UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Sede Manizales

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

# REDUCCIÓN DEL SISTEMA DE LAS ECUACIONES BÁSICAS DE LA MHD USANDO LOS POTENCIALES DE EULER

TESIS

MAESTRÍA EN CIENCIA FÍSICA

Manizales

2008

# REDUCCIÓN DEL SISTEMA DE LAS ECUACIONES BÁSICAS DE LA MHD USANDO LOS POTENCIALES DE EULER


Trabajo presentado por:

**LEONEL LIBARDO PALOMÁ PARRA**


Requisito para optar al título de

**MAGÍSTER EN CIENCIA FÍSICA**


DIRECTOR

**Ph.D. ALFONSO DEVIA CUBILLOS.**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA**

**Sede Manizales**

**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**



**Manizales**
**2008**

ABSTRACT

The theory of magnetohydrodynamics is described by a system of nolinear partial differential equations (pde's). Some of these pde's are: Navier-Stokes equations relating dynamics of fluids, Maxwell equations in electromagnetism, the law of Ohm for the current and the equation that models Lorentz force. In this work we make a reduction to a more simple system of compact equations subject to specific conditions. This approach facilitates both the MHD equations analysis and their solution.
After introducing a set of auxiliary variables and applying the rotational operator with its properties, we use the potentials of Euler-Monge of the fields of magnetic speed and we incorporate to the system the equations that model the specific characteristics of the fluid such as incompressibility, viscosity and resistively, the Hall effect and the thermoelectrial terms.

We present the reduced equations in general form and a discussion of their characteristics in general curvilinear coordinates in three dimensions. After defining the main operators, we show the reduction for the helical case and to the case of orthogonal curvilinear coordinates in two variables. At the end we use some mathematical theorems about the reduced equations to find the definitive system.

# Índice

# 1. Resumen

En el contexto de la teoría de la magnetohidrodinámica MHD, y a partir del sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales que la describen: Ecuaciones de Navier-Stokes de la dinámica de fluidos, las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, la ley de Ohm para la corriente y la ecuación que modela la fuerza de Lorentz, hacemos una reducción a un sistema más simple de ecuaciones compactas sujeta a condiciones específicas, que facilitan tanto el análisis de la MHD como su solución.
Después de introducir un conjunto de variables auxiliares y aplicar el operador rotacional con sus propiedades, usamos los potenciales de Euler-Monge de los campos de velocidad y magnético e incorporamos al sistema las ecuaciones que modelan las características específicas del fluido como la incompresibilidad, la viscosidad y la resistividad, el efecto Hall y los términos termoeléctricos.
Presentamos las ecuaciones reducidas en general y una discusión de sus características en coordenadas curvilíneas generales en tres dimensiones. Después de definir los operadores principales se presenta la reducción para el caso helicoidal y el caso de coordenadas curvilíneas ortogonales, en dos variables. Al final utilizamos los teoremas matemáticos sobre las ecuaciones reducidas para encontrar el sistema definitivo.

# 2. Introducción

Magnetohidrodinámica MHD es el campo de la ciencia física que estudia la dinámica de fluidos provistos de carga eléctrica en presencia de campos magnéticos. El campo magnético puede tener su origen en corrientes eléctricas externas al fluido, en cuyo caso se habla de campo aplicado, o puede ser inducido por el propio flujo. Este estudio fue iniciado por Hannes Alfvén en 1942, cuyo trabajo le mereció el premio Nóbel en 1970. Ejemplos de tales líquidos

incluyen plasmas, metales líquidos y el agua salada.
La palabra magnetohidrodinámica MHD se deriva de magneto que significa campo magnético, hidro que significa líquido, y dinámica que significa movimiento.
La forma más simple de MHD es el MHD ideal. En él se asume que el fluido se trata como un fluido homogéneo, es un fluido conductor perfecto, por lo que posee una conductividad eléctrica infinita y tiene una viscosidad nula. El MHD ideal se estudia dentro de los plasmas calientes, tales como los plasmas en astrofísica y los termonucleares de origen natural.

Otra clase de fluidos MHD son los resistivos, fluidos ionizados débilmente magnetizados con una resistencia eléctrica no nula. Esta difusión conduce a una ruptura dentro de la topología magnética, es decir, no hay reconexión de las líneas de campo magnético. Dentro de un fluido considerado como conductor no perfecto, el campo magnético puede desplazarse a través del fluido siguiendo una ley de difusión magnética donde la constante de difusión es la resistividad del fluido. Ello implica que las soluciones de las ecuaciones de la MHD ideal son aplicables solo por una duración y una región limitadas, pues más allá de los límites, la difusión se hace demasiado grande. Por ejemplo, en el Sol, se estima que el tiempo de difusión a través de una región activa (resistividad colisional) es cientos o miles de años, tiene una duración mucho más larga que la vida de una mancha solar, ahí se desprecia la resistividad (caso de la MHD ideal).

Los plasmas pueden crearse artificialmente aplicando un campo eléctrico a un gas a baja presión, como en los tubos fluorescentes o de neón. También puede crearse un plasma artificial calentando un gas neutro hasta temperaturas muy altas. En general, las temperaturas son demasiado altas para aplicarlas externamente, por lo que se calienta el gas internamente inyectando en él iones o electrones de alta velocidad que pueden colisionar con las partículas de gas y aumentar su energía térmica. Los electrones del gas también pueden ser acelerados por campos eléctricos externos. Los iones procedentes de estos plasmas se emplean en la industria de semiconductores para grabar superficies y producir otras alteraciones en las propiedades de los materiales.

En los plasmas muy calientes, las partículas adquieren suficiente energía como para producir reacciones nucleares al colisionar entre sí. Estas reacciones de fusión son la fuente de calor en el núcleo del Sol. Actualmente los científicos intentan crear en los laboratorios plasmas artificiales donde las reacciones de fusión puedan producir energía para generar electricidad.

En un flujo MHD, en general, el campo de velocidad del fluido y el campo magnético se encuentran acoplados. Esto quiere decir que el movimiento del fluido afecta el campo magnético en donde fluye, mientras que el campo altera a su vez el movimiento original del fluido. El origen de este acoplamiento proviene del hecho de que el movimiento relativo de un fluido y un campo magnético da lugar a la aparición de corrientes eléctricas en el medio. Por un lado, al interaccionar las corrientes con el campo magnético se originan las llamadas fuerzas de Lorentz, que alteran el movimiento del fluido. Por otro lado, las corrientes eléctricas dentro del medio inducen campos magnéticos que se superponen al campo original. Adicionalmente, el flujo de corrientes eléctricas dentro del fluido genera una fuente de disipación de energía, conocida como calentamiento Joule, que se presenta siempre que una corriente eléctrica fluye en un circuito. De hecho, los campos electromagnéticos alteran radicalmente los fenómenos de transporte en fluidos conductores de electricidad, y es precisamente esta alteración la que ha dado origen a una gran cantidad de aplicaciones tecnológicas. En el campo de la investigación es de particular interés el desarrollo de herramientas analíticas, numéricas y experimentales para el estudio tanto de la dinámica de flujos MHD como de la transferencia de calor que se lleva a cabo en los mismos. Aplicaciones particulares se tienen como: En Geofísica Se piensa que el núcleo fluido de la Tierra y otros planetas es una dinamo MHD enorme que genera el campo magnético de la Tierra por el movimiento de la roca fundida.

Tales dinamos trabajan estirando las líneas de campo magnético en un volumen particular que determina la fuerza del campo magnético, por lo que al estirar la líneas de campo aumenta el campo magnético. En Astrofísica, el MHD se aplica muy bien, pues cerca del 99 % del contenido de la materia bariónica está hecha de plasma, como las estrellas, el medio interplanetario (espacio entre los planetas), el medio interestelar (espacio entre las estrellas), nébulas y los chorros relativistas. Muchos de los sistemas astrofísicos no están en equilibrio térmico local, y por lo tanto, requieren un tratamiento cinemático adicional para describir todos los fenómenos dentro del sistema. Las manchas solares las causan los campos magnéticos solares, como teorizó Joseph Larmor en 1919. El viento solar se rige por la MHD. La rotación solar diferenciada puede ser el efecto a lo largo del tiempo por el arrastre magnético en los polos del sol, un fenómeno de la MHD debido a la forma de espiral de Parker que toma el campo magnético extenso del Sol. El campo magnético en la región activa del Sol sobre una mancha solar puede someterse a muchas tensiones con el tiempo, almacenando energía que se libera de repente como un haz en movimiento, rayos X y radiación cuando colapsa la capa de corriente principal, reconectando el campo.
En Ingeniería la MHD se relaciona con problemas tales como confinamiento de plasma, enfriamiento por metales líquidos de los reactores nucleares, y el moldeado electromagnético, entre otros. La generación de energía a través de MHD alimentada por la combustión de gas de carbón con añadidos potásicos mostró potencial para una conversión eficiente de energía por la ausencia de partes sólidas en movimiento, lo cual permite la operación a temperaturas más altas, pero falló debido a los altos costos técnicos para resolver las dificultades.

En cuanto al modelo matemático, el sistema de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales que describen la magnetohidrodinámica, en general, son una combinación de las ecuaciones de Navier-Stokes de dinámica de fluidos, las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo y la ley de Ohm para la corriente y la ecuación que modela la fuerza de Lorentz Para el caso de MHD ideal también se tiene la ecuación de continuidad, las leyes de la cantidad de movimiento, el teorema de Ampere (en la ausencia de campo eléctrico y de difusión de electrones) y las ecuaciones de la termodinámica, en las cuales el flujo de calor se efectúa vía condiciones adiabáticas o isotérmicas. Estas ecuaciones diferenciales tienen que ser resueltas simultáneamente, bien analíticamente o bien numéricamente, dependiendo las condiciones del fluido y condiciones iniciales.

# 3. Objetivos

Basado el el artículo "The Reduce Equation of Dissipative Imcompressible Magnetohydrodynamics and Some of their Exact Integrals"de Fausto Gratton and Martin F. Heyn, 1986, el propósito de este trabajo es hacer el desarrollo matemático detallado de la reducción del sistemas de ecuaciones diferenciales que modelan el fenómeno MHD. Es decir, .ª partir del sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales que modelan el fenómeno de la MHD, obtener un sistema de ecuaciones compactas y adecuadas más simple que permitan el análisis de propiedades útiles y faciliten la búsqueda de soluciones de estos sistemas, que involucren características especificas del fluido como la resistividad, la viscosidad e incompresibilidad en la Magnetohidrodinámica (MDH).
Introduciendo los potenciales de Euler, el número de ecuaciones y de variables dependientes se reduce a un sistema de ecuaciones equivalente al sistema original de MHD. El formalismo es desarrollado en coordenadas curvilíneas en general para así cubrir una amplia gama de geometrías.
Las ecuaciones reducidas son tratadas a partir de las configuraciones que muestran dependencia entre tres coordenadas, para los cuales se observan algunas características generales.

Se tratan los sistemas en el caso particular de ignorar una variable, donde se presentan las ecuaciones para las tres simetrías básicas: De traslación, de rotación y la helicoidal.
Se describe la reducción de una manera ordenada, pasando de lo general a los casos particulares, es decir, con la introducción de las hipótesis de simetría o suposiciones especiales de la separación de las variables.
Las ecuaciones reducidas a través de los potenciales de Euler, facilitan otros estudios sistemáticos de integrales exactas de la magnetohidrodinámica. Aquí se contribuye a la línea de la investigación analítica dando algunos ejemplos de las nuevas soluciones para los flujos de la magnetohidrodinámica.

Las integrales exactas se definen como un sistema de las funciones $v$, $B$, y $P$, que satisfacen las ecuaciones de la magnetohidrodinámica idénticamente. Las funciones dadas pertenecen a una familia de funciones elementales y funciones especiales de física matemática, incluyendo las definidas por las ecuaciones diferenciales no lineales ordinarias, estudiadas eventual por la integración numérica."

# 4. Ecuaciones Básicas

El sistema de ecuaciones que modela el fenómeno de la MHD esta compuesto, en primer lugar, por las ecuaciones de Navier-Stokes, que reciben su nombre en honor a Claude-Louis Navier y George Gabriel Stokes.
Se trata de un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido. Estas ecuaciones gobiernan la atmósfera terrestre, las corrientes oceánicas y el flujo alrededor de vehículos o proyectiles y, en general, cualquier fenómeno en todo tipo de fluidos. Se obtienen aplicando los principios de conservación de la mecánica y la termodinámica a un volumen fluido, deduciendo así la llamada formulación integral de

las ecuaciones. Aplicando diferentes teoremas y manipulación algebraica se encuentra la formulación diferencial, que generalmente es más útil para la resolución de los problemas que se plantean en la mecánica de fluidos. No se dispone de una solución general para este conjunto de ecuaciones, y salvo ciertos tipos de flujo y situaciones muy concretas no es posible hallar una solución analítica, por lo que en muchas ocasiones hemos de recurrir al análisis numérico para determinar una solución. A la rama de la mecánica de fluidos que se ocupa de la obtención de estas soluciones mediante el ordenador se le denomina mecánica de fluidos computacional (CFD, de su acrónimo anglosajón Computational Fluid Dynamics).
En segundo lugar están las ecuaciones de Maxwell que describen los fenómenos electromagnéticos. La gran contribución de James Clerk Maxwell fue reunir en estas ecuaciones largos años de resultados experimentales, debidos a Coulomb, Gauss, Ampere, Faraday y otros, introduciendo los conceptos de campo y corriente de desplazamiento, y unificando los campos eléctricos y magnéticos en un solo concepto. El campo electromagnético. De las ecuaciones de Maxwell se desprende la existencia de ondas electromagnéticas propagándose con velocidad $v_f$:

El valor numérico de esta cantidad, que depende del medio material, coincide con el valor de la velocidad de la luz en dicho medio, con lo cual Maxwell identificó la luz con una onda electromagnética, unificando la óptica con el electromagnetismo.

La formulación moderna de las ecuaciones de Maxwell es debida a Oliver Heaviside y Josiah Willard Gibbs quienes en 1884 reformularon las ecuaciones originales de Maxwell en un sistema abreviado utilizando una notación vectorial. La formulación original de Maxwell data de 1865 y contiene 20 ecuaciones de 20 variables. En 1873 Maxwell intentó una formulación simplificada que finalmente no resultó popular. La formulación vectorial resultaba especialmente atractiva porque remarcaba las simetrías intrínsecas en las ecuaciones haciendo más fácil su utilización e inspirando aplicaciones posteriores. Otra parte de las ecuaciones la contempla la inclusión de la fuerza de Lorentz, producida por las partıculas cargadas que se mueven a través de una región en la que coexiste un campo eléctrico y un campo magnético. Esta fuerza esta dada por la expresión $F = qE + qv \times B$.

Para nuestro caso particular asumimos un fluido ideal el cual no tiene fricción (incompresibilidad, densidad uniforme, y además la viscosidad y la resistividad son isotrópicas en el proceso de transporte del fluido, las ecuaciones de la Magnetohidrodinámica, (MHD), son:

$$\text{div } v = 0 \tag{4.1}$$

$$-\text{grad } P = \frac{\partial v}{\partial t} + \omega \times v - \frac{1}{c\rho} j \times B + \nu \text{ rot}\omega \tag{4.2}$$

$$\frac{1}{\sigma} j = E + \frac{1}{c} v \times B - \frac{m_i}{\rho\, q\, c} j \times B + \text{grad}(\frac{m_i}{\rho\, q} p_e) \tag{4.3}$$

$$\frac{4\pi}{c} j = \text{rot } B \tag{4.4}$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = \text{rot } E \tag{4.5}$$

$$\text{div } B = 0. \tag{4.6}$$

Aquí

$$\text{rot } v = \omega, \qquad\qquad P = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|v|^2 + \text{V} \tag{4.7}$$

$P$ esta expresado en términos de la energía debida a la velocidad del fluido, potencial de presión o energía que el fluido contiene debido a la presión que posee y la energía potencial gravitatoria por unidad de masa.

