

# AJUSTE DE MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS

## FINITE ELEMENT MODEL UPDATING

WILLIAM VÉLEZ

Ingeniero Civil. Profesor Auxiliar, Universidad del Valle, Cali, whvelez@univalle.edu.co

DANIEL GÓMEZ

Ingeniero Civil. Profesor Auxiliar, Universidad del Valle, Cali, dgomez@univalle.edu.co

PETER THOMSON

Ingeniero Aeroespacial. Profesor Titular, Universidad del Valle, Cali, pethomso@univalle.edu.co

Recibido para revisar abril 12 de 2008, aceptado mayo 15 de 2008, versión final mayo 18 de 2008

**RESUMEN:** El método del elemento finito es utilizado en todo el mundo como herramienta para analizar el comportamiento dinámico de sistemas estructurales. Sin embargo, se sabe que las predicciones efectuadas con el uso de modelos construidos empleando dicho método difieren de los resultados experimentales obtenidos a partir de ensayos de vibración en estructuras existentes. El área conocida en lengua inglesa como *Model Updating*, o *Ajuste de Modelos*, como se denomina en este documento, surgió como respuesta a dicha problemática y apunta a efectuar correcciones paramétricas en los modelos de elementos finitos con el fin de lograr que las propiedades dinámicas analíticas se asemejen a sus contrapartes experimentales. El avance de esta disciplina durante los últimos veinte años ha sido vertiginoso; sin embargo, en el medio latinoamericano, y en particular en el colombiano, existe una difusión pobre de dicha temática. Este artículo presenta una revisión del estado del arte a la fecha de su publicación. Se espera que el presente trabajo motive la investigación en el campo del *Ajuste de Modelos* en centros diferentes a aquellos donde se ha concentrado hasta ahora el desarrollo de esta área y que a su vez provea información suficiente para que el sector industrial latinoamericano incluya dicha tecnología en sus prácticas.

**PALABRAS CLAVE:** Ajuste de Modelos, Método del Elemento Finito, Dinámica Estructural, Correlación Modal, Análisis Modal.

**ABSTRACT:** The Finite Element Method is used worldwide as a tool for analyzing the dynamic behaviour of structural systems. However, it is well known that finite element model predictions differ from experimental results obtained from vibration tests carried out on the structures being modelled. The area known in English as *Model Updating*, or *Ajuste de Modelos*, as it is called in this document, emerged as a response to the above problem and aims at executing parametric corrections on finite element models in order to make the analytical dynamic properties come closer to their experimental counterparts. This discipline has grown steadily during the last twenty years, although its diffusion in the Latin-American and Colombian context has been poor. This article presents a review of the state of the art at the time of its publication. It is hoped that this work will motivate research on the subject of *Model Updating* in places different from those where developments in this area have concentrated, and that it will provide sufficient information for Latin-American industries to include this technology in their practice.

**KEYWORDS:** Model Updating, Finite Element Method, Structural Dynamics, Modal Correlation, Modal Analysis.

### 1. INTRODUCCIÓN

El método del elemento finito se emplea de manera masiva en el análisis estático y dinámico de sistemas estructurales. En dinámica

estructural, se requiere a menudo obtener las propiedades modales del sistema analizado, en particular las frecuencias naturales, los vectores de forma modal y las razones de amortiguamiento modal, para lo cual el método

del elemento finito es utilizado regularmente. Sin embargo, el desarrollo de técnicas confiables de medición de vibraciones ha permitido que dichas propiedades sean obtenidas de manera experimental, a partir de lo cual se ha observado un desacuerdo considerable entre las predicciones de los modelos de elementos finitos y sus contrapartes experimentales.

Dado que no es posible construir modelos espaciales (masa, rigidez y amortiguamiento) con sentido físico a partir de procesos netamente experimentales, la investigación se ha enfocado en la búsqueda de maneras para aprovechar las bondades del método del elemento finito y de las técnicas experimentales de manera simultánea. El resultado es el *Ajuste de Modelos de Elementos Finitos* (Finite Element Model Updating), por medio del cual se busca la generación de modelos confiables a través de ajustes paramétricos en los mismos, de forma tal que se minimice la diferencia entre las predicciones analíticas y los resultados experimentales.

En este trabajo se presenta una revisión del estado del arte del *Ajuste de Modelos*. Se señalan a su vez, de acuerdo con el juicio de los autores, los enfoques de investigación más promisorios y los problemas no resueltos de mayor relevancia en este campo.

## 2. AJUSTE DE MODELOS

### 2.1 Antecedentes

#### 2.1.1 Enfoque general

Los modelos matemáticos computacionales constituyen una de las principales herramientas del análisis moderno de problemas en la ciencia y la ingeniería. Las herramientas disponibles para la formulación de dichos modelos son cada vez más poderosas debido al constante desarrollo de algoritmos eficientes y a la reducción en las restricciones impuestas por el hardware, haciéndose posible la generación de modelos de gran complejidad.

El principal propósito de un modelo es predecir la respuesta del sistema analizado ante

perturbaciones y/o ante cambios en su configuración. Sin embargo, se ha observado una correlación deficiente entre las predicciones de modelos computacionales y los resultados obtenidos a partir de estudios experimentales. En el caso particular del análisis del comportamiento dinámico de sistemas elastomecánicos, las propiedades modales calculadas empleando el método del elemento finito suelen diferir de aquellas obtenidas por medio de ensayos de vibración.

Si bien los datos experimentales poseen errores que pueden provocar una baja correlación entre estos y las predicciones, la teoría de ajuste de modelos supone que los principales causantes del desacuerdo teórico-experimental son los errores en el modelo. Friswell y Mottershead [13] consideran tres tipos de error:

- i. Errores en la estructura del modelo, los cuales se presentan cuando existe incertidumbre en las ecuaciones físicas gobernantes (como en el modelado de sistemas con un fuerte comportamiento no lineal).
- ii. Errores en los parámetros del modelo, dentro de los que se encuentra la aplicación de condiciones de frontera inapropiadas, así como suposiciones imprecisas empleadas para simplificar el modelo.
- iii. Errores en el orden del modelo, cuya ocurrencia se debe a la discretización de sistemas complejos, la cual puede producir modelos de orden insuficiente.

