

Implementación del método de estabilización de *Petrov-Galerkin* en contracorriente para la solución numérica de problemas altamente advectivos

The streamline upwind Petrov-Galerkin stabilising method for the numerical solution of highly advective problems

Carlos Humberto Galeano Urueña¹, Juan Miguel Mantilla Gonzalez² y Diego Alexander Garzón Alvarado³

RESUMEN

El presente artículo describe el método Petrov-Galerkin en contracorriente (*SUPG*) como técnica de estabilización de las soluciones por elementos finitos de la ecuación diferencial de difusión –advección- reacción. En la primera parte del artículo se hace un breve análisis de la importancia de este tipo de ecuaciones diferenciales para el modelado de fenómenos físicos en múltiples campos. Posteriormente, se realiza una descripción unidimensional del método *SUPG* y se desarrolla la metodología para implementar la técnica en dos o tres dimensiones. Se presentan los resultados de un experimento numérico fuertemente advectivo y de elevada complejidad desde el punto de vista numérico. Los resultados muestran cómo la versión de la técnica *SUPG* implementada permite aproximaciones estabilizadas en el espacio, aun para altos números de Peclet. Gráficas adicionales de los experimentos numéricos aquí presentados pueden ser descargados de www.gnum.unal.edu.co.

Palabras clave: *Petrov Galerkin* en contracorriente, estabilización, difusión-advección.

ABSTRACT

This article describes the streamline upwind Petrov-Galerkin (*SUPG*) method as being a stabilisation technique for resolving the diffusion-advection-reaction equation by finite elements. The first part of this article has a short analysis of the importance of this type of differential equation in modelling physical phenomena in multiple fields. A one-dimensional description of the *SUPG* method is then given to extend this basis to two and three dimensions. The outcome of a strongly advective and a high numerical complexity experiment is presented. The results show how the version of the implemented *SUPG* technique allowed stabilised approaches in space, even for high Peclet numbers. Additional graphs of the numerical experiments presented here can be downloaded from www.gnum.unal.edu.co.

Keywords: streamline upwind Petrov Galerkin, stabilisation, diffusion-advection.

Recibido: septiembre 23 de 2008

Aceptado: junio 16 de 2009

Introducción

La ecuación diferencial de difusión-advección-reacción (*EDDAR*) (1) es empleada para el modelado de múltiples fenómenos físicos, en áreas como la acústica (Babuska *et al.*, 1995), el electromagnetismo (Rieben *et al.*, 2007), la dinámica de fluidos (Zienkiewicz *et al.*, 2000), así como también para el estudio de problemas financieros a través de la solución de la ecuación de Black-Scholes (Smith, 2000), de problemas ambientales y de contaminación (Sanín *et al.*, 2007), poblacionales (Richter, 2008) y biológicos, destacándose en este último campo el modelado de los mecanismos de morfogénesis (Dan *et al.*, 2005).

$$-\nabla \cdot (k(\bar{x})\nabla \phi) + \bar{u}(\bar{x}) \cdot \nabla \phi - s(\bar{x})\phi = Q(\bar{x}) \text{ sobre } \Omega \quad (1)$$

En esta última ecuación, $\phi(\bar{x})$ es la función de campo escalar buscada, $k(\bar{x}) \geq 0$ es el coeficiente difusivo, $\bar{u}(\bar{x})$ es el campo de velocidad asociado al proceso advectivo, $s(\bar{x})$ es el coeficiente fuente ($s > 0$ implica producción y $s < 0$ significa disipación), $Q(\bar{x})$ es la función de generación o perturbación y Ω representa el dominio del problema.