Las otras variables son:

| | | | |
|---|---|---|---|
| v | Velocidad del fluido | B | Campo magnético |
| $E$ | Campo eléctrico | $j$ | Densidad de la corriente eléctrica |
| $p$ | Presión del fluido | $p_e$ | Presión electrónica del fluido. |
| $c$ | Velocidad de la luz en el vacío. | $\rho$ | Densidad de masa |
| $\nu$ | Viscosidad cinética | $m_i,\ q$ | Masa iónica y carga del plasma |
| $\sigma$ | Conductividad electrónica. | V | Potencial gravitacional. |

Usamos el sistema de unidades de medida $CGS$, que simplifican las fórmulas del electromagnetismo y las unidades eléctricas $ues$.
Las restricciones para el anterior conjunto de ecuaciones son: La densidad del plasma es uniforme, $\rho,\ \nu,\ y\ \sigma$ las asumimos como constantes.
La ecuación (4.3) incluye el efecto Hall, que ocurre cuando un flujo transmite una corriente eléctrica y se halla situada en un campo magnético perpendicular a la dirección de la corriente, entonces se desarrolla por encima de la placa un campo eléctrico transversal, es decir, perpendicular al sentido de la corriente. Este campo, denominado campo de Hall, es el resultante de fuerzas ejercidas por el campo magnético sobre las partículas de la corriente eléctrica, sean positivas o negativas, o positivas en un sentido y negativas en el otro.

Para el desarrollo matemático se usa el potencial electrodinámico A con las siguientes condiciones:

$$B = \text{rot A} \ , \tag{4.8}$$

donde A es el potencial electrodinámico vectorial libre de fuentes, es decir

$$\text{div } A = 0. \tag{4.9}$$

Sustituyendo $B$ en la ecuación(4.5),por la Ley de Amper, se deduce la siguiente expresión

$$\mathrm{rot}(E + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{A}) = 0,$$

lo que significa que existe un campo escalar $\phi_e$ tal que

$$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial\ \mathrm{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\ \Phi_e. \tag{4.10}$$

Para facilitar los cálculos, introduciendo las siguientes campos auxiliares espacio-temporales en las variables $(x, y, z, t)$, y considerando la constantes que multiplican cada uno de los campos originales, como adimensionales.

$$h = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}}\ B, \quad \epsilon = \frac{c\ E}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad a = \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad \phi_c = \frac{c\ \Phi_e}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad J = \sqrt{\frac{4\pi}{\rho c^2}}\ j, \tag{4.11}$$

que nos permiten deducir las siguientes identidades

$$\frac{1}{c\rho}\ j \times B = J \times h \tag{4.12}$$

$$\epsilon = -\frac{\partial a}{\partial t} - \mathrm{grad}\ \phi_e \tag{4.13}$$

$$\frac{m_i}{\rho\ q\ c}\ j \times B = \frac{m_i}{q}\ J \times h = \frac{\sqrt{4\pi\rho}}{ck}\ J \times h \tag{4.14}$$

$$\frac{1}{c}\ v \times B = \frac{\sqrt{4\pi\rho}}{c}\ v \times h \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} E + \mathrm{grad}(\frac{m_i\ p_e}{q\ \rho}) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \mathrm{grad}\ \Phi_e + \mathrm{grad}(\frac{m_i\ p_e}{q\ \rho}) \\ &= -\frac{1}{c}\sqrt{4\pi\rho}\ \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{1}{c}\sqrt{4\pi\rho}\ \mathrm{grad}\ \phi_e + \frac{m_i}{q}\ \mathrm{grad}(\frac{p_e}{\rho}) \\ &= -\frac{1}{c}\sqrt{4\pi\rho}\Big[\frac{\partial a}{\partial t} - \mathrm{grad}\ \phi_e - \frac{m_i}{q}\frac{c}{\sqrt{4\pi\rho}}\ \mathrm{grad}(\frac{p_e}{\rho})\Big] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E + \mathrm{grad}(\frac{m_i\ p_e}{q\ \rho}) &= -\frac{1}{c}\sqrt{4\pi\rho}\Big[\frac{\partial a}{\partial t} - \mathrm{grad}\ \phi_e - \frac{1}{k}\ \mathrm{grad}(\frac{p_e}{\rho})\Big] \\
&= -\frac{1}{c}\sqrt{4\pi\rho}\Big[\frac{\partial a}{\partial t} - \mathrm{grad}(\phi_e - \frac{p_e}{k\ \rho})\Big] \\
&= -\frac{1}{c}\sqrt{4\pi\rho}\Big[\frac{\partial a}{\partial t} - \mathrm{grad}\ Q\Big] \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma}j &= \frac{1}{\sigma}\frac{c}{\sqrt{4\pi}}\ \mathrm{rot}\ B \\
&= \frac{1}{\sigma}\frac{c}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{4\pi\rho}\ \mathrm{rot}\ h \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

La identidad (4.12), aparece en la ecuación (4.2), la identidad (4.13) sustituye la ecuación (4.10), las identidades (4.14-4.17) corresponden a los términos de la ecuación (4.3). Cabe anotar que (4.17) representa la difusividad del campo magnético.

Se define:

$$\frac{1}{k} = \frac{c\ m_i}{q\sqrt{4\pi\ \rho}} \qquad (4.18)$$

$$\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\text{Difusividad del campo magnético} \qquad (4.19)$$

$$Q = \phi_e - \frac{p_e}{k\ \rho}, \qquad (4.20)$$

se sustituyen estas expresiones en (4.2) y (4.3), se obtiene:

$$-\mathrm{grad}\ P = \frac{\partial v}{\partial t} + \omega \times v + \nu\ \mathrm{rot}\ \omega - J \times h \qquad (4.21)$$

$$-\mathrm{grad}\ Q = \frac{\partial a}{\partial t} + h \times v + \nu_m\ \mathrm{rot}\ h - \frac{1}{k}J \times h. \qquad (4.22)$$

Se sabe que $v$ y $\omega$ son campos solenoidales, es decir div $v = 0$ y div $\omega = 0$, usando la propiedad

$$\mathrm{rot}\ (\omega \times v) = (v \cdot \mathrm{grad})\omega - v(\mathrm{grad} \cdot\ \omega) - (\omega \cdot\ \mathrm{grad})v + \omega(\mathrm{grad} \cdot\ v)$$

se cumple que

$$\text{rot } \omega \times v = (v \cdot \text{grad})\omega - (\omega \cdot \text{grad})v = \{v, \omega\} \tag{4.23}$$

llamado el conmutador de $v$ y $\omega$.

**Teorema 1** *La componente $i-esima$ contravariante del conmutador en algún sistema de coordenadas curvilíneas provisto de las componentes contravariantes $v^i$, $\omega^j$ es*

$$\{v, \omega\}^i = \sum_{j=1}^{3} v^j \frac{\partial \omega^i}{\partial x^j} - \sum_{j=1}^{3} \omega^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \tag{4.24}$$

**Demostración**: Sea

$$\omega = (\omega^1\ , \omega^2\ , \omega^3), \qquad v = (v^1,\ v^2,\ v^3), \qquad \nabla = (\frac{\partial}{\partial x^1},\ \frac{\partial}{\partial x^2},\ \frac{\partial}{\partial x^3}) \equiv \text{grad},$$

y

$$\text{rot}\omega \times v = (v \cdot \nabla)\omega - v(\nabla \omega) - (\omega \cdot \nabla)v + \omega(\nabla \cdot v).$$

Entonces

$$(v.\nabla)\omega = (v^1 \frac{\partial \omega^1}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial \omega^1}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3},\ v_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial \omega^2}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial \omega^2}{\partial x^3},\ v^1 \frac{\partial \omega^3}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial \omega^3}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial \omega^3}{\partial x^3}),$$

de donde la componente $i-esima$ contravariante de este vector es

$$\{(v \cdot \nabla)\omega\}^i = \sum_{j=1}^{3} v^j \frac{\partial \omega^i}{\partial x^j}.$$

De igual forma se obtiene $\{(-\omega.\nabla)v\}^i$, lo que demuestra el teorema.

**Definición 1** *: Al conmutador $\{v, \omega\}$ se le llama la derivada de $\mathcal{L}ie$ del vector $\omega$ a lo largo del vector $v$ y lo notamos $\mathcal{L}_v(\omega)$*

(Ver SHUTZ,1980)

Si aplicamos el operador rotacional a (4.21), (rot $Z = \nabla \times Z$),y teniendo en cuenta que rot gra Z $\equiv 0$,esta ecuación se transforma en

$$0 = \text{rot}(\frac{\partial v}{\partial t}) + \text{rot}\omega \times v + \nu \text{ rot rot}\omega - \text{rot}(J \times h).$$

Como $\omega = \text{rot}v$, conmutamos el operador derivada parcial con el operador rot, para obtener

$$0 = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{rot}\omega \times v + \nu \text{ rot rot}\omega - \{J, h\}.$$

Trabajando de forma análoga sobre la ecuación (4.23), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial\ \omega}{\partial\ t} + \{v, \omega\} + \nu \text{ rot rot } \omega = \{h, J\} \tag{4.25}$$

$$\frac{\partial\ h}{\partial\ t} + \{v, h\} + \nu_m \text{ rot rot } h = -\frac{1}{k}\{h, J\}. \tag{4.26}$$

Los dos primeros términos de estas ecuaciones caracterizan la convección del fluido en el tiempo(Ver TRUESDELL y TOUPIN, 1960).

**Definición 2** *: Definimos un nuevo operador* $\frac{D}{Dt}$ *como*

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \{v, \omega\}$$

*denominado la derivada de* $\mathcal{L}$*ie en un espacio Ecuclideo-temporal, en las variables* $(X, t)$.

Cuando despreciamos los términos disipativos e ignoramos los términos del efecto Hall, es decir:

$$\frac{1}{k} \to 0,$$

dado que

$$\frac{1}{k} = \sqrt{\nu_m}\ \frac{m_i}{q},$$

entonces

$$\nu_m \to 0.$$

Usando la equivalencia para $h$ contemplada en (4.11) y (4.26) se cumple que

$$\frac{DB}{Dt} = 0,$$

que es el caso de la conservación del flujo (MHD) ideal.

Por otro lado si se conservan el efecto Hall, pero $\nu = \nu_m = 0$, se suman las ecuaciones (4.25) y (4.26), para obtener

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \{v, \omega\} + k\left[\frac{\partial h}{\partial t} + \{v, h\}\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega + kh) + \{v, \omega + kh\} = 0$$

$$\frac{D}{Dt}(\omega + \Omega) = 0 \tag{4.27}$$

donde $\Omega = kh = \dfrac{qB}{m_i c}$. Esta fórmula expresa la invariancia del flujo de $\omega + \Omega$ en (MHD) incluyendo el efecto Hall (TURNER, 1986).

El conmutador $\{h, J\}$ es el rotacional de la fuerza de Lorentz y determina la variación del flujo de $\omega$ y $\Omega$ adicionando los efectos de difusión.

Existen casos especiales en los que la fuerza de Lorentz se origina de un potencial $\Pi$, es decir

$$J \times h = \text{grad}\ \Pi, \qquad \text{en tal caso} \quad \{h, J\} = 0. \tag{4.28}$$

Es decir que para dicha configuración del campo magnético, si ellos son compatibles con el flujo de plasma, el conmutador $\{h, J\}$ es cero, y se tienen propiedades similares al equilibrio estático (MHD). Por lo tanto la ecuación (4.25) se desacopla de la ecuación (4.26) y se puede hallar el campo de la velocidad separadamente, para luego calcular $h$.

En efecto, todas las soluciones conocidas para fluidos viscosos ordinarios, aplican aquí. Sin embargo, para obtener una solución valida (MHD) a través de este conjunto de ecuaciones, debemos hallar las soluciones del sistema simultaneo (4.25) y (4.28) para el campo magnético.

# 5. Potenciales de Euler

**Teorema 2** *Si $\xi$ y $\zeta$ son campos escalares diferenciables con continuidad en un conjunto abierto $S$ de $E_3$, existe una campo vectorial $F$ tal que:*

$$rot\ F = grad\ \xi \times grad\ \zeta$$

*en todo $E_3$.*

Demostración Apostol Tom, Vol. II, pagina 552.
Tomando el teorema 2, se encuentra que dos posibles soluciones para $F$ son:

$$F = \xi \text{ grad } \zeta \qquad\qquad F = -\zeta \text{ grad } \xi, \tag{5.1}$$

además, como $v$ es un campo solenoidal, sus líneas de campo las podemos representar como la interseccin de dos superficies $\xi = const$ y $\zeta = const$. tal que

$$v = \text{grad } \xi \times \text{grad } \zeta. \tag{5.2}$$

$\xi$ y $\zeta$ son llamados *Potenciales de Euler*. Las superficies equipotenciales deben satisfacer las ecuaciones diferenciales parciales

$$v.\text{grad } \xi = 0 \qquad\qquad v.\text{grad } \zeta = 0,$$

es decir que estas superficies deben ser ortogonales a $v$.
Ahora, si se aplica el teorema de Stokes, Apostol Tom y se usan los teorema 3, 4, y (5.1),

se encuentra que el flujo de $v$ a través de una superficie abierta $S$ acotada por un contorno cerrado $\mathbf{C}$, está dado por

$$\begin{aligned}\int_S v\ ds &= \int_S \text{grad}\ \xi \times \text{grad}\ \zeta\ ds = \int_S \text{rot}\ F\ ds \\ &= \int_C F d\alpha = \int \xi \text{grad}\ \zeta\ d\alpha = -\int \zeta\ \text{grad}\ \xi\ d\alpha. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Dos casos particulares son.

i) $\zeta = z \qquad \xi(x,y)$, en coordenadas cartesianas.

ii.) $\zeta = \theta \qquad \xi(r,z)$ en coordenadas cilíndricas.

Que nos da la representación común de la corriente para movimientos simétricos sobre planos, y para los flujos simétricos axiales, respectivamente.

Para el primer caso (i), se tiene en coordenadas cartesianas que:

$$v_x = \frac{\partial \xi}{\partial y} \qquad v_y = -\frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad v_z = 0,$$

entonces es el flujo de $v$ a través de la superficie determinada por algún segmento de recta que une los puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ y un segmento vertical de altura $z$ es

$$\int_s v ds = -\int \zeta\ \text{grad}\ \xi\ d\alpha = -z\int_A^B \text{grad}\ \xi\ d\alpha = \{(\xi(x_2,y_2) - \xi(x_1,y_1))\}z.$$

El segundo caso, usando las componentes contravariantes de $v$ en coordenadas cilíndricas se cumple que

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = r v^r \qquad r v^z = -\frac{\partial \xi}{\partial r} \qquad v^\theta = 0,$$

y por lo tanto,

$$\int_s v ds = \int_C \xi \text{grad} \zeta d\alpha = 2\pi \xi(r,z),$$

es el flujo de $v$ a traveś del disco de radio $r$ situado en el plano $z = const.$

Teniendo en cuenta que $\omega$ es un campo solenoidal, introducimos otro par de potenciales de *Euler*, $\Sigma$ y $\Theta$ que satisfacen

$$\omega = \text{grad } \Sigma \times \text{grad } \Theta, \tag{5.4}$$

y sabiendo que $\omega = \text{rot } v$, se cumple en general que,

$$v = \text{grad } \Phi + \Sigma \text{ grad } \Theta, \tag{5.5}$$

donde $\Phi$ es un campo escalar arbitrario.