El propósito del ajuste de modelos es modificar los parámetros de masa, rigidez y amortiguamiento del modelo numérico con el fin de obtener un mejor acuerdo entre los resultados numéricos y la información experimental. Si el modelo en cuestión ha sido desarrollado con propósitos de predicción, la correlación debe mejorarse corrigiendo suposiciones dudosas y no ejecutando modificaciones sin sentido físico [13] y [1].

La teoría de ajuste de modelos surge como una derivación de la Identificación de Sistemas en

ingeniería de control. En esta disciplina, el propósito de la identificación de sistemas es usualmente la construcción “en línea” de modelos. Por el contrario, el ajuste de modelos es usualmente ejecutado “fuera de línea” y su objetivo es la generación de modelos mejorados con propósitos de predicción, lo que exige que los parámetros “identificados” tengan sentido físico, requisito que no es necesario en identificación de sistemas para aplicaciones en control [14].

El ajuste de modelos se denominaba “identificación indirecta” como alusión a la presencia de un modelo analítico inicial. Friswell y Mottershead [14] señalan que el enfoque de investigación hacia el ajuste de modelos existentes como alternativa a la identificación directa de sistemas estructurales fue influenciado en gran medida por los estudios de Berman, quien señaló los problemas asociados a la imprecisión de los datos experimentales y su naturaleza incompleta, así como a la inexactitud de los modelos numéricos y concluyó que es imposible identificar un modelo con sentido físico empleando enfoques directos [14].

### 2.1.2 Artículos previos de revisión

El artículo de Friswell y Mottershead [13] es una referencia esencial para quienes estén interesados en estudiar y/o poner en práctica alguna de las técnicas disponibles para ajustar modelos de elementos finitos. En el documento aparecen descripciones de los métodos que se encontraban disponibles en el momento de su elaboración; en particular, los métodos directos y los métodos iterativos basados en sensibilidad con el empleo de datos modales y funciones de respuesta en frecuencia (FRF). Se incluyen además referencias de artículos de revisión relacionados con identificación de sistemas y ajuste de modelos. En total se citan 243 referencias.

Tras la aparición del artículo [13], se han producido pocos documentos similares y la investigación se ha concentrado en la formulación de nuevas metodologías y en la evaluación del desempeño de las mismas. Sin embargo, algunos artículos dedican parte de su contenido a revisiones bibliográficas. Dunn [11]

estudió los métodos de ajuste y su relación con el número de incógnitas, aspectos de unicidad en las soluciones y las ventajas y desventajas del uso de datos modales y de FRF. Hemez y Doebling [18] revisaron el estado del arte del ajuste de modelos aplicado a sistemas no lineales. Datta [9] presentó una revisión de métodos directos de ajuste e introdujo dos enfoques alternativos basados en asignación parcial de eigenestructuras y eigenvalores embebidos. Calvi [2] señaló los problemas asociados al enfoque determinístico tradicional y describió el enfoque estocástico de ajuste y validación de modelos. Ahmadian et al. [1] revisaron diferentes técnicas de regularización y su aplicación en la estimación de parámetros de ajuste de modelos.

La modelación de juntas en ensambles estructurales constituye una de las principales fuentes de error en los modelos de elementos finitos. Su descripción matemática y la identificación experimental de sus propiedades han sido objeto de intensa investigación en el contexto del ajuste de modelos. Ibrahim y Pettit [21] presentaron un artículo de revisión en el que se analizan los problemas relacionados con la dinámica de juntas pernaadas, y se presentan técnicas, basadas en formulaciones de ajuste, para identificación lineal y no lineal de juntas de este tipo. Palmonella et al. [44] revisaron los modelos disponibles de uniones con soldadura de punto. Métodos directos con el uso de datos modales

### 2.1.3 Generalidades

Uno de los primeros intentos de “calibrar” o ajustar modelos de elementos finitos es el enfoque matricial directo, cuyos primeros desarrollos datan de la década de 1970 [12]. Como su nombre lo indica, estos métodos no requieren procesos iterativos sino que se ejecutan en un solo paso, lo que les otorga alta eficiencia computacional. La característica más distintiva del enfoque directo es que los modelos actualizados por este medio reproducen los datos experimentales utilizados de manera exacta.

Debido a que los modelos modales generados a partir de modelos de elementos finitos poseen muchos más grados de libertad que aquellos extraídos de ensayos de vibración, una de dos

estrategias debe adoptarse: expandir los vectores experimentales de forma modal hasta el orden del modelo analítico, o reducir este último. Existen diversos métodos para llevar a cabo cualquiera de las dos alternativas. El método de expansión de Kidder crea una transformación espacial empleando las matrices de masa y rigidez del modelo de elementos finitos y generando una partición en el problema generalizado de valores propios [30]; existen además métodos de expansión por medio de ajustes con splines cúbicos y splines de superficie. Dentro de las técnicas de reducción de orden se encuentran los métodos de reducción estática de Guyan, reducción dinámica, SEREP (System Equivalent Reduction Expansion Process), IRS (Improved Reduction System), entre otros. Las referencias [14], [12] y [30] presentan detalles de varios métodos de reducción y expansión.

En general, la mayor desventaja de los modelos ajustados con métodos directos es el hecho de que las nuevas matrices de masa y rigidez son totalmente pobladas, con lo cual se pierde la conectividad original y resulta imposible relacionar las modificaciones en las matrices con cambios físicos en los elementos del modelo original. En otras palabras, los cambios en el modelo y el nuevo modelo en sí, no tienen sentido físico. Además suelen aparecer modos ficticios fuera del rango espectral utilizado en el ajuste.

