \leq \frac{1}{\text{sen } \Psi_2}.$$

Si $\Psi_2 < \frac{\pi}{2}$, $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$, luego $0 < \text{sen } \theta_0 \leq \text{sen } \Psi_2$ y entonces

$$\frac{1}{\text{sen } \Psi_2} \leq \frac{1}{\text{sen } \theta_0} =: K_0,$$

o sea que

$$|z - b_n| \leq K_0 |a_n - b_n|.$$

Si $\Psi_2 \geq \frac{\pi}{2}$, $\Psi_2 > \Psi_1$, luego $|z - b_n| < |a_n - b_n| \leq K_0 |a_n - b_n|$.

Análogamente se ve que, en cualquier caso, $|z - a_n| \leq K_0 |a_n - b_n|$.

Como $d(a_n, b_n) \leq d(a_n, z_n) + d(z_n, b_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, donde

$$\alpha_n = \frac{|a_n - b_n|}{|1 - \overline{a_n} b_n|};$$

luego $\alpha_n < \frac{1}{4K_0}$ para n grande. Pero existe $w_n \in S_n$ tal que $w_n \in J(a_n, b_n)$. Así,

$$|1 - \overline{a_n} w_n| \geq |1 - \overline{a_n} b_n| - |\overline{a_n}(b_n - w_n)| \geq |1 - \overline{a_n} b_n| - |b_n - w_n| \geq \frac{3}{4} |1 - \overline{a_n} b_n|,$$

ya que

$$|w_n - b_n| \leq K_0 |a_n - b_n| < \frac{1}{4} |1 - \overline{a_n} b_n|.$$

Entonces

$$\gamma_n := \frac{|a_n - w_n|}{|1 - \overline{a_n} w_n|} \leq \frac{K_0 |a_n - b_n|}{|1 - \overline{a_n} w_n|} \leq \frac{4}{3} K_0 \alpha_n \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Sean $c := 8K_0$ y $\sigma : [0, 2/c) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\sigma(t) = \left(\frac{1+t}{1-t} \right)^c - \frac{1+2K_0 t}{1-2K_0 t}.$$

Si $0 < t < \frac{2}{c}$,

$$\frac{2K_0}{(1-2K_0 t)^2} < c \leq \frac{c(1+t)^{c-1}}{(1-t)^{c+1}},$$

luego $\sigma'(t) > 0$. O sea que σ es creciente, con lo cual $\sigma(t) > \sigma(0) = 0$. Por consiguiente, como $\gamma_n \leq 2K_0 \alpha_n$, entonces

$$\begin{aligned} d(w_n, a_n) &= \frac{1}{2} \log \frac{1+\gamma_n}{1-\gamma_n} \leq \frac{1}{2} \log \frac{1+2K_0 \alpha_n}{1-2K_0 \alpha_n} \leq \\ \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+\alpha_n}{1-\alpha_n} \right)^c &= c d(a_n, b_n) \leq c(d(a_n, z_n) + d(z_n, b_n)). \end{aligned}$$

Como $w_n \notin D_n$,

$$r_n \leq d(w_n, z_n) \leq c(d(a_n, z_n) + d(z_n, b_n)) + d(a_n, z_n);$$

luego

$$1 \leq (c+1) \frac{d(a_n, z_n)}{r_n} + c \frac{d(z_n, b_n)}{r_n} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

lo cual es absurdo. Por tanto $z_0 \in \mathbb{T}$. ■

De aquí obtenemos

Corolario 1 *Si G es h -acotado ($J = J'$) entonces G es un cuasidisco.*

Prueba. Supongamos que G no es un cuasidisco.

Por el teorema 2 y la definición 5, existe $z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ tal que G tiene un estrecho en z_0 ; y por el teorema 3, $|z_0| = 1$.

Por hipótesis, existe $R > 0$ tal que $G \subseteq D_h(0; R)$. Entonces $\overline{G} := \text{adh}_e G \subseteq \text{adh}_e D_h(0; R) = \text{adh}_h D_h(0; R)$. Pero $z_0 \in J \subseteq \overline{G}$, lo cual implica que

$$\frac{1}{2} \log \frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|} = d(z_0, 0) \leq R;$$

o sea que

$$\frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|} \leq e^{2R};$$

por consiguiente,

$$|z_0| \leq \frac{e^{2R} - 1}{e^{2R} + 1} < 1,$$

absurdo. ■

Observación: Los estrechos están, entonces, en el infinito. En los puntos finitos (en el interior de \mathbb{D}) de ∂G puede pensarse, en lugar de algo parecido a una cúspide, en el ángulo mínimo que forma la frontera allí. Pero primero debemos precisar este concepto.

Sean G h -convexo, $z_0 \in G$, $a \in \partial G$ y $S = \widehat{az_0}$, con $a \in \mathbb{D}$. Como G es un dominio de Jordan, $\partial_e G$ puede parametrizarse mediante una función $\varphi : [-\pi, \pi] \rightarrow \partial G$ sobreyectiva, continua e inyectiva en $(-\pi, \pi]$ tal que $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$ y $\varphi(0) = a$. Véase la figura 4. Por la

continuidad, existe un $\epsilon > 0$ tal que

$$|\varphi(t) - a| < \frac{1}{4} |z_0 - a|$$

para $-\epsilon < t < \epsilon$.

Dado $t \in (-\epsilon, \epsilon) - \{0\}$, sea $\theta(t)$ el ángulo en a del triángulo hiperbólico $z_0 a \varphi(t)$. Por la convexidad hiperbólica de G , θ es decreciente y es $\leq \pi$ en $(0, \epsilon)$. Luego existe

$$\sup\{\theta(t) \mid t \in (0, \epsilon)\} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \theta(t) =: \theta_1.$$

Análogamente, θ es creciente y es $\leq \pi$ en $(-\epsilon, 0)$. Sea, entonces,

$$\theta_2 := \sup\{\theta(t) \mid t \in (-\epsilon, 0)\} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \theta(t).$$

Definición 6 Definimos, entonces, $\theta_0 := \theta_1 + \theta_2$ como el **ángulo** de ∂G en a .

Veamos que esta definición es independiente de z_0 :

Tomemos, ahora, $z'_0 \in G$, con z'_0, z_0 y a no h-colineales. Dado $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, sea $\gamma(t)$ el ángulo en a del h-triángulo $z'_0 a \varphi(t)$. Notemos α_0 el ángulo en a del h-triángulo $z_0 a z'_0$. Consideremos el caso en que $\widehat{z'_0 a} \cap \Delta \neq \emptyset$, donde Δ es el h-triángulo $z_0 a \varphi(\epsilon)$ (el caso en que Δ es el h-triángulo $z_0 a \varphi(-\epsilon)$ es análogo).

Así, dada $t \in (0, \epsilon)$, es claro que $\theta(t) = \alpha_0 + \gamma(t)$, luego

$$\gamma_1 := \lim_{t \rightarrow 0^+} \gamma(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \theta(t) - \alpha_0 = \theta_1 - \alpha_0.$$

Similarmente, $\gamma_2 := \lim_{t \rightarrow 0^-} \gamma(t) = \theta_2 + \alpha_0$.

Por lo tanto, $\gamma_1 + \gamma_2 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_0$.

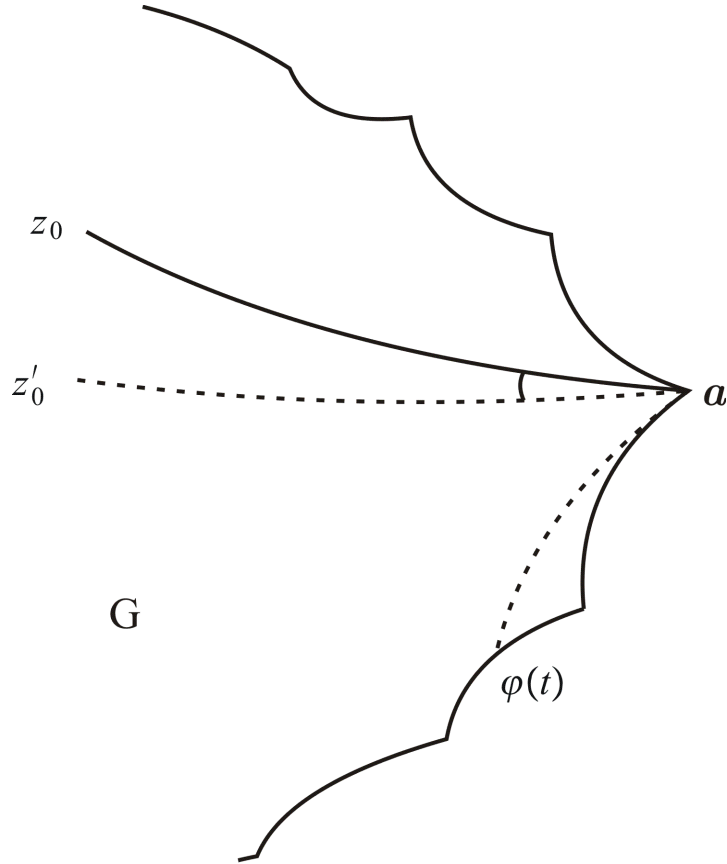


figura 4

Proposición 2 Si G es un dominio h -convexo que contiene un disco hiperbólico con centro en 0 de h -radio r y $a \in \partial G$ es tal que $d(a, 0) = b$, entonces el ángulo θ de ∂G en a es tal que

$$\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \geq \frac{\operatorname{senh}(2r)}{\operatorname{senh}(2b)}.$$

Prueba. Sean l y l' las h -geodésicas desde a tangentes a $D_h(0; r)$ en, digamos, c y c' (véase la figura 5). Si $\frac{\beta}{2}$ es el ángulo entre $\widehat{0a}$ y l , entonces (por la ley hiperbólica de senos)

$$\operatorname{sen} \frac{\beta}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = \frac{\operatorname{senh}(2r)}{\operatorname{senh}(2b)}.$$

Pero (por la h -convexidad de G) el h -triángulo hiperbólico $0ac$ está contenido en G , luego $\frac{\beta}{2} \leq \frac{\theta}{2}$ (por la definición de θ). Así,

$$\frac{\operatorname{senh}(2r)}{\operatorname{senh}(2b)} = \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \leq \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}.$$

Además, si Δ es el h-triángulo acc' y $G = \text{int}(\Delta \cup \overline{D_h(0; r)})$, entonces G es un dominio h-convexo, $a \in \partial G$ y si θ es el ángulo de ∂G en a , es claro que $\theta = \beta$, luego

$$\text{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{\text{senh}(2r)}{\text{senh}(2b)}.$$

