Sobre una Conjetura de De Giorgi para Problemas Elípticos en $\mathbb{R}^n$

por

Luis Fernando López Rios

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al Título de

Magister en Ciencias Matemáticas

Directores:
Sigifredo Herrón Osorio
Carlos Vélez López

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Junio 2009

Este trabajo ha sido apoyado por DIME, proyecto 20101007172.

Resumen

En este trabajo se estudian las demostraciones de la Conjetura de De Giorgi para dimensiones dos y tres. Se incluye una prueba para una versión más general de la conjetura que la formulada por De Giorgi en dichas dimensiones. En el transcurso del trabajo probaremos resultados que por sí solos son muy importantes en la teoría elíptica de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden.

Contenido

Agradecimientos

Quiero expresar mis más sinceros agradecimientos a los profesores Carlos Vélez y Sigifredo Herrón por su gran acompañamiento durante el desarrollo de este trabajo. Sin su ayuda no hubiera sido posible lograr los objetivos que trazamos.

A mi familia, especialmente a mis padres Jose Domingo y Luz Elena, mis hermanos Juan Carlos, Beatriz e Ivan y a mi novia Omaira, por su apoyo incondicional. Ellos son el soporte emocional que hace de mis dificultades sólo un paso para culminar con éxito mis metas.

A los jurados, profesores Jorge Cossio y Elder Villamizar, por sus aportes e inquietudes sobre algunos puntos esenciales de las pruebas y los métodos.

A todo el personal de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Por último expreso una enorme gratitud a la Universidad Nacional de Colombia por la formación y la acogida que me brindaron en este tiempo de estudios en matemáticas. Siento que la formación recibida en esta gran institución no pudo haber sido mejor y tengo una gran deuda con ella y con todos los colombianos.

Introducción

En 1978, Ennio De Giorgi planteó la siguiente conjetura.

Conjetura 0.1 *([DG]) Sea* $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ *una solución de*

$$\Delta u + u - u^3 = 0,$$

tal que

$$|u| \leq 1, \;\; u_{x_n} > 0,$$

en todo $\mathbb{R}^n$*. Entonces todos los conjuntos de nivel (no vacíos) de* u*,* $\{x \in \mathbb{R}^n / \; u(x) = c\}$*, son hiperplanos, al menos si* $n \leq 8$*.*

La Conjetura está relacionada con la teoría de hipersuperficies mínimas y transiciones de fase. De hecho la Conjetura algunas veces es llamada " la ε-versión del problema de Bernstein para superficies mínimas". Se sabe que toda superficie mínima de una función definida en $\mathbb{R}^{n-1}$ es un hiperplano si $n \leq 8$. La relación con el problema de Bernstein es probablemente la razón por la que De Giorgi afirma "al menos si $n \leq 8$".

El primer resultado parcial sobre la Conjetura se encontró en 1980 por Modica y Mortola en $[MM]$. Ellos probaron la Conjetura para $n = 2$ bajo la hipótesis adicional de que los conjuntos de nivel de u son gráficas de una familia equi-Lipschitziana de funciones. En 1985, Modica en $[M]$ probó que si $F \geq 0$ en $\mathbb{R}$ y $F \in C^2(\mathbb{R})$, entonces toda solución acotada de $\Delta u - F'(u) = 0$ en $\mathbb{R}^n$ satisface la cota del gradiente

$$\frac{1}{2} |\nabla u| \leq F(u). \tag{0.1}$$

En 1994, Caffarelli, Garofalo y Segala en $[CGS]$ generalizaron esta cota para ecuaciones más generales. Además probaron que si la igualdad en (0.1) ocurre en algún punto de $\mathbb{R}^n$, entonces la conclusión de De Giorgi es verdadera. Recientemente, Ghoussoub y Gui en [GG] probaron la Conjetura, cuando $n = 2$, para $f \in C^1(\mathbb{R})$ arbitraria en lugar de $u - u^3$: si

$$\Delta u + f(u) = 0 \text{ en } \mathbb{R}^2,$$

$|u(x, y)| \leq 1$ y $u_y > 0$ en $\mathbb{R}^2$, entonces los conjuntos de nivel de u son rectas.

Por otra parte, Berestycki, Caffarelli y Nirenberg en [BCN] probaron este mismo resultado en dimensión dos.

Posteriormente, Alberti, Ambrosio y Cabré en [AAC] probaron la Conjetura para $n = 3$ y no linealidades $f \in C^1(\mathbb{R})$, tal como en [GG] y [BCN]. Recientemente, Farina, Sciunzi y Valdinoci en [FSV] han probado versiones más generales de la Conjetura 0.1 en dimensiones dos y tres, debilitando las hipótesis sobre u y f, admitiendo operadores más generales que Δ, tales como el p-Laplaciano. En 2008, Ovidiu Savin en [S] ha obtenido una respuesta afirmativa para la Conjetura de De Giorgi, bajo las hipótesis adicionales:

$$\lim_{x_n \longrightarrow \infty} u(x', x_n) = 1$$

y

$$\lim_{x_n \longrightarrow -\infty} u(x', x_n) = -1,$$

para $4 \leq n \leq 8$. Sin embargo, la Conjetura tal y como la propuso De Giorgi permanece abierta para dimensiones $4 \leq n \leq 8$.

Por otra parte, Del Pino M., Kowalczyk y Wei J. en [DKW], han construido contraejemplos a la Conjetura cuando $n > 8$.

En el presente trabajo estudiamos en detalle una de las demostraciones de la Conjetura de De Giorgi en dimensiones dos y tres. En principio, nuestra referencia de orientación fue [FV], que es un artículo resumen sobre desarrollos de la Conjetura. Cuando $n = 2$, nuestra demostración es una versión detallada de aquella que se esboza en [FV]. Entre los detalles que hemos estudiado, incluimos un resultado de acotamiento de $|\nabla u|$ cuando $u \in C^2(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisface la ecuación

$$\Delta u + f(u) = 0 \text{ en } \mathbb{R}^n,$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$, y un resultado "tipo Liouville" esbozado por Berestycki, Caffarelli y Nirenberg (véase [BCN]). Este resultado es el siguiente:

Teorema 0.1 *Sean $n \geq 2$ un número natural y $\varphi \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$, tal que $\varphi > 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. Sea $\sigma \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi^2 \; \nabla\sigma \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\sigma \operatorname{div}(\varphi^2 \nabla \sigma) \geq 0 \quad c.t.p. \quad en \ \mathbb{R}^n,$$

donde las derivadas se entienden en sentido débil. Supongamos que para todo $R > 0$

$$\int_{B_R} (\varphi\sigma)^2 dx \leq CR^2$$

para alguna constante $C > 0$ *independiente de* R*, donde* B_R *es el conjunto definido por* $B_R := \{x \in \mathbb{R}^n / \ |x| < R\}$*. Entonces* σ *es constante casi todo punto en* $\mathbb{R}^n$*.*

Si $n = 2$, ∇u se puede escribir en forma polar como

$$\nabla u = \rho e^{i\theta}.$$

Así, el objetivo consiste en probar que θ es constante, lo cual se logra usando el Teorema 0.1.

En el caso $n = 3$, presentamos básicamente la demostración detallada de la Conjetura contenida en [AAC]. La idea consiste en considerar las funciones

$$\sigma_x := \frac{u_x}{u_z}, \ \ \sigma_y := \frac{u_y}{u_z},$$

que están bien definidas pues $u_z > 0$ por hipótesis en la Conjetura. A estas funciones eventualmente se les aplica el Teorema 0.1, con lo cual σ_x y σ_y resultan ser constantes, i.e.

$$\nabla u = (c, d, 1)u_z.$$

La Conjetura se sigue de este hecho.

El trabajo está organizado de la siguiente forma: En el Capítulo 1 presentamos algunas definiciones básicas relacionadas con espacios de Sobolev y algunos resultados básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales elípticas, tales como el Principio del Máximo y la Desigualdad de Harnack. En el Capítulo 2 probaremos el Teorema 0.1 “tipo Liouville”, así como la Conjetura de De Giorgi para $n = 2$ y $n = 3$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan algunos resultados de análisis funcional y de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales. Estudiaremos algunos teoremas clásicos como el Principio del Máximo Débil y las reglas básicas para operar derivadas débiles. También veremos algunos estimativos y resultados de regularidad de las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales elípticas de segundo orden. Para esta última tarea necesitaremos los teoremas de encajes de Sobolev. Todos los resultados que veremos están probados en los artículos y textos que se dan como referencia.

1.1 Definiciones y propiedades básicas

Definición 1.1 *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, es el conjunto*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) / \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \ \forall i = 1, ..., n \right\},$$

donde $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ es el único elemento en $L^p(\Omega)$ que cumple

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

y $C_c^\infty(\Omega) := \{u \in C^\infty(\Omega) / \text{ supp } u \subset \Omega \text{ es compacto}\}$. Las funciones $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, ..., n$ se denominan derivadas débiles de u.

Para un entero $m \geq 2$ y p un numero tal que $1 \leq p \leq \infty$ se define

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega) / \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega), \ \forall i = 1, ..., n \right\}.$$

En adelante dotaremos a $W^{m,p}(\Omega)$ de la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} := \|u\|_{m,p;\Omega} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p},$$

donde α es un multi-índice, es decir, una n-tupla $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, con $\alpha_i \geq 0$ entero, y definimos

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \quad y \quad D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1 + ... + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}} u.$$

El espacio de Sobolev $W_0^{m,p}(\Omega)$ es por definición la clausura del conjunto $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$. Escribimos $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$.

Se define $W_{loc}^{m,p}(\Omega)$ como el conjunto de las clases de funciones medibles que pertenecen a $W^{m,p}(\Omega')$ para todo abierto $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Es bien sabido (véase [Br]) que $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. Además $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo para $1 < p < \infty$ y separable para $1 \leq p < \infty$. El espacio $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable con el producto interno

$$(u, v) := \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v, \ \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

Por otro lado, si Ω es acotado entonces en el espacio $H_0^1(\Omega) \subseteq H^1(\Omega)$ con el producto interno definido anteriormente es equivalente al producto interno dado por

$$(u, v)_{H_0^1} := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v, \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

En adelante supondremos que $H_0^1(\Omega)$ está dotado de $(u, v)_{H_0^1}$.

Los siguientes dos teoremas nos permiten hacer operaciones con derivadas débiles (véase [Br] y [GT] para sus demostraciones).

Teorema 1.1 ***(Regla del producto para derivadas débiles)*** *Sean $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}, \ \ i = 1, ..., n. \tag{1.1}$$

Si, en particular, Ω es acotado, $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, uv y $\frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}$, $i = 1, ..., n$, pertenecen a $L^p(\Omega)$, entonces $uv \in W^{1,p}(\Omega)$ y se cumple la fórmula (1.1).

Teorema 1.2 ***(Regla de la Cadena para derivadas débiles)*** *Sean $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ y $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $(f \circ u)_{x_i} = f'(u) u_{x_i}$.*

A continuación enunciaremos los resultados de encajes de Sobolev que se usarán a lo largo del trabajo. Para ello introducimos las siguientes definiciones. En lo que resta de esta sección nuestra referencia principal es [GT].