#### 2.1.4 Métodos de optimización directa

Los métodos de optimización directa se basan en el uso de tres cantidades: los datos modales experimentales y las matrices de masa y rigidez del modelo analítico. En todos ellos se supone que una de las tres cantidades se conoce de forma precisa, de modo que las dos restantes se ajustan a partir de ésta. Baruch y Bar-Itzhack (1978, citados en [13], [14] y [9]) consideraron la matriz de masa como la cantidad exacta. Berman y Nagy (1983, citados en [13] y [14]) cuestionaron el uso de la masa como parámetro fijo y propusieron en su lugar el uso de los datos modales, de manera que se ajustaran las matrices de masa y rigidez. Matemáticamente, el problema se plantea de la siguiente forma: dada una matriz modal experimental,  $\Phi_m$ , y una

estimación analítica de la matriz de masa,  $M_a$ , encuentre una matriz de masa actualizada  $M$  que minimice la función

$$J_M = \left\| M_a^{-\frac{1}{2}} (M - M_a) M_a^{-\frac{1}{2}} \right\| \quad (1)$$

sujeta a la restricción

$$\Phi_m^T M \Phi_m = I \quad (2)$$

Una vez se conoce la nueva matriz de masa,  $M$ , se encuentra la matriz de rigidez actualizada  $K$  que minimiza la función

$$J_K = \left\| M^{-\frac{1}{2}} (K - K_a) M^{-\frac{1}{2}} \right\| \quad (3)$$

sometida a las restricciones

$$K \Phi_m = M \Phi_m \Lambda \quad (4)$$

$$K^T = K \quad (5)$$

donde  $\Lambda$  representa la matriz de valores propios experimentales. La minimización de ambas funciones objetivo puede llevarse a cabo empleando el método de multiplicadores de Lagrange. En la referencia [14] aparecen las expresiones exactas para el cálculo de las matrices actualizadas y sus deducciones detalladas a partir de las expresiones (1) y (3).

Existen otros métodos directos de ajuste de modelos. El método de mezcla de matrices hace uso de información obtenida a partir de un modelo de elementos finitos con el objeto de completar la información experimental. Las matrices se ajustan por medio de las expresiones

$$M^{-1} = \sum_{i=1}^n \phi_{mi} \phi_{mi}^T + \sum_{i=n+1}^p \phi_{ai} \phi_{ai}^T \quad (6)$$

$$K^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_{mi} \phi_{mi}^T}{\omega_{mi}^2} + \sum_{i=n+1}^p \frac{\phi_{ai} \phi_{ai}^T}{\omega_{ai}^2} \quad (7)$$

Los subíndices  $m$  y  $a$  denotan origen experimental o analítico respectivamente,  $n$  es el orden del modelo modal experimental y  $p$  el orden del modelo analítico. De nuevo, las

matrices ajustadas en (6) y (7) son, en general, totalmente pobladas, y guardan poca relación con la conectividad física de la estructura. Carvalho et al. [4] propusieron un método que conserva la simetría de las matrices del sistema y mantiene intactos los valores y vectores propios no utilizados en el proceso de ajuste, denominado *Método de Valores Propios Embebidos*. Por medio de esta técnica se calculan las matrices reales  $M_{new}$ ,  $C_{new}$  y  $K_{new}$  (masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente) de manera que el espectro de la función

$$F_{new}(\lambda) = \lambda^2 M_{new} + \lambda C_{new} + K_{new} \quad (8)$$

sea

$$\{\mu_1, \dots, \mu_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_{2n}\} \quad (9)$$

donde los pares  $\lambda_k$  son eigenvalores generados en un modelo de elementos finitos y los  $\mu_k$  son los valores propios experimentales disponibles. Los valores  $\{\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_{2n}\}$  permanecen intactos. Como puede observarse, el método de valores propios embebidos tiene en cuenta el amortiguamiento; la única suposición arbitraria respecto a éste es que puede ser modelado con un arreglo simétrico. El algoritmo para resolver el problema se ilustra en [4].

### 2.1.5 Métodos iterativos con el uso de datos modales

#### 2.1.5.1 Generalidades

El objetivo de los métodos iterativos que emplean datos modales (en principio frecuencias naturales, formas modales y razones de amortiguamiento) es mejorar la correlación entre la información experimental y la obtenida a partir de un modelo de elementos finitos, por medio de pequeños cambios en un grupo de parámetros del modelo [13]. El criterio empleado a menudo para evaluar dicha correlación es el MAC (Modal Assurance Criterion), el cual indica el grado de colinealidad entre dos vectores de formas modales y es a su vez empleado en el proceso de pareo de vectores analíticos y experimentales. El MAC fue propuesto por Allemang y Brown (1982, citados en [13]) y desde entonces se han formulado algunas

variantes del mismo. El MAC normalizado o NCO (Normalized Cross Orthogonality) incluye la matriz de masa o de rigidez como matriz de peso en el cálculo. A diferencia del MAC, el NCO requiere reducción o expansión a causa de la inclusión de matrices de masa o rigidez. Möller y Friberg [36] propusieron un enfoque alternativo para el pareo de vectores empleando el MAC. Morales [38] señaló las desventajas del MAC relacionadas con su no linealidad e incapacidad para evaluar propiedades de ortogonalidad y propuso una versión lineal del NCO que apunta a superar dichos inconvenientes.

Mientras los métodos directos modifican todos los elementos de las matrices de manera indiscriminada, los esquemas iterativos proveen un amplio rango de posibilidades para seleccionar parámetros de ajuste, con los que el usuario puede enfocarse en la corrección de aspectos físicos bien definidos y localizados. Los parámetros de subestructuras se asocian a elementos individuales o a grupos de elementos finitos [14]. Estos surgen de la suposición de que los errores en el modelo se encuentran asociados a zonas o grupos de elementos interconectados. Las matrices ajustadas de masa y rigidez se escriben como

$$M = M_o + \sum_{j=1}^{\ell} \theta_j M_j \quad (10)$$

$$K = K_o + \sum_{j=1}^{\ell} \theta_j K_j \quad (11)$$

$M_j$  y  $K_j$  son las matrices de masa y rigidez de la  $j$ -ésima subestructura de elementos y los coeficientes  $\theta_j$  son los parámetros de ajuste, los cuales conservan la distribución de masa y rigidez definida por las funciones de forma. Los parámetros físicos asocian el error a cantidades físicas como el módulo de Young, parámetros geométricos, densidad de masa, entre otros. Las matrices de masa y rigidez son funciones no lineales de dichos parámetros y los arreglos ajustados se expresan como

$$M = M_o + \sum_{j=1}^{\ell} \delta \theta_j \frac{\partial M}{\partial \theta_j} \quad (12)$$

$$K = K_o + \sum_{j=1}^{\ell} \delta\theta_j \frac{\partial K}{\partial \theta_j} \quad (13)$$

Se han propuesto otras estrategias de parametrización de modelos con fines de ajuste. Kim y Park [25] propusieron un método de selección de parámetros subestructurales basado en el cálculo de la sensibilidad de la función objetivo definida para el proceso de ajuste. Mottershead et al. [39] y [40] ilustraron la parametrización de juntas soldadas y fronteras rígidas de placas en voladizo utilizando parámetros geométricos. Gladwell y Ahmadian [15] introdujeron el concepto de familias permisibles de elementos, y demostraron que los elementos producidos por diferentes soluciones de elementos finitos hacen parte de familias de elementos genéricos cuyos parámetros permiten considerar diversos efectos. Este último enfoque ha generado recientemente un interés considerable en la comunidad científica.