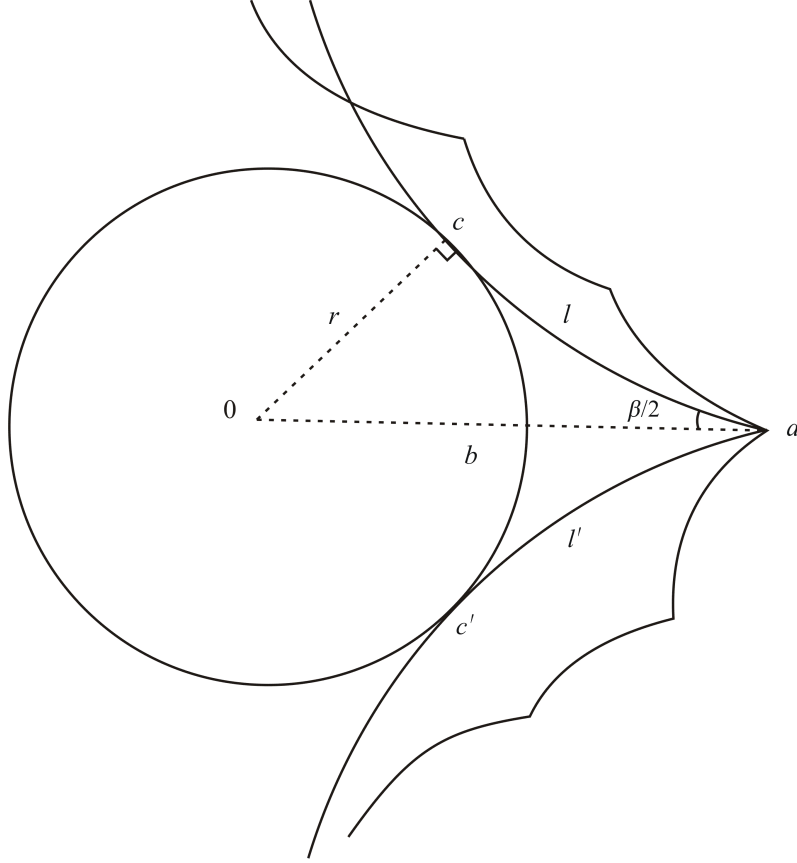


figura 5

■

Proposición 3 Si G tiene un estrecho en z_0 y a_n, b_n son como en la definición 5 y γ_n es el ángulo en z_0 en el e-triángulo $a_n z_0 b_n$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$.

Prueba. Podemos rotar y considerar $z_0 = 1$. Sean α_n, β_n los ángulos en a_n, b_n del e-triángulo $a_n 1 b_n$. Si $|1 - b_n| \leq |1 - a_n|$, entonces

$$|1 - \overline{a_n} b_n| \leq |1 - b_n| + |b_n - \overline{a_n} b_n| \leq |1 - b_n| + |b_n| |1 - a_n| \leq 2|1 - a_n|,$$

luego (por la ley de senos)

$$\operatorname{sen} \gamma_n = \frac{|a_n - b_n|}{|1 - a_n|} \operatorname{sen} \beta_n \leq \frac{2|a_n - b_n|}{|1 - \overline{a_n}b_n|} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Pero

$$\frac{|a_n - b_n|}{|1 - \overline{a_n}b_n|} < \frac{1}{2}$$

para n grande, luego

$$|a_n - b_n| < \frac{1}{2} |1 - \overline{a_n}b_n| \leq |1 - a_n|,$$

o sea que $\gamma_n < \beta_n$, luego $\gamma_n < \frac{\pi}{2}$. Por consiguiente, $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$.

El caso $|1 - a_n| \leq |1 - b_n|$ es análogo. ■

Podemos, ahora, clasificar los estrechos.

Nota 5 *En lo que sigue de este capítulo, supondremos que G tiene un estrecho en z_0 . Además, como la definición de estrecho está dada en términos puramente hiperbólicos, (aplicando un automorfismo si es necesario) no se pierde generalidad si tomamos $z_0 = 1$ y $0 \in G$. Por la convexidad hiperbólica de G , $J = \partial_e G$ no puede cortar al eje real en más de dos puntos, luego $J - \mathbb{R}$ tiene exactamente dos componentes: J^+ por encima de \mathbb{R} y J^- por debajo de \mathbb{R} . Notaremos $S := (-1, 1)$ (la h -recta contenida en el eje real).*

Definición 7 *G tiene un **estrecho regular** en 1 sii existen sucesiones de puntos $a_n \in J^+ \cap J'$, y $b_n \in J^- \cap J'$, de h -discos D_n con h -centro z_n y h -radio $r_n \leq 1$ y h -rectas S_n tales que $z_n \in S_n \cap D_n \subseteq G$, a_n, b_n están en lados diferentes de S_n , $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$ y*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(a_n, z_n)}{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(b_n, z_n)}{r_n} = 0.$$

En este caso, como veremos en el siguiente teorema, r_n y S_n pueden tomarse fijos.

Teorema 4 *(caracterización de estrechos regulares) G tiene un estrecho regular en 1 si y sólo si existen sucesiones de puntos $a_n \in J' \cap J^+$ y $b_n \in J' \cap J^-$, de h -discos D_n con*

h -centro z_n y h -radio 1 tales que $z_n \in S \cap D_n \subseteq G$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n, z_n) = 0.$$

Prueba. Una implicación es clara. Probemos que la definición implica esta última versión.

Sean, entonces $a_n, b_n, D_n, z_n, r_n, S_n$ como en la definición 7. Estamos considerando $z_0 = 1$.

Además, podemos suponer que

$$|a_n - 1| \leq \frac{1}{4} |a_1 - 1| \quad y \quad |b_n - 1| \leq \frac{1}{4} |b_1 - 1|$$

para cada $n > 1$. Llamemos z'_n el punto de corte de S con $\widehat{a_n b_n}$ y $D'_n := D_h(z'_n; 1)$.

Así,

$$d(a_n, z'_n) \leq d(a_n, b_n) \leq \frac{d(a_n, z_n)}{r_n} r_n + \frac{d(z_n, b_n)}{r_n} r_n \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty;$$

luego $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, z'_n) = 0$. Análogamente, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n, z'_n) = 0$. Por consiguiente,

$$|z'_n - a_n| = \frac{|z'_n - a_n|}{|1 - \overline{a_n} z'_n|} |1 - \overline{a_n} z'_n|$$

tiende a cero, luego (por la proposición 1)

$$|z'_n - 1| \leq |z'_n - a_n| + |a_n - 1| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty;$$

o sea que $\lim_{n \rightarrow \infty} z'_n = 1$.

Finalmente, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(z'_n, 0) = +\infty$, luego (por la h -convexidad de G)

$$z'_n \in D'_n \cap S \subseteq \widehat{0 z'_n} \cup \widehat{z'_n 1} \subseteq G,$$

al menos para n grande. ■

Definición 8 G tiene un *estrecho irregular* en 1 sii G no tiene un estrecho regular en 1.

Teorema 5 Supongamos que G tiene un estrecho irregular en 1. Entonces:

a) Existen sucesiones de puntos a_n, b_n en $J' \cap J^+$ (o, alternativamente, en $J' \cap J^-$), de h -discos D_n con h -centro z_n y h -radio $r_n \leq 1$ y h -rectas S_n tales que a_n, b_n están en lados diferentes de S_n , $z_n \in S_n \cap D_n \subseteq G$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(a_n, z_n)}{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(b_n, z_n)}{r_n} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1.$$

b) No existen $R > 0$ y $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ tales que $|\text{Arg}(1 - z)| < \theta$ para cada $z \in G \cap D(1; R)$.

Prueba. **a)** Sean $a_n, b_n, D_n, z_n, r_n, S_n$ como en la definición.

Sean

$$A^+ = \{n \in \mathbb{Z}^+ / a_n \in J^+\}, \quad A^- = \{n \in \mathbb{Z}^+ / a_n \in J^-\},$$

$$B^+ = \{n \in \mathbb{Z}^+ / b_n \in J^+\} \quad \text{y} \quad B^- = \{n \in \mathbb{Z}^+ / b_n \in J^-\}.$$

Como $A^+ \cup A^- = \mathbb{Z}^+ = B^+ \cup B^-$, entonces

$$\begin{aligned} (A^+ \cap B^+) \cup (A^+ \cap B^-) \cup (A^- \cap B^+) \cup (A^- \cap B^-) &= \\ [A^+ \cap (B^+ \cup B^-)] \cup A^- &= \mathbb{Z}^+. \end{aligned}$$

Pero $A^+ \cap B^-$ y $A^- \cap B^+$ deben ser finitos (de lo contrario, algunas subsucesiones cumplirían la definición 7), luego $A^+ \cap B^+$ o $A^- \cap B^-$ es infinito; así que algunas subsucesiones satisfacen lo que se quiere demostrar.

b) Supongamos que existen tales R y θ ; y sean $a_n, b_n (\in J' \cap J^+)$, D_n, z_n, r_n, S_n como en **a**. Sea $a_0 \in J^+ \cap D(1; R)$. Podemos suponer que $a_n, b_n \in J(1, a_0) \subseteq J^+$ para cada n . El ángulo de Stolz

$$\Delta = \{z \in D(1; R) / |\text{Arg}(1 - z)| < \theta\}$$

está contenido en un "lente" Λ limitado por dos arcos de círculo entre -1 y 1 , simétricos respecto al eje real, que forman un ángulo, digamos β_0 , con éste. Sean $\beta_0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ y $q \in (\sin \beta, 1)$. Como a_n, b_n están en lados diferentes de S_n , por la conexidad de $J(a_n, b_n)$, existe $w'_n \in S_n \cap J(a_n, b_n)$ y puesto que $S_n \cap D_n \subseteq G$, entonces $w'_n \notin D_n$; o sea que $d(z_n, w'_n) \geq r_n$.

Hagamos

$$\alpha_n := \frac{d(a_n, z_n)}{r_n} \quad \text{y} \quad \beta_n := \frac{d(b_n, z_n)}{r_n},$$

que pueden tomarse < 1 .

Como $L_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $L_n(z) = d(z_n, z)$ (n está fijo) es continua y

$$L_n(a_n) < r_n \leq L_n(w'_n),$$

existe $w_n \in J(a_n, w'_n)$ (que es conexo) tal que $d(w_n, z_n) = L_n(w_n) = r_n$.