Definición 1.2 ***(Hölder continuidad)*** *Sean $D \neq \phi$ un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}$. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha \leq 1$. Decimos que f es* ***uniformemente Hölder continua*** *con exponente α en D, si la cantidad*

$$[f]_{\alpha;D} = \sup_{\substack{x,y \in D \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\alpha}}$$

es finita; y decimos que f es ***localmente Hölder continua*** *en D con exponente α si f es uniformemente Hölder continua con exponente α en subconjuntos compactos de D.*

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y k un entero no negativo. Los espacios de Hölder $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ ($C^{k,\alpha}(\Omega)$) son definidos como los subespacios de $C^k(\overline{\Omega})$ ($C^k(\Omega)$) conformados por las funciones cuyas derivadas parciales de k-ésimo orden son uniformemente (localmente) Hölder continuas con exponente α en Ω. Escribimos por simplicidad $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) =: C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ y $C^{0,\alpha}(\Omega) =: C^{\alpha}(\Omega)$. Si definimos $C^{k,0}(\overline{\Omega}) := C^k(\overline{\Omega})$ y $C^{k,0}(\Omega) := C^k(\Omega)$, podemos incluir los espacios $C^k(\overline{\Omega})$ ($C^k(\Omega)$) en los espacios $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ ($C^{k,\alpha}(\Omega)$) para $0 \leq \alpha \leq 1$.

Definición 1.3 ***(Dominios suaves)*** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado. Decimos que Ω y su frontera son de clase $C^{k,\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, k un entero no negativo, si para cada punto $x_0 \in \partial\Omega$ existen una bola $B = B(x_0)$ centrada en x_0 y una función $\Psi : B \to D \subset \mathbb{R}^n$ biyectiva tal que*

i) $\Psi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^n_+$; ii) $\Psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$; iii) $\Psi \in C^{k,\alpha}(B)$ y $\Psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(D)$.

El teorema de encajes de Sobolev que usaremos en el trabajo es el siguiente:

Teorema 1.3 *Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^n$ de clase $C^{0,1}$. Se tiene que:*

i) Si $kp < n$ entonces el espacio $W^{k,p}(\Omega)$ está incluido continuamente en $L^{p^*}(\Omega)$ con $p^* = \frac{np}{n-kp}$. La inclusión es, además, compacta en $L^q(\Omega)$ para $q < p^*$.

ii) Si $0 \leq m < k - \frac{n}{p} < m + 1$, el espacio $W^{k,p}(\Omega)$ está incluido continuamente en $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ con $\alpha = k - \frac{n}{p} - m$. La inclusión es compacta en $C^{m,\beta}(\overline{\Omega})$ para cualquier $\beta < \alpha$.

1.2 Resultados básicos para problemas elípticos

Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^n$. A lo largo de esta sección, L será un operador de la forma

$$Lu = \Delta u + cu,$$

donde c es una función escalar definida en Ω. Con respecto a este tipo de operadores elípticos de segundo orden tenemos un resultado muy importante conocido como el **Principio del Máximo Débil** (véase [GT] pág. 32).

Teorema 1.4 *Sean Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ y $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta u \geq 0$ (≤ 0) en Ω. Entonces el máximo (mínimo) de u en $\overline{\Omega}$ se alcanza en $\partial\Omega$, es decir,*

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) = \sup_{x\in\partial\Omega} u(x) \quad (\inf_{x\in\Omega} u(x) = \inf_{x\in\partial\Omega} u(x)).$$

En los enunciados de los teoremas que presentamos a continuación el Laplaciano se entiende en el sentido de las derivadas débiles de $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$.

El siguiente es un resultado de regularidad (véase [GT] pág. 243).

Teorema 1.5 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio. Sean $f \in W^{k,q}_{loc}(\Omega)$, $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$, con $1 < p, q < \infty$ y $k \geq 1$. Si $\Delta u = f$ c.t.p. en Ω, entonces $u \in W^{k+2,p}_{loc}(\Omega)$.*

El siguiente teorema es un estimativo interior para las segundas derivadas de las soluciones de la ecuación elíptica $\Delta u + cu = 0$ (véase [GT] pág. 235).

Teorema 1.6 *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, $u \in W^{2,p}_{Loc}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, con $1 < p < \infty$, y $f \in L^p(\Omega)$. Si $\Delta u = f$ c.t.p. en Ω, entonces para todo dominio $\Omega' \subset\subset \Omega$, existe $C = C(n, p, \Omega', \Omega) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{2,p;\Omega'} \leq C(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}).$$

Con la misma notación del teorema anterior tenemos un resultado muy importante (véase [GT], págs. 191-202).

Teorema 1.7 ***(Desigualdad de Harnack)*** *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $u \in W^{1,2}(\Omega)$, $u \geq 0$ c.t.p. en Ω y $c \in L^\infty(\Omega)$. Si $\Delta u + cu = 0$ c.t.p. en Ω, entonces para cada bola $B_{4R}(y) \subseteq \Omega$, existe una constante $C = C_n^{\Lambda_n + \|C\|_{L^\infty(\Omega)} R} > 0$, donde $C_n > 0$ y $\Lambda_n > 0$ dependen sólo de n, tal que*

$$\sup_{B_R(y)} u \leq C \inf_{B_R(y)} u.$$

Definición 1.4 ***(Valores y vectores propios)*** *Sea $\sigma \in \mathbb{R}$. Diremos que σ es un **valor propio** de $-\Delta + c$, con condición de Dirichlet en $\partial\Omega$, si existe una función $\varphi \in H^1_0(\Omega)$, $\varphi \neq 0$, tal que*

$$\int_\Omega (\nabla\varphi \cdot \nabla v + c\varphi v - \sigma\varphi v) = 0 \quad \text{para toda } v \in C^\infty_c(\Omega).$$

*Además, diremos que φ es una **función propia** asociada al valor propio σ.*

La referencia [GT] en las págs. 212-214 contiene el siguiente resultado que será muy útil.

Teorema 1.8 *Sea $c : \Omega \to \mathbb{R}$ una función acotada. Existe un conjunto infinito, discreto y contable Σ de valores propios de $-\Delta + c$. Más aún, Σ es acotado inferiormente,* $\inf \Sigma \in \Sigma$ *y las funciones propias asociadas a* $\inf \Sigma$ *son de un signo.*

Para la prueba de la Conjetura de De Giorgi en dimensión tres necesitaremos el siguiente teorema (véase [CH] pág. 409). Ordenemos el conjunto Σ de valores propios de $-\Delta + c$ en una sucesión creciente $\{\lambda_m(\Omega)\}_{m \in \mathbb{N}}$. Entonces se cumple el

Teorema 1.9 *Sean Ω y Ω' dominios en $\mathbb{R}^n$ tales que $\Omega' \subseteq \Omega$. Entonces*

$$\lambda_m(\Omega) \leq \lambda_m(\Omega'), \ \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Finalizamos esta sección con un resultado de regularidad, de las soluciones de ciertos problemas elípticos, que usaremos en el Capítulo 2 en la demostración de la Conjetura de De Giorgi para $n = 3$. Allí, aplicaremos el resultado en bolas abiertas en $\mathbb{R}^{n-1}$.

Teorema 1.10 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un dominio acotado de clase C^∞ y sea $c \in L^\infty(\Omega)$. Si $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ es tal que*

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla v = -\int_\Omega c\varphi v, \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega),$$

entonces

$$\varphi \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \quad si\ p > n.$$

Esquema de la prueba.

A continuación citamos de forma resumida los resultados de [GT] que llevan a la conclusión. En primer lugar, por la nota posterior al Teorema 8.37 *en* [GT] (pág. 214), $\varphi \in C(\overline{\Omega})$. *Además, por el Teorema* 8.12 *(pág. 186) de [GT], $\varphi \in W^{2,2}(\Omega)$. Así, $\varphi \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$. Integrando por partes en la igualdad de la hipótesis, se obtiene que*

$$-\int_\Omega \Delta\varphi v = -\int_\Omega c\varphi v, \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega),$$

equivalentemente,

$$\int_\Omega (\Delta\varphi - c\varphi)v = 0, \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Luego, $\varphi \in W^{2,2}(\Omega)$ satisface

$$\begin{cases} \Delta\varphi - c\varphi = 0 \quad \text{c.t.p. en } \Omega \\ \qquad \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \end{cases}$$

Sea $1 < p < \infty$. El Teorema 9.15 (pág. 241) de la citada referencia afirma que el problema

$$\begin{cases} \Delta u = f \quad \text{c.t.p. en } \Omega \\ \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

tiene una única solución $u \in W^{2,p}(\Omega)$ cuando $f \in L^p(\Omega)$. En particular, tomando $f := c\varphi$ tenemos que $f \in L^p(\Omega)$ pues $c \in L^\infty(\Omega)$, $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ y Ω es acotado. En consecuencia, existe una única solución $w_p \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ del problema

$$\begin{cases} \Delta w_p = c\varphi \quad \text{c.t.p. en } \Omega \\ \quad w_p \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \tag{1.2}$$

Ahora, sea $p > n \geq 2$. Como Ω es acotado, $w_p \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$. Por unicidad de la solución de (1.2) con $p = 2$, $w_p = w_2 = \varphi$. En consecuencia,

$$\varphi = w_p \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega).$$

1.3 Acotamiento elíptico

En esta sección se prueba una desigualdad que permite acotar el gradiente de una solución suave y acotada de una ecuación de la forma $\Delta u = f$. La demostración que presentamos es una versión detallada de la que aparece en [GT], págs. 38-41.

Teorema 1.11 *sean Ω un abierto acotado en $\mathbb{R}^n$ y $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ una función que satisface la ecuación $\Delta u = f$ en Ω, donde f es una función acotada en Ω. Sea*

$$d_x := dist(x, \partial\Omega), \quad \forall x \in \Omega.$$

Entonces la función $x \longmapsto d_x \, |\nabla u(x)|$ es acotada y, además,

$$\sup_{x\in\Omega} d_x \, |\nabla u(x)| \leq c_n (\sup_{x\in\Omega} |u(x)| + \sup_{x\in\Omega} d_x^2 \, |f(x)|),$$

donde $c_n > 0$ es una constante que sólo depende de n.

Prueba.