Al conjunto de funciones $\Phi, \Sigma, \Theta$ se le llama los potenciales de Monge para el campo vectorial $v$, o variables de CLEBSEH (LAMB,1957; ROBERTS, 1967)
Como $v$ es solenoidal, de (5.5), se obtiene

$$\text{div } v = \text{div grad } \Phi + \text{div}(\Sigma \text{ grad } \Theta),$$

$$0 = \nabla^2 \ \Phi + \text{grad } \Sigma.\text{grad } \Theta + \Sigma \text{ div grad } \Theta, \tag{5.6}$$

es decir que $\Phi$ debe satisfacer

$$\nabla^2\Phi = -\text{grad } \Sigma.\text{grad } \Theta - \Sigma \ \nabla^2\Theta. \tag{5.7}$$

Es de anotar que la representación en Potenciales de Euler no es única, la selección de estos puede ser guiada por conveniencia o por el requerimiento de un problema particular.

A la representación de la ecuación (5.2) podemos adicionar otro campo , con divergencia cero, de la siguiente forma: Sea $(\alpha, \beta, \gamma)$ escrito en un sistema de coordenadas curvilíneas, con

$$x^1 = \alpha, \quad x^2 = \beta, \quad x^3 = \gamma,$$

y,

$$e_i = \frac{\partial X}{\partial x^i} \qquad e^i = \text{grad } x^i,$$

bases covariante y contravariante respectivamente, $X$ el vector posición, con la métrica

$$|dX|^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \qquad g = \text{Det}(g_{ij}),$$

En estos términos $\dfrac{we_i}{\sqrt{g}}$ es un campo vectorial solenoidal, con el campo de líneas alineadas con la coordenada $e^i$, tal que la función $w(x^k)$ no depende de $x^i$.

Así, podemos escribir en lugar de la ecuación (5.2), la ecuación

$$v = \text{grad}\xi \times \text{grad}\zeta + \frac{1}{\sqrt{g}} we_\gamma, \tag{5.8}$$

con $w = w(\alpha, \beta)$, para un campo vectorial con div$v = 0$.

En forma similar a (5.4), introducimos los potenciales de Euler $\psi$ y $\chi$ para $h$,

$$h = \text{grad } \psi \times \text{grad } \chi. \tag{5.9}$$

Se deduce la fórmula

$$a = \text{grad } \kappa + \psi \text{grad } \chi, \tag{5.10}$$

en términos de los potenciales de Monge para $a$.

Usando estos potenciales las ecuaciones (4.21 - 4.22) y (4.25 - 4.26) se pueden expresar en forma simétrica más simple.

Primero se hacen las siguientes deducciones:

$$\omega \times v = (\text{grad } \Sigma \times \text{grad } \Theta) \times v$$

$$\omega \times v = (v.\text{grad } \Sigma)\text{grad } \Theta - \text{grad } \Sigma \ (v.\text{grad } \Theta)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\{\text{grad } \Phi + \Sigma \text{ grad } \Theta\}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= \text{grad}(\frac{\partial \Phi}{\partial t}) + \frac{\partial \Sigma}{\partial t}\text{grad } \Theta + \Sigma \text{ grad}(\frac{\partial \Theta}{\partial t}) \\ &= \frac{\partial \Sigma}{\partial t}\text{grad } \Theta + \text{grad}\{\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Sigma \ \frac{\partial \Theta}{\partial t}\} - \frac{\partial \Theta}{\partial t}\text{grad } \Sigma \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} + \omega \times v &= \frac{\partial \Sigma}{\partial t} \text{ grad } \Theta + (v.\text{grad } \Sigma)\text{grad } \Theta - \text{grad } \Sigma(v.\text{grad } \Theta) \\ &\quad + \text{grad}\{\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Sigma \ \frac{\partial \Theta}{\partial t}\} - \frac{\partial \ \Theta}{\partial \ t}\text{grad } \Sigma \\ \frac{\partial \ v}{\partial \ t} + \omega \times v &= \{\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + v.\text{grad}\Sigma\}\text{grad } \Theta - \{\frac{\partial \Theta}{\partial t} + v.\text{grad } \Theta\}\text{grad } \Sigma \\ &\quad + \text{grad}\{\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Sigma \ \frac{\partial \Theta}{\partial t}\}\end{aligned} \tag{5.12}$$

Si se define el operador derivada total como

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v.\text{grad},$$

se cumple la identidad:

$$\frac{\partial \ v}{\partial \ t} + \omega \times v = \frac{d\Sigma}{dt}\text{grad } \Theta - \frac{d\Theta}{dt}\text{grad } \Sigma + \text{grad}\{\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Sigma \ \frac{\partial \Theta}{\partial t}\}. \tag{5.13}$$

De otro lado, se tienen que:

$$\omega = \text{grad } \Sigma \times \text{grad}\Theta \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \text{grad}(\frac{\partial \Sigma}{\partial t}) \times \text{grad}\Theta - \text{grad}(\frac{\partial \Theta}{\partial t}) \times \text{grad}\Sigma \tag{5.15}$$

$$\{v, \omega\} = \text{rot } (\omega \times v)$$

$$= \text{rot}\,((\text{grad}\Sigma \times \text{grad}\Theta) \times v)$$

$$= \text{rot}\,((\text{grad}\Sigma \cdot v)\text{grad}\Theta) - \text{rot}\,((\text{grad}\Theta \cdot v)\text{grad}\Sigma)$$

$$\{v, \omega\} = \text{grad } (v \cdot \text{grad}\Sigma) \times \text{grad}\Theta - \text{grad}(v \cdot \text{grad}\Theta) \times \text{grad}\Sigma \tag{5.16}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \{v, \omega\} = \{\text{grad}(v \cdot \text{grad}\Sigma) + \text{grad}(\frac{\partial \Sigma}{\partial t})\} \times \text{grad}\Theta$$

$$- \{\text{grad}(v \cdot \text{grad}\Theta) + \text{grad}(\frac{\partial \Theta}{\partial t})\} \times \text{grad}\Sigma$$

$$= \text{grad}\{v \cdot \text{grad}\Sigma + \frac{\partial \Sigma}{\partial t}\} \times \text{grad}\Theta - \text{grad}\{v \cdot \text{grad}\Theta + \frac{\partial \Theta}{\partial t}\} \times \text{grad}\Sigma$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \{v, \omega\} = \text{grad}\frac{d\Sigma}{dt} \times \text{grad}\Theta - \text{grad}\frac{d\Theta}{dt} \times \text{grad}\Sigma \tag{5.17}$$

Para simplificar el otro término de la ecuación (4.25), se procede así:

$$v = \text{grad } \xi \times \text{grad } \zeta$$

$$\omega = \text{rot}v$$

$$\omega = \text{rot}(\text{grad } \xi \times \text{grad } \zeta)$$

$$\omega = (\text{grad } \zeta\nabla)\text{grad } \xi - \text{grad}\zeta(\nabla.\text{grad}\xi) - (\text{grad } \xi.\nabla)\text{grad } \zeta + \text{grad } \xi(\nabla.\text{grad } \zeta)$$

$$\omega = \nabla^2 \ \zeta \ \text{grad } \xi - \nabla^2 \ \xi \ \text{grad } \zeta + \mathcal{P}(\zeta, \xi) \tag{5.18}$$

con

$$\mathcal{P}(\zeta, \xi) = (\text{grad } \zeta \nabla)\text{grad } \xi - (\text{grad } \xi . \nabla)\text{grad } \zeta,$$

aplicando el operador rotacional a (5.14) una y dos veces

$$\text{rot}\omega = \nabla^2 \Theta \text{grad}\Sigma - \nabla^2 \Sigma \text{grad}\Theta + \{\text{grad}\Theta, \text{grad}\Sigma\}$$

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot}\omega) &= \text{rot}(\nabla^2 \Theta \text{grad}\Sigma) - \text{rot}(\nabla^2 \Sigma \text{grad}\Theta) - \text{rot}\{\text{grad}\Theta, \text{grad}\Sigma\} \\ &= \text{grad}(\nabla^2 \Theta) \times \text{grad}\Sigma - \text{grad}(\nabla^2 \Sigma) \times \text{grad}\Theta + \text{rot}\{\text{grad}\Theta, \text{grad}\Sigma\} \qquad (5.19) \end{aligned}$$

# 6. Ecuaciones de la (MHD) para los potenciales de Euler

## 6.1. Configuración en tres dimensiones

Usando la identidad

$$J \times h = J \times (\text{grad}\psi \times \ \text{grad}\chi)$$

$$J \times h = (J \cdot \text{grad}\chi)\text{grad}\psi - (J \cdot \text{grad}\psi)\text{grad}\chi \qquad (6.1)$$

se encuentra que

$$\text{rot}((J \cdot \text{grad}\chi)\text{grad}\psi) = \text{grad}(J \cdot \text{grad}\chi) \times \ \text{grad}\psi$$

$$\text{rot}((J \cdot \text{grad}\psi)\text{grad}\chi) = \text{grad}(J \cdot \text{grad}\psi) \times \ \text{grad}\chi$$

$$\begin{aligned} \{h, J\} &= \text{rot}(J \times h) \\ &= \text{grad}(J \cdot \text{grad}\chi) \times \ \text{grad}\psi - \text{grad}(J \cdot \text{grad}\psi) \times \ \text{grad}\chi \qquad (6.2) \end{aligned}$$

en total se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial t} + \{v, \omega\} + \nu \mathrm{rot\ rot}\ \omega &= \mathrm{grad}\frac{d\Sigma}{dt} \times \mathrm{grad}\Theta - \mathrm{grad}\frac{d\Theta}{dt} \times \mathrm{grad}\Sigma \\ &\quad + \nu\{\mathrm{grad}\nabla^2\Theta \times \mathrm{grad}\Sigma - \mathrm{grad}\nabla^2\Sigma \times \mathrm{grad}\Theta \\ &\quad + \mathrm{rot}\ \mathcal{P}(\Theta, \Sigma) \\ &= \mathrm{grad}\{\frac{d\Sigma}{dt} - \nu\nabla^2\Sigma\} \times \mathrm{grad}\Theta - \mathrm{grad}\{\frac{d\Theta}{dt} - \nu\nabla^2\Theta\} \times \mathrm{grad}\Sigma \\ &\quad + \nu \mathrm{rot}\ \mathcal{P}(\Theta, \Sigma)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \{v, \omega\} + \nu \mathrm{rot\ rot}\ \omega = \mathrm{grad}(J \cdot \mathrm{grad}\chi) \times \mathrm{grad}\psi - \mathrm{grad}(J \cdot \mathrm{grad}\psi) \times \mathrm{grad}\chi. \tag{6.3}$$

Si se define

$$\mathcal{L}(\Sigma) = \frac{d\Sigma}{dt} - \nu\nabla^2\Sigma, \tag{6.4}$$

la ecuación (4.25) se transforma en

$$\begin{gathered}\mathrm{grad}\mathcal{L}(\Sigma) \times \mathrm{grad}\Theta - \mathrm{grad}\mathcal{L}(\Theta) \times \mathrm{grad}\Sigma + \nu \mathrm{rot}\mathcal{P}(\Theta, \Sigma) = \\ \mathrm{grad}(J \cdot \mathrm{grad}\chi) \times \mathrm{grad}\psi - \mathrm{grad}(J \cdot \mathrm{grad}\psi) \times \mathrm{grad}\chi.\end{gathered} \tag{6.5}$$

Se procede de forma análoga, para la ecuación (4.26)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \{v, h\} + \nu_m \mathrm{rot\ rot}\ h = -\frac{1}{k}\{h, J\}.$$

Obtenemos

$$
\begin{aligned}
h &= \text{grad}\psi \times \text{grad}\chi \\
\frac{\partial h}{\partial t} &= \text{grad}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) \times \text{grad}\chi - \text{grad}\left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right) \times \text{grad}\psi \\
\{v, h\} &= \text{grad}(v \cdot \text{grad}\psi) \times \text{grad}\chi - \text{grad}(v \cdot \text{grad}\chi) \times \text{grad}\psi \\
\text{rot} h &= \text{rot}(\text{grad}\psi \times \text{grad}\chi) \\
&= \nabla^2 \chi \text{grad}\psi - \nabla^2 \psi \text{grad}\chi + \mathcal{P}(\psi, \chi) \\
\text{rot rot } h &= \text{grad}\nabla^2 \times \text{grad}\psi - \text{grad}\nabla^2 \psi \times \text{grad}\chi + \text{rot } \mathcal{P}(\psi, \chi).
\end{aligned}
$$

Usando las anteriores identidades se cumple

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t} + \{v, h\} + \nu_m \text{ rot rot } h = {} & \text{grad}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) \times \text{grad}\chi - \text{grad}\left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right) \times \text{grad}\psi \\
& + \text{grad}(v \cdot \text{grad}\psi) \times \text{grad}\chi - \text{grad}(v \cdot \text{grad}\chi) \times \text{grad}\psi \qquad (6.6) \\
& + \nu_m \{\text{grad}(\nabla^2 \chi) \times \text{grad}\psi - \text{grad}(\nabla^2 \psi) \times \text{grad}\chi + \text{rot}\mathcal{P}(\psi, \chi).
\end{aligned}
$$

Haciendo

$$
\mathcal{H}(\psi) = \mathcal{L}_m(\psi) - \frac{1}{k}\text{grad}\psi \qquad \mathcal{L}_m(\psi) = \frac{d\psi}{dt} - \nu_m \nabla^2 \psi, \tag{6.7}
$$

y usando (6.2) y (4.26), se deduce

$$
\text{grad}\mathcal{H}(\psi) \times \text{grad}\chi - \text{grad}\mathcal{H}(\chi) \times \text{grad}\psi + \nu_m \text{rot}\{\text{grad}\chi, \text{grad}\psi\} = 0. \tag{6.8}
$$

Ahora expresando $J$ en función de los potenciales de Monge $\Sigma$, $\Theta$, $\psi$ y $\chi$,se obtiene

$$J = \text{rot}(\text{grad}\psi \times grad\chi)$$

$$J = \text{grad}(\chi \cdot \nabla)\text{grad}\psi - \text{grad}\chi\nabla\text{grad}\psi - (\text{grad}\psi \cdot \nabla)\text{grad}\chi + \text{grad}\psi \cdot \nabla\text{grad}\chi$$

$$= \text{grad}\psi \cdot \nabla^2\text{grad}\chi - \text{grad}\chi\nabla^2\psi + (\text{grad}\chi \cdot \nabla)\text{grad}\psi - (\text{grad}\psi \cdot \nabla)\text{grad}\chi$$

$$J = \text{grad}\psi \cdot \nabla^2\text{grad}\chi - \text{grad}\chi\nabla^2\psi + \{\text{grad}\chi, \text{grad}\psi\} \tag{6.9}$$

## 6.2. Campo Magnético de la Forma $h = \mathbf{grad}\psi \times e^\gamma$

La estructura de esta representación de la (MHD) permite facílmente la proyección sobre las superficies equipotenciales de Euler y sus normales, excepto quizás, para términos de dificíl manejo, como los que contienen rot $\mathcal{P}(\chi, \psi)$. Si $\Theta$ y $\chi$ son seleccionados de tal forma que que sean lineales en $x^i$, estos términos son cero.