#### 2.1.5.2 Método de Eigensensitividad Inversa

El método se basa en el planteamiento de series truncadas de Taylor de los datos modales en términos de los parámetros desconocidos. La expansión se limita generalmente a los dos primeros términos y genera, en consecuencia, una aproximación lineal de los datos experimentales de la siguiente forma [13]:

$$\delta z = S_j \delta \theta \quad (14)$$

Aquí,  $\delta \theta = \theta - \theta_j$  es la perturbación en los parámetros;  $\delta z = z_m - z_j$  es el error en los datos experimentales y  $S_j$  es la matriz de sensibilidad. Los subíndices indican las estimaciones actuales tras la  $j$ -ésima iteración. La matriz de sensibilidad contiene la primera derivada de los eigenvalores y eigenvectores respecto a los parámetros, evaluada en la estimación actual  $\theta_j$ . Las derivadas de los vectores propios pueden calcularse de manera conveniente con el uso de la estrategia simplificada propuesta por Nelson [43].

Cuando se cuenta con más datos experimentales que parámetros desconocidos, el sistema de ecuaciones definido en (14) es redundante y su

solución puede obtenerse empleando la inversa de Moore – Penrose, como sigue:

$$\delta \theta = S^+ \delta z \quad (15)$$

$$S^+ = [S^T S]^{-1} S^T \quad (16)$$

El enfoque anterior asigna igual peso a todos los datos experimentales en el vector  $z_m$ . Mientras las frecuencias naturales pueden obtenerse con errores menores que el 1%, los elementos de las formas modales pueden presentar poseen errores del 10% o más [14], aunque su distribución global es en general aceptable. Dicha precisión relativa se incorpora hallando una solución de mínimos cuadrados ponderados como sigue:

$$\delta \theta = [S^T W_{EE} S]^{-1} S^T W_{EE} \delta z \quad (17)$$

La matriz  $W_{EE}$  es una matriz de peso positiva definida y a menudo se trata de una matriz diagonal cuyos elementos son los recíprocos de las varianzas de las mediciones incluidas en el algoritmo. Cuando el número de parámetros de ajuste es mayor que el número de datos experimentales disponible, el sistema de ecuaciones (14) es subdeterminado; en consecuencia, existen infinitas soluciones entre las cuales debe seleccionarse aquella que produzca los cambios más pequeños en los parámetros. El sistema puede solucionarse por medio de descomposición en valores singulares (SVD) o haciendo uso de la inversa de Moore-Penrose para sistemas subdeterminados [14].

Es posible formular la matriz de sensibilidad con parámetros dinámicos diferentes a los valores y vectores propios. Jones y Turcotte [24] ilustraron el uso de frecuencias antiresonantes. D'Ambrogio y Fregolent [5] introdujeron el uso de frecuencias antiresonantes virtuales en el ajuste de un problema de referencia. Dascotte et al. [6] estudiaron el uso de diferentes estrategias de escalamiento de la matriz de sensibilidad con el fin de evitar problemas de inestabilidad numérica.

#### 2.1.5.3 Métodos de Mínima Varianza

Los métodos de mínima varianza pueden verse como métodos de penalización en los que las

matrices de ponderación cambian de forma particular de una iteración a otra [13]. Las formulaciones se basan en la teoría Bayesiana de estimación. En el ajuste de modelos, debido a que el modelo modal es una función no lineal de los parámetros, se requiere el uso de esquemas iterativos de solución.

El enfoque de mínima varianza supone que los errores en los datos medidos y en los parámetros iniciales se pueden expresar en términos de matrices de varianza, de modo que se buscan parámetros ajustados que minimicen dicho indicador. La minimización requiere que las estimaciones analíticas puedan expresarse en términos de los parámetros, para lo cual suele utilizarse la expansión de Taylor de primer orden, haciéndose uso de la matriz de sensibilidad.

El método supone que las estimaciones de parámetros y los datos experimentales son estadísticamente independientes. Tal suposición sólo es cierta en la primera iteración. En iteraciones subsecuentes, la información experimental se ha utilizado en el cálculo de los parámetros, por lo que la suposición de independencia estadística constituye una gran simplificación [14]. Friswell [14] calculó la correlación entre las mediciones y los parámetros estimados en cada iteración, la cual se utiliza para estimar los nuevos parámetros, de manera que se tiene en cuenta la dependencia lineal generada en el algoritmo de ajuste.

En el método se considera que el output analítico,  $z$ , difiere del experimental,  $z_m$ , debido al ruido experimental, es decir

$$z_m = z + \varepsilon \quad (18)$$

donde  $\varepsilon$  es el ruido experimental, el cual se supone de media nula y varianza  $V_\varepsilon$ . Sea  $\theta_o$  la estimación inicial de parámetros, tal que

$$E[\theta_o] = \theta \quad (19)$$

$$Var(\theta_o) = V_o \quad (20)$$

El vector  $\theta$  representa el vector “correcto” de parámetros estimados. El objetivo es pues la obtención de estimaciones sucesivas mejoradas  $\theta_j$  de forma iterativa. Sea  $\theta_j$  la estimación actual de parámetros con sus propiedades modales

correspondientes  $z_j$  y varianza  $V_j$ . La aproximación lineal se expresa por medio de la expresión

$$z = z_j + S_j(\theta - \theta_j) \quad (21)$$

La matriz de correlación entre la  $j$ -ésima estimación de parámetros y el ruido experimental se denota como  $D_j$  y está dada por la expresión

$$D_j = E[\theta_j \varepsilon^T] \quad (22)$$

En la primera iteración, la correlación se considera nula y se define  $D_o = 0$ . La ecuación de ajuste es

$$\theta_{j+1} = \theta_j + (V_j S_j^T - D_j) V_{z_j}^{-1} (z_m - z_j) \quad (23)$$

$$V_{z_j} = S_j V_j S_j^T - S_j D_j - D_j^T S_j^T + V_\varepsilon \quad (24)$$

En la formulación original sin correlación entre parámetros y ruido, los parámetros actualizados se calculan como

$$\theta_{j+1} = \theta_j + V_j S_j^T [S_j V_j S_j^T + V_\varepsilon]^{-1} (z_m - z_j) \quad (25)$$

Las matrices de varianza deben a su vez actualizarse en cada iteración. Las expresiones de ajuste de estas matrices, así como las deducciones de las ecuaciones (23) a (25) se describen en detalle en [14]. En [19] se describe un estimador Bayesiano modificado que puede emplearse en esquemas de múltiples objetivos.