Paso 1*:*
Sea $z \in \Omega$. *Dado* $d > 0$, *definamos*

$$Q_z := \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / \, |x_i - z_i| < d, \; i = 1, ..., n\} .$$

Tomemos un $d > 0$ *tal que* $\overline{Q_z} \subseteq \Omega$. *Primero probemos que*

$$|u_{x_i}(z)| \leq \frac{n}{d} \sup_{x \in \partial Q_z} |u(x)| + \frac{d}{2} \sup_{x \in Q_z} |f(x)| \, , \; i = 1, ..., n. \tag{1.3}$$

Por un argumento de translación, que no altera las derivadas involucradas, basta probar (1.3) *cuando* $0 \in \Omega$ *y* $z = 0$. *Es decir, basta probar que*

$$|u_{x_i}(0)| \leq \frac{n}{d} \sup_{x \in \partial Q_0} |u(x)| + \frac{d}{2} \sup_{x \in Q_0} |f(x)| \, , \; i = 1, ..., n. \tag{1.4}$$

Por conveniencia notacional, probaremos (1.4) *sólo para* $i = n$. *Del argumento que presentamos a continuación queda claro que la demostración cuando* $i \neq n$ *es similar.*

Introduzcamos el "cubo medio"

$$Q' := \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \diagup |x_i| < d, \; i = 1, ..., n-1 \; ; \; 0 < x_n < d\} .$$

Consideremos las funciones $\varphi : \overline{Q'} \to \mathbb{R}$ *y* $\Psi : \overline{Q'} \to \mathbb{R}$ *definidas por*

$$\varphi(x', x_n) := \frac{1}{2} \left[u(x', x_n) - u(x', -x_n) \right] ,$$

y

$$\Psi(x', x_n) := \frac{M}{d^2} \left[\left| x' \right|^2 + x_n(nd - (n-1)x_n) \right] + N \frac{x_n}{2} (d - x_n).$$

donde $x' = (x_1, ..., x_{n-1})$, $M := \sup_{x \in \partial Q} |u(x)|$ *y* $N := \sup_{x \in Q} |f(x)|$.

Nuestra intención consiste en aplicar el Principio del Máximo Débil, Teorema 1.4, a las funciones

$$\Psi \pm \varphi \in C^2(Q') \cap C^0(\overline{\Omega}') \quad \text{en } Q'.$$

Para este fín, observemos que φ *y* Ψ *satisfacen las siguientes propiedades:*

i) Si $(x', 0) \in \partial Q'$, *entonces* $\varphi(x', 0) = 0 \leq \Psi(x', 0)$.

ii) Se tiene que

$$\sup_{x \in \partial Q'} |\varphi(x)| \leq \sup_{x \in \partial Q} |u(x)| = M$$

iii) Si $(x', x_n) \in \partial Q'$, $x_n \neq 0$, *entonces existe* $i \in \{1, ..., n\}$ *tal que* $x_i = d$. *Si* $i = n$ *tenemos*

$$\Psi(x', d) := \frac{M}{d^2}\left[\left|x'\right|^2 + d^2\right] \geq M.$$

Si $i \neq n$ *tenemos*

$$\Psi(x', d) \geq \frac{M}{d^2}\left|x'\right|^2 \geq M.$$

En cualquier caso obtenemos que

$$\Psi(x', x_n) \geq M. \tag{1.5}$$

iv) Si $(x', x_n) \in Q'$, *puesto que* $\Delta u = f$ *en* Ω, *entonces*

$$\begin{aligned} \left|\Delta\varphi(x', x_n)\right| &= \left|\frac{1}{2}\left[\Delta u(x', x_n) - \Delta u(x', -x_n)\right]\right| \\ &= \left|\frac{1}{2}\left[f(x', x_n) - f(x', -x_n)\right]\right| \\ &\leq \sup_{x\in Q} |f(x)| = N. \end{aligned} \tag{1.6}$$

v) En Q' *se tiene que*

$$\begin{aligned} \Delta\Psi &= \sum_{i=1}^{n} \Psi_{x_i x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{x_i x_i} + \Psi_{x_n x_n} \\ &= \frac{M}{d^2}\sum_{i=1}^{n-1} 2 + \frac{M}{d^2}\left[-2(n-1)\right] - N = -N. \end{aligned} \tag{1.7}$$

De (1.6) *y* (1.7) *tenemos que en* Q',

$$\Delta(\Psi \pm \varphi) = \Delta\Psi \pm \Delta\varphi = -N \pm \Delta\varphi \leq 0$$

De i), ii) y iii) $\Psi \pm \varphi \geq 0$ *en* $\partial Q'$.

Si aplicamos el Principio del Máximo Débil, Teorema 1.4, *a las funciones* $\Psi + \varphi$ *y* $\Psi - \varphi$ *en* Q' *obtenemos inmediatamente que*

$$\left|\varphi(x', x_n)\right| \leq \Psi(x', x_n), \quad \forall (x', x_n) \in Q'. \tag{1.8}$$

Tomando el límite en (1.8) cuando $x_n \to 0^+$ tenemos que:

$$|u_{x_n}(0)| = \lim_{x_n \to 0^+} \left| \frac{\varphi(0,x_n)}{x_n} \right| \leq \lim_{x_n \to 0^+} \frac{\Psi(0,x_n)}{x_n} = \frac{n}{d}M + \frac{d}{2}N.$$

Así, hemos probado (1.4) para $i = n$, y está claro que la demostración es similar cuando $i \neq n$ con pequeños cambios notacionales. Por las anotaciones al inicio de la prueba, hemos probado (1.3) para todo $z \in \Omega$ y todo $d > 0$ tal que $\overline{Q_z} \subseteq \Omega$.

Paso 2:

Sea $x \in \Omega$. Tomemos $Q := \left\{ y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n / \, |y_i - x_i| < \frac{d_x}{2\sqrt{n}}, i = 1, ..., n \right\}$. Notemos que, de la definición de d_x, $\overline{Q} \subseteq \Omega$.

Entonces, de (1.3), para $M := \sup_{x \in \partial Q} |u(x)|$ y $N := \sup_{x \in Q} |f(x)|$,

$$|u_{x_i}(x)| \leq \frac{2n^{\frac{3}{2}}}{d_x} M + \frac{d_x}{4\sqrt{n}} N, \; i = 1, ..., n.$$

Luego

$$|\nabla u(x)| = [\sum_{i=1}^{n} (D_i u(x))^2]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{n}(\frac{2n^{\frac{3}{2}}}{d_x} M + \frac{d_x}{4\sqrt{n}} N) = \frac{2n^2}{d_x} M + \frac{d_x}{4} N.$$

De esta manera,

$$d_x \left| \nabla u(x) \right| \leq 2n^2 \sup_{y \in \partial Q} |u(x)| + \frac{d_x^2}{4} \sup_{y \in Q} |f(y)|. \tag{1.9}$$

Como $u \in C^2(\Omega)$ y satisface la ecuación $\Delta u = f$ en Ω, entonces f es continua en $\overline{Q} \subseteq \Omega$. Sea $y_0 \in \overline{Q}$ el punto donde f restringida a $\overline{Q}$ alcanza el valor máximo. Notemos que

$$d_x := dist(x, \partial\Omega) \leq dist(x, y_0) + dist(y_0, \partial\Omega) = d(x, y_0) + d_{y_0}.$$

Así

$$d_{y_0} \geq d_x - dist(x, y_0) \geq d_x - \frac{d_x}{2} = \frac{d_x}{2}.$$

Luego

$$d_x^2 \leq 4 d_{y_0}^2.$$

Volviendo a (1.9) tenemos

$$\begin{aligned} d_x \left| \nabla u(x) \right| &\leq 2n^2 \sup_{y \in \partial Q} |u(y)| + d_{y_0}^2 f(y_0) \\ &\leq 2n^2 \sup_{y \in \Omega} |u(y)| + \sup_{y \in \Omega} d_y^2 \left| f(y) \right|. \end{aligned}$$

Si escogemos $c_n := 2n^2$ *(sólo depende de* n*) entonces*

$$d_x\,|\nabla u(x)| \leq c_n(\sup_{y\in\Omega}|u(y)| + \sup_{y\in\Omega} d_y^2\,|f(y)|), \quad \forall x \in \Omega.$$

Finalmente,

$$\sup_{x\in\Omega} d_x\,|\nabla u(x)| \leq c_n(\sup_{x\in\Omega}|u(x)| + \sup_{x\in\Omega} d_x^2\,|f(x)|),$$

como se quería. ■

Como consecuencia del teorema anterior obtenemos un acotamiento que vamos a utilizar en la demostración de la Conjetura de De Giorgi en dimensiones dos y tres. En su demostración, es clave el hecho de que la constante c_n en el acotamiento anterior no depende de Ω.

Corolario 1.1 *Sea* $u \in C^2(\mathbb{R}^n, [-1,1])$ *una función que satisface la ecuación* $\Delta u + f(u) = 0$ *en* $\mathbb{R}^n$*, donde* $f \in C^1(\mathbb{R})$*. Entonces* $|\nabla u| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es una función acotada.*

Prueba. *Notemos que* u *es una solución de la ecuación* $\Delta z = g(x)$*, donde* $g(x) := -f(u(x))$*. Como* $u(x) \in [-1,1]$*,* $\forall x \in \mathbb{R}^n$*, y* f *es continua, entonces* $|f \circ u|$ *es acotada superiormente en* $\mathbb{R}^n$ *digamos, por* M*. Sea* $x \in \mathbb{R}^n$ *y tomemos* $\Omega := D(x,1) = \{y \in \mathbb{R}^n / \, |y-x| < 1\}$*. Aplicando el teorema anterior tenemos*

$$d_x\,|\nabla u(x)| \leq \sup_{y\in\Omega} d_y\,|\nabla u(y)| \leq c_n(\sup_{y\in\Omega}|u(y)| + \sup_{y\in\Omega} d_y^2\,|f(u(x))|).$$

Pero en este caso $d_x = dist(x, \partial\Omega) = 1$ *y* $d_y \leq 1$ *para todo* $y \in \Omega$*. Luego,*

$$|\nabla u(x)| \leq c_n(1 + M).$$

Dado que $x \in \mathbb{R}^n$ *es arbitrario y* c_n *sólo depende de* n*, entonces* $|\nabla u|$ *está acotada.* ■

Capítulo 2

Conjetura de De Giorgi

2.1 En dimensión dos

El siguiente resultado es un teorema del tipo Liouville. Su demostración está basada en las ideas del artículo [BCN] y es fundamental para lo que sigue. Usaremos la notación

$$B_R := \{x \in \mathbb{R}^n / \ |x| < R\}.$$

Teorema 2.1 *Sean $n \geq 2$ un número natural y $\varphi \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$, tal que $\varphi > 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. Sea $\sigma \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi^2 \nabla\sigma \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\sigma \operatorname{div}(\varphi^2 \nabla \sigma) \geq 0 \quad c.t.p. \quad en\ \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

donde las derivadas se entienden en sentido débil. Supongamos que para todo $R > 0$

$$\int_{B_R} (\varphi\sigma)^2 dx \leq CR^2 \tag{2.2}$$

para alguna constante $C > 0$ independiente de R. Entonces σ es constante casi todo punto en $\mathbb{R}^n$.