En el h-triángulo $a_n w_n b_n$, sea φ_n el ángulo en w_n . Por la ley del coseno,

$$\cos \varphi_n = \frac{\cosh(2d(a_n, w_n)) \cosh(2d(w_n, b_n)) - \cosh(2d(a_n, b_n))}{\sinh(2d(a_n, w_n)) \sinh(2d(w_n, b_n))}. \quad (3.1)$$

Pero, para $x \geq 0$,

$$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \leq 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = \cosh x.$$

Sean

$$F_1(x) := 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{18} - \cosh x = x^4 \left(\frac{1}{72} - \frac{x^2}{6!} - \frac{x^4}{8!} - \dots \right)$$

y

$$F_2(x) := \frac{x\sqrt{q}}{\sqrt{\sen \beta}} - \sinh x.$$

Es fácil ver que para x pequeño, digamos para $0 < x < \varepsilon$, con $\varepsilon < \frac{1}{2}$ (fijo), $F_1(x) > 0$; por lo tanto,

$$\cosh x \leq 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{18};$$

y (para las mismas x) $F_2(x) > 0$ (ya que $F_2'(0) > 0$), o sea que

$$\sinh x < \frac{x\sqrt{q}}{\sqrt{\sen \beta}}. \quad (3.2)$$

Acotemos, ahora, $\cos \varphi_n$. Según lo anterior (ya que la función \cosh es creciente en \mathbb{R}^+),

$$\begin{aligned} \cosh(2d(a_n, w_n)) &\geq \cosh[2(d(w_n, z_n) - d(z_n, a_n))] = \cosh(2(r_n - \alpha_n r_n)) \geq \\ &\geq 1 + 2r_n^2(1 - \alpha_n)^2 + \frac{2}{3}r_n^4(1 - \alpha_n)^4; \end{aligned}$$

análogamente,

$$\cosh(2d(w_n, b_n)) \geq 1 + 2r_n^2(1 - \beta_n)^2 + \frac{2}{3}r_n^4(1 - \beta_n)^4.$$

Además, para n grande (tal que $2r_n(\alpha_n + \beta_n) < \varepsilon$),

$$\begin{aligned} \cosh(2d(a_n, b_n)) &\leq \cosh[2(d(a_n, z_n) + d(z_n, b_n))] = \cosh(2(\alpha_n r_n + \beta_n r_n)) \leq \\ &\leq 1 + 2r_n^2(\alpha_n + \beta_n)^2 + \frac{8}{9}r_n^4(\alpha_n + \beta_n)^4. \end{aligned}$$

Así, teniendo en cuenta que

$$2r_n^2(\alpha_n + \beta_n)^2 + \frac{8}{9}r_n^4(\alpha_n + \beta_n)^4$$

se hace menor que

$$(2 - 2q) [r_n^2(1 - \alpha_n)^2 + r_n^2(1 - \beta_n)^2] + \frac{2}{3}r_n^4(1 - \alpha_n)^4 + \frac{2}{3}r_n^4(1 - \beta_n)^4$$

para n grande (ya que $\alpha_n, \beta_n \rightarrow 0$), obtenemos

$$\cosh(2d(a_n, w_n)) \cosh(2d(w_n, b_n)) - \cosh(2d(a_n, b_n)) \geq 2q (r_n^2(1 - \alpha_n)^2 + r_n^2(1 - \beta_n)^2). \quad (3.3)$$

Esto nos permitirá encontrar una cota superior para φ_n si n es grande.

Consideremos, ahora, el extremo $d_0 (\neq 1)$ del arco superior C de la frontera de la región $\Lambda \cap D(1; r_0)$, con $r_0 = |a_0 - 1|$. Sea $c(t)$, para $0 \leq t \leq 1$, una parametrización inyectiva de dicho arco tal que $c(0) = 1$ y $c(1) = d_0$. Tomemos, por ahora, $t \neq 0$ fijo.

En el h-triángulo $a_0 c(t) d_0$, sea $\alpha(t)$ el ángulo en $c(t)$. Véase la figura 6. Por la ley del coseno,

$$\cos \alpha(t) = \frac{\cosh(2d(a_0, c(t))) \cosh(2d(c(t), d_0)) - p}{\sinh(2d(a_0, c(t))) \sinh(2d(c(t), d_0))} =: h(t),$$

donde $p = \cosh(2d(a_0, d_0))$.

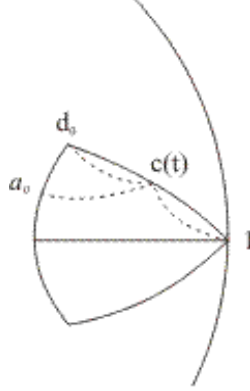


figura 6

Como

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} d(a_0, c(t)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} d(c(t), d_0) = +\infty,$$

entonces

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} [\coth(2d(a_0, c(t))) \coth(2d(c(t), d_0)) - p \operatorname{csc h}(2d(a_0, c(t))) \operatorname{csc h}(2d(c(t), d_0))] = \\ &= 1 \cdot 1 - p \cdot 0 = 1, \end{aligned}$$

luego

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \alpha(t) = 0.$$

Sea, ahora, en el h-triángulo $d_0 c(t) 1$, $\beta(t)$ el ángulo en $c(t)$, Aplicando a \mathbb{D} la transformación de Möbius $T(z) = \frac{1+z}{1-z}$, obtenemos un modelo (el semiplano derecho $\operatorname{Re} z > 0$) en el que se puede visualizar más claramente $\lim_{t \rightarrow 0^+} \beta(t)$.

Si $e_0 = T(d_0)$ y $d(t) = T(c(t))$, vemos que $L_0 := T(C)$ es la semirrecta hacia arriba desde e_0 , cuya prolongación pasa por $0 = T(-1)$. Cuando t es pequeño ($t \rightarrow 0^+$), $d(t)$ se aleja de e_0 sobre L_0 ; y $D_t := T(\widehat{d_0 c(t)})$ es parte de un círculo (grande) ortogonal al eje imaginario $T(\mathbb{T})$, con centro, digamos, en $e(t)$. Además, $A_t := T(\widehat{c(t) 1})$ es la semirrecta horizontal (ortogonal a $T(\mathbb{T})$) desde $d(t)$ (hacia la derecha); y $\beta(t)$ es el ángulo entre A_t y D_t , o sea entre A_t y la recta tangente C_t a D_t en $d(t)$. De la gráfica, es claro que $\beta(t) > \frac{\pi}{2} - \beta_0$. Véase la figura 7.

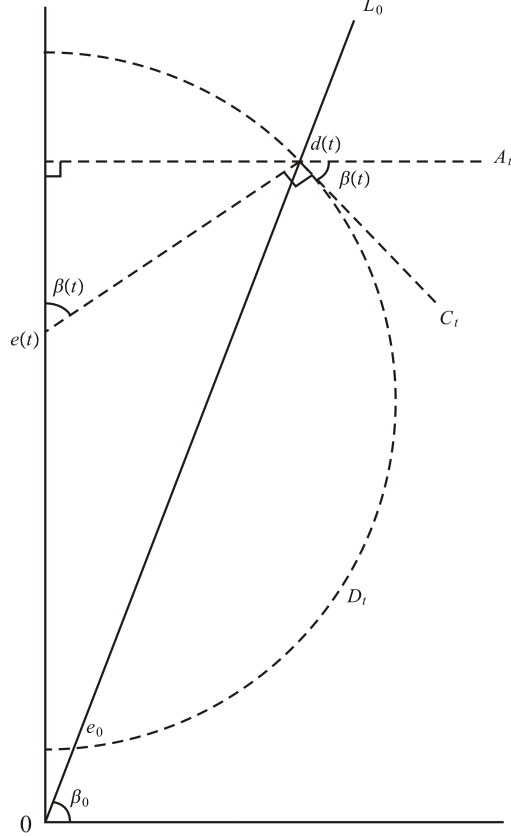


figura 7

Volviendo a \mathbb{D} , si $\gamma(t)$ es el ángulo entre $\widehat{a_0c(t)}$ y $\widehat{c(t)1}$, vemos que

$$\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t) > \frac{\pi}{2} - \beta_0 - \alpha(t)$$

para t pequeño.

Para n grande, w_n está cerca de 1. Sea t tal que $c(t)$ es el corte de C con la prolongación de $\widehat{a_0w_n}$. Entonces $\gamma(t)$ es menor o igual que el ángulo Ψ_n entre $\widehat{a_0w_n}$ y $\widehat{w_n1}$, ya que en el h-triángulo $w_n1c(t)$, se tiene $\gamma(t) + 0 + (\pi - \Psi_n) < \pi$. Pero (por la convexidad hiperbólica de G) a_n y b_n están fuera del interior del h-triángulo a_0w_n1 , luego

$$\varphi_n \geq \Psi_n \geq \gamma(t) \geq \frac{\pi}{2} - \beta_0 - \alpha(t).$$

(Este resultado también podría verse por un argumento semejante al anterior, pero tomando

C como el arco de círculo entre -1 y 1 que pasa por w_n , que haría las veces de $c(t)$; Ψ_n correspondería a $\gamma(t)$, que es $\geq \frac{\pi}{2} - \gamma_n$, donde γ_n es el ángulo entre C y el eje real. Pero, claramente, $\gamma_n \leq \beta_0$, luego $\Psi_n \geq \frac{\pi}{2} - \gamma_n \geq \frac{\pi}{2} - \beta_0 - \alpha(t)$.

Por consiguiente,

$$\cos \varphi_n \leq \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 - \alpha(t) \right) \rightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) = \operatorname{sen} \beta_0 \quad (3.4)$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Consideremos ahora dos casos:

Caso 1, si $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$:

Para n grande, $2r_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$ y $\alpha_n, \beta_n < 1$, luego $2r_n(1 + \alpha_n), 2r_n(1 + \beta_n) < \varepsilon$; entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}(2d(a_n, w_n)) &\leq \operatorname{senh} [2(d(a_n, z_n) + d(z_n, w_n))] = \\ \operatorname{senh}(2(\alpha_n r_n + r_n)) &\leq \frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{\operatorname{sen} \beta}} r_n (\alpha_n + 1) \end{aligned}$$

y (análogamente)

$$\operatorname{senh}(2d(w_n, b_n)) \leq \frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{\operatorname{sen} \beta}} r_n (\beta_n + 1).$$

Así, por (3.1) y (3.3),

$$\cos \varphi_n \geq \frac{2q [(1 - \alpha_n)^2 + (1 - \beta_n)^2]}{4 \left(\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{\operatorname{sen} \beta}} \right)^2 (\alpha_n + 1)(\beta_n + 1)} \rightarrow \operatorname{sen} \beta \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

con lo cual $\cos \varphi_n \geq \operatorname{sen} \beta > \operatorname{sen} \beta_0$, lo cual es absurdo.