### 2.1.6 Métodos iterativos con el uso de funciones de respuesta en frecuencia

Es posible utilizar funciones de respuesta en frecuencia (FRF) de manera directa con el objeto de ajustar un modelo de elementos finitos. El uso directo de datos de FRF posee varias ventajas, en particular, no se requiere ejecutar un análisis modal, por lo que se evitan errores de identificación. La técnica es aplicable a estructuras con amortiguamiento y densidad modal alta [22] y [24].

Para ser utilizados, los métodos con FRF requieren que el amortiguamiento sea incluido en el modelo de elementos finitos, lo que constituye una desventaja si se tiene en cuenta

que, en general, los mecanismos de disipación de energía son en extremo difíciles de modelar y su naturaleza es aún objeto de intensa investigación [21].

El enfoque tradicional de ajuste con funciones de respuesta consiste en la optimización de funciones de penalización que involucran las FRF de manera directa (Mares, Friswell y Mottershead, en [31]). La formulación se basa en dos tipos de error denominados *error de ecuaciones* y *error de salida*. Ambos errores se basan en la ecuación de movimiento en el dominio de frecuencia, la cual, para sistemas con amortiguamiento viscoso, se escribe como

$$[-\omega^2 M + i\omega C + K]X(\omega) = F(\omega) \quad (26)$$

$$B(\omega)X(\omega) = F(\omega) \quad (27)$$

donde  $B(\omega)$  es la matriz de rigidez dinámica.

El enfoque de error en ecuaciones minimiza el error en las ecuaciones de movimiento:

$$\varepsilon_{EE} = F(\omega) - B(\omega)X(\omega) \quad (28)$$

donde los vectores  $F(\omega)$  y  $X(\omega)$  corresponden a los datos experimentales. Generalmente se supone que la fuerza es unitaria en todas las frecuencias y se reemplaza  $X(\omega)$  por la FRF de receptancia. Cuando se emplean técnicas basadas en error de ecuaciones, es necesario disponer de mediciones para cada una de las coordenadas modeladas analíticamente, en cuyo caso suele reducirse el modelo de elementos finitos o expandirse la información experimental.

El enfoque de error de salida minimiza la diferencia entre la respuesta medida y la estimada en el modelo numérico, expresada como

$$\varepsilon_{OE} = B(\omega)^{-1}F(\omega) - X(\omega) \quad (29)$$

Imregun et al. [22] presentaron una variante de la formulación clásica de errores en la que estos se expresan como combinaciones lineales de matrices de elementos individuales. Los parámetros de ajuste están representados por las constantes lineales e indican el cambio necesario en las matrices individuales de masa y rigidez para obtener el mejor ajuste entre las FRF analíticas (ajustadas) y las experimentales.

Dascotte y Strobbe [7] presentaron un enfoque alternativo en el que se busca maximizar la correlación entre las FRF analíticas y las experimentales en términos de funciones de correlación de forma y amplitud, en un intervalo dado de frecuencia.

### 2.1.7 Optimización

Existen varios métodos de ajuste que apuntan a resolver el problema utilizando un enfoque iterativo de optimización. Una de las mayores dificultades de este enfoque radica en que los algoritmos de optimización pueden encontrar el mínimo local más cercano a la posición de arranque e incluso fallar en la búsqueda de una solución convergente [27].

En su forma más simple, una función objetivo posee la forma

$$J = \sum_i W_i \Delta P_i \quad (30)$$

donde los  $\Delta P_i$  son los residuos y los  $W_i$  son coeficientes de ponderación asignados a cada una de las diferencias. En el ajuste de modelos, los términos  $\Delta P_i$  contienen a menudo diferencias entre valores propios analíticos y experimentales, así como diferencias entre vectores de formas modales.

Los pesos de los diferentes términos de la función deben definirse de manera arbitraria. Si bien en muchos casos se sabe qué tipo de datos disponibles y qué porción de ellos se conoce con mayor grado de confiabilidad, la selección de factores de peso es complicada debido a que la importancia relativa de los datos no obedece a reglas generales, sino que depende del problema en cuestión. El uso de factores de ponderación puede evitarse a través de la optimización de múltiples funciones objetivo [25].

Algunos algoritmos de búsqueda estocástica han sido utilizados para ajustar modelos. En particular, Levin y Lieven [27] ilustraron la formulación e implementación de algoritmos genéticos y algoritmos de recocido simulado y su aplicación a problemas de ajuste de modelos. Dichas técnicas están en capacidad de hallar soluciones óptimas globales que otros algoritmos no logran encontrar.

### 2.1.8 *Otros métodos de ajuste*

Horta et al. [20] introdujeron la incertidumbre de los parámetros en un esquema de ajuste basado en herramientas de Análisis Probabilístico (AP). La principal diferencia entre este enfoque y los descritos en secciones anteriores es que con el uso de herramientas de AP, se busca hallar el cambio en los parámetros que maximiza la probabilidad de que las predicciones concuerden con los datos experimentales, en lugar de minimizar el error de predicción. Dascotte [8] describió un enfoque estadístico donde se utilizan parámetros aleatorios de ajuste que representan la incertidumbre; se emplean a su vez datos estadísticos de excitación y respuesta, y métodos probabilísticos de simulación. Wu et al. [52] desarrollaron un método de ajuste basado en formas cuasi-modales. Pascual et al. [45] propusieron un esquema de ajuste basado en formas de deflexión en operación (ODS). Levin y Lieven [26] presentaron el uso de redes neuronales para ajuste de modelos e ilustraron la ejecución de la técnica en un experimento simulado. Lu y Tu [29] desarrollaron un enfoque de dos niveles de redes neuronales en el que se ajustan parámetros estructurales en el primer nivel, suponiendo que el modelo es no amortiguado, y razones de amortiguamiento en el segundo nivel, a partir de lo obtenido en el primero. Mares et al. [31] propusieron una estrategia de ajuste mediante estimación robusta. Mottershead et al. [40] presentaron un enfoque de Gauss-Newton de dos niveles que permite el uso de modelos con mallas poco refinadas (valores propios no convergentes).