Prueba. *La estrategia de la prueba consiste en probar que $\varphi^2 |\nabla\sigma|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2 |\nabla\sigma|^2 dx = 0.$$

El resultado se seguirá entonces debido a la hipótesis de que $\varphi > 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. *A fin de completar este objetivo, usamos una técnica de truncaciones mencionada en [BCN] y [FV]. Sea $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ tal que $\xi(t) = 1$ si $|t| \leq 1$ y $\xi(t) = 0$ si $|t| \geq 2$. La existencia de una ξ con tales propiedades se puede obtener, entre otras formas, como consecuencia del Lema de Existencia de Particiones de la Unidad (véase [Mu]). Para cada $R > 0$ definamos la función Γ_R como $\Gamma_R(w) := \xi(\frac{|w|}{R})$, $w \in \mathbb{R}^n$. Observemos que $\Gamma_R \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n, [0,1])$.*

Multipliquemos (2.1) por Γ_R^2 e integremos sobre B_{2R}. Observemos que esto es posible ya que $\Gamma_R^2 \in L^\infty(B_{2R})$, $\sigma \in L^2(B_{2R})$ y $\operatorname{div}(\varphi^2\nabla\sigma) \in L^2(B_{2R})$. Usando integración por partes, lo cual es *posible pues* $\Gamma_R^2\sigma \in H_0^1(B_{2R})$, *y la fórmula para la derivada de un producto, Teorema* 1.1*, tenemos:*

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_{B_{2R}} \Gamma_R^2\sigma\,\mathrm{div}(\varphi^2\nabla\sigma)dx \\
&= \int_{B_{2R}} \sum_{i=1}^{n} \Gamma_R^2\sigma(\varphi^2\sigma_{x_i})_{x_i}dx \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\int_{B_{2R}} (\Gamma_R^2\sigma)_{x_i}\varphi^2\sigma_{x_i}dx \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\int_{B_{2R}} \varphi^2\sigma_{x_i}(2\Gamma_R\Gamma_{Rx_i}\sigma+\Gamma_R^2\sigma_{x_i})dx \\
&= -\int_{B_{2R}} \varphi^2\Gamma_R^2\sum_{i=1}^{n}\sigma_{x_i}^2dx - \int_{B_{2R}} 2\varphi^2\Gamma_R\sigma\sum_{i=1}^{n}\Gamma_{Rx_i}\sigma_{x_i}dx \\
&= -\int_{B_{2R}} \varphi^2\Gamma_R^2\left|\nabla\sigma\right|^2dx - \int_{B_{2R}} 2\varphi^2\Gamma_R\sigma(\nabla\Gamma_R\cdot\nabla\sigma)dx.
\end{aligned}
$$

De esto, de la definición de Γ_R*, de la desigualdad de Hölder (recordemos que* $\varphi \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *y* $\sigma \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$*), tenemos*

$$
\begin{aligned}
\int_{B_{2R}} \Gamma_R^2\varphi^2\left|\nabla\sigma\right|^2dx &\leq 2\int_{B_{2R}} \left|\varphi^2\Gamma_R\sigma(\nabla\Gamma_R\cdot\nabla\sigma)\right|dx \\
&= 2\int_{R\leq|x|\leq 2R} \left|\varphi^2\Gamma_R\sigma(\nabla\Gamma_R\cdot\nabla\sigma)\right|dx \\
&\leq 2\left(\int_{R\leq|x|\leq 2R}\Gamma_R^2\varphi^2\left|\nabla\sigma\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{R\leq|x|\leq 2R}\varphi^2\sigma^2\left|\nabla\Gamma_R\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

Si definimos $c_1 := \sup_{y\in[-2,2]}\xi'(y)$ *tenemos que para* $R \leq |w| \leq 2R$*,*

$$\Gamma_{Rx_i}(w) = \xi'(\frac{|w|}{R})\frac{1}{R}\frac{1}{|w|}x_i \leq c_1\frac{x_i}{R^2},\ i = 1,...,n,$$

donde $w = (x_1,...,x_n)$*. La última desigualdad es consecuencia de que* $|w| \geq R$*. Concluimos que para todo* $w \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $R \leq |w| \leq 2R$*,*

$$
\begin{aligned}
\left|\nabla\Gamma_R(w)\right|^2 &\leq \frac{c_1^2}{R^4}(x_1^2+...+x_n^2) \\
&\leq \frac{c_1^2}{R^4}4R^2 \\
&= 4\frac{c_1^2}{R^2}. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Luego, de (2.3) *y* (2.4)*,*

$$\int_{B_{2R}} \Gamma_R^2 \varphi^2 \left|\nabla\sigma\right|^2 dx \leq 4c_1 \left(\int_{R\leq|x|\leq 2R} \Gamma_R^2 \varphi^2 \left|\nabla\sigma\right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{R^2} \int_{B_{2R}} (\varphi\sigma)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De esto y (2.2) *concluimos*

$$\begin{aligned} \int_{B_{2R}} \Gamma_R^2 \varphi^2 \left|\nabla\sigma\right|^2 dx &\leq 4c_1\sqrt{C} \left(\int_{R\leq|x|\leq 2R} \Gamma_R^2 \varphi^2 \left|\nabla\sigma\right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 4c_1\sqrt{C} \left(\int_{B_{2R}} \Gamma_R^2 \varphi^2 \left|\nabla\sigma\right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

La desigualdad (2.5) *implica que existe una constante* $D := 16c_1^2 C > 0$*, que no depende de* R*, tal que*

$$\int_{B_{2R}} \Gamma_R^2 \varphi^2 \left|\nabla\sigma\right|^2 dx \leq D \ , \ \ \forall R > 0.$$

Por el Lema de Fatou, tomando $R = m \in \mathbb{N}$*,*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\liminf_{m\to\infty} \Gamma_m^2 \varphi^2 \left|\nabla\sigma\right|^2) dx &\leq \liminf_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_m^2 \varphi^2 \left|\nabla\sigma\right|^2 dx \\ &\leq D. \end{aligned}$$

Como

$$\liminf_{m\to\infty} \Gamma_m^2 \varphi^2 \left|\nabla\sigma\right|^2 = \lim_{m\to\infty} \Gamma_m^2 \varphi^2 \left|\nabla\sigma\right|^2 = \varphi^2 \left|\nabla\sigma\right|^2,$$

entonces $\varphi^2 \left|\nabla\sigma\right|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$*. Usando el Teorema de la Convergencia Dominada, aplicado a la sucesión* $\left\{\Gamma_m^2 \varphi^2 \left|\nabla\sigma\right|^2\right\}_m$*, que está dominada por* $\varphi^2 \left|\nabla\sigma\right|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$*, tenemos*

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \int_{B_{2m}} \Gamma_m^2 \varphi^2 \left|\nabla\sigma\right|^2 dx &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_m^2 \varphi^2 \left|\nabla\sigma\right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2 \left|\nabla\sigma\right|^2 dx. \end{aligned}$$

De nuevo, por el Teorema de la Convergencia Dominada y tomando límite cuando m tiende a infinito en (2.5) tenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2 |\nabla\sigma|^2 \, dx &\leq 4c_1\sqrt{C}\left(\lim_{m\to\infty}\int_{m\leq|x|\leq 2m} \Gamma_m^2 \varphi^2 |\nabla\sigma|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 4c_1\sqrt{C}\left(\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[m,2m]}\Gamma_m^2 \varphi^2 |\nabla\sigma|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 4c_1\sqrt{C}\left[\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{m\to\infty}\left(\chi_{[m,2m]}\Gamma_m^2 \varphi^2 |\nabla\sigma|^2\right) dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Como $\varphi > 0$ c.t.p en $\mathbb{R}^n$, por hipótesis, entonces $|\nabla\sigma| = 0$ c.t.p en $\mathbb{R}^n$. De lo cual se sigue, usando el Teorema 1.3, que σ es igual a una constante c.t.p en $\mathbb{R}^n$. ■

Estamos ahora en capacidad de probar la Conjetura de De Giorgi en dimensión dos.

Teorema 2.2 ***(Conjetura de De Giorgi para n=2)*** *Sean $u \in C^2(\mathbb{R}^2, [-1,1])$ y $f \in C^1(\mathbb{R})$. Supongamos que u satisface*

$$\Delta u + f(u) = 0 \quad y \quad u_y > 0, \ \ en\ \mathbb{R}^2. \tag{2.6}$$

Entonces los conjuntos de nivel de u son líneas rectas.

Prueba. *Recordemos que, dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, el conjunto de nivel de u que contiene a (x,y) es ortogonal a $\nabla u(x,y)$. La idea de la demostración es probar entonces que ∇u tiene dirección constante. Para desarrollar de manera precisa esta idea, escribamos ∇u en forma polar, $z := \nabla u = \rho e^{i\theta}$ donde $\theta = \arccos\left(\frac{u_x}{|\nabla u|}\right)$ y $\rho = |\nabla u|$. Como $u_y > 0$ entonces $\nabla u \in \mathbb{R}^2_+$, luego las expresiones anteriores están bien definidas, es decir, la escritura en forma polar es válida. Nuestro objetivo es probar que θ es constante y lo haremos usando el Teorema* 2.1. *Por el Teorema* 1.5, *$u \in W^{3,p}(B_R)$ para cualquier $R > 0$ y $1 < p < \infty$. Este hecho y el Teorema* 1.2 *permiten derivar* (2.6) *en sentido débil. Tenemos entonces que, c.t.p. en B_R,*

$$
\begin{aligned}
(u_{xx} + u_{yy} + f(u))_x &= 0 \\
(u_{xx} + u_{yy} + f(u))_y &= 0,
\end{aligned}
$$

o equivalentemente

$$
\begin{aligned}
(u_x)_{xx} + (u_x)_{yy} + f'(u)u_x &= 0 \\
(u_y)_{xx} + (u_y)_{yy} + f'(u)u_y &= 0.
\end{aligned}
$$

En forma vectorial,

$$
\Delta z + f'(u)z = 0, \quad \textit{c.t.p.} \text{ en } B_R. \tag{2.7}
$$

Analicemos la diferenciabilidad de las funciones ρ y θ. Usando la definición de θ y de ρ, y la regla de la cadena (con derivadas en sentido clásico) obtenemos

$$
\begin{aligned}
\theta_x &= -u_{xx}(\frac{1}{u_y}) + u_x(u_x u_{xx} + u_y u_{yx})(\frac{1}{u_y})(\frac{1}{u_x^2 + u_y^2}) \\
\theta_y &= -u_{xy}(\frac{1}{u_y}) + u_x(u_x u_{xy} + u_y u_{yy})(\frac{1}{u_y})(\frac{1}{u_x^2 + u_y^2}) \\
\rho_x &= \frac{u_x u_{xx} + u_y u_{yx}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \\
\rho_y &= \frac{u_x u_{xy} + u_y u_{yy}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}.
\end{aligned}
$$

Las funciones $\frac{1}{u_y}$, $\frac{1}{u_x^2+u_y^2}$, $\frac{1}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}}$ pertenecen a $C^1(\mathbb{R}^2)$. Luego todas están en $L^\infty(B_R)$. Como $u \in C^2(\mathbb{R}^2) \cap W^{3,p}(B_R)$, queda claro, de las expresiones anteriores y el Teorema 1.1, *que θ, θ_x, θ_y, ρ, ρ_x, ρ_y todas están en $W^{1,p}(B_R) \cap L^\infty(B_R)$. Si calculamos z_x obtenemos:*

$$
\begin{aligned}
z_x &= \rho_x e^{i\theta} + i\rho e^{i\theta}\theta_x \\
&= (\rho_x + i\rho\theta_x)e^{i\theta},
\end{aligned}
$$

donde todas las derivadas se entienden en sentido clásico.