Caso 2, si $\limsup_{n \rightarrow \infty} r_n \neq 0$:

Sin pérdida de generalidad, podemos tomar $r_n > \frac{\varepsilon}{2}$ para cada n .

Ahora podemos tomar n suficientemente grande para que $d(z_n, a_n) < \frac{\varepsilon}{4}$; por consiguiente,

$$d(w_n, a_n) \geq d(w_n, z_n) - d(z_n, a_n) > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Análogamente, $d(w_n, b_n) > \frac{\varepsilon}{4}$ para n grande. Además, de (3.4),

$$\varphi_n \geq \cos^{-1}(\operatorname{sen} \beta_0) =: \delta_0 > 0.$$

Pero existe $\tau : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ (que depende de n en realidad) un automorfismo tal que $\tau(w_n) = 0$, $\tau(a_n) \in \mathbb{R}^+$ y $\operatorname{Im} \tau(b_n) > 0$. Sea

$$x_0 := \frac{e^{\frac{\varepsilon}{2}} - 1}{e^{\frac{\varepsilon}{2}} + 1}.$$

Así,

$$d(x_0, 0) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + x_0}{1 - x_0} = \frac{\varepsilon}{4},$$

luego (ya que τ preserva la distancia hiperbólica)

$$d(\tau(a_n), 0) = d(a_n, w_n) > \frac{\varepsilon}{4} = d(x_0, 0)$$

y

$$d(\tau(b_n), 0) > d(x_0, 0);$$

o sea que $\tau(a_n)$ y $\tau(b_n)$ están fuera del disco euclidiano con centro en 0 y radio x_0 . Además, el ángulo entre los segmentos (euclidianos: los mismos hiperbólicos en este caso) $\overline{\tau(b_n)0}$ y $\overline{\tau(a_n)0}$ es igual al ángulo entre $\widehat{b_n w_n}$ y $\widehat{a_n w_n}$, o sea φ_n ; luego $\arg(\tau(b_n)) = \varphi_n \geq \delta_0$; o sea que $\tau(b_n)$ está por encima o sobre el rayo que parte de 0 y pasa por $y_0 = x_0 e^{i\delta_0}$. Véase la figura 8.

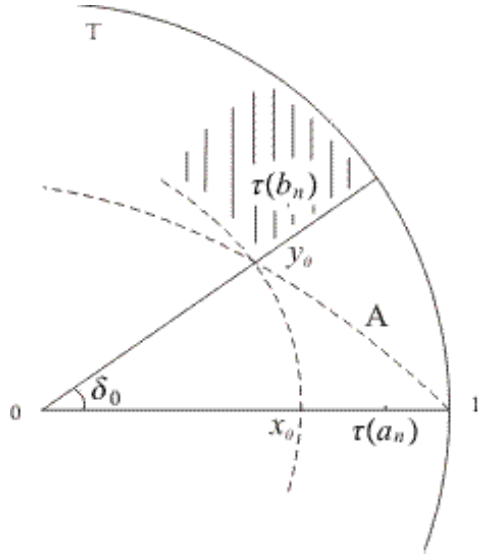


figura 8

Por consiguiente, $\tau(b_n)$ debe estar en la clausura de la región sombreada que se encuentra por encima del arco de círculo A entre -1 y 1 que pasa por y_0 .

Se sabe que (Véase [Mi86]) para cada $z \in A$, la distancia hiperbólica de z al intervalo $(-1, 1)$ es constante, luego

$$d(a_n, b_n) = d(\tau(a_n), \tau(b_n)) \geq \delta > 0,$$

donde δ es la distancia hiperbólica de y_0 a $(-1, 1)$, que es una constante positiva (x_0, δ_0 son independientes de n , luego y_0 lo es), lo cual contradice el hecho de que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = 0$.

■

En otras palabras, si G tiene un estrecho en z_0 y G está contenido en un ángulo de Stolz en z_0 , al menos cerca de este punto, entonces el estrecho tiene que ser regular.

El recíproco no se tiene; para probarlo, véase el ejemplo 3 del siguiente capítulo. Sin embargo, como puede verse en otros ejemplos del mismo capítulo, cuando se tiene un estrecho regular en z_0 , lo "usual" es que el dominio esté contenido en un ángulo de Stolz en z_0 , al menos cerca de este punto. En este caso, es aplicable el siguiente resultado.

Proposición 4 Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow G$ conforme (sobre). Si $z_0 \in \mathbb{T}$ y $w_0 := f(z_0) \in \mathbb{T}$ son tales que existen $R_0 \in (0, 1)$ y $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ tales que $|\arg(w_0 - w)| < \theta_0$ para cada $w \in G \cap D(w_0; R_0)$,

entonces existe $f'(z_0) = \infty$. (Véase la definición 2).

Prueba. Recordar que f puede extenderse continuamente a $\overline{\mathbb{D}}$.

Sean

$$w_1 = \frac{w_0 - f(0)}{1 - \overline{f(0)}w_0} \quad \text{y} \quad \varphi(z) = e^{-i \arg w_1} \frac{f(ze^{i \arg z_0}) - f(0)}{1 - \overline{f(0)}f(ze^{i \arg z_0})} \quad \text{para } z \in \mathbb{D}.$$

Así, $\varphi(0) = 0$, $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \varphi(\mathbb{D})$ es conforme y

$$\varphi(1) = e^{-i \arg w_1} \frac{f(z_0) - f(0)}{1 - \overline{f(0)}f(z_0)} = e^{-i \arg w_1} w_1 = 1$$

ya que si

$$T(w) = \frac{w - f(0)}{1 - \overline{f(0)}w},$$

$T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ y $w_1 \in \mathbb{T}$. Además, $\varphi(\mathbb{D}) = e^{-i \arg w_1} T(e^{i \arg z_0} G) \subseteq \mathbb{D}$.

Por el lema de Julia-Wolff (véase PRELIMINARES), existe $\varphi'(1) \in \mathbb{C}_\infty$ tal que $1 \leq |\varphi'(1)| \leq +\infty$.

Pero

$$T'(w) = \frac{1 - \overline{f(0)}w + \overline{f(0)}(w - f(0))}{(1 - \overline{f(0)}w)^2} = \frac{1 - |f(0)|^2}{(1 - \overline{f(0)}w)^2}.$$

Por lo tanto,

$$\varphi'(z) = w_1^{-1} T'(f(z_0 z)) f'(z_0 z) z_0.$$

Luego

$$\varphi'(z) = w_1^{-1} \frac{1 - |f(0)|^2}{(1 - \overline{f(0)}f(z_0 z))^2} f'(z_0 z) z_0,$$

de donde

$$f'(w) = z_0^{-1} w_1 \frac{(1 - \overline{f(0)}f(w))^2}{1 - |f(0)|^2} \varphi'(z_0^{-1} w).$$

Por lo tanto existe

$$f'(z_0) = z_0^{-1} w_1 \frac{(1 - \overline{f(0)}f(z_0))^2}{1 - |f(0)|^2} \varphi'(1) \in \mathbb{C}_\infty$$

tal que

$$|f'(z_0)| \geq \frac{|1 - \overline{f(0)}f(z_0)|^2}{1 - |f(0)|^2} > 0.$$

Supongamos que $f'(z_0) \neq \infty$. Tenemos entonces que

$$|\varphi'(1)| = \frac{1 - |f(0)|^2}{|1 - \overline{f(0)}f(z_0)|^2} |f'(z_0)| < +\infty$$

luego $\varphi'(1) \neq \infty$ y $\varphi'(1) \neq 0$. Así $c := \varphi'(1) \in \mathbb{C}^*$.

Sea

$$A := \overline{D}(w_0, R_0) \cap (\{w \in \mathbb{C} - \{w_0\} / |\arg(w_0 - w)| \leq \theta_0\} \cup \{w_0\})$$

A es un sector circular.

Sean $\alpha: \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ dada por $\alpha(z) = w_1^{-1}T(z)$ y $B = \alpha(A)$.

α es una transformación de Möbius, luego B es un triángulo curvilíneo con un vértice en

$$\alpha(w_0) = w_1^{-1}T(w_0) = w_1^{-1}w_1 = 1$$

y

$$B - \{1\} \subseteq \alpha(A - \{w_0\}) \subseteq \mathbb{D}.$$

Por lo tanto existe Δ_0 ángulo de Stolz en 1 con $B \subseteq \Delta_0$ y existen $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $R \in (0, 1)$ tales que para todo $z \in A$,

$$|\alpha(z) - 1| < R \text{ y } |\arg(1 - \alpha(z))| < \theta.$$

Pero

$$c = \lim_{z \rightarrow 1, z \in \Delta} \frac{\varphi(z) - \varphi(1)}{z - 1},$$

donde Δ es cualquier ángulo de Stolz en 1.

En particular, si $\gamma: (0, R_1) \rightarrow \mathbb{D}$ está definida por $\gamma(t) = 1 - te^{i\theta_1}$, con $\theta < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ (para

algún $R_1 \in (0, 1)$), entonces

$$c = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(\gamma(t)) - \varphi(1)}{\gamma(t) - 1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \varphi(\gamma(t))}{te^{i\theta_1}}.$$

Pero, para t suficientemente pequeño, $f(z_0\gamma(t))$ está cerca de w_0 , luego $f(z_0\gamma(t)) \in A$, con lo cual

$$|\arg[1 - \alpha(f(z_0\gamma(t)))]| < \theta; \text{ y entonces}$$

$$|\arg(1 - \varphi(\gamma(t)))| < \theta \text{ y}$$

$$\arg \frac{1 - \varphi(\gamma(t))}{te^{i\theta_1}} < \theta - \theta_1 < 0, \text{ luego}$$

$$\arg c = \lim_{t \rightarrow 0^+} \arg \frac{1 - \varphi(\gamma(t))}{te^{i\theta_1}} < 0.$$

Haciendo lo mismo con θ_2 en lugar de θ_1 , para $-\frac{\pi}{2} < \theta_2 < -\theta$, tenemos que

$$\arg c = \lim_{t \rightarrow 0^+} \arg \frac{1 - \varphi(\gamma_2(t))}{te^{i\theta_2}} > -\theta - \theta_2 > 0,$$

lo cual es absurdo. Luego $f'(z_0) = \infty$. ■

Capítulo 4

EJEMPLOS DE ESTRECHOS

Ejemplo 1 *El ejemplo más sencillo de estrecho es cuando G tiene una **cúspide** en z_0 ; o sea cuando, cerca de z_0 , ∂G está formada por dos h -rectas que terminan en z_0 (el resto de ∂G puede ser un arco de \mathbb{T}).*

En z_0 , el ángulo entre los arcos Γ_1 y Γ_2 es 0, luego es fácil verificar que G no es un cuasidisco. Como, claramente, G es h -convexo, tiene un estrecho (teorema 2), que debe estar en z_0 . Además, cerca de z_0 , G está contenido en un ángulo de Stolz, luego G tiene un estrecho regular en z_0 . Véase la figura 9.