Aunque el método de los elementos finitos, bajo la formulación de Galerkin, es una técnica usada extensivamente para la solución de muchos problemas de ingeniería, especialmente dentro de la mecánica estructural de sólidos, resulta poco adecuado, en términos generales, para la solución de la ecuación (1). El uso de la formulación estándar de Bubnov-Galerkin para la solución de problemas predominantemente convectivos, lleva a respuestas marcadas por fuertes oscilaciones alrededor de la solución exacta (Zienkiewicz *et*

¹ Ingeniero mecánico. M.Sc., Universidad Cienfuegos, Cuba. Profesor asistente, Universidad Nacional de Colombia. Grupo de Investigación en Modelado y Métodos Numéricos (GNUM), Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. chgaleanou@unal.edu.co

² Ingeniero mecánico. M.Sc., Universidad de Los Andes, Colombia. Profesor asistente, Universidad Nacional de Colombia. Grupo de Investigación en Modelado y Métodos Numéricos (GNUM), Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. jmmantillag@unal.edu.co

³ Ingeniero mecánico. Ph.D., Universidad de Zaragoza, España. Profesor Asociado, Universidad Nacional de Colombia. Grupo de Investigación en Modelado y Métodos Numéricos (GNUM), Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. dagarazona@unal.edu.co

ál., 2000), especialmente en las zonas aguas abajo con fuertes variaciones en el campo escalar $\phi(\bar{x})$. Estas oscilaciones, denominadas normalmente *wiggles* (Brooks et ál., 1982), aparecen por la característica asimétrica de la matriz de rigidez (K) del problema, la cual es originada por la naturaleza no autoadjunta del operador diferencial convectivo. Resulta claro entonces que entre más predominante sea la componente convectiva sobre la difusiva, mayores la asimetría en la matriz $[K]$ y por tanto más grandes las falsas oscilaciones dentro de la aproximación aguas abajo.

Con el fin de eliminar dichas oscilaciones espurias se han desarrollado diversas técnicas de estabilización, entre las cuales se puede mencionar el método Petrov-Galerkin de contracorriente (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin SUPG*; Zienkiewicz et ál., 1975), el método de las líneas de características (Zienkiewicz et ál., 1984), el método de mínimos cuadrados de Galerkin (Hughes, 1988), el método de cálculo finito (Oñate, 1998) y el método de paso fraccional θ (Chrispell, 2007), entre otros.

El SUPG se basa en la modificación de la matriz de rigidez empleando funciones de ponderación modificadas, de modo que se otorgue un mayor peso a la información de los nodos ubicados aguas arriba. Este método de estabilización, planteado por primera vez por Zienkiewicz et ál., 1975, fue usado formalmente por Christie et ál., 1976 y Zienkiewicz et ál., 1977, y generalizado como técnica para problemas de advección dominante por Hughes et ál., 1979. A partir de este punto han aparecido diversas variantes alrededor del método, como las planteadas por Hughes et ál., 1989, Baiocchi et ál., 1993, Harari et ál., 1994, Russo 1996, Cockburn 2000 y Araya et ál., 2005, entre muchos otros trabajos.

El presente trabajo tiene por objetivo deducir las expresiones y formular la metodología requerida para la implementación numérica del método SUPG como técnica de estabilización de la solución de la EDDAR estacionaria, multidimensional y con coeficientes variables. En la primera parte del artículo se presentan los principios de la estabilización con SUPG para problemas unidimensionales y se exponen las consideraciones necesarias para aplicar el método a problemas bidimensionales o tridimensionales en régimen estacionario. Posteriormente se despliegan algunos resultados numéricos alcanzados en un problema de alta inestabilidad utilizando diferentes mallas. Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo.

Consideraciones generales del método SUPG como técnica de estabilización de la EDDAR unidimensional

Con el fin de poder analizar el método SUPG para problemas en varias dimensiones, resulta de especial interés comprender la corrección inducida por el método en una dimensión. Para esto, se inicia planteando la ecuación de residuos ponderados de la EDDAR unidimensional, estacionaria, con coeficientes y función de generación constantes, tal como se expone en (2):

$$\int_{\Omega} W \left(k \frac{d^2 \phi}{dx^2} + u \frac{d\phi}{dx} - s\phi - Q \right) dx = 0 \quad (2)$$

en donde W es la función de ponderación. Aplicando integración por partes al primer término de la integral, se logra debilitar la expresión y llevarla a la forma de la ecuación (3), en la cual Ω es el dominio de problema y f es la frontera del mismo.