El Teorema 1.1 *permite calcular Δz (en sentido débil) de la siguiente manera:*

$$
\begin{aligned}
z_{xx} &= (\rho_{xx} + i\rho_x\theta_x + i\rho\theta_{xx})e^{i\theta} + (\rho_x + i\rho\theta_x)ie^{i\theta}\theta_x \\
&= (\rho_{xx} - \rho\theta_x^2 + i\rho\theta_{xx} + 2i\rho_x\theta_x)e^{i\theta}, \;\; \textit{c.t.p.} \text{ en } B_R.
\end{aligned}
$$

Similarmente,

$$
\begin{aligned}
z_{yy} &= (\rho_{yy} + i\rho_y\theta_y + i\rho\theta_{yy})e^{i\theta} + (\rho_y + i\rho\theta_y)ie^{i\theta}\theta_y \\
&= (\rho_{yy} - \rho\theta_y^2 + i\rho\theta_{yy} + 2i\rho_y\theta_y)e^{i\theta}, \;\; \textit{c.t.p.} \text{ en } B_R.
\end{aligned}
$$

Reemplazando en la ecuación (2.7) *obtenemos*

$$[\rho_{xx} + \rho_{yy} - \rho(\theta_x^2 + \theta_y^2) + i(\rho\theta_{xx} + \rho\theta_{yy} + 2\rho_x\theta_x + 2\rho_y\theta_y) + f'(u)\rho]e^{i\theta} = 0, \quad c.t.p. \text{ en } B_R.$$

Tomando sólo la parte imaginaria (observar que esto evita completamente la no linealidad, que sólo aparece en la parte real!),

$$\rho\Delta\theta + 2\nabla\rho \cdot \nabla\theta = 0, \quad c.t.p. \text{ en } B_R.$$

Escrito en términos del divergente,

$$\operatorname{div}(\rho^2\nabla\theta) = 0, \;\; c.t.p. \text{ en } B_R.$$

Como $R > 0$ *es arbitrario entonces*

$$\operatorname{div}(\rho^2\nabla\theta) = 0, \;\; c.t.p. \text{ en } \mathbb{R}^2.$$

Ahora aplicaremos el Teorema 2.1. *Por el acotamiento elíptico, Corolario* 1.1, $0 < |\nabla u| = \rho$ *está acotado. Debido a que* $\theta \in [0, \pi]$*, en particular* θ *también está acotada. Como* ρ *y* θ *son acotados, tomando en el teorema anterior en calidad de* φ *y* σ*,* ρ *y* θ*, respectivamente, concluimos que* $\int_{B_R}(\varphi\sigma)^2 dx \leq CR^2$*. Entonces* θ *es constante y los conjuntos de nivel de* u *son líneas perpendiculares al vector* $e^{\theta i}$*. Queda probada así la conjetura en dimensión dos.* ■

2.2 En dimensión tres

Para probar la Conjetura de De Giorgi en dimensión tres necesitaremos varios resultados contenidos en [AC] y [AAC]. A lo largo de la sección, $F \in C^2(\mathbb{R})$. Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una solución del problema

$$\Delta u - F'(u) = 0 \;\text{ y } u_{x_n} > 0 \text{ en } \mathbb{R}^n. \tag{2.8}$$

Para una solución acotada de (2.8) definimos

$$\begin{aligned} \overline{u}(x') \;\; : &= \lim_{x_n \to \infty} u(x', x_n) \quad \text{para todo } x' \in \mathbb{R}^{n-1} \\ \underline{u}(x') \;\; : &= \lim_{x_n \to -\infty} u(x', x_n) \quad \text{para todo } x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \end{aligned}$$

funciones que están bien definidas por ser u acotada y monótona en la n-ésima variable.

Los siguientes dos lemas provienen de la referencia [AC].

Lema 2.1 *Sea* $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ *una solución acotada de* (2.8) *en* $\mathbb{R}^n$, *donde* $F \in C^2(\mathbb{R})$. *Entonces:*

i) $\overline{u} \in C^2(\mathbb{R}^{n-1})$ *y* $\overline{u}$ *es solución (clásica) de*

$$\Delta\overline{u} - F'(\overline{u}) = 0 \quad en\ \mathbb{R}^{n-1}.$$

ii) Para todo $p > n$ *existe una función* $\varphi \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^{n-1})$ *tal que* $\varphi > 0$ *en* $\mathbb{R}^{n-1}$ *y*

$$\Delta\varphi - F''(\overline{u})\varphi \leq 0 \ c.t.p.\ en\ \ \mathbb{R}^{n-1},$$

donde las derivadas se entienden en sentido débil.

iii) En particular, si $n = 3$, *entonces* $\overline{u}$ *es una función de sólo una variable. Más precisamente,*

a) La función $\overline{u}$ *es constante ó*

b) Existen $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, *con* $|(a,b)| = 1$, *y* $h \in C^2(\mathbb{R})$ *tales que* $h' > 0$ *en* $\mathbb{R}$ *y*

$$\overline{u}(x,y) = h((a,b)\cdot(x,y)), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

El mismo resultado se cumple para $\underline{u}$.

Prueba. *Sea* $p > n$.

i) *Veamos que* $\overline{u} \in C^2(\mathbb{R}^{n-1})$ *y que*

$$\Delta\overline{u} - F'(\overline{u}) = 0 \quad en\ \mathbb{R}^{n-1}.$$

Por conveniencia, consideraremos $\overline{u}$ *como función de las variables* $x_1, ..., x_{n-1}$ *y* x_n. *Para cada* $j \in \mathbb{N}$ *y cada* $(x', x_n) \in \mathbb{R}^n$ *definamos la función*

$$u_j(x', x_n) := u(x', x_n + j).$$

Observemos que cada u_j *satisface las siguientes propiedades:*

a. $u_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \overline{u}$ *puntualmente en* $\mathbb{R}^n$.

b.

$$\inf u \leq u_j(x', x_n) \leq \sup u, \quad \forall (x', x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

c.

$$u_j \in C^2(\mathbb{R}^n) \quad y \quad \Delta u_j - F'(u_j) = 0 \quad en\ \mathbb{R}^n.$$

De **c.** *y el Teorema* 1.5 *(tomando* $f := F'(u_j) \in C^1(\mathbb{R}^n)$*), se sigue que*

d.

$$u_j \in W^{3,p}_{loc}(\mathbb{R}^n) \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Por **b., c.** *y el Corolario* 1.1, *tenemos*

e.

$$\exists C > 0 \ \ tal\ que\ \forall j \in \mathbb{N}, \ \ |\nabla u_j| \leq C.$$

El objetivo es probar que, localmente, $\{u_j\}_j$ *tiene alguna subsucesión que converge en* C^2. *Fijemos* $R > 0$ *y* $j \in \mathbb{N}$. *Derivando débilmente la ecuación en* **c.,** *y teniendo en cuenta* **d.,**

$$\Delta(u_j)_{x_i} - F''(u_j)(u_j)_{x_i} = 0 \ \ en\ \mathbb{R}^n.$$

Observemos que $F''(u_j) \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, *pues* u_j *está acotada según* **b.** *También notemos que*

$$(u_j)_{x_i} \in W^{2,p}_{loc}(B_{R+1}) \cap L^p(B_{R+1}),$$

por **d.** *y* **e.** *Con esto, estamos en condiciones de aplicar el Teorema* 1.6 *a la función* $(u_j)_{x_i}$ *para concluir que*

$$\|(u_j)_{x_i}\|_{2,p;B_R} \leq \widetilde{C}_R \, \|(u_j)_{x_i}\|_{L^p(B_{R+1})}, \tag{2.9}$$

donde $\widetilde{C}_R$ *depende sólo de* n, p, u *y* R *(todos fijos). De* (2.9), **e.** *y* **b.** *obtenemos que*

$$\begin{aligned} \|u_j\|_{3,p;B_R} &= \|u_j\|_{L^p(B_R)} + \|\nabla u_j\|_{2,p;B_R} \\ &\leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |B_R|^{\frac{1}{p}} + n\widetilde{C}_R C \, |B_R|^{\frac{1}{p}} . \end{aligned}$$

En conclusión, la sucesión $\{u_j\}_j$ *está acotada en* $W^{3,p}(B_R)$. *Por aplicación de los encajes de Sobolev, Teorema* 1.3, *con* $m = 2$ *y* $k = 3$, *obtenemos que existe una subsucesión, convenientemente denotada por* $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, *tal que*

$$u_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u_* \ en\ C^2(\overline{B_R}),$$

para cierta $u_* \in C^2(\overline{B_R})$. *Por* **a.,** $u_* \equiv \overline{u}$ *en* $\overline{B_R}$ *y en particular* $\overline{u} \in C^2(\overline{B_R})$.

Tomando límite cuando $j \to \infty$ *en sentido uniforme en la ecuación diferencial en* **c.,**

$$\Delta\overline{u} - F'(\overline{u}) = 0 \ \ en\ B_R.$$

Como esta conclusión es cierta para todo $R > 0$, *y* $\overline{u}_{x_n x_n} \equiv 0$, *se sigue el resultado i).*

ii) *Veamos primero que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 + F''(u)v^2 \geq 0 \ , \ \ \forall v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2.10}$$

En efecto, sea $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Supongamos que supp* $v \subseteq B_R$. *Recordemos que* $u \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. *Derivando* (2.8), *obtenemos que* u_{x_n} *satisface la ecuación*

$$\Delta u_{x_n} - F''(u)u_{x_n} = 0, \quad c.t.p. \text{ en } B_R.$$

Multiplicando la ecuación anterior por $-\frac{v^2}{u_{x_n}} \in C_c^1(B_R)$ *e integrando por partes obtenemos,*

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_R} -\frac{\Delta u_{x_n} v^2}{u_{x_n}} + F''(u)v^2 \\ &= \int_{B_R} \nabla u_{x_n} \cdot \nabla(\frac{v^2}{u_{x_n}}) + F''(u)v^2 \\ &= \int_{B_R} \frac{2v\nabla v \cdot \nabla(u_{x_n})}{u_{x_n}} - \frac{v^2 \left|\nabla(u_{x_n})\right|^2}{(u_{x_n})^2} + F''(u)v^2. \end{aligned}$$

Ahora

$$0 \leq (v\nabla(u_{x_n}) - u_{x_n}\nabla v)\cdot(v\nabla(u_{x_n}) - u_{x_n}\nabla v) = v^2 \left|\nabla(u_{x_n})\right|^2 - 2v(u_{x_n})\nabla v \cdot \nabla(u_{x_n}) + (u_{x_n})^2 \left|\nabla v\right|^2.$$

Como $u_{x_n} > 0$ *entonces*

$$\frac{2v\nabla v \cdot \nabla(u_{x_n})}{u_{x_n}} - \frac{v^2 \left|\nabla(u_{x_n})\right|^2}{(u_{x_n})^2} \leq \left|\nabla v\right|^2.$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 + F''(u)v^2 &\geq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2v\nabla v \cdot \nabla(u_{x_n})}{u_{x_n}} - \frac{v^2 \left|\nabla(u_{x_n})\right|^2}{(u_{x_n})^2} + F''(u)v^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Con la desigualdad (2.10) *podemos probar que*

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\nabla \eta|^2 + F''(\overline{u})\eta^2 \geq 0, \quad \forall \eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{2.11}$$