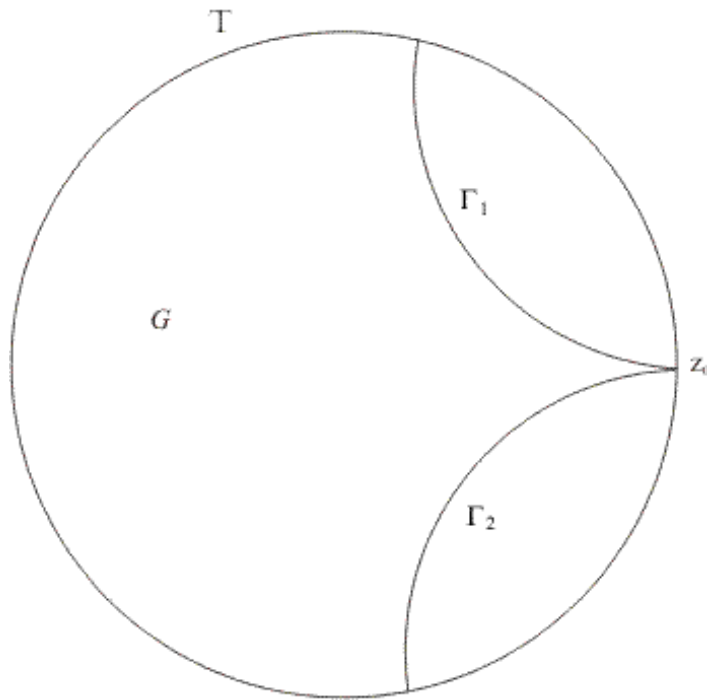


figura 9

En este caso, los a_n de la definición de estrechos pueden tomarse sobre Γ_1 , de modo que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = z_0 = 1$; b_n se tomaría como el punto sobre Γ_2 que tiene la misma parte real

que a_n . Las h-rectas S_n pueden tomarse fijas, iguales a $(-1, 1)$ (la h-recta horizontal) y r_n puede tomarse constante igual a 1.

Ejemplo 2 *Éste es un ejemplo de estrecho irregular: A y A' son curvas que llegan a z_0 tangentes a \mathbb{T} . La parte clave de ∂G es una sucesión de geodésicas hiperbólicas (h-segmentos) con extremos en A' y tangentes a A . Véase la figura 10.*

A y A' pueden tomarse de modo que el ángulo entre dos consecutivos de estos h-segmentos tienda a 0 a medida que se acercan a z_0 . Para visualizar esto, cambiemos de modelo vía

$$T(z) = \frac{1+z}{1-z},$$

que envía \mathbb{D} sobre el semiplano derecho $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z > 0\}$.

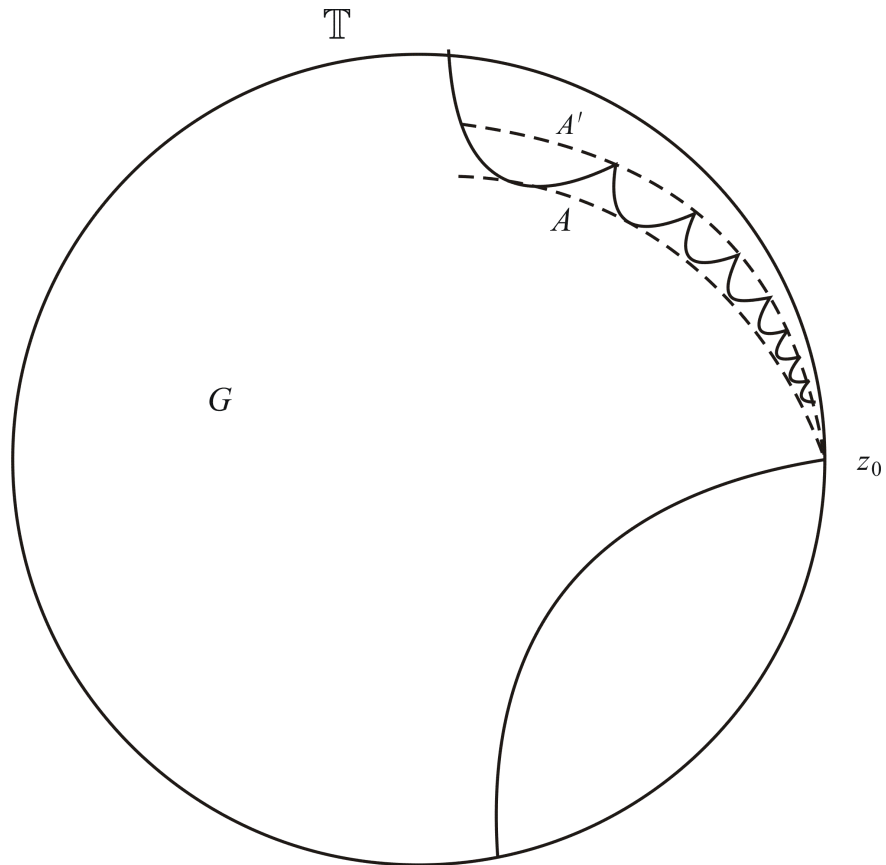


figura 10

Notemos

$$\Gamma = \left\{ x + \frac{i}{x^2} \middle/ x \in \mathbb{R}^+ \right\}, \quad \Gamma' = \left\{ x + \frac{i}{x} \middle/ x \in \mathbb{R}^+ \right\} \quad \text{y} \quad G' = T(G).$$

Hagamos que parte de $\partial G'$ sea la unión de una sucesión de arcos C_n de h-rectas en \mathbb{H} construidos de modo que sus extremos b_n y b_{n+1} estén en Γ' y C_n sea tangente a Γ en, digamos, a_n . Véase la figura 11.

Así,

$$b_n = \beta_n + \frac{i}{\beta_n} \quad \text{y} \quad a_n = \alpha_n + \frac{i}{\alpha_n^2},$$

con $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}^+$. Además, C_n es parte de un semicírculo euclidiano (ortogonal al eje imaginario $\partial\mathbb{H}$) con centro en, digamos, $u_n i$ y radio r_n .

Sean

$$L_n = \left\{ x + \frac{i}{\beta_n} \middle/ x \in \mathbb{R} \right\}$$

(la recta horizontal por b_n), θ_n el ángulo entre L_n y C_n , y γ_n el ángulo entre L_n y C_{n-1} . Por la construcción, es claro que cuando $n \rightarrow \infty$, $\alpha_n, \beta_n, r_n \rightarrow 0$. Como $a_n, b_n \in C_n$, entonces

$$\frac{1}{\alpha_n^2} - \frac{1}{\beta_n} < 2r_n;$$

luego

$$\frac{1}{\alpha_n^2} - \frac{1}{\beta_n} < \frac{1}{\beta_n}$$

para n grande, con lo cual

$$\frac{\beta_n}{\alpha_n} < 2\alpha_n \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Pero $r_n > \alpha_n$ y $\text{sen } \theta_n = \frac{\beta_n}{r_n}$, luego $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$. Por otra parte, $\beta_{n+1} < \beta_n$ y

$$\text{sen } \gamma_{n+1} = \frac{\beta_{n+1}}{r_n} < \frac{\beta_n}{r_n},$$

luego $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$. Véase la figura 12.

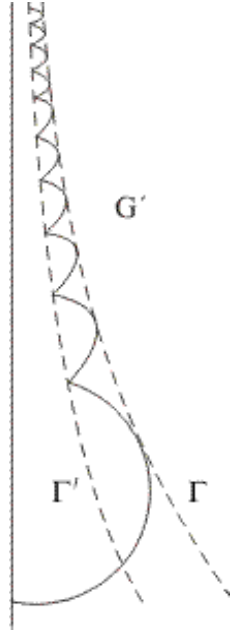


figura 11

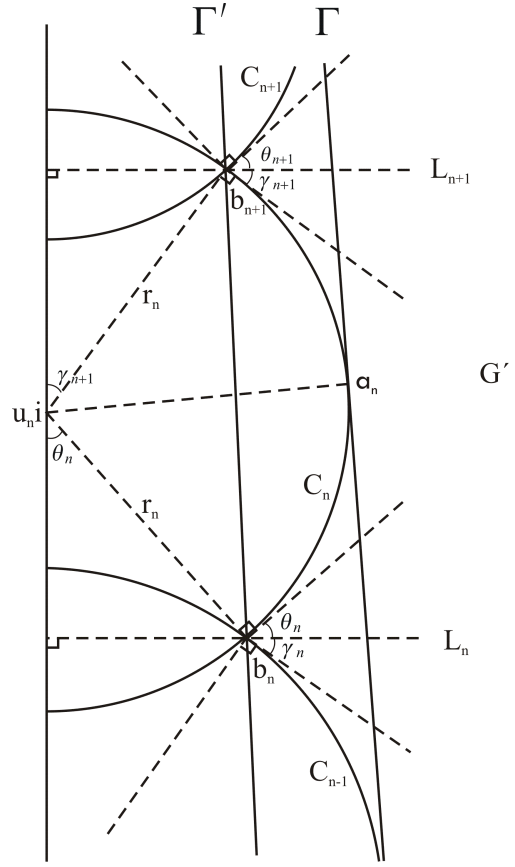


fig 12

Por consiguiente, el ángulo entre C_{n-1} y C_n , que es $\gamma_n + \theta_n$, tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$.