Para estudiar este caso, tomamos $\chi = \gamma$ en un sistema general de coordenadas curvilíneas $(\alpha, \beta, \gamma)$ tal que ninguna de ellas en principio, es ignorada en los campos $v$ y $h$. Si también asumimos que $h$ es de la forma $h = \text{grad}\psi \times e^\gamma$, usando la definición de Jacobiano de las funciones $s, t, u$ en las variables $x, y, z$

$$\text{grad } s \cdot (\text{grad } t \times \text{grad } u) = \frac{\partial(s, t, u)}{\partial(x, y, z)}$$

se proyecta la ecuación (6.8) sobre $e^\gamma$

$$(\text{grad}\mathcal{H}(\psi) \times gra\chi) \cdot e^\gamma - (\text{grad}\mathcal{H}(\chi) \times \text{grad}\psi) \cdot e^\gamma = 0 \tag{6.10}$$

Implica

$$\text{grad}\mathcal{H}(\chi) \times gra\psi) \cdot e^\gamma = 0$$

$$[\mathcal{H}(\gamma, \psi] = 0 \tag{6.11}$$

de la misma forma se proyecta la misma ecuación (6.8) sobre grad$\psi$

$$(\text{grad}\mathcal{H}(\psi) \times \text{grad}\chi) \cdot \text{grad}\psi = 0$$

$$(\text{grad}\mathcal{H}(\psi) \times gra\psi) \cdot e^{\gamma} = 0$$

$$[\mathcal{H}(\psi, \psi)] = 0 \tag{6.12}$$

donde

$$[f, g] = \frac{\partial_(f, g)}{\partial(\alpha, \beta)} \tag{6.13}$$

expresión de las ecuaciones (6.11) y (6.12) es la notación simplificada del *Jacobiano* de las funciones $f$ y $g$ con respecto a las variables $\alpha$ y $\beta$ es decir

$$J(f, g) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \alpha} & \frac{\partial f}{\partial \beta} \\ \frac{\partial g}{\partial \alpha} & \frac{\partial g}{\partial \beta}. \end{vmatrix}$$

Si

$$\mathcal{H}(\psi) = F_1(\psi, \gamma), \qquad \mathcal{H}(\gamma) = F_2(\psi, \gamma) \tag{6.14}$$

donde $F_1$, $F_2$ son funciones arbitrarias. La primera ecuación determina el tiempo de evolución del flujo magnético para el campo de la forma $h = \text{grad}\psi \times e^{\gamma}$, con $\psi$ dependiendo de todas las coordenadas $(\alpha, \beta, \gamma)$. La segunda, por (6.7), nos da

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\gamma) &= \frac{d\gamma}{dt} - \nu_m \nabla^2 \gamma - \frac{J}{k} \cdot \text{grad } \gamma \\ &= \frac{d\gamma}{dt} - \nu_m \text{div } e^{\gamma} - \frac{J^{\gamma}}{k} \end{aligned} \tag{6.15}$$

con

$$\nabla^2 \gamma = \text{div } e^{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} g^{\gamma k}) \tag{6.16}$$

que establece una relación entre $v^\gamma$ y $\psi$.

Finalmente, tomando el producto vectorial de la ecuación (6.8) con $e_\gamma$, se encuentra que

$$(\mathrm{grad}\mathcal{H}(\psi) \times \mathrm{grad}\chi) \times e_\gamma - (\mathrm{grad}\mathcal{H}(\gamma) \times \mathrm{grad}\ \psi) \times e_\gamma = 0$$

$$(\mathrm{grad}\mathcal{H}(\psi) \cdot e_\gamma)e^\gamma - (e^\gamma \cdot e_\gamma)\mathrm{grad}\mathcal{H}(\psi) - (\mathrm{grad}\mathcal{H}(\gamma) \cdot e_\gamma)\mathrm{grad}\psi + (\mathrm{grad}\psi \cdot e_\gamma)\mathrm{grad}\mathcal{H}(\gamma) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}(\psi)}{\partial \gamma} e^\gamma - \mathrm{grad}\mathcal{H}(\psi) = \frac{\partial \mathcal{H}(\gamma)}{\partial \gamma}\mathrm{grad}\psi - \frac{\partial \psi}{\partial \gamma}\mathrm{grad}\mathcal{H}(\gamma) \tag{6.17}$$

Si se toma $\gamma$ constante en $F_1(\psi)$ entonces

$$\frac{\partial F_1(\psi)}{\partial \gamma} = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} = 0,$$

en este caso, la ecuación (6.17) se reduce a

$$-\mathrm{grad}F_1 = \frac{\partial F_2}{\partial \gamma}\mathrm{grad}\psi$$

equivalente a

$$-\Big(\frac{\partial F_1}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \frac{\partial F_1}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial \beta}\Big) = \frac{\partial F_2}{\partial \gamma}\mathrm{grad}\psi$$

$$-\frac{\partial F_1}{\partial \psi}\Big(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \frac{\partial \psi}{\partial \beta}\Big) = \frac{\partial F_2}{\partial \gamma}\mathrm{grad}\psi$$

$$-\frac{\partial F_1}{\partial \psi}\mathrm{grad}_{\alpha,\beta}\psi = \frac{\partial F_2}{\partial \gamma}\mathrm{grad}\psi,$$

ecuación que conduce a

$$\left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial \psi}\right)_\gamma + \left(\frac{\partial F_2}{\partial \gamma}\right)_\psi\right]\mathrm{grad}_{(\alpha,\beta)}\psi = 0,$$

es decir, se cumple

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial \psi}\right)_\gamma = -\left(\frac{\partial F_2}{\partial \gamma}\right)_\psi \tag{6.18}$$

donde $(\dfrac{\partial F_1}{\partial \psi})_\gamma$ indica la derivada de $F_1$ con respecto a $\psi$, haciendo $\gamma$ constante.

Si $F_1$ y $F_2$ son funciones de $\psi$ únicamente, entonces $F_1$ es constante.

## 6.3. Operadores Básicos

Para escribir la ecuación (6.14) en forma explícita, con $h = (h_\alpha, h_\beta, h_\gamma)$, y

$$\mathrm{rot} h = \left( \frac{\partial h_\gamma}{\partial \beta} - \frac{\partial h_\beta}{\partial \gamma}, \frac{\partial h_\alpha}{\partial \gamma} - \frac{\partial h_\gamma}{\partial \alpha}, \frac{\partial h_\beta}{\partial \alpha} - \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right),$$

se definen los siguientes operadores:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\psi) &= J \cdot \mathrm{grad}\psi \\
&= \mathrm{rot} h \cdot \mathrm{grad}\psi \\
&= \left( \frac{\partial h_\gamma}{\partial \beta} - \frac{\partial h_\beta}{\partial \gamma} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \left( \frac{\partial h_\alpha}{\partial \gamma} - \frac{\partial h_\gamma}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \left( \frac{\partial h_\beta}{\partial \alpha} - \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \\
&= \frac{\partial h_\gamma}{\partial \beta} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{\partial h_\beta}{\partial \gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{\partial h_\alpha}{\partial \gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} - \frac{\partial h_\gamma}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \left( \frac{\partial h_\beta}{\partial \alpha} - \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \\
&= \frac{\partial h_\gamma}{\partial \beta} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{\partial h_\gamma}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{\partial h_\alpha}{\partial \gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} - \frac{\partial h_\beta}{\partial \gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \left( \frac{\partial h_\beta}{\partial \alpha} - \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \\
\mathcal{S}(\psi) &= [\psi, h_\gamma] + \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial h_\alpha}{\partial \gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} - \frac{\partial h_\beta}{\partial \gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} J^\gamma \qquad (6.19)
\end{aligned}$$

donde $[\psi, h_\gamma]$ esta definido en (6.13).

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\psi) = j^\gamma &= \mathrm{rot}h \cdot e^\gamma = \nabla \times h \cdot e^\gamma = \nabla \cdot (h \times e^\gamma)\\ &= \mathrm{div}((\mathrm{grad}\psi \times e^\gamma) \times e^\gamma)\\ &= \mathrm{div}((\mathrm{grad}\psi \cdot e^\gamma)e^\gamma) - \mathrm{div}(g^{\gamma\gamma}\mathrm{grad}\psi)\\ &= \mathcal{G}(h_\gamma) - \frac{1}{g_{\gamma\gamma}}\mathcal{D}^2(\psi),\end{aligned} \tag{6.20}$$

donde

$$\mathcal{G}(h_\gamma) = \mathrm{div}(\frac{e_\gamma \times e^\gamma}{g_{\gamma\gamma}} h_\gamma) = \frac{1}{\sqrt{g}}\Big[\frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{g_{\gamma\beta}}{g_{\gamma\gamma}}h_\gamma) - \frac{\partial}{\partial\beta}(\frac{g_{\gamma\alpha}}{g_{\gamma\gamma}}h_\gamma)\Big] \tag{6.21}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{g_{\gamma\gamma}}\mathcal{D}^2\psi &= \mathrm{div}_{(\alpha,\beta)}\frac{1}{g_{\gamma\gamma}}\mathrm{grad}_{(\alpha,\beta)}\psi\\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\Big[\frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{g^{\alpha\alpha}\sqrt{g}}{g_{\gamma\gamma}}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \frac{g^{\alpha\beta}\sqrt{g}}{g_{\gamma\gamma}}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}) + \frac{\partial}{\partial\beta}(\frac{g^{\alpha\beta}\sqrt{g}}{g_{\gamma\gamma}}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \frac{g^{\beta\beta}\sqrt{g}}{g_{\gamma\gamma}}\frac{\partial\psi}{\partial\beta})\Big],\end{aligned} \tag{6.22}$$

expresión que se obtiene usando las componentes covariantes de $h$

$$\begin{aligned}h_\gamma &= (e^\gamma \times e_\gamma).\mathrm{grad}\ \psi = \frac{g_{\gamma\alpha}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\psi}{\partial\beta} - \frac{g_{\gamma\beta}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\\ h_{\alpha,\beta} &= (e^\gamma \times e_{\gamma,\beta})\mathrm{grad}\ \psi.\end{aligned} \tag{6.23}$$

Las expresiones $\mathrm{div}_{(\alpha,\beta)}$ y $\mathrm{grad}_{(\alpha,\beta)}$ indican la aplicación de estos operadores omitiendo los términos correspondientes al las componentes covariante y contravariante de $\gamma$ respectivamente.

## 6.4. Fuerza de Lorentz de la forma $J \times h = \mathbf{grad}\Pi$

Cuando $h = \mathrm{grad}\psi \times e^{\gamma}$, la ecuación (6.1) se reduce a

$$\begin{aligned}
J \times h &= J \times (\mathrm{grad}\psi \times e^{\gamma}) \\
&= (J \cdot e^{\gamma})\mathrm{grad}\psi - (J \cdot \mathrm{grad}\psi)e^{\gamma} \\
&= \mathcal{J}(\psi)\mathrm{grad}\psi - \mathcal{S}(\psi)e^{\gamma} \\
\mathrm{rot}(J \times h) &= \mathrm{rot}\{(J \cdot e^{\gamma})\mathrm{grad}\psi\} - \mathrm{rot}\{(J \cdot \mathrm{grad}\psi)e^{\gamma}\} \\
&= \mathrm{grad}(J.e^{\gamma}) \times \mathrm{grad}\psi + (J.e^{\gamma}) \times \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\psi) \\
&\quad \text{-}\mathrm{grad}(J \cdot \mathrm{grad}\phi) \times e^{\gamma} + (J \cdot \mathrm{grad}\phi)\mathrm{rot}e^{\gamma} \\
&= \mathrm{grad}(J \cdot e^{\gamma}) \times \mathrm{grad}\phi - \mathrm{grad}(J \cdot \mathrm{grad}\psi) \times e^{\gamma} + (J \cdot \mathrm{grad}\psi)\mathrm{rot}e^{\gamma} \\
&= \mathrm{grad}(J \cdot e^{\gamma}) \times \mathrm{grad}\psi - \mathrm{grad}(J \cdot \mathrm{grad}\psi) \times e^{\gamma} \\
&= \mathrm{grad}\mathcal{J}(\psi) \times \mathrm{grad}\psi - \mathrm{grad}\mathcal{S}(\psi) \times e^{\gamma}. \qquad (6.24)
\end{aligned}$$

Si además el campo magnético esta configurado de tal manera que la ecuación (4.28) se cumpla, su rotacional sea cero, se proyecta la ecuación (6.24) sobre $e^{\gamma}$, para obtener

$$\begin{aligned}
&\big(\mathrm{grad}\mathcal{J}(\psi) \times \mathrm{grad}\psi\big) \cdot e^{\gamma} = \big(\mathrm{grad}\mathcal{S}(\psi) \times e^{\gamma}\big) \cdot e\gamma \\
&\big(\mathrm{grad}\mathcal{J}(\psi) \times \mathrm{grad}\psi\big) \cdot e^{\gamma} = 0,
\end{aligned}$$

y proyectando sobre grad$\psi$, la misma ecuación (6.24)

$$\big(\mathrm{grad}\mathcal{J}(\psi)\times\mathrm{grad}\psi\big)\cdot\mathrm{grad}\psi=\big(\mathrm{grad}\mathcal{S}(\psi)\times e^{\gamma}\big)\cdot\mathrm{gard}\psi$$

$$\big(\mathrm{grad}\mathcal{S}(\psi)\times e^{\gamma}\big)\cdot\mathrm{gard}\psi=0$$

$$\Big(\mathrm{grad}\mathcal{S}(\psi)\times\mathrm{gard}\psi\Big)\cdot e^{\gamma},=0$$

se obtiene así las siguientes identidades

$$[\mathcal{J}(\psi),\psi]=0 \qquad \mathcal{J}(\psi)=f_1(\psi,\gamma),$$

$$[\mathcal{S}(\psi),\psi]=0 \qquad \mathcal{S}(\psi)=f_2(\psi,\gamma). \tag{6.25}$$

Por otro lado, la igualdad que se obtienen al multiplicar la ecuación (6.24), producto cruz, con $e^{\gamma}$ es

$$\big(\mathrm{grad}\mathcal{J}(\psi)\times\mathrm{grad}\psi\big)\times e^{\gamma}=\big(\mathrm{grad}\mathcal{S}(\psi)\times e^{\gamma}\big)\times e^{\gamma}$$

$$\big(\mathrm{grad}\mathcal{J}(\psi)\cdot e_{\gamma}\big)\mathrm{grad}\psi-\big(\mathrm{grad}\psi\cdot e^{\gamma}\big)\mathrm{grad}\mathcal{J}\psi=\big(\mathrm{grad}\mathcal{S}(\psi)\cdot e_{\gamma}\big)e^{\gamma}-\big(e^{\gamma}\cdot e_{\gamma}\big)\mathrm{grad}\mathcal{S}(\psi)$$

$$\frac{\partial f_1(\psi)}{\partial\gamma}\mathrm{grad}\psi-\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}\mathrm{grad}f_1(\psi)=\frac{\partial f_2(\psi)}{\partial\gamma}e^{\gamma}-\mathrm{grad}f_2(\psi)$$

tomando $\gamma$ constante

$$\frac{\partial f_1(\psi)}{\partial\gamma}\mathrm{grad}_{\alpha\beta}\psi=-\mathrm{grad}f_2(\psi)$$

$$\frac{\partial f_1(\psi)}{\partial\gamma}\mathrm{grad}_{\alpha\beta}\psi=-\Big(\frac{\partial f_2}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha},\frac{\partial f_2}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\Big)$$

$$\frac{\partial f_1(\psi)}{\partial\gamma}\mathrm{grad}_{\alpha\beta}\psi=-\frac{\partial f_2}{\partial\psi}\mathrm{grad}_{\alpha\beta}\psi$$

equivalente a

$$\left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial \psi}\right)_\gamma + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma}\right)_\psi\right] \mathrm{grad}_{\alpha,\beta}\psi = 0,$$

luego se debe cumplir

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial \psi}\right)_\gamma = -\left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma}\right)_\psi . \tag{6.26}$$

Si $f_1$ y $f_2$ son funciones de la variable $\psi$ únicamente, $f_2$ es contante.