En efecto, sea $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. *Para cada* $\rho > 0$, *escogemos una función* $\Psi_\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ *con* $0 \leq \Psi_\rho \leq 1$, $\left|\Psi'_\rho\right| \leq 2$, $\Psi_\rho = 0$ *en* $(-\infty, \rho) \cup (2\rho + 2, \infty)$ *y* $\Psi_\rho = 1$ *en* $(\rho + 1, 2\rho + 1)$. *Ahora* *aplicamos* (2.10) *con* $v(x', x_n) := \eta(x')\Psi_\rho(x_n)$ *para obtener,*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 + F''(u)v^2 \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|\nabla\eta(x')\right|^2 dx'\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \Psi_\rho^2(x_n)dx_n\right) + \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \eta^2(x')dx'\right)\left(\int_{\mathbb{R}} (\Psi'_\rho)^2(x_n)dx_n\right) + \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \eta^2(x') \int_{\mathbb{R}} F''(u(x', x_n))\Psi_\rho^2(x_n)dx_n \, dx'. \end{aligned}$$

Dividiendo por $\alpha_\rho := \int_{\mathbb{R}} \Psi_\rho^2(x_n)dx_n$, *tenemos*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|\nabla\eta(x')\right|^2 dx' + \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \eta^2(x')dx'\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{(\Psi'_\rho)^2(x_n)}{\alpha_\rho}dx_n\right) + \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \eta^2(x') \int_{\mathbb{R}} F''(u(x', x_n))\frac{\Psi_\rho^2(x_n)}{\alpha_\rho}dx_n \, dx'. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Por la construcción de Ψ_ρ,

$$\int_{\mathbb{R}} (\Psi'_\rho)^2(x_n)dx_n \leq \int_\rho^{\rho+1} (\Psi'_\rho)^2(x_n)dx_n + \int_{2\rho+1}^{2\rho+2} (\Psi'_\rho)^2(x_n)dx_n \leq 4 \quad \text{y} \quad \alpha_\rho \geq \rho.$$

Aplicando esto a (2.12) *obtenemos que*

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|\nabla\eta(x')\right|^2 dx' + \frac{4}{\rho}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \eta^2(x')dx' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \eta^2(x') \int_{\mathbb{R}} F''(u(x', x_n))\frac{\Psi_\rho^2(x_n)}{\alpha_\rho}dx_n \, dx'. \tag{2.13}$$

Veamos que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \eta^2(x') \int_{\mathbb{R}} F''(u(x', x_n))\frac{\Psi_\rho^2(x_n)}{\alpha_\rho}dx_n \, dx' \underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} F''(\overline{u}(x'))\eta^2(x')dx'$$

y al tomar límite cuando ρ *tiende a infinito en* (2.13) *concluiremos* (2.11).

Sea $\epsilon > 0$. *Si usamos un argumento de compacidad, teniendo en cuenta que* u *es creciente en la última variable, es fácil probar (véase [Ru]) que* $u(\cdot, x_n)$ *converge uniformemente a* $\overline{u}(\cdot)$, *cuando* x_n *tiende a infinito, en subconjuntos compactos de* $\mathbb{R}^{n-1}$. *Supongamos que* $\operatorname{supp}\eta \subseteq K$

para cierto K subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{n-1}$. Teniendo en cuenta la definición de α_ρ tenemos,

$$
\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \eta^2(x') \int_{\mathbb{R}} F''(u(x',x_n)) \frac{\Psi_\rho^2(x_n)}{\alpha_\rho} dx_n\ dx' - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} F''(\overline{u}(x'))\eta^2(x')dx' \right| \\
= & \left| \int_K \eta^2(x') \int_{\mathbb{R}} [F''(u(x',x_n)) - F''(\overline{u}(x'))] \frac{\Psi_\rho^2(x_n)}{\alpha_\rho} dx_n\ dx' \right| \\
\leq & \int_K \eta^2(x') \int_\rho^{2\rho+2} \left| F''(u(x',x_n)) - F''(\overline{u}(x')) \right| \frac{\Psi_\rho^2(x_n)}{\alpha_\rho} dx_n\ dx'.
\end{aligned}
$$

La función F'' es uniformemente continua en el intervalo $[\inf u, \sup u]$. Se aplica este hecho así como la convergencia uniforme de $u(\cdot, x_n) \underset{x_n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{u}(\cdot)$ en el compacto K para concluir que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $\rho > N$ entonces $|F''(u(x',x_n)) - F''(\overline{u}(x'))| \leq \frac{\epsilon}{\|\eta\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}+1}$. Esto es posible pues $F \in C^2(\mathbb{R})$, u , $\overline{u}$ son acotados, x' está en un compacto y $u(x',x_n)$ converge uniformemente a $\overline{u}(x')$, en subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^{n-1}$. Entonces, si $\rho > N$

$$
\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \eta^2(x') \int_{\mathbb{R}} F''(u(x',x_n)) \frac{\Psi_\rho^2(x_n)}{\alpha_\rho} dx_n dx' - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} F''(\overline{u}(x'))\eta^2(x')dx' \right| \\
\leq & \frac{\epsilon}{\|\eta\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}} \int_K \eta^2(x') \int_\rho^{2\rho+2} \frac{\Psi_\rho^2(x_n)}{\alpha_\rho} dx_n\ dx' \\
\leq & \ \epsilon,
\end{aligned}
$$

como queríamos.

Para cada $R > 1$ definamos $B'_R := \left\{x' \in \mathbb{R}^{n-1}/\ |x'| < R\right\}$. En los argumentos que presentamos a continuación haremos uso extensivo de los Teoremas 1.8, 1.9 y 1.10. Para comenzar, notemos que para cada $R > 1$, el menor valor propio de $-\Delta + F''(u)$ en B'_R, con condición de Dirichlet en $\partial B'_R$, es no negativo en virtud de (2.11) (aplicar la definición 1.4 con $v = \varphi$). Denotemos por λ_R a dicho valor propio y tomemos una función propia φ_R asociada a él. Por el Teorema 1.10 $\varphi_R \in W^{2,p}(B'_R) \cap W_0^{1,p}(B'_R) \cap C(\overline{B'_R})$. Por el Teorema 1.8 y por reescalamiento, podemos tomar $\varphi_R > 0$ en B'_R,y $\varphi_R(0) = 1$. Recordemos que φ_R satisface

$$
\begin{cases}
\int_{B'_R} (\Delta\varphi_R - F''(\overline{u})\varphi_R)v = -\lambda_R \int_{B'_R} \varphi_R v & \forall v \in C_c^\infty(B'_R) \\
\varphi_R \equiv 0 & en\ \ \partial\ B'_R.
\end{cases}
\tag{2.14}
$$

Gracias al Teorema 1.9, los valores propios λ_R decrecen como función de $R \in (1, \infty)$, así que en particular el conjunto $\{\lambda_R / R > 1\}$ es acotado.

A continuación construiremos la función $\varphi \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^{n-1})$ tomando subsucesiones adecuadas de la colección $\{\varphi_R\}_{R>1}$. La construcción de φ en B'_2 se hace de la siguiente manera:

Consideremos la sucesión $\{\varphi_l\}_{l\in\mathbb{N},l\geq 3}$. *Por la aplicación de La Desigualdad de Harnack, Teorema* 1.7, *a cada* φ_l, *que satisface*

$$\Delta\varphi_l + (\lambda_l - F''(\overline{u}))\varphi_l = 0, \quad c.t.p. \;\; en \; B_2',$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \sup_{B_2'} \varphi_l &\leq C_2 \inf_{B_2'} \varphi_l \\ &\leq C_2\varphi_l(0) \\ &\leq C_2, \end{aligned} \tag{2.15}$$

para cierta constante $C_2 > 0$, *que depende de* n *y de* $\|F''(\overline{u}) - \lambda_l\|_{L^\infty(B_2')}$.

Observemos, no obstante, que

$$\left\|F''(\overline{u}) - \lambda_l\right\|_{L^\infty(B_2')} \leq \left\|F''(\overline{u})\right\|_{L^\infty(B_R')} + \lambda_1.$$

Luego, por la observación posterior al Teorema 1.7, *la constante* C_2 *en* (2.15) *se puede tomar independiente de* l. *En consecuencia,* (2.15) *permite afirmar que*

$$\|\varphi_l\|_{L^p(B_2')} \leq C_2 \left|B_2'\right|^{\frac{1}{p}},$$

para todo $l \geq 3$. *Esta desigualdad, así como el resultado de estimativos locales en* $W^{2,p}$, *Teorema* 1.6, *implican que*

$$\begin{aligned} \|\varphi_l\|_{2,p;B_2'} &\leq C\,\|\varphi_l\|_{L^p(B_2')} \\ &\leq C_2', \end{aligned}$$

donde C_2' *es una constante positiva, que no depende de* l.

En consecuencia, por reflexividad de $W^{2,p}(B_2')$, *existen una subsucesión* $\left\{\varphi_{l_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ *y* $\varphi \in W^{2,p}(B_2')$ *tales que* $\varphi_{l_j} \underset{j\to\infty}{\rightharpoonup} \varphi$ *(débilmente) en* $W^{2,p}(B_2')$. *Puesto que* $p > n$, *los encajes de Sobolev, Teorema* 1.3, *garantizan que una subsucesión de* $\left\{\varphi_{l_j}\right\}_j$ *converge a* φ *en el sentido de* $C^1(\overline{B_R'})$. *Denotemos por* $\left\{\varphi_{l,2}\right\}_{l\in\mathbb{N}}$ *a esta subsucesión, con lo cual* $\varphi_{l,2} \rightharpoonup \varphi$ *en* $W^{2,p}(B_2')$ *y* $\varphi_{l,2} \longrightarrow \varphi$ *en* $C^1(B_2')$. *Por una aplicación adicional de la Desigualdad de Harnack, Teorema* 1.7, *tenemos:*

$$1 = \varphi_l(0) \leq \sup_{B_2'} \varphi_l \leq C_2 \inf_{B_2'} \varphi_l \leq C_2\varphi_l(x), \quad \forall x \in B_2',$$

donde $C_2 > 0$ no depende de l.

Al tomar límite cuando l tiende a infinito se sigue que $\varphi > 0$ en B'_2.

Recursivamente construimos $\left\{\varphi_{l,m+1}\right\}_{l\in\mathbb{N}}$, subsucesión de $\left\{\varphi_{l,m}\right\}_l$, tomando la cola de la sucesión $\left\{\varphi_{l,m}\right\}_l$ de las funciones definidas en B'_{m+1} y aplicando el procedimiento que hemos descrito cuando $m = 2$, se obtiene entonces que existe $\widetilde{\varphi} \in W^{2,p}(B'_{m+1}) \cap C^1(\overline{B'_{m+1}})$ tal que $\widetilde{\varphi} > 0$ en B'_{m+1} y

$$\varphi_{l,m+1} \underset{l\to\infty}{\rightharpoonup} \widetilde{\varphi} \ \text{ en } W^{2,p}(B'_{m+1})$$

y

$$\varphi_{l,m+1} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\varphi} \ \text{ en } C^1(\overline{B'_{m+1}}).$$

Como $\left\{\varphi_{l,m+1}\right\}_{l\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\left\{\varphi_{l,m}\right\}_l$, en particular $\widetilde{\varphi}$ restringida a B'_m es igual a φ.