Volviendo a \mathbb{D} , vemos que parte de ∂G está constituida por una sucesión de arcos (h-geodésicas) tales que dos consecutivos forman un ángulo arbitrariamente pequeño (por la conformalidad de T); o sea que G no es un cuasidisco. Como G es h-convexo por construcción, el teorema 2 nos dice que debe tener al menos un estrecho. Pero el concepto de estrechos es un concepto local y (por la tangencia de A y A' con respecto de \mathbb{T}) es claro que, cerca de z_0 (donde se acumulan dichos arcos) la distancia de $\partial G \cap \mathbb{H}^+$, donde $\mathbb{H}^+ := \{z \in \mathbb{C} / \text{Im } z > 0\}$, a \mathbb{R} es "grande", luego G tiene un estrecho irregular en z_0 .

Ejemplo 3 Para visualizarlo mejor, cambiemos de modelo a $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{R} / \text{Re } z > 0\}$ (Vía $T(z) = \frac{1+z}{1-z}$).

Definamos, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, L'_n como el rayo $\arg z = \varphi_n$, con $0 < \varphi_n < \frac{\pi}{2}$ tal que

$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = 0$.

Tomemos una h-recta "pequeña" (euclidianamente) R'_1 desde 0 hacia arriba. Cortará a L'_1 en un punto a'_1 y terminará en un punto e'_1 (en el semieje imaginario positivo \mathbb{I}^+). Desde e'_1 , podemos tomar una h-recta R'_2 tangente a L'_2 en un punto a'_2 , que terminará en un punto $e'_2 \in \mathbb{I}^+$. Desde e'_2 , podemos tomar la h-recta R'_3 tangente a L'_3 en a'_3 , con extremo en $e'_3 \in \mathbb{I}^+$. Así sucesivamente. Véase la figura 13.

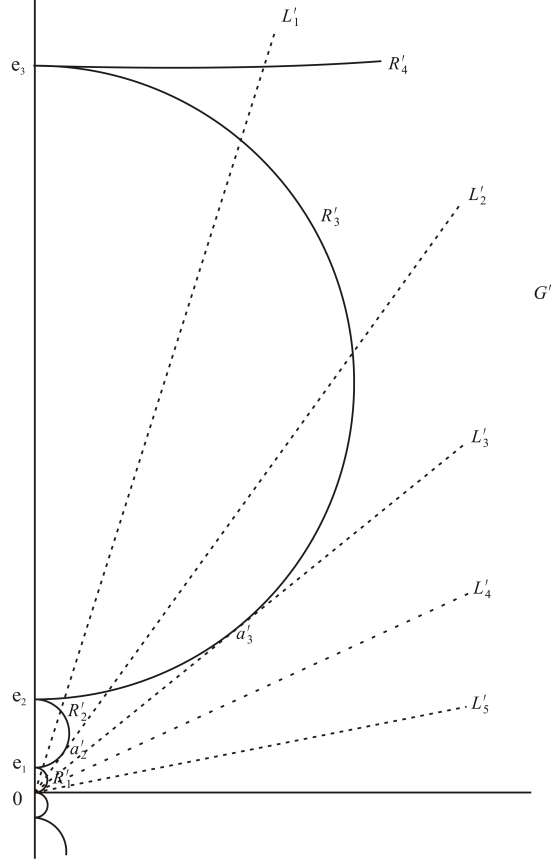


figura 13

Definimos J_0^+ como $\bigcup_{n=1}^{\infty} R'_n$ (incluyendo los extremos de las h-rectas), J_0^- como la reflexión de J_0^+ respecto a \mathbb{R} , b'_n la reflexión de a'_n respecto a \mathbb{R} y G' como el dominio limitado por $J_0 := J_0^+ \cup J_0^-$ que contiene a \mathbb{R}^+ .

Regresando a \mathbb{D} , $L_n = T^{-1}(L'_n)$ es la frontera de un "lente" (es un arco de círculo que pasa por $-1 = T^{-1}(0)$ y $1 = T^{-1}(\infty)$) y forma un ángulo φ_n con $S := (-1, 1)$ (en ambos extremos). Se sabe que la distancia a S permanece constante para todos los puntos de uno de

estos arcos; y como $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = 0$, donde $a_n = T^{-1}(a'_n)$ y $b_n = T^{-1}(b'_n)$. Tomando z_n como el punto medio hiperbólico entre a_n y b_n , vemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n, z_n) = 0$, luego se satisface la definición de estrecho con $r_n = 1$, con a_n y b_n en lados diferentes de la frontera de $G := T^{-1}(G')$.

Pero también, por el ejemplo anterior, podemos tomar $c_1 \in R_1 := T^{-1}(R'_1)$ y $d_1 \in R_2 := T^{-1}(R'_2)$ tales que $d(c_1, d_1) < 1$, $c_2 \in R_2$ y $d_2 \in R_3 := T^{-1}(R'_3)$ tales que $d(c_2, d_2) < \frac{1}{2}$, $c_3 \in R_3$ y $d_3 \in R_4 := T^{-1}(R'_4)$ tales que $d(c_3, d_3) < \frac{1}{3}$, etc. Si w_n es el punto medio hiperbólico entre c_n y d_n , vemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(c_n, w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(d_n, w_n) = 0$, luego también se satisface la definición de estrecho con los puntos acercándose por el mismo lado de la frontera de G . Véase la figura 14.

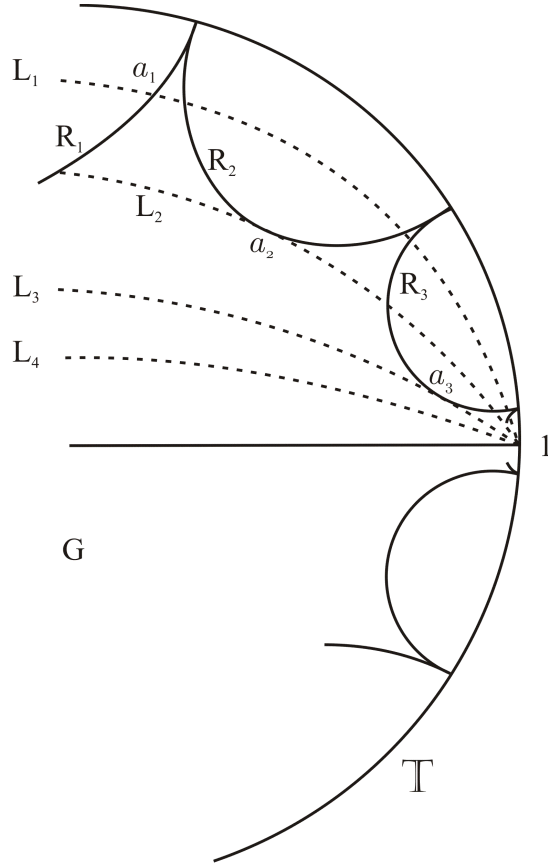


figura 14

Ejemplo 4 Si en el ejemplo anterior se toman sólo los arcos "impares", obtenemos un dominio con un estrecho regular en 1 tal que al acercarnos a este punto podemos encontrar

discos hiperbólicos con h -radio arbitrariamente grande.

Ejemplo 5 Si G tiene infinitos estrechos regulares (por ejemplo cúspides) que se acumulan en un punto z_0 (obviamente en \mathbb{T}), entonces G tiene un estrecho en z_0 :

En el ejemplo de la gráfica (véase la figura 15), en una vecindad de z_0 , G no está contenido en ningún ángulo de Stolz y G tiene un estrecho irregular en z_0 .

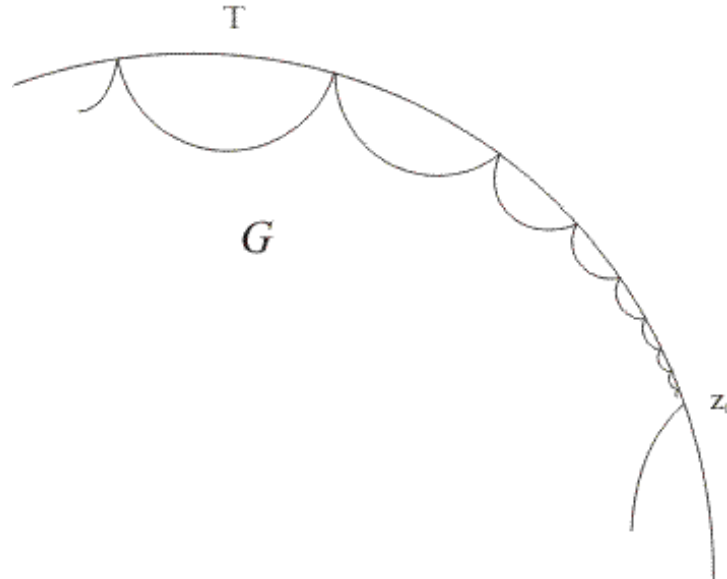


figura 15

Capítulo 5

LA CONSTANTE DE BLOCH DE $K_h(\alpha)$

Constante de Bloch

Sean (E, δ) un espacio métrico, S un conjunto de abiertos de E , $A \in S$ y $0 < \alpha \leq 1$.

El número $\sup \{\delta(x, \partial A) / x \in A\}$ se llama el *radio de Bloch* de A . Este supremo puede ser un máximo; en este caso, el radio de Bloch de A es el radio de la mayor bola (en E) contenida en A .

El número $\inf \{\text{radio de Bloch de } B / B \in S\}$ se llama la *constante de Bloch* de S .

Si $f \in K_h(\alpha)$, es natural, entonces, definir el *radio de Bloch* de f como $\sup \{d(f(z), \partial f(\mathbb{D})) / z \in \mathbb{D}\}$, o sea el radio de Bloch de $f(\mathbb{D})$. (En otros contextos, podrían considerarse las distancias euclidianas en lugar de las hiperbólicas).

La *constante de Bloch* de $K_h(\alpha)$, la clase de las funciones $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ analíticas y univalentes normalizadas por $f(0) = 0$ y $f'(0) = \alpha$ tales que $f(\mathbb{D})$ es hiperbólicamente convexo, es, por definición,

$$\inf \{\text{radio de Bloch de } f / f \in K_h(\alpha)\},$$

o sea la constante de Bloch de $\{f(\mathbb{D}) / f \in K_h(\alpha)\}$.