# 7. Reducción de las ecuaciones (MHD) sin una coordenada

En está sección presentamos las ecuaciones generales del fluido (MHD) en coordenadas curvilíneas $(\alpha, \beta, \gamma)$ cuando una de ellas es ignorada, por ejemplo $\gamma$.
Consideremos primero un conjunto de coordenadas no ortogonales, el cual incluye el caso de coordenadas helicoidales con simetría tanto rotacional como traslacional.

## 7.1. Coordenadas Curvilíneas arbitrarias ignorando $\gamma$ en $g_{ij}$

Para obtener una representación completa del campo de velocidades, a partir de la ecuación (5.2) se toma $\xi = \xi(\alpha, \beta)$ y $\zeta = \gamma + m(\alpha, \beta)$ como potenciales de Euler, donde $m$ es una función arbitraria de $\alpha$ y $\beta$ únicamente, por tanto:

$$\mathrm{grad}\xi = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}, \frac{\partial \xi}{\partial \beta}, 0\right)$$

$$\mathrm{grad}\zeta = \left(\frac{\partial m}{\partial \alpha}, \frac{\partial m}{\partial \beta}, 1\right)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\xi \times \mathrm{grad}\zeta &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial \beta}, -\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}, \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\frac{\partial m}{\partial \beta} - \frac{\partial \xi}{\partial \beta}\frac{\partial m}{\partial \alpha}\right) \\ &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial \beta}, -\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}, 0\right) + (0, 0, \frac{1}{\sqrt{g}}[\xi, m])\end{aligned}$$

$$v = \mathrm{grad}\xi \times e^{\gamma} + v^{\gamma} e_{\gamma} \tag{7.1}$$

$$v^{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g}}[\xi, m] \tag{7.2}$$

Donde $[\xi, m]$ es el Jacobiano definido en (6.13).
Cabe anotar que estas funciones dependen del tiempo pero no lo escribimos explícitamente.
Se obtiene de (7.1) una representación de (5.8) donde $\xi$ es la función corriente para la componente de la velocidad del fluido contenido en la superficie $\gamma = const.$, donde existe una componente de velocidad $v^{\gamma}$ a lo largo de la línea de la coordenada $\gamma$
En este punto se puede trabajar directamente con $v^{\gamma}$ dejando $m$ de lado como cantidad secundaria.
Se debe recalcar que solo hay tres selecciones para la línea $\gamma$

1. Línea paralela al eje $z$, simetría traslacional.
2. Círculos sobre planos normales a $z$ con centro sobre el eje $z$, simtería rotacional.
3. Hélices con ecuación $a\Theta - z = const.$, $r = const.$ con longitud del paso $2\pi a$, usando coordenadas cilíndricas para el caso de simetría rotacional traslacional.

Ahora, calculando $\omega = \mathrm{rot}(v_i e^i)$ y, usando la ecuación (6.20), se obtiene

$$\begin{aligned}
\omega &= \mathrm{rot}(v) \\
&= \left(\frac{\partial v_\gamma}{\partial \beta} - \frac{\partial v_\beta}{\partial \gamma}, \frac{\partial v_\alpha}{\partial \gamma} - \frac{\partial v_\gamma}{\partial \alpha}, 0\right) + \omega^\gamma e_\gamma \\
&= \left(\frac{\partial v_\gamma}{\partial \beta}, -\frac{\partial v_\gamma}{\partial \alpha}, 0\right) + \omega^\gamma e_\gamma \\
\omega &= \mathrm{grad} v_\gamma \times e^\gamma + \big(\mathcal{G}(v_\gamma) - \frac{1}{g_{\gamma\gamma}} \mathcal{D}^2 \xi\big) e_\gamma
\end{aligned} \tag{7.3}$$

donde el operador $\mathcal{G}$ y $\mathcal{D}$ han sido definidos en las ecuaciones (6.21) y (6.22), además de

$$\begin{aligned}
v_\gamma &= (\mathrm{grad}\xi \times e^\gamma).e_\gamma + v_\gamma g^{\gamma\gamma} \\
v_\gamma &= g_{\gamma\gamma} v^\gamma - (e_\gamma \times e^\gamma).\mathrm{grad}\xi
\end{aligned} \tag{7.4}$$

se obtiene, una relación entre los potenciales de Euler de $v$ y $\omega$. De hecho, $v_\gamma = \sum(\alpha, \beta)$ es el potencial $\Sigma$, introducido en la ecuación (5.4). Igualmente $\omega^\gamma$ dado en la ecuación (7.3), está relacionado con $\Theta$, de la misma forma que $v^\gamma$ está relacionada con $\zeta$, esto es $\omega^\gamma = \frac{1}{\sqrt{g}}[\Sigma, n]$, $\Theta = \gamma + n(\alpha, \beta)$, con $n$ una función arbitraria.
Siguiendo la estructura de las ecuaciones (7.3) y (7.4), la relación entre $\omega$ y rot $\omega$ esta dada por

$$\mathrm{rot}\ \omega = \mathrm{grad}\ \omega_\gamma \times e^\gamma + (\mathcal{G}(w_\gamma) - \frac{1}{g_{\gamma\gamma}} \mathcal{D}^2 v_\gamma) e_\gamma. \tag{7.5}$$

Multiplicando (7.3) por $e_\gamma$, producto punto, se encuentra que

$$\begin{aligned}
\omega_\gamma &= (\mathrm{grad} v_\gamma \times e^\gamma) \cdot e_\gamma + (\mathcal{G}(\omega_\gamma) - \frac{1}{g_{\gamma\gamma}}\mathcal{D}^2(\xi))e_\gamma \cdot e_\gamma \\
&= (e^\gamma \times e_\gamma) \cdot \mathrm{grad} v_\gamma + g_{\gamma\gamma}\mathcal{G}(v_\gamma) - \mathcal{D}^2(\xi) \\
&= \frac{g_{\gamma\gamma}}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{g_{\gamma\beta}}{g_{\gamma\gamma}}v_\gamma\right) - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{g_{\gamma\alpha}}{g_{\gamma\gamma}}v_\gamma\right)\right] - \mathcal{D}^2(\xi) + (e^\gamma \times e_\gamma) \cdot \mathrm{grad} v_\gamma \\
&= \frac{g_{\gamma\gamma}}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{g_{\gamma\beta}}{g_{\gamma\gamma}}\right)v_\gamma + \frac{g_{\gamma\beta}}{g_{\gamma\gamma}}\frac{\partial v_\gamma}{\partial\alpha} - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{g_{\gamma\alpha}}{g_{\gamma\gamma}}\right)v_\gamma - \frac{g_{\gamma\alpha}}{g_{\gamma\gamma}}\frac{\partial v_\gamma}{\partial\beta}\right] \\
&\quad - \mathcal{D}^2(\xi) + (e^\gamma \times e_\gamma).\mathrm{grad} v_\gamma \\
&= \frac{g_{\gamma\gamma}}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{g_{\gamma\beta}}{g_{\gamma\gamma}}\right) - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{g_{\gamma\alpha}}{g_{\gamma\gamma}}\right)\right]v_\gamma - \frac{1}{\sqrt{g}}\left[g_{\gamma\alpha}\frac{\partial v_\gamma}{\partial\beta} - g_{\gamma\beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial\alpha}\right] \\
&\quad - \mathcal{D}^2(\xi) + (e^\gamma \times e_\gamma).\mathrm{grad} v_\gamma \\
\omega_\gamma &= -\mathcal{D}^2\xi + v_\gamma\Gamma \qquad (7.6)
\end{aligned}$$

En la deducción anterior se debe tener en cuenta que

$$\big(e^\gamma \times e_\gamma\big) \cdot \mathrm{grad} v_\gamma = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[g_{\gamma\alpha}\frac{\partial v_\gamma}{\partial\beta} - g_{\gamma\beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial\alpha}\right].$$

También cabe anotar que la componente $\Gamma$ definida en (7.7) es característica de las métricas no ortogonales,

$$\Gamma = \frac{g_{\gamma\gamma}}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{g_{\beta\gamma}}{g_{\gamma\gamma}}\right) - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{g_{\alpha\gamma}}{g_{\gamma\gamma}}\right)\right] \qquad (7.7)$$

es decir, $\Gamma = g_{\gamma\gamma}\mathcal{G}(1)$. Iterando este procedimiento se obtiene

$$\mathrm{rot}\ \ \mathrm{rot}\ \omega = \mathrm{grad}\ (\mathrm{rot}\ \ \omega)_\gamma \times e^\gamma + (\mathrm{rot}\ \ \mathrm{rot}\ \ \omega)^\gamma e^\gamma, \qquad (7.8)$$

por tanto, se puede escribir

$$
\begin{aligned}
(\text{rot } \omega)_\gamma &= (\text{grad } \omega_\gamma \times e^\gamma)\,.e_\gamma + g_{\gamma\gamma}\mathcal{G}(w_\gamma) - \mathcal{D}^2 v_\gamma \\
&= (e^\gamma \times e_\gamma)\text{grad } \omega_\gamma + g_{\gamma\gamma}\mathcal{G}(\omega_\gamma) - \mathcal{D}^2 v_\gamma \\
&= \frac{g_{\gamma\gamma}}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{g_{\gamma\beta}}{g_{\gamma\gamma}}\omega_\gamma\right) - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{g_{\gamma\alpha}}{g_{\gamma\gamma}}\omega_\gamma\right)\right] - \mathcal{D}^2(v_\gamma) + (e^\gamma \times e_\gamma)\text{grad } \omega_\gamma \\
&= \frac{g_{\gamma\gamma}}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{g_{\gamma\beta}}{g_{\gamma\gamma}}\right)\omega_\gamma + \frac{g_{\gamma\beta}}{g_{\gamma\gamma}}\left(\frac{\partial\omega_\gamma}{\partial\alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{g_{\gamma\alpha}}{g_{\gamma\gamma}}\right)\omega_\gamma - \frac{g_{\gamma\alpha}}{g_{\gamma\gamma}}\left(\frac{\partial\omega_\gamma}{\partial\beta}\right)\right] \\
&\quad - \mathcal{D}^2 v_\gamma + (e^\gamma \times e_\gamma)\text{grad } \omega_\gamma \\
&= \frac{g_{\gamma\gamma}}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{g_{\gamma\beta}}{g_{\gamma\gamma}}\right) - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{g_{\gamma\alpha}}{g_{\gamma\gamma}}\right)\right]\omega_\gamma + \frac{g_{\gamma\gamma}}{\sqrt{g}}\left[\frac{g_{\gamma\beta}}{g_{\gamma\gamma}}\left(\frac{\partial\omega_\gamma}{\partial\alpha}\right) - \frac{g_{\gamma\alpha}}{g_{\gamma\gamma}}\left(\frac{\partial\omega_\gamma}{\partial\beta}\right)\right] \\
&\quad - \mathcal{D}^2 v_\gamma + (e^\gamma \times e_\gamma)\text{grad } \omega_\gamma \\
&= \Gamma(-\mathcal{D}^2\xi + v_\gamma\Gamma) - \left[\frac{g_{\gamma\alpha}}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial\omega_\gamma}{\partial\beta}\right) - \frac{g_{\gamma\beta}}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial\omega_\gamma}{\partial\alpha}\right)\right] - \mathcal{D}^2 v_\gamma + (e^\gamma \times e_\gamma)\text{grad } \omega_\gamma \\
(\text{rot } \omega)_\gamma &= -\mathcal{D}^2 v_\gamma + (v_\gamma\Gamma - \mathcal{D}^2\xi)\Gamma. \qquad (7.9)
\end{aligned}
$$

finalmente

$$
\begin{aligned}
(\text{rot rot } \omega)^\gamma &= \mathcal{G}((\text{rot } \omega)_\gamma) - \frac{1}{g_{\gamma\gamma}}\mathcal{D}^2\omega_\gamma \\
&= \mathcal{G}\left(-\mathcal{D}^2 v_\gamma + (v_\gamma\Gamma - \mathcal{D}^2\xi)\Gamma\right) - \frac{1}{g_{\gamma\gamma}}\mathcal{D}^2(-\mathcal{D}^2\xi + v_\gamma\Gamma) \\
(\text{rot rot } \omega)^\gamma &= \mathcal{G}\left(-\mathcal{D}^2 v_\gamma + (v_\gamma\Gamma - \mathcal{D}^2\xi)\Gamma\right) + \frac{1}{g_{\gamma\gamma}}\mathcal{D}^2\mathcal{D}^2\xi - \frac{\Gamma}{g_{\gamma\gamma}}\mathcal{D}^2 v_\gamma. \qquad (7.10)
\end{aligned}
$$

Para escribir las ecuaciones (4.25) y (4.26) se necesita la forma explícita de la derivada con respecto al tiempo del flujo convectivo, calculada en la ecuación (5.17), que es

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \{v, \omega\} = \text{grad }\frac{d\Sigma}{dt} \times \text{grad }\Theta - \text{grad }\frac{d\Theta}{dt} \times \text{grad }\Sigma, \tag{7.11}$$

como

$$v_\gamma = \Sigma(\alpha, \beta) \qquad \Theta = \gamma + n(\alpha, \beta)$$

$$\text{grad }\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \alpha}, \frac{\partial \Sigma}{\partial \beta}, 0\right)$$

$$\text{grad }\Theta = \left(\frac{\partial n}{\partial \alpha}, \frac{\partial n}{\partial \beta}, 1\right)$$

$$\text{grad }\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial n}{\partial \alpha}, \frac{\partial n}{\partial \beta}, 1\right)$$

$$\begin{aligned} \text{grad }\frac{d\Sigma}{dt} \times \text{grad }\Theta &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \alpha}, \frac{\partial \Sigma}{\partial \beta}, 0\right) + \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{dv_\gamma}{dt}, n\right]\right) \\ &= \text{grad }\frac{dv_\gamma}{dt} \times e^\gamma + \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{dv_\gamma}{dt}, n\right] e_\gamma \end{aligned} \tag{7.12}$$

$$\begin{aligned} \text{grad }\frac{d\Theta}{dt} \times \text{grad }\Sigma &= \left(\frac{\partial^2 n}{\partial t \partial \alpha}, \frac{\partial^2 n}{\partial t \partial \beta}, 1\right) \times \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \alpha}, \frac{\partial \Sigma}{\partial \beta}, 0\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{dn}{dt}, v_\gamma\right] e_\gamma \end{aligned} \tag{7.13}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega^\gamma}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_\gamma}{\partial \alpha}\frac{\partial n}{\partial \beta} - \frac{\partial v_\gamma}{\partial \beta}\frac{\partial n}{\partial \alpha}\right) \\ &= \frac{\partial^2 v_\gamma}{\partial t \partial \alpha}\frac{\partial n}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 n}{\partial t \partial \beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 v_\gamma}{\partial t \partial \beta}\frac{\partial n}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 n}{\partial t \partial \alpha}\frac{\partial v_\gamma}{\partial \beta} \\ &= \frac{\partial^2 v_\gamma}{\partial t \partial \alpha}\frac{\partial n}{\partial \beta} - \frac{\partial^2 v_\gamma}{\partial t \partial \beta}\frac{\partial n}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 n}{\partial t \partial \beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 n}{\partial t \partial \alpha}\frac{\partial v_\gamma}{\partial \beta} \\ &= \left[\frac{dv_\gamma}{dt}, n\right] + \left[v_\gamma, \frac{dn}{dt}\right] - \frac{1}{\sqrt{g}}\left[v^\gamma, v_\gamma\right], \end{aligned} \tag{7.14}$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \text{grad } \frac{dv_\gamma}{dt} \times e^\gamma + \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \frac{dv_\gamma}{dt}, n \right] e_\gamma - \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ v^\gamma + \frac{dn}{dt}, v_\gamma \right] e_\gamma. \tag{7.15}$$