### 2.1.9 *Estudios experimentales*

Los estudios teóricos de ajuste de modelos incluyen generalmente ejemplos de aplicación de los métodos desarrollados. En su mayoría se trata de experimentos simulados donde se utilizan dos modelos de elementos finitos de la misma estructura, uno de los cuales se ha perturbado con cambios conocidos, de modo que su salida representa la información analítica. Otros estudios incluyen experimentos físicos en los que se emplean estructuras sencillas o modelos a escala [53]. Ambas estrategias son

útiles para constatar la validez de los desarrollos teóricos en casos particulares.

Existen además estudios dedicados exclusivamente a la comparación del desempeño de dos o más métodos. Modak et al. [32] y [33] presentaron un estudio comparativo del Método de Eigensensitividad Inversa (IESM) y el Método de Función de Respuesta en Frecuencia (RFM), basado en información experimental simulada, donde se observó un mejor comportamiento por parte del IESM en presencia de ruido y un desempeño superior del RFM cuando se incluyen pocos modos en el rango de frecuencias de interés. Göge y Link [16] compararon el IESM y el RFM definido sólo con puntos de frecuencia resonante y valores propios. Modak et al. [32], [34] y [35] estudiaron el uso de modelos ajustados para la predicción de efectos causados por modificaciones en estructuras físicas y simuladas, en términos de adiciones de masa y elementos estructurales.

La aplicación de diferentes métodos de ajuste de modelos en estructuras en servicio ha sido reportada por varios autores. Vélez [49] ejecutó un análisis modal y un proceso de ajuste para el modelo del ala de un avión de entrenamiento. Moncayo [37] ajustó un modelo de una aeronave mediante cambios paramétricos manuales. Lord et al. [28] describieron los resultados de un estudio de ajuste de modelos realizado en un edificio de concreto reforzado de 48 pisos, con núcleo constituido por muros de corte, y con amortiguadores de columna líquida sintonizada (TLCD). Ventura et al. [50] condujeron un proceso de análisis modal experimental en un edificio de apartamentos con aislamiento de base a partir de datos de vibración ambiental y ejecutaron un proceso de ajuste manual de un modelo de elementos finitos generado en el software ETABS. Wu y Li [51] presentaron un procedimiento basado en eigensensitividad para el ajuste de un modelo de elementos finitos de una torre de televisión de 310 metros de altura. Sinha et al. [47], [48] discutieron aspectos de diagnóstico sísmico a partir de modelos ajustados y evaluaron la capacidad de predicción de un modelo de EF del tubo perforado de un reactor nuclear, ajustado con el método IESM. Zivanovic et al. [54] ilustraron la importancia de la combinación entre ajuste manual y ajuste

automático de modelos en un puente peatonal de acero. Göge [17] presentó el ajuste de un modelo numérico de un avión civil de 4 motores con el método de eigensensitividad inversa. Otras aplicaciones de ajuste de modelos en estructuras a escala real se ilustran en [3], [10] y [46].

### 3. PERSPECTIVAS

La investigación relacionada con el ajuste de modelos se ha enfocado primordialmente en el desarrollo de métodos de ajuste, comparación de metodologías, manejo de mal condicionamiento numérico y estrategias de parametrización. Este último campo incluye uno de los avances más significativos y de mayor potencial de desarrollo, el cual ha captado la atención de varios investigadores. La formulación de elementos genéricos desarrollada por Gladwell y Ahmadian [15] demuestra que las diversas matrices de masa y rigidez de distintos elementos, como barras, vigas y placas, son casos especiales de matrices genéricas. La deducción de dichas matrices es relativamente simple y su uso en el ajuste de modelos hace posible la consideración de diversos efectos físicos con pocos parámetros. A partir del desarrollo de matrices genéricas surgen diversas perspectivas de investigación. Algunos autores han especificado matrices genéricas de amortiguamiento. Sin embargo, éstas emulan la formulación de las matrices de masa y rigidez, de modo que el establecimiento de requisitos matemáticos para especificar matrices de amortiguamiento tendría un gran impacto en la manera como este fenómeno es incluido en el análisis dinámico de sistemas elasto-mecánicos. Por otro lado, debe prestarse atención cuando se ejecuta un ajuste, al sentido físico de los valores resultantes en los parámetros genéricos, con el fin de evitar el uso de modelos inconsistentes en términos físicos. La eficacia de las matrices genéricas puede investigarse ejecutando procesos de ajuste de modelos de elementos estructurales sencillos, como vigas simples, de manera que pueda constatar la capacidad de predicción de la formulación genérica en cuestión.

Los efectos del amortiguamiento tienen gran incidencia en la correlación modal y por ende en el ajuste. El entendimiento limitado del

amortiguamiento se ve reflejado en lo poco que se considera en la mayoría de trabajos relacionados con ajuste de modelos. En efecto, algunos investigadores son partidarios de enfocar la investigación en el mejoramiento de la estructura de los modelos en lugar de buscar la reconciliación entre datos provenientes de sistemas diferentes (una estructura física amortiguada y un modelo no amortiguado de dicho sistema) [41]. En dinámica estructural, esto implica una mejor modelación del amortiguamiento. En este sentido, el estudio de la evolución de sistemas a largo plazo, por medio de modelos holísticos, aparece como un campo promisorio que podría proveer conocimientos y herramientas útiles para el mejoramiento de las estrategias de modelación [42].