Lema 2 Sean $\varphi \in (0, \frac{\pi}{4}]$, $\psi \in [0, \pi/4]$ y $E := E(\varphi, \psi)$ la región limitada por los arcos de círculo entre -1 y 1 , tangentes a $\mathbb{D}_{\tan \varphi}$ (el arco de arriba) y $\mathbb{D}_{\tan \psi}$ (el de abajo). Hagamos

$$M := \frac{1}{2} \log \frac{1 + \tan \varphi}{1 - \tan \varphi}, \quad N := \frac{1}{2} \log \frac{1 + \tan \psi}{1 - \tan \psi}$$

y $\gamma(z) := d_{\mathbb{D}}(z, \partial E)$ para cada $z \in E$. Entonces

$$\frac{\lambda_E(z)}{\lambda_{\mathbb{D}}(z)} = \frac{\pi \cos v}{2(\varphi + \psi) \cos \frac{\pi(v - \varphi + \psi)}{2(\varphi + \psi)}}$$

donde

$$v = \begin{cases} 2 \arctan(\tanh |M - \gamma(z)|), & \text{si } \operatorname{Im} z \geq -\cot(\varphi - \psi) + \sqrt{\csc^2(\varphi - \psi) - (\operatorname{Re} z)^2}, \\ 2 \arctan(\tanh |\gamma(z) - N|), & \text{si } \operatorname{Im} z < -\cot(\varphi - \psi) + \sqrt{\csc^2(\varphi - \psi) - (\operatorname{Re} z)^2}, \end{cases}$$

en el caso $\varphi > \psi$; y para $\varphi < \psi$,

$$v = \begin{cases} 2 \arctan(\tanh |M - \gamma(z)|), & \text{si } \operatorname{Im} z \geq \cot(\psi - \varphi) - \sqrt{\csc^2(\psi - \varphi) - (\operatorname{Re} z)^2}, \\ 2 \arctan(\tanh |\gamma(z) - N|), & \text{si } \operatorname{Im} z < \cot(\psi - \varphi) - \sqrt{\csc^2(\psi - \varphi) - (\operatorname{Re} z)^2}. \end{cases}$$

Prueba. Sabemos que $\gamma(z)$ es constante en cada arco circular entre -1 y 1 en \mathbb{D} (Véase [Mi86]). Tomemos $a \in (-1, 1)$ y hagamos

$$T(z) := \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Como $T(-1) = -1$ y $T(1) = 1$, por ser conforme, T envía cada arco circular entre -1 y 1 en sí mismo; luego $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ y $T(E) = E$, con lo cual

$$\frac{\lambda_E(z)}{\lambda_{\mathbb{D}}(z)} = \frac{\lambda_E(T(z)) |T'(z)|}{\lambda_{\mathbb{D}}(T(z)) |T'(z)|} = \frac{\lambda_E(T(z))}{\lambda_{\mathbb{D}}(T(z))},$$

por la invarianza de la métrica hiperbólica bajo funciones conformes. Vemos, pues, que $\frac{\lambda_E(z)}{\lambda_{\mathbb{D}}(z)}$ es constante en cada arco circular entre -1 y 1 (contenido en \mathbb{D}), o sea que depende sólo de $\gamma(z)$.

Notemos

$$h(z) := \operatorname{Log} \frac{1+z}{1-z} \text{ y } \Sigma := h(\mathbb{D}) = \left\{ z \in \mathbb{C} / |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Obsérvese que el arco de arriba de ∂E forma un ángulo de 2φ con \mathbb{R} , luego la función $\frac{1+z}{1-z}$ envía este arco en el rayo $\arg z = 2\varphi$. Es fácil ver, entonces, que

$$F := h(E) = \{z \in \mathbb{C} / -2\psi < \operatorname{Im} z < 2\varphi\}.$$

Además,

$$\frac{\lambda_E(z)}{\lambda_{\mathbb{D}}(z)} = \frac{\lambda_F(h(z))}{\lambda_{\Sigma}(h(z))}.$$

Sea, para $w \in F$, $\gamma_0(w) = d_\Sigma(w, \partial F)$. Si $z \in E$,

$$\gamma_0(h(z)) = d_{h(\mathbb{D})}(h(z), \partial h(E)) = d_{\mathbb{D}}(z, \partial E) = \gamma(z)$$

por ser h conforme; luego $\frac{\lambda_F}{\lambda_\Sigma}$ depende sólo de γ_0 .

Se sabe (véase [Mi83]) que la métrica hiperbólica de una franja horizontal Ω con centro en ci y ancho $k\pi$ es

$$\lambda_\Omega(z) = \frac{1}{2k \cos \frac{\operatorname{Im} z - c}{k}},$$

entonces, para $w \in F$,

$$\lambda_F(w) = \frac{1}{\frac{4}{\pi}(\varphi + \psi) \cos \left(\frac{\operatorname{Im} w - (\varphi - \psi)\pi}{2(\varphi + \psi)} \right)}$$

y

$$\lambda_\Sigma(w) = \frac{1}{2 \cos(\operatorname{Im} w)}.$$

Si $z \in E$ y $w = h(z) = u + iv$, queremos calcular $\operatorname{Im} w = v$ en términos de $\gamma(z)$.

Consideremos el caso $\varphi > \psi$. (El caso $\varphi < \psi$ es análogo). El círculo

$$(\operatorname{Im} z + \cot(\varphi - \psi))^2 + (\operatorname{Re} z)^2 = \csc^2(\varphi - \psi)$$

pasa por -1 , 1 y $b := (\csc(\varphi - \psi) - \cot(\varphi - \psi))i$; luego si

$$\operatorname{Im} z \geq -\cot(\varphi - \psi) + \sqrt{\csc^2(\varphi - \psi) - (\operatorname{Re} z)^2}$$

entonces

$$v \geq \operatorname{Im} h(b) = \arctan \frac{2(\csc \theta - \cot \theta)}{1 - (\csc \theta - \cot \theta)^2} = \arctan \frac{1}{\cot \theta} = \theta,$$

donde $\theta = \varphi - \psi$. Como $w = \varphi - \psi$ es la línea media de F , entonces

$$\begin{aligned}
\gamma_0(w) &= d_\Sigma(w, u + 2i\varphi) = d_\Sigma(u, u + 2i\varphi) - d_\Sigma(u, u + iv) \\
&= \int_0^{2\varphi} \frac{dt}{2 \cos t} - \int_0^v \frac{dt}{2 \cos t} \\
&= \frac{1}{2} \log |\sec t + \tan t|_0^{2\varphi} - \frac{1}{2} \log \frac{1 + 2 \operatorname{sen} \left(\frac{v}{2}\right) \cos \left(\frac{v}{2}\right)}{\cos^2 \left(\frac{v}{2}\right) - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{v}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2} \log \frac{(\cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi)^2}{(\cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi)(\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi)} - \frac{1}{2} \log \frac{\cos \left(\frac{v}{2}\right) + \operatorname{sen} \left(\frac{v}{2}\right)}{\cos \left(\frac{v}{2}\right) - \operatorname{sen} \left(\frac{v}{2}\right)} \\
&= M - \frac{1}{2} \log \frac{1 + \tan \left(\frac{v}{2}\right)}{1 - \tan \left(\frac{v}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\frac{1 + \tan \left(\frac{v}{2}\right)}{1 - \tan \left(\frac{v}{2}\right)} = e^{2p}$$

con $p = M - \gamma_0(w)$; o sea que

$$\tan \frac{v}{2} = \frac{e^{2p} - 1}{e^{2p} + 1} = \tanh p$$

con lo cual $v = 2 \arctan(\tanh p)$.

Reemplazando arriba, se obtiene la expresión deseada.

Si

$$\operatorname{Im} z < -\cot(\varphi - \psi) + \sqrt{\csc^2(\varphi - \psi) - (\operatorname{Re} z)^2},$$

el proceso es similar. ■

Nota: El caso $\varphi = \psi$ aparece en la sección 4 de [Mi86].

5.1 Una cota inferior para la constante de Bloch de $\mathbf{K}_h(\alpha)$

Consideremos un dominio h-convexo G y una constante $M > 0$.

Notemos $\psi := 2 \arctan(\tanh M)$ y, para $z \in G$, $\gamma(z) := d_{\mathbb{D}}(z, \partial G)$; y definamos

$$\sigma(z) = \frac{\pi \cos[2 \arctan(\tanh \gamma(z))]}{2\psi \cos \frac{\pi[\psi - 2 \arctan(\tanh \gamma(z))]}{2\psi}} \lambda_{\mathbb{D}}(z).$$

Supongamos, primero, que $\gamma(z) < M$ para cada $z \in G$. Queremos ver que $\sigma(z)|dz|$ es una métrica ultrahiperbólica sobre G .

Es claro que

$$\sigma(z) = \frac{\pi \cos[2 \arctan(\tanh \gamma(z))]}{2\psi \operatorname{sen} \frac{\pi \arctan(\tanh \gamma(z))}{\psi}} \lambda_{\mathbb{D}}(z)$$

es continua y positiva. Tomemos $a \in G$. Por la compacidad de ∂G y la continuidad de $d_{\mathbb{D}}(a, \cdot)$, existe $c \in \partial G$ tal que $\gamma(a) = d_{\mathbb{D}}(a, c)$; y, por la convexidad hiperbólica de G , existe una h-recta ℓ que pasa por c tal que G queda completamente contenido en uno de los h-semiplanos determinado por ℓ y $\gamma(a) = d_{\mathbb{D}}(a, \ell)$. Además, podemos considerar ℓ como el intervalo $(-1, 1)$, $\operatorname{Im} a > 0$ y $\operatorname{Re} a = 0$. Así, $c = 0$ y

$$\frac{1}{2} \log \frac{1 + |a|}{1 - |a|} = \gamma(a) < M = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \frac{\psi}{2}}{1 - \frac{\psi}{2}},$$

luego $|a| < \frac{\psi}{2}$.

Sea $E = E(\psi, 0)$ (de acuerdo con la notación del lema 2). Tomemos $z \in E$ cerca de a , de modo que $|z| < \frac{\psi}{2}$.

Es claro que

$$\gamma_E(z) := d_{\mathbb{D}}(z, \partial E) = d_{\mathbb{D}}(z, \ell) \geq d_{\mathbb{D}}(z, \partial G) = \gamma(z).$$

Sea $\tau : [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tau(u) = \frac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u} - \frac{u}{2}.$$

Como

$$\tau'(u) = \frac{(1 - \cos u)^2}{2 \operatorname{sen}^2 u}$$

entonces τ es creciente y $\tau(u) > \tau(0) = 0$, luego $\frac{\psi}{2} < \operatorname{csc} \psi - \cot \psi$; o sea que $\mathbb{D}_{\frac{\psi}{2}}$ está contenido en el disco con centro en $-i \cot \psi$ y radio $\operatorname{csc} \psi$, luego

$$\operatorname{Im} z < -\cot \psi + \sqrt{\operatorname{csc}^2 \psi - (\operatorname{Re} z)^2},$$

y así, (por el lema 2)

$$\frac{\lambda_E(z)}{\lambda_{\mathbb{D}}(z)} = \frac{\pi \cos v}{2\psi \cos \frac{\pi(v-\psi)}{2\psi}},$$

con

$$v = 2 \arctan(\tanh |\gamma_E(z) - 0|).$$

Pero la función

$$p(t) = \frac{\cos[2 \arctan(\tanh t)]}{\operatorname{sen} \frac{\pi \arctan(\tanh t)}{\psi}}$$

es decreciente para $0 < t < M$ (el numerador es decreciente y el denominador es creciente), luego

$$\frac{\lambda_E(z)}{\lambda_{\mathbb{D}}(z)} = \frac{\pi}{2\psi} p(\gamma_E(z)) \leq \frac{\pi}{2\psi} p(\gamma(z)) = \frac{\sigma(z)}{\lambda_{\mathbb{D}}(z)}.$$

Además, $\lambda_E(a) = \sigma(a)$, puesto que $\gamma_E(a) = \gamma(a)$.