Usando la identidad $[a,b][c,d] - [a,c][b,d] = [a,d][c,d]$,( note que $[v_\gamma, n] = \frac{1}{\sqrt{g}}\omega^\gamma$), se halla que

$$\frac{D\omega}{Dt} = \text{grad } \frac{dv_\gamma}{dt} \times e^\gamma + \left( \frac{d\omega^\gamma}{dt} - \frac{1}{\sqrt{g}}[v^\gamma, v_\gamma] \right) e_\gamma. \tag{7.16}$$

Siguiendo las mismas reglas, las fórmulas para el campo magnético son deducidas partiendo del vector potencial

$$a = \text{grad } A \times e^\gamma + a^\gamma e_\gamma, \tag{7.17}$$

donde $A(\alpha, \beta)$, es una función arbitraria. Así se puede escribir

$$h = \text{grad } \psi \times e^\gamma + \left( \mathcal{G}(\psi) - \frac{1}{g_{\gamma\gamma}} \mathcal{D}^2 A \right) e_\gamma \tag{7.18}$$

donde

$$\psi(\alpha, \beta) = a_\gamma = g_{\gamma\gamma} a^\gamma - (e_\gamma \times e^\gamma).\text{grad } A. \tag{7.19}$$

Para la corriente eléctrica se tiene

$$J = \text{grad } h_\gamma \times e^\gamma + \left( \mathcal{G}(h_\gamma) - \frac{1}{g_{\gamma\gamma}} \mathcal{D}^2 \psi \right) e_\gamma, \tag{7.20}$$

con las relaciones

$$h_\gamma = -\mathcal{D}^2 A + \psi\Gamma, \qquad J_\gamma = -\mathcal{D}^2\psi + h_\gamma\Gamma. \tag{7.21}$$

Igual que (7.11), se puede deducir

$$\frac{Dh}{Dt} = \text{grad } \frac{d\psi}{dt} \times e^\gamma + \left( \frac{dh^\gamma}{dt} - \frac{1}{\sqrt{g}}[\nu^\gamma, \psi] \right) e_\gamma. \tag{7.22}$$

Se da ahora una expresión para para el rotacional de la fuerza de Lorentz,

$$\{h, J\} = \text{grad}\ \left(\frac{1}{\sqrt{g}}[h_\gamma, \psi]\right) \times e^\gamma + \frac{1}{\sqrt{g}}\left([j^\gamma, \psi] - [h^\gamma, h_\gamma]\right) e_\gamma. \tag{7.23}$$

Así las ecuaciones (MHD) pueden ser escritas en detalle, dado que todos los términos que intervienen están divididos en una componente tendida sobre la superficie $\gamma$, y otra paralela a $e_\gamma$. Se efectua el producto escalar con $e^\gamma$ y el producto vectorial con $e_\gamma$ en las ecuaciones (4.25), (4.26), y se hacen las siguientes reducciones.

$$\frac{D\omega}{Dt} = \text{grad}\ \frac{dv_\gamma}{dt} \times e^\gamma + \big(\frac{d\omega^\gamma}{dt} - \frac{1}{\sqrt{g}}[v^\gamma, v_\gamma]\big)e_\gamma \tag{7.24}$$

$$(\text{rot rot }(\omega))^\gamma = \mathcal{G}\big(-\mathcal{D}^2 v_\gamma + (v_\gamma - \mathcal{D}^2\xi)\Gamma\big) + \frac{1}{g_{\gamma\gamma}}\mathcal{D}^2\mathcal{D}^2\xi - \frac{\Gamma}{g_{\gamma\gamma}}\mathcal{D}^2 v_\gamma \tag{7.25}$$

$$\{h, J\} = \text{grad}\ \left(\frac{1}{\sqrt{g}}[h_\gamma, \psi]\right) \times e^\gamma + \frac{1}{\sqrt{g}}\Big([j^\gamma, \psi] - [h^\gamma, h_\gamma]\Big)e_\gamma \tag{7.26}$$

$$\begin{aligned} \frac{D\omega}{Dt}\cdot e^\gamma &= \frac{d\omega^\gamma}{dt} - \frac{1}{\sqrt{g}}[v^\gamma, v_\gamma] \\ &= \frac{d}{dt}\Big(\mathcal{G}(v_\gamma) - \frac{1}{g_{\gamma\gamma}}\mathcal{D}^2\xi\Big) - \frac{1}{\sqrt{g}}[v^\gamma, v_\gamma] \end{aligned} \tag{7.27}$$

$$\{h, J\}\cdot e^\gamma = \frac{1}{\sqrt{g}}\Big([j^\gamma, \psi] - [h^\gamma, h_\gamma]\Big), \tag{7.28}$$

así la ecuación (4.25) se transforma en

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathcal{G}(v_\gamma) - \frac{1}{g_{\gamma\gamma}}\mathcal{D}^2\xi\Big) - \frac{1}{\sqrt{g}}[v^\gamma, v_\gamma] + \nu\Big(\mathcal{G}\big(-\mathcal{D}^2 v_\gamma + (v_\gamma\Gamma - \mathcal{D}^2\xi)\Gamma\big) + \frac{1}{g_{\gamma\gamma}}\mathcal{D}^2\mathcal{D}^2\xi - \frac{\Gamma}{g_{\gamma\gamma}}\mathcal{D}^2 v_\gamma\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\Big([j^\gamma, \psi] - [h^\gamma, h_\gamma]\Big). \end{aligned} \tag{7.29}$$

Para el producto externo o cruz con $e_\gamma$ se tiene:

$$\frac{D\omega}{Dt}\times e^\gamma = \Big(\text{grad }\frac{dv_\gamma}{dt}\times e^\gamma\Big)\times e_\gamma = \Big(\text{grad }\frac{dv_\gamma}{dt}\cdot e^\gamma\Big)e_\gamma - \Big(\text{grad }\frac{dv_\gamma}{dt}\cdot e_\gamma\Big)e^\gamma$$

$$\begin{aligned}\Big(\text{rot rot }\omega\Big)\times e_\gamma &= \Big(\text{grad }(\text{rot }\omega)_\gamma\times e^\gamma\Big)\times e_\gamma\\ &= \Big(\text{grad }(\text{rot }\omega)_\gamma\cdot e^\gamma\Big)e_\gamma - \Big(\text{grad }(\text{rot }\omega)_\gamma\cdot e_\gamma\Big)e^\gamma\\ \{h,J\}\times e_\gamma &= \Big(\text{grad }\big(\frac{1}{\sqrt{g}}[h_\gamma,\psi]\big)\times e^\gamma\Big)\times e_\gamma\\ &= \Big(\text{grad }\big(\frac{1}{\sqrt{g}}[h_\gamma,\psi]\big)\cdot e^\gamma\Big)e_\gamma - \Big(\text{grad }\big(\frac{1}{\sqrt{g}}[h_\gamma,\psi]\big)\cdot e_\gamma\Big)e^\gamma.\end{aligned} \tag{7.30}$$

Usando (7.30) la ecuación (4.25) se transforma en

$$\Big(\text{grad }\frac{dv_\gamma}{dt}\cdot e^\gamma\Big)e_\gamma - \Big(\text{grad }\frac{dv_\gamma}{dt}\cdot e_\gamma\Big)e^\gamma + \nu\{\Big(\text{grad }(\text{rot }\omega)_\gamma\cdot e^\gamma\Big)e_\gamma - \Big(\text{grad }(\text{rot }\omega)_\gamma\cdot e_\gamma\Big)e^\gamma\}$$

$$-\Big(\text{grad }\big(\frac{1}{\sqrt{g}}[h_\gamma,\psi]\big)\cdot e^\gamma\Big)e_\gamma - \Big(\text{grad }\big(\frac{1}{\sqrt{g}}[h_\gamma,\psi]\big)\cdot e_\gamma\Big)e^\gamma = 0$$

$$\{\text{grad }\frac{dv_\gamma}{dt}\cdot e^\gamma + \nu\text{grad }(\text{rot }\omega)_\gamma\cdot e^\gamma - \text{grad }\big(\frac{1}{\sqrt{g}}[h_\gamma,\psi]\big)\cdot e^\gamma\}e_\gamma$$

$$-\{\text{grad }\frac{dv_\gamma}{dt}.e_\gamma + \nu\text{grad }(\text{rot }\omega)_\gamma\cdot e_\gamma - \text{grad }\big(\frac{1}{\sqrt{g}}[h_\gamma,\psi]\big)\cdot e_\gamma\}e^\gamma = 0$$

$$\{\text{grad }\{\frac{dv_\gamma}{dt} + \nu(\text{rot }\omega)_\gamma - \big(\frac{1}{\sqrt{g}}[h_\gamma,\psi]\big)\}\cdot e^\gamma\}e_\gamma$$

$$-\{\text{grad }\{\frac{dv_\gamma}{dt} + \nu(\text{rot }\omega)_\gamma - \big(\frac{1}{\sqrt{g}}[h_\gamma,\psi]\big)\}\cdot e_\gamma\}e^\gamma = 0$$

que implica

$$\frac{dv_\gamma}{dt} + \nu(\text{rot }\omega)_\gamma = \frac{1}{\sqrt{g}}[h_\gamma,\psi] + f_1(t)$$

Usando la ecuación (7.9) se obtiene

$$\frac{dv_\gamma}{dt} + \nu\Big( - \mathcal{D}^2 v_\gamma + (v_\gamma \Gamma - \mathcal{D}^2 \xi)\Gamma\Big) = \frac{1}{\sqrt{g}}[h_\gamma, \psi] + f_1(t)$$

Realizando operaciones análogas en la ecuación (4.26) se obtiene:

$$\frac{Dh}{Dt} = \text{grad } \frac{d\psi}{dt} \times e^\gamma + \Big(\frac{dh^\gamma}{dt} - \frac{1}{\sqrt{g}}[v^\gamma, \psi]\Big)e_\gamma$$

$$\begin{aligned}
\text{rot rot}h &= \text{grad } ((\text{rot } h)_\gamma) \times e^\gamma + (\text{rot rot } h)^\gamma e_\gamma \\
(\text{rot roth})^\gamma &= \mathcal{G}((\text{rot } h)_\gamma) - \frac{1}{g_{\gamma\gamma}}\mathcal{D}^2 h_\gamma \\
(\text{rot rot}h)^\gamma &= \mathcal{G}(\mathcal{D}^2\psi + h_\gamma\Gamma) - \frac{1}{g_{\gamma\gamma}}\mathcal{D}^2 h_\gamma
\end{aligned} \tag{7.31}$$

multiplicando (7.31), producto punto, por $e^\gamma$ se obtiene

$$\frac{dh^\gamma}{dt} - \frac{1}{\sqrt{g}}[v^\gamma, \psi] + \nu_m\Big(\mathcal{G}(-\mathcal{D}^2\psi + h_\gamma\Gamma) - \frac{1}{g_{\gamma\gamma}}\mathcal{D}^2 h_\gamma\Big) = \frac{1}{k\sqrt{g}}\Big([j^\gamma, \psi] - [h^\gamma, h_\gamma]\Big)$$

Ahora multiplicando (7.31), producto cruz, con $e_\gamma$

$$\begin{aligned}
&\Big(\text{grad } \frac{d\psi}{dt} \times e^\gamma\Big) \times e_\gamma + \nu_m\Big(\text{grad (rot })_\gamma \times e^\gamma\Big) \times e_\gamma \\
&= -\frac{1}{k}\{\text{grad } \Big(\frac{1}{\sqrt{g}}[h_\gamma, \psi]\Big) \times e^\gamma\} \times e_\gamma
\end{aligned} \tag{7.32}$$

equivalente a

$$\{\{\text{grad } \frac{d\psi}{dt} + \nu_m \text{grad (rot } h)_\gamma + \frac{1}{k}\text{grad } \Big(\frac{1}{\sqrt{g}}[h_\gamma, \psi]\Big)\} \times e^\gamma\} \times e_\gamma = 0$$

$$\text{grad } \frac{d\psi}{dt} + \nu_m \text{grad (rot } h)_\gamma + \frac{1}{k}\text{grad } \Big(\frac{1}{\sqrt{g}}[h_\gamma, \psi]\Big) = 0$$

$$\frac{d\psi}{dt} + \nu_m(\text{rot } h)_\gamma = -\frac{1}{k\sqrt{g}}[h_\gamma, \psi] + f_2(t)$$

$$\frac{d\psi}{dt} + \nu_m\big(h_\gamma\Gamma - \mathcal{D}^2\psi\big) = -\frac{1}{k\sqrt{g}}[h_\gamma, \psi] + f_2(t)$$

En resumen se encuentra el siguiente sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas básicas $\xi, \nu_\gamma, \psi, \quad y \quad h_\gamma$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{G}(v_\gamma) - \frac{1}{g_{\gamma\gamma}}\mathcal{D}^2\xi\right) - \frac{1}{\sqrt{g}}[v^\gamma, v_\gamma] + \nu\left(\frac{1}{g_{\gamma\gamma}}\mathcal{D}^2\mathcal{D}^2\xi - \frac{\Gamma}{g_{\gamma\gamma}}\mathcal{D}^2 v_\gamma\right)$$

$$+\nu\;\mathcal{G}\left(-\mathcal{D}^2 v_\gamma + \Gamma\left(v_\gamma\Gamma - \mathcal{D}^2\xi\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{g}}\left([j^\gamma, \psi] - [h^\gamma, h_\gamma]\right) \tag{7.33}$$

$$\frac{\mathrm{d}h^\gamma}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{\sqrt{g}}[\nu^\gamma, \psi] + \nu_m\left(\mathcal{G}(-\mathcal{D}^2\psi + h_\gamma\Gamma) - \frac{1}{g_{\gamma\gamma}}\mathcal{D}^2 h_\gamma\right) = -\frac{1}{k\sqrt{g}}\left([j^\gamma, \psi] - [h^\gamma, h_\gamma]\right), \tag{7.34}$$

$$\frac{\mathrm{d}\nu_\gamma}{\mathrm{d}t} - \nu\mathcal{D}^2\nu_\gamma + \nu\left(\nu_\gamma\Gamma - \mathcal{D}^2\xi\right)\Gamma = \frac{1}{\sqrt{g}}[h_\gamma, \psi] + f_1(t) \tag{7.35}$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} - \nu_m\mathcal{D}^2\psi + \nu_m h_\gamma\Gamma = -\frac{1}{k\sqrt{g}}[h_\gamma, \psi] + f_2(t). \tag{7.36}$$

Las otras cantidades, $J^\gamma, \nu^\gamma \quad h^\gamma$ se pueden escribir en términos de las básicas a través de las ecuaciones (7.20) y (7.4). Aquí se involucran dos funciones arbitrarias del tiempo $f_1$ y $f_2$, constantes espacialmente. Aunque las ecuaciones (7.33) y (7.36) están acopladas, estas describen esencialmente el tiempo de evolución de la función corriente y del flujo magnético respectivamente. Las otras dos ecuaciones determinan las componentes $\gamma$, $\nu_\gamma$ y $h_\gamma$.