Si bien el ajuste de modelos fue desarrollado durante varios años por investigadores de ingeniería aeroespacial y mecánica, se extendió, como era de esperarse, a otras áreas con necesidades similares. Es así como la tecnología de ajuste ha sido introducida en estructuras civiles, como se ilustra en este documento. No obstante, el impacto que los procesos de ajuste pueden tener en los resultados de análisis sísmicos no ha sido estudiado en detalle, si bien se cree que puede ser significativo [54]. Aunque el ajuste de algunas estructuras civiles puede ser problemático, muchas estructuras pueden ser sometidas a este tipo de análisis, por lo que conviene explorar, mediante ensayos experimentales, los efectos del ajuste en el diagnóstico de derivas y otros parámetros del diseño sismorresistente.

La modelación de conexiones es otra de las áreas que han experimentado un gran desarrollo como consecuencia del surgimiento del ajuste de modelos. Se han formulado diversos modelos para juntas con pernos y otros sujetadores; algunos incluyen formulaciones con elementos genéricos. Uno de los estudios que pueden contribuir al avance en este campo es la evaluación de la efectividad de dichos modelos por medio de experimentos basados en ajuste.

La ingeniería civil puede a su vez beneficiarse con el desarrollo de modelos capaces de describir la dinámica de uniones pernadas viga-columna; tales modelos deben ser validados con procedimientos en los que pueden emplearse parámetros de uniones para el ajuste.

## REFERENCIAS

- [1] AHMADIAN H., MOTTERSHEAD J.E., FRISWELL M.I. 1998. "Regularisation Methods for Finite Element Model Updating". *Mechanical Systems and Signal Processing* 12(1), 47-64.
- [2] CALVI A, 2005. "Uncertainty-Based Loads Analysis for Spacecraft: Finite Element Model Validation and Dynamic Responses". *Computers and Structures* 83, 1103-1112.
- [3] CAMILLACCI R., GABRIELE S. 2005. "Mechanical Identification and Model Validation for Shear-Type Frames". *Mechanical Systems and Signal Processing* 19, 597-614.
- [4] Carvalho J.B., DATTA B.N., LIN W.W., WANG C.S. 2005. "Symmetry Preserving Eigenvalue Embedding in Finite Element Model Updating of Vibrating Structures". *Journal of Sound and Vibration*. In Press
- [5] D'AMBROGIO W., FREGOLENT A. 2004. "Dynamic Model Updating Using Virtual Antiresonances". *Shock and Vibration* 11, 351-363.
- [6] DASCOTTE E., STROBBE J., HUA H. 1995. "Sensitivity-Based Model Updating Using Multiple Types of Simultaneous State Variables". *Proceedings of the 13th International Modal Analysis Conference (IMAC), Nashville, Tennessee*.
- [7] DASCOTTE E., STROBBE J. 1998. "Updating Finite Element Models Using FRF Correlation Functions". *Proceedings of the 17th International Modal Analysis Conference, Kissimmee, FL*.
- [8] DASCOTTE E. 2003. "The Use of FE Model Updating and Probabilistic Analysis for Dealing with Uncertainty in Structural Dynamics Simulation". *Japan Modal Analysis Conference, Sept. 10-12, Tokyo, Japan*.
- [9] DATTA B.N. 2002. "Finite Element Model Updating, Eigenstructure Assignment and Eigenvalue Embedding Techniques for Vibrating Systems". *Mechanical Systems and Signal Processing* 16(1), 83-96.
- [10] DE SORTIS A., ANTONACCI E., VESTRONI F. 2005. "Dynamic Identification of a Masonry Building Using Forced Vibration Tests". *Engineering Structures* 27, 155-165.
- [11] DUNN S.A., 1994. "Issues concerning the Updating of the Finite Element Models from Experimental Data". *NASA Technical Memorandum 109116. Langley Research Center, Hampton, Virginia*.
- [12] EWINS D.J. 2000. "Modal Testing: Theory, Practice and Application, 2nd Edition". *Research Studies Press, Baldock*.
- [13] FRISWELL M.I., MOTTERSHEAD J.E. 1993. "Model Updating in Structural Dynamics: A Survey". *Journal of Sound and Vibration* 167(2), 347-375.
- [14] FRISWELL M.I., MOTTERSHEAD J.E. 1995. "Finite Element Model Updating in Structural Dynamics". *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*.
- [15] GLADWELL G.M.L., AHMADIAN H. 1995. "Generic Element Matrices Suitable for Finite Element Model Updating". *Mechanical Systems and Signal Processing* 9(6), 601-614.
- [16] GÖGE D., LINK M. 2003. "Assessment of Computational Model Updating Procedures with Regard to Model Validation". *Aerospace Science and Technology* 7, 47-61.
- [17] GÖGE D. 2003. "Automatic Updating of Large Aircraft Models Using Experimental Data from Ground Vibration Testing". *Aerospace Science and Technology* 7, 33-45.
- [18] HEMEZ F.M., Doebling S.W. 2001. "Review and Assessment of Model Updating for Non-Linear, Transient Dynamics". *Mechanical Systems and Signal Processing* 15(1), 45-74.
- [19] HONGXING H., SOL H., WILDE D.W.P. 2000. "On a Statistical Optimization