Por consiguiente λ_E es una métrica soporte de σ en a (para cada $a \in G$), luego $\sigma(z) |dz|$ es una métrica ultrahiperbólica sobre G ; y por el lema de Ahlfors, $\sigma(z) \leq \lambda_G(z)$ para $z \in G$. Consideremos, ahora, la condición más general $\gamma(z) \leq M$ para cada $z \in G$. Tomemos $n \in \mathbb{Z}^+$ y notemos $M_n := M + \frac{1}{n}$, $\psi_n := 2 \arctan(\tanh M_n)$ y

$$\sigma_n(z) := \frac{\pi \cos[2 \arctan(\tanh \gamma(z))]}{2\psi_n \cos \frac{\pi[\psi_n - 2 \arctan(\tanh \gamma(z))]}{2\psi_n}} \lambda_{\mathbb{D}}(z).$$

Así, $\gamma(z) < M_n$ para cada $z \in G$; luego, por lo anterior, $\sigma_n(z) \leq \lambda_G(z)$ (para cada n). Por consiguiente, $\sigma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(z) \leq \lambda_G(z)$.

Consideremos, ahora, $\alpha \in (0, 1)$ y $f \in K_h(\alpha)$ tal que $f(\mathbb{D}) = G$.

Sea M el radio de Bloch de f ; es decir, $M = \sup\{\gamma(w)/w \in G\}$. Si $z \in \mathbb{D}$ y $w = f(z)$, entonces (ver PRELIMINARES)

$$\frac{1}{|f'(z)|(1-|z|^2)} = \lambda_G(w) \geq \sigma(w) = \frac{\pi \cos[2 \arctan(\tanh \gamma(w))]}{2\psi \operatorname{sen} \frac{\pi \arctan(\tanh \gamma(w))}{\psi}} \lambda_{\mathbb{D}}(w) \quad (5.1)$$

Como $\gamma(w) \leq M$, tenemos que

$$\begin{aligned}
g(M) & : = \frac{\pi \cos[2 \arctan(\tanh M)]}{4 \arctan(\tanh M)} = \frac{\pi}{2\psi} p(M) \\
& \leq \frac{\pi}{2\psi} p(\gamma(w)) = \frac{\sigma(w)}{\lambda_{\mathbb{D}}(w)} \\
& \leq \frac{\lambda_G(w)}{\lambda_{\mathbb{D}}(w)} = \frac{1 - |w|^2}{|f'(z)|(1 - |z|^2)},
\end{aligned} \tag{5.2}$$

obteniéndose una cota para la derivada hiperbólica de f :

$$D^h f(z) := \frac{|f'(z)|(1 - |z|^2)}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{4 \arctan(\tanh M)}{\pi \cos[2 \arctan(\tanh M)]}.$$

La función $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente decreciente,

$$\lim_{M \rightarrow 0^+} g(M) = +\infty \quad y \quad \lim_{M \rightarrow +\infty} g(M) = 0,$$

luego existe una única $M_\alpha > 0$ tal que

$$\frac{1}{\alpha} = g(M_\alpha). \tag{5.3}$$

Evaluando (5.2) en $z = 0$ y $w = 0$, tenemos

$$g(M) \leq \frac{1}{\alpha} = g(M_\alpha);$$

luego $M_\alpha \leq M$. O sea que la solución de la ecuación (5.3) es una cota inferior para la constante de Bloch de $K_h(\alpha)$.

5.2 Cota mejorada

Dada $M > 0$, evidencia gráfica indica que la función

$$p(t) = \frac{\cos[2 \arctan(\tanh t)]}{\operatorname{sen} \frac{\pi \arctan(\tanh t)}{\psi}}$$

es decreciente para $0 < t < M$, donde ψ está redefinida como $\psi = \arctan(\tanh(2M))$ (que es $< 2 \arctan(\tanh M)$), el valor de ψ en la sección **5.1**).

Mediante un procedimiento análogo al llevado a cabo en la sección **5.1**, puede probarse que la nueva $\sigma(z)$ (construida con el nuevo valor de ψ) es $\leq \lambda_G(z)$, teniendo en cuenta que si $\gamma(a) = d_{\mathbb{D}}(a, \ell) < M$, entonces $h(a)$ (para la misma h del lema 2) está por debajo de la línea media de $h(E(\psi, 0))$.

De nuevo, si $f \in K_h(\alpha)$, $f(\mathbb{D}) = G$ y M es el radio de Bloch de f (o de G), entonces se cumple (5.1).

Apoyándonos también en evidencias gráficas, confiamos en que la función $g_0 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g_0(M) = \frac{\pi \cos[2 \arctan(\tanh M)]}{2 \arctan(\tanh(2M)) \operatorname{sen} \frac{\pi \arctan(\tanh M)}{\arctan(\tanh(2M))}}$$

es estrictamente decreciente, $\lim_{M \rightarrow 0^+} g_0(M) = +\infty$ y $\lim_{M \rightarrow +\infty} g_0(M) = 0$; luego

$$D^h f(z) = \frac{|f'(z)|(1 - |z|^2)}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{2 \arctan(\tanh(2M)) \operatorname{sen} \frac{\pi \arctan(\tanh M)}{\arctan(\tanh(2M))}}{\pi \cos[2 \arctan(\tanh M)]}$$

y existe una única $M'_\alpha > 0$ tal que $g_0(M'_\alpha) = \frac{1}{\alpha}$, que es una cota inferior para la constante de Bloch de $K_h(\alpha)$.

La evidencia numérica muestra que $M_\alpha < M'_\alpha$, o sea que M'_α es una mejor cota inferior.

Conjetura 1 *Sospechamos que el valor exacto de la constante de Bloch de $K_h(\alpha)$ es el radio de Bloch R_α de la función*

$$f_\alpha(z) = \tanh \left(\frac{\alpha}{2} \operatorname{Log} \frac{1+z}{1-z} \right)$$

(cuyo rango es el "lente" estudiado por Minda en [Mi86]).

Es claro que

$$R_\alpha = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \tan \left(\frac{\pi\alpha}{4} \right)}{1 - \tan \left(\frac{\pi\alpha}{4} \right)}$$

es una cota superior para la constante de Bloch de $K_h(\alpha)$. La tabla a continuación muestra algunos valores de M_α , M'_α y R_α . Se observa que las cotas son mejores para α pequeño.

α	M_α	M'_α	R_α
0.01	7.8533×10^{-3}	7.8543×10^{-3}	7.8543×10^{-3}
0.1	7.7909×10^{-2}	7.8864×10^{-2}	7.8865×10^{-2}
0.2	0.15236	0.15969	0.15973
0.3	0.220119	0.24459	0.24486
0.4	0.28369	0.33608	0.33714
0.5	0.34013	0.43762	0.44069
0.6	0.39118	0.55477	0.56209
0.7	0.43755	0.69795	0.71339
0.8	0.47993	0.89098	0.92137
0.9	0.51890	1.2125	1.271
0.99	0.55145	2.3120	2.4234

Bibliografía

- [A] L. Ahlfors, *Topics in Conformal Invariants*, McGraw-Hill.
- [B] A. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, Springer-Verlag, 1983.
- [Br] B. Brown Flinn, *Hyperbolic Convexity and level sets of analytic functions*, Indiana Univ. Math. J., **32** (1983) 831-841.
- [CMe] L. Cruz, D. Mejía, *Strongly hyperbolically convex functions*, J. Math. Anal. Appl. **335**(2007)1403-1415.
- [L] O. Lehto, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [LV] O. Lehto, K. I. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, Springer, Berlin, 1973.
- [MaMi94] W. Ma and D. Minda, *Hyperbolically convex functions*, *Ann. Polon. Math.* **60** (1994), 81-100.
- [MaMi95] W. Ma and D. Minda, *Hyperbolic linear invariance and hyperbolic k -convexity*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **58** (1995), 73-93.
- [MaMi99] W. Ma and D. Minda, *Hyperbolically convex functions II*, *Ann. Polon. Math.* **71** (1999), 273-285.
- [MaMeMi91] W. Ma, D. Mejía and D. Minda, *Distortion theorems for hyperbolically and spherically k -convex functions*, in: Proc. Internat. Conf. on New Trends in Geometric

Function Theory and Appl., R. Parvatham and S. Ponnusamy (eds.), World Sci., Singapore, 1991, 46-54.

- [MaMeMi04] W. Ma, D. Mejía and D. Minda, *Hyperbolically 1-convex functions*, Ann. Polon. Math. **84.3** (2004), 185-202.
- [MeMi] D. Mejía and D. Minda, *Hyperbolic geometry in hyperbolically k -convex regions*, Rev. Colombiana Mat. **25** (1991), 123-142.
- [MeP] D. Mejía and Ch. Pommerenke, *On hyperbolically convex functions*, J. Geom. Anal. **10** (2000), 365-378.
- [Mi82] C. D. Minda, *Bloch Constants*, J. Analyse Math. **41**(1982) 54-84.
- [Mi83] D. Minda, *Lower Bounds for the Hyperbolic Metric in Complex Regions*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, **13** (1983) 61-69.
- [Mi86] D. Minda, *The Hyperbolic Metric and Bloch Constants for Spherically Convex Regions*, Complex Variables, **5** (1986) 127-140.
- [Mi87] D. Minda, *The Strong Form of Ahlfors' Lemma*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, **17** (1987) 457-461.
- [P92] Ch. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [S] G. Szegő, *Über eine Extremalaufgabe aus der Theorie der schlichten Abbildungen*, Sitzungsberichte der Berliner Mathematische Gesellschaft **22**(1923), 38-47.