**Definición 3** *La derivada total* $\frac{d}{dt}$ *de una cantidad escalar es definida por*

$$\frac{d\psi}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{\sqrt{g}}[\xi, \psi].$$

El análisis helicoidal del flujo (MHD) puede ser hecho partiendo de este conjunto de ecuaciones usando las coordenadas: $\alpha = r, \quad \beta = a\theta - z, \quad \gamma = z$, equivalente $r = \alpha \quad \theta =$

$\frac{\beta+\gamma}{a}$ $z = \gamma$ con $d\gamma = d\alpha$, $d\theta = \frac{1}{a}d\beta + \frac{1}{a}d\gamma$, $dz = d\gamma$, por lo tanto

$$\begin{aligned} d^2x &= (dr)^2 + (rd\theta)^2 + (dz)^2 \\ &= (d\alpha)^2 + \frac{r^2}{a^2}(d\beta)^2 + \frac{2r^2}{a^2}d\beta d\gamma + \frac{r^2}{a^2}(dr)^2 + (dr)^2 \\ d^2x &= (d\alpha)^2 + \frac{r^2}{a^2}(d\beta)^2 + \frac{2r^2}{a^2}d\beta d\gamma + \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)(dr)^2, \end{aligned} \tag{7.37}$$

así se obtiene el tensor métrico

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & \rho^2 \\ 0 & \rho^2 & 1+\rho^2 \end{pmatrix} \qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{1}{\rho^2} & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.38}$$

donde

$$\frac{r}{a} = \rho = \sqrt{g},$$

en este caso

$$\Gamma = \frac{2}{a}\frac{1}{1+\rho^2}, \tag{7.39}$$

$$\mathcal{G}(\nu_\gamma) = \frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2\nu_\gamma}{a^2+r^2}\right), \tag{7.40}$$

$$\frac{1}{g_{\gamma\gamma}}\mathcal{D}^2(\xi) = \frac{a^2}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{a^2+r^2}\frac{\partial\xi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\xi}{\partial\beta}\right)\right] \tag{7.41}$$

## 7.2. Coordenadas Curvilíneas Ortogonales

Cuando las coordenadas son ortogonales las ecuaciones se simplifican considerablemente. Consideramos este caso particular en las ecuaciones (7.33-7.36). Escribimos las fórmulas definitivas en forma explícita debido a la amplia gama de los problemas en las que éstas se pueden aplicar. La métrica se expresa como $ds^2 = (l_\alpha d\alpha)^2 + (l_\beta d\beta)^2 + (l_\gamma d\gamma)^2$, donde $l_\alpha, l_\beta, l_\gamma$ son los factores de escala, con $\sqrt{g} = l_\alpha l_\beta l_\gamma$, y el tensor métrico esta dado por

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} l_\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & l_\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & l_\gamma^2 \end{pmatrix} \qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{l_\alpha^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_\beta^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{l_\gamma^2} \end{pmatrix}$$

### 7.2.1. Representaciones Básicas

Para este caso particular,(el de coordenadas curvilíneas ortogonales), los operadores básicos se reducen asi:

la ecuación (6.20) en $j^\gamma = -\dfrac{1}{l_\gamma^2}\mathcal{D}^2\psi,$

la ecuación (6.21) en $\mathcal{G}(h_\gamma) = 0,$

la ecuación (6.22) en $\mathcal{D}^2 = \dfrac{l_\gamma}{l_\alpha l_\beta}\Big[\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\dfrac{l_\beta}{l_\alpha l_\gamma}\dfrac{\partial}{\partial\alpha} + \dfrac{\partial}{\partial\beta}\dfrac{l_\alpha}{l_\beta l_\gamma}\dfrac{\partial}{\partial\beta}\Big],$

la ecuación (7.7) en $\Gamma = 0.$

Los otros campos vectoriales quedan así:

$$\left.\begin{array}{ll} a = \text{grad } A \times e^\gamma + \dfrac{1}{l_\gamma^2}\psi e^\gamma & h = \text{grad } \psi \times e^\gamma + \dfrac{1}{l_\gamma^2}h_\gamma e_\gamma \\ J = \text{grad } h_\gamma \times e^\gamma + \dfrac{1}{l_\gamma^2}\mathcal{D}^2\psi e_\gamma & h_\gamma = -\mathcal{D}^2 A \\ \text{rot rot } h = -\text{grad } \mathcal{D}^2\psi \times e^\gamma - \dfrac{1}{l_\gamma^2}\mathcal{D}^2 h_\gamma e_\gamma & \end{array}\right\} \tag{7.42}$$

$$\left.\begin{aligned} v &= \text{grad } \xi \times e^{\gamma} + \frac{1}{l_{\gamma}^{2}}\nu_{\gamma} e_{\gamma} \qquad \omega = \text{grad } \nu_{\gamma} \times e^{\gamma} - \frac{1}{l_{\gamma}^{2}}\mathcal{D}^{2}\xi e_{\gamma} \\ \text{rot rot } v &= \text{grad } \mathcal{D}^{2}\xi \times e^{\gamma} - \frac{1}{l_{\gamma}^{2}}\mathcal{D}^{2}\nu_{\gamma} e_{\gamma}, \\ \text{rot rot } \omega &= -\text{grad } \mathcal{D}^{2}\nu_{\gamma} \times e^{\gamma} + \frac{1}{l_{\gamma}^{2}}\mathcal{D}^{2}\mathcal{D}^{2}\xi_{\chi} e_{\gamma}. \end{aligned}\right\} \tag{7.43}$$

Para el caso de la Fuerza de Lorentz tomamos las siguientes identidades:

$$h^{\gamma} = \frac{1}{l_{\gamma}^{2}} h_{\gamma} \tag{7.44}$$

$$\begin{aligned} [h^{\gamma}, h_{\gamma}] &= \Big[\frac{1}{l_{\gamma}^{2}} h_{\gamma}, h_{\gamma}\Big] \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha}\Big(\frac{1}{l_{\gamma}^{2}} h_{\gamma}\Big)\frac{\partial h_{\gamma}}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \beta}\Big(\frac{1}{l_{\gamma}^{2}} h_{\gamma}\Big)\frac{\partial h_{\gamma}}{\partial \alpha} \\ &= \Big(\frac{\partial}{\partial \alpha}\Big(\frac{1}{l_{\gamma}^{2}}\Big) h_{\gamma} + \frac{1}{l_{\gamma}^{2}}\frac{\partial h_{\gamma}}{\partial \alpha}\Big)\frac{\partial h_{\gamma}}{\partial \beta} - \Big(\frac{\partial}{\partial \beta}\Big(\frac{1}{l_{\gamma}^{2}}\Big) h_{\gamma} + \frac{1}{l_{\gamma}^{2}}\frac{\partial h_{\gamma}}{\partial \beta}\Big)\frac{\partial h_{\gamma}}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

$$= \Big(\frac{\partial}{\partial \alpha}\Big(\frac{1}{l_{\gamma}^{2}}\Big)\frac{\partial h_{\gamma}}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \beta}\Big(\frac{1}{l_{\gamma}^{2}}\Big)\frac{\partial h_{\gamma}}{\partial \alpha}\Big) h_{\gamma} + \frac{1}{l_{\gamma}^{2}}\Big(\frac{\partial h_{\gamma}}{\partial \alpha}\frac{\partial h_{\gamma}}{\partial \beta} - \frac{\partial h_{\gamma}}{\partial \beta}\frac{\partial h_{\gamma}}{\partial \alpha}\Big) \tag{7.45}$$

$$= \Big[\frac{1}{l_{\gamma}^{2}}, \frac{h_{\gamma}^{2}}{2}\Big] \tag{7.46}$$

### 7.2.2. Fuerza de Lorentz

En lo que corresponde a la fuerza de Lorentz, se tiene

$$\left.\begin{aligned} J \times h &= -\left(\frac{1}{\sqrt{g}}[\psi, h_{\gamma}] e^{\gamma} + \frac{1}{l_{\gamma}^{2}}\mathcal{D}^{2}\psi \text{grad } \psi + \frac{1}{l_{\gamma}^{2}} h_{\gamma} \text{grad } h_{\gamma}\right) \\ \{h \times J\} &= \text{grad } \left(\frac{1}{\sqrt{g}}[h_{\gamma}, \psi]\right) \times e^{\gamma} - \frac{1}{\sqrt{g}}\left([\frac{1}{l_{\gamma}^{2}}\mathcal{D}^{2}\psi, \psi] + [\frac{1}{l_{\gamma}^{2}}, \frac{h_{\gamma}^{2}}{2}]\right) e_{\gamma} \end{aligned}\right\}. \tag{7.47}$$

### 7.2.3. Ecuaciones Fundamentales de la (MHD)

Tomando las identidades obtenidas en (7.42-7.47), junto con la definición (3), la ecuación (7.33) se reduce a

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big(\frac{1}{l_\gamma^2}\mathcal{D}^2\xi\Big) - \frac{1}{\sqrt{g}}[v^\gamma, v_\gamma] + \nu\frac{1}{l_\gamma^2}\mathcal{D}^2\mathcal{D}^2\xi = \frac{1}{\sqrt{g}}\big([j^\gamma,\psi] - [h^\gamma, h_\gamma]\big)$$

$$-\frac{1}{l_\gamma^2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathcal{D}^2\xi\Big) + \nu\mathcal{D}^2\mathcal{D}^2\xi = \frac{1}{\sqrt{g}}\Big[\xi, \frac{1}{l_\gamma^2}\mathcal{D}^2\xi\Big] + [v^\gamma, v_\gamma] + \frac{1}{\sqrt{g}}\big([j^\gamma,\psi] - [h^\gamma, h_\gamma]\big)$$

$$\frac{1}{l_\gamma^2}\mathcal{D}^2\Big(\frac{\partial}{\partial t}\xi - \nu\mathcal{D}^2\xi\Big) = \frac{1}{\sqrt{g}}\Big(\Big[\frac{1}{l_\gamma^2}\mathcal{D}^2\psi, \psi\Big] + \Big[\frac{1}{l_\gamma^2}, \frac{h_\gamma^2}{2}\Big]\Big) - \frac{1}{\sqrt{g}}\Big(\Big[\frac{1}{l_\gamma^2}\mathcal{D}^2\xi, \xi\Big] - \Big[\frac{1}{l_\gamma^2}, \frac{v_\gamma^2}{2}\Big]\Big)$$

las identidades $h^\gamma = \frac{1}{l_\gamma^2}h_\gamma$, $v^\gamma = \frac{1}{l_\gamma^2}v_\gamma$ se han sustituido en $[h^\gamma, h_\gamma]$ y $[v^\gamma, v_\gamma]$.
Trabajando en forma análoga con la ecuación (7.35) se encuentra la ecuación

$$\frac{\partial\nu_\gamma}{\partial t} - \nu\mathcal{D}^2\nu_\gamma = \frac{1}{\sqrt{g}}\left([h_\gamma,\psi] - [\nu_\gamma,\xi]\right) + f_1(t), \tag{7.48}$$

con

$$\mathcal{D}^2 = \frac{l_\gamma}{l_\alpha l_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{l_\beta}{l_\alpha l_\gamma}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{l_\alpha}{l_\beta l_\gamma}\frac{\partial}{\partial\beta}\right]. \tag{7.49}$$

El operador $\mathcal{D}^2$, denotado también por $\triangle$ en la literatura de equilibrio del plasma, coincide aquí con las coordenadas cilíndricas y esféricas introducidas por Stokes en trabajos clásicos de hidrodinámica (LAMB,1957).

Para el campo magnético, las ecuaciones (7.34) y (7.36) se reducen a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu_m\mathcal{D}^2\right)\psi = \varepsilon_\gamma + \frac{1}{\sqrt{g}}[\xi,\psi] - \frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}[h_\gamma,\psi], \tag{7.50}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu_m\mathcal{D}^2\right)h_\gamma = \frac{1}{\sqrt{g}}\left([\xi,h_\gamma] - [\psi,\nu_\gamma]\right) - \frac{1}{k\sqrt{g}}\left([\psi, \frac{1}{l_\gamma^2}\mathcal{D}^2\psi] + [\frac{1}{2}h_\gamma^2, \frac{1}{l_\gamma^2}]\right). \tag{7.51}$$

La componente covariante $\gamma$ de la ley de Ohm esta dada por la ecuación (7.51), donde $\varepsilon_\gamma = f_2$ es la componente $\gamma$ del campo electrostático el cual debe ser constante espacialmente, en general, puede ser variable en el tiempo. La componente total $\gamma$ del campo eléctrico, es decir el inducido por electrostática, esta dado por

$$\epsilon_\gamma = \varepsilon_\gamma - \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

De la ecuación (4.22), Ley de Ohm, se obtiene

$$\epsilon_p = -\text{grad } \frac{\partial A}{\partial t} \times e^\gamma - \text{grad } Q =$$

$$\nu_m \text{grad } h_\gamma \times e^\gamma + \nu^\gamma \text{grad } \psi + h^\gamma \text{grad } \xi + \frac{1}{k l_\gamma^2}\left(\mathcal{D}^2 \psi \text{grad } \psi + \text{grad } \frac{h_\gamma^2}{2}\right) \tag{7.52}$$

del cual se puede hallar el potencial electrostático (4.20) como una diferencial exacta tomando el producto escalar con $\delta x = d\alpha e_\alpha + d\beta e_\beta$. Si introducimos un nuevo operador $\delta^*$ definido por

$$\delta^* = (\delta x \times \text{grad }).e^\gamma = \frac{l_\alpha}{l_\alpha l_\gamma} d\alpha \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{l_\beta}{l_\alpha l_\gamma} d\beta \frac{\partial}{\partial \alpha}, \tag{7.53}$$

podemos escribir

$$-dQ = \delta^*\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \nu_m h_\gamma\right) - \nu^\gamma d\psi + h^\gamma d\xi - \frac{1}{k l_\gamma^2}\left(\mathcal{D}^2 \psi d\psi + d\frac{h_\gamma^2}{2}\right) \tag{7.54}$$

El lado derecho de la ecuación (7.54) debe ser, necesariamente, dada como una diferencial exacta.

Similarmente, la proyección del momentum (4.21) sobre el plano $\alpha, \beta$ es

$$\text{grad } \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \mathcal{D}^2\right) \xi \times e^\gamma =$$

$$-\text{ grad } P + \frac{1}{l_\gamma^2}\left(\mathcal{D}^2 \text{grad } \xi + \text{grad } \frac{\nu_\gamma^2}{2}\right) - \frac{1}{l_\gamma^2}\left(\mathcal{D}^2 \psi d\psi + \text{grad } \frac{h_\gamma^2}{2}\right) \tag{7.55}$$

Nuevamente tomando el producto escalar con $\delta x$ obtenemos la diferencial exacta

$$dP = -\delta^* \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \mathcal{D}^2 \right) \xi + \frac{1}{l_\gamma^2} \left( \mathcal{D}^2 \xi d\xi + d\frac{\nu_\gamma^2}{2} \right) - \frac{1}{l_\gamma^2} \left( \mathcal{D}^2 \psi d\psi + d\frac{h_\gamma^2}{2} \right) \tag{7.56}$$

de donde se puede calcular la distribución de presión , ecuación (4.7).