- Method Used in Finite Element Model Updating". *Journal of Sound and Vibration* 231(4), 1071-1078.
- [20] HORTA L.G., REAVES M.C., VORACEK D.F. 2001. "A Probabilistic Approach to Model Update". *Proceedings of the First Annual Probabilistic Methods Conference*, June 18-19. Newport Beach, CA.
- [21] IBRAHIM R.A., PETTIT C.L. 2005. "Uncertainties and Dynamic Problems of Bolted Joints and Other Fasteners". *Journal of sound and Vibration* 279, 857-936.
- [22] IMREGUN M., VISSER W.J., EWINS D.J. 1995. "Finite Element Model Updating Using Frequency Response Function Data – I. Theory and Initial Investigation". *Mechanical Systems and Signal Processing* 9(2), 187-202.
- [23] IMREGUN M., SANLITURK K.Y., EWINS D.J. 1995. "Finite Element Model Updating Using Frequency Response Function Data – II. Case Study on a Medium-Size Finite Element Model". *Mechanical Systems and Signal Processing* 9(2), 203-213.
- [24] JONES K., TURCOTTE J. 2002. "Finite Element Model Updating Using Antiresonant Frequencies". *Journal of Sound and Vibration* 252(4), 717-727.
- [25] KIM G.H., PARK Y.S. 2004. "An Improved Updating Parameter Selection Method and Finite Element Model Update Using Multiobjective Optimization Technique". *Mechanical Systems and Signal Processing* 18, 59-78.
- [26] LEVIN R.I., LIEVEN N.A.J. 1998. "Dynamic Finite Element Model Updating Using Neural Networks". *Journal of Sound and Vibration* 210(5), 593-607.
- [27] LEVIN R.I., LIEVEN N.A.J. 1998. "Dynamic Finite Element Model Updating Using Simulated Annealing and Genetic Algorithms". *Mechanical Systems and Signal Processing* 12(1), 91-120.
- [28] LORD J.F., VENTURA C.E., DASCOTTE E., BRINCKER R., ANDERSEN P. 2003. "FEM Updating Using Ambient Vibration Data from a 48-Storey Building in Vancouver, British Columbia, Canada". 32nd International Congress and Exposition on Noise Control Engineering. August 25-28, Seogwipo, Korea.
- [29] LU Y., TU Z. 2004. "A Two Level Neural Network Approach for Dynamic FE Model Updating Including Damping". *Journal of Sound and Vibration* 275, 931-952.
- [30] MAIA N.M.M., SILVA J.M.M. (editors). 1997. "Theoretical and Experimental Modal Analysis". Research Studies Press, Baldock.
- [31] MARES C., FRISWELL M.I., MOTTERSHEAD J.E. 2002. "Model Updating Using Robust Estimation". *Mechanical Systems and Signal Processing* 16(1), 169-183.
- [32] MODAK S.V., KUNDRA T.K., NAKRA B.C. 2002. "Use of an Updated Finite Element Model for Dynamic Design". *Mechanical Systems and Signal Processing* 16(2-3), 303-322.
- [33] MODAK S.V., KUNDRA T.K., NAKRA B.C. 2002. "Comparative Study of Model Updating Methods Using Simulated Experimental Data". *Computers and Structures* 80, 437-447.
- [34] MODAK S.V., KUNDRA T.K., NAKRA B.C. 2002. "Prediction of Dynamic Characteristics Using Updated Finite Element Models". *Journal of Sound and Vibration* 254(3), 447-467.
- [35] MODAK S.V., KUNDRA T.K., NAKRA B.C. 2005. "Studies in Dynamic Design Using Updated Models". *Journal of Sound and Vibration* 281, 943-964.
- [36] MÖLLER P.W., FRIBERG O. 1998. "An Approach to the Mode Pairing Problem". *Mechanical Systems and Signal Processing* 12(4), 515-523.

- [37] MONCAYO, H. 2006. "Caracterización Mecánica y Dinámica de Estructuras Aeronáuticas: Caso Avión de Categoría Acrobática T-34 Mentor". Tesis de Maestría, Universidad del Valle, Santiago de Cali.
- [38] MORALES C.A. 2005. "Comments on the MAC and the NCO, and a Linear Modal Correlation Coefficient". Short communication, *Journal of Sound and Vibration* 282, 529-537.
- [39] MOTTERSHEAD J.E., FRISWELL M.I., BRANDON J.A. 1996. "Geometric Parameters for Finite Element Model Updating of Joints and Constraints". *Mechanical Systems and Signal Processing* 10(2), 171-182.
- [40] MOTTERSHEAD J.E., GOH E.L., SHAO W. 1995. "On the Treatment of Discretisation Errors in Finite Element Model Updating". *Mechanical Systems and Signal Processing* 9(1), 101-112.
- [41] NATKE, H.G. 1998. "Problems of Model Updating Procedures: A Perspective Resumption". *Mechanical Systems and Signal Processing* 12(1), 65-74.
- [42] NATKE, H.G., CEMPEL C. 1999. "Holistic Dynamics and Subsystem Modelling: Principles". *International Journal of Systems Science* 30(3), 283-293.
- [43] NELSON R.B. 1976. "Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives". *AIAA Journal* 14(9), 1201-1205.
- [44] PALMONELLA M., FRISWELL M.I., MOTTERSHEAD J.E., LEES A.W. 2005. "Finite Element Models of Spot Welds in Structural Dynamics: Review and Updating". *Computers and Structures* 83, 648-661.
- [45] PASCUAL R., SCHÄLCHLI R., RAZETO M. 2006. "Robust Parameter Identification Using Forced Responses". *Mechanical Systems and Signal Processing*, IN PRESS.
- [46] PAVIC A., REYNOLDS P. 2003. "Modal Testing and Dynamic FE Model Correlation and Updating of a Prototype High-Strength Concrete Floor". *Cement and Concrete Composites* 25, 787-799.
- [47] SINHA J.K., RAMA RAO A., SINHA R.K. 2004. "Advantage of the Updated Model of Structure: A Case Study". *Nuclear Engineering and Design* 232, 1-6.
- [48] SINHA J.K., RAMA RAO A., SINHA R.K. 2006. "Realistic Seismic Qualification Using the Updated Finite Element Model for In-Core Components of Reactors". *Nuclear Engineering and Design* 236, 232-237.
- [49] VELEZ, W.H. "Actualización de Modelos de Elementos Finitos de Sistemas Estructurales. Tesis de Grado. Universidad del Valle, 2007.
- [50] VENTURA C.E., FINN W.D.L., LORD J.F., FUJITA. 2003. "Dynamic Characteristics of a Base Isolated Building from Ambient Vibration Measurements and Low Level Earthquake Shaking". *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 23, 313-322.
- [51] WU J.R., LI Q.S. 2004. "Finite Element Model Updating for a High – Rise Structure Based on Ambient Vibration Measurements". *Engineering Structures* 26, 979-990.
- [52] WU Y.X., ZHONG J., CONTI C., DEHOMBREUX P. 2003. "Quasi-mode Shape Based Dynamic Finite Element Model Updating Method". *Journal of Materials Processing Technology* 138, 518-521.
- [53] ZAPICO J.L., GONZÁLEZ M.P., FRISWELL M.I., TAYLOR C.A., CREWE A.J. 2003. "Finite Element Model Updating of a Small Scale Bridge". *Journal of Sound and Vibration* 268, 993-1012.
- [54] ZIVANOVIC S., PAVIC A., REYNOLDS P. 2007. "Finite Element Modelling and Updating of a Lively Footbridge: The Complete Process". *Journal of Sound and Vibration* 301, 126-145.