Usando un "argumento diagonal", se construye una sucesión $\left\{\varphi_{m,m}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ que resulta ser subsucesión de cada $\left\{\varphi_{l,m}\right\}_l$, y un elemento $\varphi \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^{n-1}) \cap C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ tales que $\varphi > 0$ en $\mathbb{R}^{n-1}$ y $\varphi_{m,m} \longrightarrow \varphi$ localmente en $C^1(\mathbb{R}^{n-1})$, esto es, en $C^1(K)$ para todo compacto $K \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$.

Probemos que

$$\Delta\varphi - F''(\overline{u})\varphi + \lambda\varphi = 0 \ \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^{n-1},$$

con lo cual

$$\Delta\varphi - F''(\overline{u})\varphi = -\lambda\varphi \leq 0 \ \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^{n-1}$$

y se seguirá el resultado. Sea $\eta \in C^\infty_c(\mathbb{R}^{n-1})$. *Tomemos $R > 0$ suficientemente grande tal que* supp $\eta \subseteq B'_R$. *Tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > R$. Aplicando (2.14) a $v = \eta$ e integrando por partes,*

$$-\int_{B'_R} \nabla\varphi_{m,m} \cdot \nabla\eta - \int_{B'_R} F''(\overline{u})\varphi_{m,m}\eta + \int_{B'_R} \lambda_{m,m}\varphi_{m,m}\eta = 0.$$

Como $\{\lambda_{m,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de números no negativos entonces existe $\lambda \geq 0$ tal que $\lambda_{m,m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$. Usando la convergencia $\varphi_{m,m} \longrightarrow \varphi$ en $C^1(\overline{B'_R})$, de la igualdad anterior se sigue que

$$-\int_{B'_R} \nabla\varphi \cdot \nabla\eta - \int_{B'_R} F''(\overline{u})\varphi\eta + \int_{B'_R} \lambda\varphi\eta = 0.$$

Aplicando nuevamente integración por partes,

$$\int_{B'_R} [\Delta\varphi - F''(\overline{u})\varphi + \lambda\varphi]\eta = 0.$$

Como $R > 0$ *es arbitrario entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} [\Delta\varphi - F''(\overline{u})\varphi + \lambda\varphi]\eta = 0.$$

Como $\eta \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^{n-1})$ *es arbitrario se sigue que*

$$\Delta\varphi - F''(\overline{u})\varphi = -\lambda\varphi \leq 0 \quad c.t.p \text{ en } \mathbb{R}^{n-1}.$$

iii) *Finalmente, supongamos que* $n = 3$. *Definamos*

$$\sigma_x := \frac{\overline{u}_x}{\varphi} \quad y \quad \sigma_y := \frac{\overline{u}_y}{\varphi} \quad en \quad \mathbb{R}^2,$$

donde $\varphi \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^2) \cap C^1(\mathbb{R}^2)$ *es la función construida en* ***ii)*** *para* $n = 3$**.** *Las funciones* σ_x *y* σ_y *estan bien definidas. Para probar la conclusión aplicaremos el teorema tipo Liouville, Teorema* 2.1. *De la definición de* σ_x *tenemos,*

$$\varphi^2\nabla\sigma_x = \varphi\nabla\overline{u}_x - \overline{u}_x\nabla\varphi.$$

Ahora, para cada $R > 0$ *las funciones* $\varphi, \varphi_x, \varphi_y, \overline{u}_x, \overline{u}_{xx}, \overline{u}_{xy} \in W^{1,p}(B_R) \cap L^{\infty}(B_R)$. *Aplicando el teorema para operaciones con derivadas débiles, Teorema* 1.1, *obtenemos*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varphi^2\nabla\sigma_x) &= \varphi\Delta(\overline{u}_x) + \nabla\varphi\cdot\nabla\overline{u}_x - \overline{u}_x\Delta\varphi - \nabla\varphi\cdot\nabla\overline{u}_x \\ &= \varphi\Delta(\overline{u}_x) - \overline{u}_x\Delta\varphi. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las propiedades de φ*,*

$$\begin{aligned} \sigma_x \operatorname{div}(\varphi^2\nabla\sigma_x) &= \overline{u}_x\Delta(\overline{u}_x) - (\overline{u}_x)^2\frac{\Delta\varphi}{\varphi} \\ &= (\overline{u}_x)^2F''(\overline{u}) - (\overline{u}_x)^2\frac{\Delta\varphi}{\varphi} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Por el Corolario 1.1*,* $\varphi\sigma_x = \overline{u}_x$ *es acotado en* $\mathbb{R}^2$*, entonces se cumple* (2.2)*. Aplicando el teorema tipo Liouville, Teorema* 2.1, *a esta desigualdad tenemos que existe una constante c tal que*

$$\overline{u}_x = c\varphi. \tag{2.16}$$

Similarmente, existe una constante d tal que

$$\overline{u}_y = d\varphi. \tag{2.17}$$

Si $c = d = 0$ *entonces* $\overline{u}$ *es igual a una constante* C. *Si alguno,* c *o* d, *es distinto de cero entonces, por* (2.16) *y* (2.17), $\nabla\overline{u}$ *en cada punto es paralelo al vector* (c,d) . *Tomando* $(a,b) := |(c,d)|^{-1}(c,d)$, *existe* $h \in C^2(\mathbb{R})$ *tal que*

$$\overline{u}(x,y) = h((a,b)\cdot(x,y)), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.18}$$

En efecto, basta escoger

$$h(t) := \overline{u}(t(a,b)), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

se verifica (2.18), *porque al ser los conjuntos de nivel de* $\overline{u}$ *líneas perpendiculares al vector* (a,b), *entonces*

$$\overline{u}(x,y) = \overline{u}([(x,y)\cdot(a,b)]\,(a,b)) = h((a,b)\cdot(x,y)),\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Si aplicamos (2.16) *vemos que*

$$c\varphi = c\,|(c,d)|^{-1}\,h'((a,b)\cdot(x,y)),\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Luego $h' > 0$ *en* $\mathbb{R}$. ■

Lema 2.2 *Sea* $F \in C^2(\mathbb{R})$. *Supongamos que existe una función acotada* $h \in C^2(\mathbb{R})$ *tal que*

$$h'' - F'(h) = 0, \tag{2.19}$$

y $h' > 0$ *en* $\mathbb{R}$. *Sean* $m_1 := \inf_{\mathbb{R}} h$ *y* $m_2 := \sup_{\mathbb{R}} h$. *Entonces* $F(m_1) = F(m_2)$ *y*

$$F > F(m_1) = F(m_2) \quad \text{en} \quad (m_1, m_2).$$

Prueba. *Multiplicando la ecuación* (2.19) *por* h' *e integrando tenemos*

$$(h'(x))^2 - 2F(h(x)) - (h'(0))^2 + 2F(h(0)) = 2\int_0^x (h''(t)h'(t) - F'(h(t))h'(t))dt = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Entonces para cierta constante c,

$$2F(h(x)) - (h'(x))^2 = c \ \ , \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.20}$$

Como h *es acotada y creciente entonces, al aplicar el Teorema del valor medio entre* m *y* $m+1$,

$\forall m \in \mathbb{Z}$, existen sucesiones $s_m \to -\infty$ y $t_m \to \infty$ tales que $h'(s_m) \to 0$ y $h'(t_m) \to 0$, cuando $m \to \infty$. Luego,

$$\lim_{m\to\infty} h'(s_m) = 0$$

y

$$\lim_{m\to\infty} h'(t_m) = 0.$$

Si en (2.20) *tomamos en calidad de x a s_m y t_m,* y *tomamos límite cuando $m \to \infty$, entonces*

$$2F(m_1) = c = 2F(m_2).$$

Como $2F(h) = c + (h')^2 > c = 2F(m_1)$ y el rango de h es (m_1, m_2), por el Teorema del Valor Intermedio queda probado que

$$F > F(m_1) = F(m_2) \quad en \quad (m_1, m_2),$$

como se quería. ■

El siguiente teorema nos dice que una solución acotada del problema (2.8) es un minimizador local de energía en cierto conjunto de perturbaciones . Este resultado es fundamental para probar el estimativo (2.2). La prueba de este resultado es técnica y extensa (véase [AAC]).

Teorema 2.3 *Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una solución acotada de* (4.1) *en $\mathbb{R}^n$, donde $F \in C^2(\mathbb{R})$. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio suave y acotado. Definamos*

$$S := \left\{ v \in C^1(\overline{\Omega}) /\ v \equiv u \text{ en } \partial\Omega \text{ y } \underline{u}(x') \le v(x', x_n) \le \overline{u}(x'),\ \forall (x', x_n) \in \Omega \right\}.$$

Entonces

$$\int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + F(u) \right\} dx = \min_{v \in S} \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} |\nabla v|^2 + F(v) \right\} dx.$$

Prueba. *Para una prueba de este teorema véase la referencia* [AAC]. ■

Como una consecuencia de los resultados anteriores podemos ahora mostrar el estimativo que nos permitirá usar el teorema tipo Liouville, Teorema 2.1.

Teorema 2.4 *Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ una solución acotada de* (2.8) *en $\mathbb{R}^3$. Existe una constante $C > 0$, que no depende de R, tal que*

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx \le C R^2, \quad \text{para todo} \quad R > 1.$$

Prueba. *A fin de estimar*

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx,$$

constuiremos un elemento adecuado $v_R \in S$*, donde* S *es como en el enunciado del Teorema* 2.3. *Tendremos entonces que:*

$$\int_{B_R} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + F(u) \right) dx \leq \int_{B_R} \left(\frac{1}{2} |\nabla v_R|^2 + F(v_R) \right) dx,$$

de lo cual,

$$\int_{B_R} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \, dx \leq \int_{B_R} \left(\frac{1}{2} |\nabla v_R|^2 + F(v_R) - F(u) \right) dx. \tag{2.21}$$

La función $v_R \in S$ *se construye de tal forma que la integral en el lado derecho de* (2.21) *se reduzca a la misma integral sobre* $B_R \setminus B_{R-1}$, $R > 1$*, donde, además, el integrando sea acotado. El resultado se seguirá entonces. Sea* $m = \inf u$ *y* $M = \sup u$*. Notemos que* $m = \inf \underline{u}$ *y* $M = \sup \overline{u}$*. Definamos*

$$\widetilde{m} = \sup \underline{u} \quad \text{y} \quad \widetilde{M} = \inf \overline{u}.$$

Esta claro que $\widetilde{m}$, $\widetilde{M} \in [m, M]$*. Por el Lema* 2.1*, cada una,* $\underline{u}$ *y* $\overline{u}$*, es solución constante de* (2.8) *o bien es una solución monótona en una variable de* (2.8).

Además, por el Lema 2.2,

$$F > F(m) = F(\widetilde{m}) \quad en \quad (m, \widetilde{m}), \tag{2.22}$$

en el caso $m < \widetilde{m}$ *, es decir,* $\underline{u}$ *no constante. Análogamente*

$$F > F(M) = F(\widetilde{M}) \quad en \quad (\widetilde{M}, M), \tag{2.23}$$

en el caso en que $\widetilde{M} < M$ *, es decir,* $\overline{u}$ *no constante.*

Definamos

$$c_u := \min \{ F(s) / \ m \leq s \leq M \}.$$

Afirmación: *existe* $s \in [\widetilde{m}, \widetilde{M}]$ *tal que* $c_u = F(s)$.