# 8. Algunas Integrales Exactas

En esta sección damos algunos ejemplos de como usar los formalismos desarrollados anteriormente para obtener soluciones especiales.
Aquí presentamos un conjunto de integrales exactas para simetría traslacional y rotacional, y para campos definidos en tres dimensiones. Estas soluciones son obtenidas sin tener en cuenta el efecto Halls ($k = \infty$) y la componente $\gamma$ debe ser cero para el rotacional de la fuerza de Lorentz. Las componentes en coordenadas curvilíneas en física las notamos con indices en brackets, es decir $v_{\langle\alpha\rangle} = l_\alpha v^\alpha, h_{\langle\gamma\rangle} = \frac{1}{l_\gamma} h_\gamma$

## 8.1. Simetría Traslacional

Consideramos primero el caso de simetría planar, esto es
$ds^2 = (l_\alpha d\alpha)^2 + (l_\beta d\beta)^2 + dz^2$, $l_\gamma = 1$ incluyendo$\gamma$ en la coordenada cartesiana $z$. EL operador $\mathcal{D}^2$ coincide con el Laplaciano en dos dimensiones, es decir

$$\nabla^2 \xi = \text{div grad } \xi = \frac{1}{l_\alpha l_\beta} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{l_\beta}{l_\alpha} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{l_\alpha}{l_\beta} \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \right) \right]. \tag{8.1}$$

Las ecuaciones para el fluido (MHD) son

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\nabla^2\right)\nabla^2\xi = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\left[\nabla^2\psi,\psi\right] - \left[\nabla^2\xi,\xi\right]\right), \tag{8.2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\nabla^2\right)\nabla^2\nu_z = \frac{1}{\sqrt{g}}\left([\xi,\nu_z] - [\psi,h_z]\right), \tag{8.3}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\partial\psi}{\partial t} + \varepsilon_z = -\nu_m\nabla^2\psi - \frac{1}{\sqrt{g}}[\xi,\psi] \tag{8.4}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\nabla^2\right)\nabla^2 h_z = \frac{1}{\sqrt{g}}\left([\xi,h_z] - [\psi,\nu_z]\right). \tag{8.5}$$

Estas ecuaciones son validas si $\alpha,\beta$ están en un sistemas de coordenadas en el plano $x,y$, es decir que la métrica esta dada por $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j + dz^2$ donde $i,j$ toman únicamente los valores uno o dos, y $x^1 = \alpha, x^2 = \beta$. Entonces el invariante $\nabla^2\psi$ esta dado por

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x^j}\right)$$

en lugar de la ecuación 6.1, todos los otros términos restantes son iguales y $\sqrt{g}$ pueden ser calculados de las coordenadas cartesianas $x = x(\alpha,\beta), y = y(\alpha,\beta)$ con $\sqrt{g} = [x,y]$.

## 8.2. Fluido Espiralado

Cuando $\psi = \psi(\alpha,t)$ es una función de una variable espacial únicamente, entonces

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{l_\alpha l_\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{l_\beta}{l_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right). \tag{8.6}$$

Si esta expresión en algún sistema de coordenadas especial no depende de $\beta$ entonces

$$\left[\nabla^2\psi,\psi\right] = -\frac{\partial}{\partial\beta}\nabla^2\psi\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = 0, \tag{8.7}$$

y la ecuación (8.4) se transforma en

$$\varepsilon_z = \frac{\partial\psi}{\partial t} - \nu_m\nabla^2\psi + \frac{1}{l_\alpha l_\beta}\frac{\partial\xi}{\partial\beta}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = 0. \tag{8.8}$$

Consistente con la hipótesis para $\psi$, que requiere que el término$\dfrac{1}{l_\alpha l_\beta}\frac{\partial\xi}{\partial\beta}$ no debe contener a $\beta$.

Estas condiciones se satisfacen, por ejemplo, en coordenadas polares. Si tomamos

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2, \alpha = r, \beta = \theta \quad y \quad \psi = \psi(r,t).$$

entonces

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$

es una función de $r$ y $t$ únicamente. Esto obliga ahora que $\frac{1}{r}\frac{\partial\xi}{\partial\theta}$ sea una función de $r$ y $t$ . Además

$$\xi = A(r,t)\theta + B(r,t),$$

con

$$\nu_{\langle r\rangle} = \frac{1}{r}A(r,t), \qquad \nu_{\langle\theta\rangle} = -\frac{\partial A(r,t)}{\partial r}\theta - \frac{\partial B(r,t)}{\partial r}. \tag{8.9}$$

Para evitar multievaluación de $\nu_{\langle\theta\rangle}$, fijamos $\dfrac{\partial A(r,t)}{\partial r} = 0$ cuando todos los valores de $\theta$ son permitidos; de otra manera, el flujo debe restringirse a un sector circular $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. En el caso anterior $A = \dfrac{Q(t)}{2r}$ es constante en $r$ y $Q(t)$ es el flujo neto radial del fluido. La función $B(r,t)$ es calculada de la ecuación (8.2)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial B}{\partial r} - \nu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial B}{\partial r}\right)\right]\right\} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial B}{\partial r}\right)\right]\frac{Q(t)}{2\pi}. \tag{8.10}$$

Esta es una ecuación diferencial parcial lineal en $B$ cuya solución puede ser hallada con métodos usuales.

Cuando el fluido tiene movimiento radial se cumple

$$\nu_{\langle r\rangle} = \frac{Q}{2\pi r}, \tag{8.11}$$

combinado con flujo rotacional

$$\nu_{\langle\theta\rangle} = \frac{\partial Q}{\partial r}, \tag{8.12}$$

cuya velocidad depende de la solución de la ecuación (8.10). Un ejemplo sencillo es la solución irrotacional, $\nabla^2\xi = 0$ con

$$2\pi r\frac{\partial B}{\partial r} = -\Gamma = const, \tag{8.13}$$

donde $\Gamma$ es la circulación del campo velocidad. El movimiento del flujo es en espiral con

$$\frac{\nu_{\langle\theta\rangle}}{\nu_{\langle r\rangle}} = \frac{\Gamma}{Q} = cost, \tag{8.14}$$

es decir con dirección el campo de la velocidad constante sobre la línea radial, $\theta = const$. La ecuación del flujo magnético, el cual no depende de $B(r,t)$, es

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\nu_m}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial}\right) + \partial Q(t)2\pi r\frac{\partial\psi}{\partial r} = \varepsilon_z, \tag{8.15}$$

que es una ecuación lineal solucionable. Por ejemplo, en el caso de estado estable se obtiene

$$h_{\langle\theta\rangle} = -\frac{d\psi}{dr} = h_0 r^{\left(\frac{Q}{2\pi\nu_m}\right)} + \frac{\varepsilon_z r}{\left(2 - \frac{Q}{2\pi\nu_m}\right)}, \tag{8.16}$$

donde $h_0$ es una constante de integración. Las ecuaciones (8.3) y (8.5) pueden ser resueltas a posteriori, para $\nu_z$ y $h_z$ después de conocer $\xi$ y $\psi$. En particular, se puede suponer que $\nu_z = 0$ si $h_z = h_z(r,t)$, así se obtiene

$$\frac{\partial h_z}{\partial t} - \nu_m\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h_z}{\partial r}\right) = -\frac{Q}{2\pi r}\frac{\partial h_z}{\partial r}, \tag{8.17}$$

por lo tanto se puede agregar una componente $h_z = h_z(r,t)$ a la solución del campo magnético.

## 8.3. Fluidos en dos Dimensiones con un Punto de Estancamiento

Las hipótesis introducidas en las ecuaciones (8.6-8.8) se satisfacen en coordenadas cartesianas. Si asumimos $\psi = \psi(y,t)$, entonces la componente $z$ del rotacional de la fuerza de Lorentz es cero, además

$$[\nabla^2\psi, \psi] = 0 \qquad [\xi, \psi] = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2},$$

entonces la ecuación (8.4) se reduce a

$$\varepsilon_z = \frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu_m \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \tag{8.18}$$

Para que haya consistencia

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = f(y,t),$$

con $f(y,t)$ una función no conocida.

Integrando esta última ecuación se obtiene

$$\xi = f(y,t)x + g(y,t), \tag{8.19}$$

con $g(y,t)$ otra función desconocida.

Para la función $\xi(x,y,t)$ se obtienen las siguientes identidades:

$$\frac{\partial}{\partial x}\xi(x,y,t) = f(y,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\xi(x,y,t) = \frac{\partial f(y,t)}{\partial y}x + \frac{\partial g(y,t)}{\partial y}$$

$$\nabla^2\xi(x,y,t) = \frac{\partial^2 f(y,t)}{\partial y^2}x + \frac{\partial^2 g(y,t)}{\partial y^2}$$

$$\nabla^2\nabla^2\xi(x,y,t) = \frac{\partial^4 f(y,t)}{\partial y^4}x + \frac{\partial^4 g(y,t)}{\partial y^4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\xi(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 f(y,t)}{\partial y^2}x + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 g(y,t)}{\partial y^2}$$

$$\begin{aligned}[\nabla^2\xi(x,y,t),\xi(x,y,t)] &= \frac{\partial^2 f(y,t)}{\partial y^2}\Big(\frac{\partial f(y,t)}{\partial y}x + \frac{\partial g(y,t)}{\partial y}\Big) \\ &\quad - f(t,y)\Big(\frac{\partial^3 f(y,t)}{\partial y^3}x + \frac{\partial^3 g(y,t)}{\partial y^3}\Big)\end{aligned}$$

De esta manera la ecuación (8.2) se puede partir en dos ecuaciones separando términos, uno con la variable $x$ y otro sin ella.

$$\nu\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - f\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}, \tag{8.20}$$

$$\nu\frac{\partial^4 g}{\partial y^4} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - f\frac{\partial^3 g}{\partial y^3}, \tag{8.21}$$

La primera ecuación esta desacoplada de $g$ y puede ser resuelta para $f(y,t)$. La segunda puede ser resuelta para $g(y,t)$ cuando $f$ es conocida.

Otra forma de escribir la ecuación (8.20) independiente del tiempo es

$$\begin{aligned}\nu\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} &= \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - f\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \\ &= 2\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + f\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2 - \frac{\partial}{\partial y}\Big(f\frac{\partial^2 f}{\partial y}\Big).\end{aligned} \tag{8.22}$$

La ecuación de (8.21) independiente del tiempo es

$$\begin{aligned}\nu\frac{\partial^4 g}{\partial y^4} &= \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - f\frac{\partial^3 g}{\partial y^3}\\ &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\Big) - \Big(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial^3 g}{\partial y^3}\Big)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(f\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\Big). \end{aligned} \tag{8.23}$$

Integrando las ecuaciones (8.22) y (8.23) se encuentran:

$$\nu f^{'''} = f^{'2} - ff^{''} - C_1 \tag{8.24}$$

$$\nu g^{'''} = g^{'}f^{'} - fg^{''} - C_2 \tag{8.25}$$

donde $C_1$ y $C_2$ son constantes de integración. Sistema al cuál queríamos llegar.

Este sistema de ecuaciones pueden ser resuelto para casos particulares tanto numérica como analíticamente. En el caso de movimientos bidimensionales la solución analítica irrotacional $f(y) = \sqrt{C_1}$, $g(y) = 0$, fué tratada por SONNERUP y PPRIEST (1975), en el análisis del flujo magnético sin puntos de estancamiento.

Es materia de investigación la búsqueda de más soluciones analíticas que incluyan diferentes condiciones iniciales y de frontera. Por ejemplo un problema a tratar será el caso tridimensional de un fluido con dependencia lineal en la coordenada $z$. Problema que peuede servir para futuros trabajos de grado.

Para el caso de solución numérica, integrando (6.24) con $f^{''}(0) = 0$, se obtienen soluciones que modelan el fluido del plasma alrededor de otra regin de plasma, GRATTON (1988).

# 9. Conclusiones

El cambio de las variables originales a variables auxiliares definidas en 4.11 facilitan el manejo algebraico de las ecuaciones.

La destreza en el manejo matemático del cálculo en varias variables en un sistema general de coordenadas curvilíneas y el uso adecuado de algunos teoremas facilitan el entendimiento del fenómeno (MHD).

El Concepto de los potenciales de Euler-Monge y su adecuado uso es una herramienta relevante en la ejecución de este trabajo.

La Metodología que permite ir de lo general a lo particular, nos permite el mejor entendimiento del fenómeno (MHD) y facilita de una manera sistemática, llegar a la reducción del sistema inicialmente planteado, identificando cada una de sus componentes desde el punto de vista físico.

Se ha deducido un sistema compacto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales para el estudio de los flujos incompresibles disipantes de la magnetohidrodinámica en términos de potenciales de Euler, sujeto a condiciones específicas.

Por ser este sistema de ecuaciones no lineal, su solución puede ser tratada de forma numérica o de forma análitica. Cada una de las posibilidades genera un campo de acción en la investigacin de soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales.

# 10. Bibliografía

1. Agim, Y. Z. and Tataronis J. O. *General two-dimensional magnetohydrodynamic equilibria with mass flow.* J. Plasma Phys., 34, 337-360 (1985).

2. R. M. Barron, O. P. Chandna, and M. R. Garg. *Solution in viscous constantly-inlclined magnetohydrodynamics* Jap. J. Appl. Phys.,28(1):167-172, 1981.

3. Berker, R.*Fluid visqueux incomprenssible.*In *Handbuch der Physik*, Band VII/2, Strö mungsmechanik II, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

4. J. L. Ericksen.*Tensor field* In Flügge S., editor, Appendix to "The Classical Field Theories", volumen III/1 of Handbuch der Physik, Springer, Berlin, 1960.

5. O.P. Chandna and K. T. Chew.*Viscous transverse-aligned (MHD) flows.* Jap. J. Appl. Mth., 35:287-299, 1976.

6. M. R. Garg and O.P. Chandna.*Viscous orthogonal (MHD) flows.*Siam J. Appl. Math., 30(3):577-585, 1976.

7. F. T. Gratton and M. F. Heyn.*The reduced Equations of Dissipative Incompressible Magnetohydrodynamics and Some of Their Excat Integrals.*Technical Report IWF8903, Institut für Weltraumforschung, Graz, 1989.

8. F. T. Gratton and M. F. Heyn, H. K. Biernat, R.P. Rijnbeek, and G. Gnavi. *(MHD) stagnation point flows in the presence of resistivity and viscosity.* J. Geophys. Res., 93, 7318 (1988).

9. M. Hesse and Schindler, K. *A Theorical Foundation of General Magnetic Reconnction.* J. Geophys., Res., 93:5558-5567 (1988)

10. W. F. Hughes and F. J. Young.*The Electromagnetodynamics of Fluids.*Wiley, New York, 1966.

11. H. K. Moffat. *Magnetic field generation in electrically conducting fluids.* Cambridge University Press, London,, 1978.

12. H. Lamb.*Hydrodynamics.* Cambridge University Press, 6th. edition, 1957.

13. E. N. Parker. *Spontaneous current Sheets in Magnetic Field.* Oxford University Pres, 1994.

14. E. N. Parker. *The solar flare phenomenon and the Theory of reconnection and annihilation of magnetic field.* Astrophys. J. Suppl. Ser., 8, 177 (1963).

15. P. H. Roberts, *An Introduction to Magnetohydrodynamics.* Longmans, 1967.

16. B. U. Ö. Sonnerup. *Magnetic fiel reconnection in a highly conducting incomprenssible fluid.* J. Plasma Phys., 4, 161 (1970)

17. Rosenau, P. *Tree dimensional flow wiht neutral points.* Phys. of Fluids (5):849-858 (1979).

18. B. U. Ö. Sonnerup and E. R. Priest. *Resistive (MHD) stagnation-point flows at acurrent sheet.* J. Plasma Phys.,14,283 (1975).

19. B. F. Shutz. *Geometrical Methods of Mathematical Physics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

20. V. M. Vasyliunas. *Theoretical models of magnetic field merging.* Rev. Geophys. Space Phys., 13, 303 (1975).

21. R. B. White. Rev. Mod. Phys., 58, 183 (1976).