En efecto consideremos los cuatro casos posibles:

- $\underline{u}$ *es constante y* $\overline{u}$ *es constante,*
- $\underline{u}$ *es constante y* $\overline{u}$ *no lo es,*
- $\underline{u}$ *no es constante y* $\overline{u}$ *es constante,*
- $\underline{u}$ *no es constante y* $\overline{u}$ *no es constante.*

El primer caso es trivial, pues $m = \widetilde{m}$ *y* $\widetilde{M} = M$*. En los casos segundo y tercero se procede como en el cuarto caso, que es el que presentamos en detalle.*

Observemos que, de (2.22) *y* (2.23)*, necesariamente* $\widetilde{m} \leq \widetilde{M}$*. Además,* $c_u < F(t)$ *para todo* $t \in (m, \widetilde{m}) \cup (\widetilde{M}, M)$*. En consecuencia, si* $s \in [m, M]$ *es un punto en el cual* F *alcanza su mínimo en este intervalo,* $s \in [\widetilde{m}, \widetilde{M}] \cup \{m, M\}$*. Puesto que* $F(m) = F(\widetilde{m})$ *y* $F(M) = F(\widetilde{M})$*, se sigue la afirmación.*

Concluimos que

$$\underline{u}(x, y) \leq \widetilde{m} \leq s \leq \widetilde{M} \leq \overline{u}(x, y), \ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Para $R > 0$ *consideremos* $\phi_R \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ *tal que* $0 \leq \phi_R \leq 1$ *en* $\mathbb{R}^3$*,* $\phi_R \equiv 1$ *en* B_{R-1} *,* $\phi_R \equiv 0$ *en* $\mathbb{R}^3 \backslash B_R$ *y* $\|\nabla \phi_R\|_\infty \leq 2$*. Definamos la función*

$$v_R := (1 - \phi_R)u + s\phi_R.$$

Para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $(x, y, z) \in \partial B_R$*,*

$$v_R(x, y, z) = [1 - \phi_R(x, y, z)]u(x, y, z) + s\phi_R(x, y, z) = u(x, y, z).$$

Ahora si $(x, y, z) \in B_R$ *entonces*

$$\underline{u}(x, y) = [1 - \phi_R(x, y, z)]\underline{u}(x, y) + \underline{u}(x, y)\phi_R(x, y, z) \leq [1 - \phi_R(x, y, z)]u(x, y, z) + s\phi_R(x, y, z).$$

Por otro lado,

$$[1 - \phi_R(x, y, z)]u(x, y, z) + s\phi_R(x, y, z) \leq [1 - \phi_R(x, y, z)]\overline{u}(x, y) + \overline{u}(x, y)\phi_R(x, y, z) = \overline{u}(x, y),$$

Concluimos que,

$$\underline{u}(x, y) \leq v_R(x, y, z) \leq \overline{u}(x, y),$$

para todo $(x, y, z) \in B_R$*.*

Notemos que $F(v_R)$ *está acotado por una constante que no depende de* R*, pues* $m \leq v_R \leq M$*. Por otra parte,*

$$\nabla v_R = (1 - \phi_R)\nabla u + (u + s)\nabla \phi_R.$$

De esta expresión, notemos que los términos segundo y tercero están acotados pues $\|\nabla \phi_R\|_\infty \leq 2$*. El acotamiento del primer término proviene del Corolario* 1.1*. En consecuencia,* *por el Teorema 2.3, tenemos que*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{B_R} |\nabla u|^2\, dx &\leq \int_{B_R} \left\{ \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u) - c_u \right\} dx \\
&\leq \int_{B_R} \left\{ \frac{1}{2}|\nabla v_R|^2 + F(v_R) - c_u \right\} dx \\
&= \int_{B_R \setminus B_{R-1}} \left\{ \frac{1}{2}|\nabla v_R|^2 + F(v_R) - c_u \right\} dx \\
&\leq c\,|B_R \setminus B_{R-1}| \\
&= \frac{4}{3}\pi c R^3 - \frac{4}{3}\pi c (R-1)^3 \\
&\leq CR^2 \quad \textit{para } R > 1,
\end{aligned}$$

como queríamos. ■

Teorema 2.5 ***(Conjetura de De Giorgi caso n=3)*** *Sean $f \in C^1(\mathbb{R})$ y $u \in C^2(\mathbb{R}^3, [-1,1])$ una función que satisface*

$$\Delta u + f(u) = 0, \ \ y \ \ u_z > 0 \ \ \textit{en } \mathbb{R}^3.$$

Entonces los conjuntos de nivel de u son planos.

Prueba. *Al igual que en el caso $n = 2$, observemos que por los resultados de regularidad del Capítulo 1, $u \in W^{3,p}(B_R)$ para todo $R > 0$ y $1 < p < \infty$. Dado $R > 0$, definamos en B_R las funciones*

$$\varphi := u_z,\ \sigma_x := \frac{u_x}{\varphi} \ \ y \ \ \sigma_y := \frac{u_y}{\varphi}.$$

Nuestra estrategia será aplicar el Teorema 2.1 a estas funciones. Notemos que por hipótesis estas funciones están bien definidas y $\varphi,\ \sigma_x,\ \sigma_y \in C^1(\overline{B_R})$. Derivando en sentido clásico, obtenemos

$$\varphi^2 \nabla \sigma_x = \varphi \nabla u_x - u_x \nabla \varphi$$

y

$$\varphi^2 \nabla \sigma_y = \varphi \nabla u_y - u_y \nabla \varphi.$$

De estas expresiones, del hecho de que $\varphi,\ u_x,\ u_y \in C^1(\overline{B_R}) \cap W^{2,p}(B_R)$ y del Teorema 1.1, se sigue que $\varphi^2\nabla\sigma_x,\ \varphi^2\nabla\sigma_y \in W^{1,p}(B_R) \cap L^\infty(B_R)$ y

$$\operatorname{div}(\varphi^2 \nabla \sigma_x) = \nabla\varphi \cdot \nabla u_x + \varphi \Delta u_x - \nabla u_x \cdot \nabla \varphi - u_x \Delta \varphi = \varphi \Delta u_x - u_x \Delta \varphi$$

y

$$\operatorname{div}(\varphi^2 \nabla \sigma_y) = \nabla\varphi \cdot \nabla u_y + \varphi \Delta u_y - \nabla u_y \cdot \nabla \varphi - u_y \Delta \varphi = \varphi \Delta u_y - u_y \Delta \varphi,$$

donde las derivadas se entienden en sentido débil.

Por otra parte, derivando la ecuación $\Delta u + f(u) = 0$ *en sentido débil en* B_R*, obtenemos que* φ, u_x *y* u_y *cumplen la ecuación*

$$\Delta w + f'(u)w = 0 \ \text{ c.t.p. } \textit{en } B_R.$$

Luego

$$\operatorname{div}(\varphi^2 \nabla \sigma_x) = -\varphi f'(u)u_x + f'(u)\varphi u_x = 0, \quad \text{c.t.p } \textit{en } B_R.$$

Como $R > 0$ *es arbitrario, entonces*

$$\operatorname{div}(\varphi^2 \nabla \sigma_x) = 0 \ \textit{en } \mathbb{R}^3.$$

Similarmente

$$\operatorname{div}(\varphi^2 \nabla \sigma_y) = 0 \ \ \textit{en } \mathbb{R}^3.$$

Para aplicar el Teorema tipo Liouville, Teorema 2.1, sólo nos resta verificar que $\int_{B_R} (\varphi \sigma_x)^2 dx \leq CR^2$ *y* $\int_{B_R} (\varphi \sigma_y)^2 dx \leq CR^2$ *para cierta constante* C *independiente de* R*, que en nuestro caso se traduce en*

$$\int_{B_R} (u_x)^2 dx \leq CR^2 \ \ y \ \ \int_{B_R} (u_y)^2 dx \leq CR^2.$$

Resultado que es cierto según el teorema anterior.

Luego $u_x = au_z$ *y* $u_y = bu_z$*, para ciertas constantes* a *y* $b \in \mathbb{R}$*. Lo cual implica que*

$$\nabla u = (a, b, 1)u_z,$$

es decir, el gradiente de u siempre apunta en la misma dirección. Esto implica que las superficies de nivel de u son planos perpendiculares al vector $(a, b, 1)$*. Queda probada la Conjetura en dimensión tres.* ■

Bibliografía

[AAC] G. Alberti, L. Ambrosio and X. Cabré. *On o long-standing conjecture of E. De Giorgi: simmetry in 3D for general nonlinearities and a local minimality property.* Acta Appl. Math. 65 (1-3): 9-33, 2001.

[AC] L. Ambrosio and X. Cabré. *Entire Solutions of semilinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^3$ *and a conjecture of De Giorgi.* Journal of the American Mathematical Society, volumen 13(4): 725-739 (electronic), 2000.

[BCN] H. Berestycki, L. Caffarelli, and L. Nirenberg. *Further qualitative properties for elliptic equations in unbounded domains.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 25 (1-2): 69-94 (1998), 1997. Dedicated to Ennio De Giorgi.

[Br] H. Brézis. *Análisis funcional teoría y aplicaciones. Masson, Paris 1983.*

[CGS] L. Caffarelli, N. Garofalo and F. Segala, *A gradient bound for entire solutions of quasi-linear equations and its consequences,* Comm. Pure Appl. Math. **47** (1994), 1457-1473.

[CH] R. Courant, D. Hilbert. *Methods of mathematical physics,* intescience (1962).

[DG] E. De Giorgi. *Convergence problems for functionals and operators,* In Proceedings of the International Meeting on Recent Methods in Non-linear Analysis (Rome 1978), pages 131-188, Bologna 1979. Pitagora.

[DKW] M. Del Pino, M. Kowalczyk y J. Wei. *A counterexample to a conjecture by De Giorgi in large dimensions.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris 346 (2008), no. 23-24, 1261-1266.

[Far] A. Farina. *One-dimensional symmetry for solutions of quasilinear equations in* $\mathbb{R}^2$. *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. (8) ,6 (3): 685-692, 2003.*

[FSV] A. Farina, B. Sciunzi y E. Valdinoci. *Bernstein and De Giorgi type problems: new results via a geometric approach.* Preprint, 2007. http://www.math.utexas.edu/mp_arc.

[FV] A. Farina y E. Valdinoci. *The state of the art for a conjeture of De Giorgi and related problems.* Mayo 14 de 2008. Preprint.

[GG] N. Ghoussoub and C. Gui. *On a conjecture of De Giorgi and some related problems,* Math. Ann. 311 (3): 481-491, 1998.

[GT] D. Gilbart and N. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer Verlag, Berlin 2001.

[M] L. Modica, *A gradient bound and a Liouville theorem for nonlinear Poisson equations,* Comm. Pure Appl. Math. 38 (1985), 679-684.

[MM] L. Modica and S. Mortola, *Some entire solutions in the plane of nonlinear Poisson equations,* Boll. Un. Mat. Ital. B (5) **17** (1980), 614-622.

[Mu] J. Munkres, *Analysis on Manifolds,* Addison-Wesley, 1995.

[Ru] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis,* McGraw-Hill, tercera edición.

[S] O. Savin. *phase transitions: Regularity of flat level sets.* Ann. of Math., 2008.