$$k \int_{\Omega} \frac{dW}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx + u \int_{\Omega} W \frac{d\phi}{dx} dx - s \int_{\Omega} W \phi dx = Q \int_{\Omega} W dx + \left[Wk \frac{d\phi}{dx} \right]_{\Gamma} \quad (3)$$

Empleando una aproximación discreta del tipo $\phi^e = \sum_m \phi_m N_m$, en

donde ϕ_m son los valores nodales y N_m son las funciones de forma o funciones de prueba, y aplicando el método de Bubnov-Galerkin, para el cual la $W = N$, se puede deducir la ecuación de ensamble general para un nodo interior i (4).

$$-\left(1 + P_e + \frac{\sigma P_e}{3}\right)\phi_{i-1} + \left(2 - \frac{4\sigma P_e}{3}\right)\phi_i - \left(1 - P_e + \frac{\sigma P_e}{3}\right)\phi_{i+1} = \frac{h^2}{k} Q \quad (4)$$

En la expresión (4), $\phi_{i-1}, \phi_i, \phi_{i+1}$ son los valores nodales de la función ϕ en tres nodos interiores consecutivos, P_e es el número adimensional de Peclet, el cual está definido como $P_e = |u|h/2k$, σ es el número adimensional de Damkohler, el cual se define como $\sigma = sh/|u|$, en tanto que h es la longitud característica del elemento.

En esta última ecuación se puede ver la asimetría en la matriz de rigidez inducida por el término advectivo, lo cual se puede entender al analizar el mayor peso que esta técnica da a la información proveniente de los nodos ubicados aguas abajo ϕ_{i+1} , sobre la información de los nodos aguas arriba ϕ_{i-1} (Zienkiewicz et ál., 2000).

De acuerdo con (4) una manera de estabilizar la solución, es decir, de aminorar la asimetría en la matriz de rigidez, es reducir el número de Peclet, lo cual se puede alcanzar disminuyendo el tamaño de la malla. Sin embargo, esta solución resulta computacionalmente ineficiente en problemas en los que la componente advectiva es muy alta, como por ejemplo, en los problemas de dinámica de fluidos altamente turbulentos (Vellando et ál., 1999).

Una técnica de estabilización que permite obtener respuestas sin oscilaciones espurias, descartando el uso de mallas extremadamente finas, es el método de Petrov-Galerkin en contracorriente. Este método consiste en la modificación de la función de peso, de modo que se logre equilibrar la matriz de rigidez, ponderando con mayor fuerza la información proveniente de los nodos ubicados aguas arriba (Zienkiewicz et ál., 2000). Considerando el sistema de ecuaciones (5), construido a partir de la unión de $n-1$ elementos unidimensionales, así como la ecuación de ensamble (6), obtenida para un problema sin términos de reacción, se puede entender como el equilibrio de la matriz de rigidez en el método SUPG, alcanzado con la sobreponderación de la información proveniente de los nodos aguas arriba, lo cual equivale a aumentar el valor de los términos K_{21} por encima de los términos K_{12} .

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 & 0 \\ & \dots & & & \\ 0 \dots & K_{21}^e & K_{22}^e + K_{11}^{e+1} & K_{12}^{e+1} & \dots 0 \\ & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & K_{21}^{n-1} & K_{22}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_i \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$-(P_e + 1)\phi_{i-1} + 2\phi_i + (P_e - 1)\phi_{i+1} = K_{21}^e \phi_{i-1} + (K_{11}^e + K_{22}^e)\phi_i + K_{12}^{e+1} \phi_{i+1} = f_i \quad (6)$$

Esta modificación en la formulación de elementos finitos es equivalente a pasar de una formulación de diferencias finitas centradas a un planteamiento en diferencias finitas descentradas hacia atrás

(Zienkiewicz et ál., 2000), de ahí que esta técnica de elementos finitos es conocida como la formulación de Petrov-Galerkin en contracorriente, o SUPG, del inglés *Streamline Upwind Petrov-Galerkin*. En problemas unidimensionales, la sobreponderación de la información de los nodos aguas arriba se alcanza modificando las funciones de peso W , de modo que se reduzca el área bajo la curva de la función de peso W_1 , al mismo tiempo que se aumenta el valor de la integral de W_2 a lo largo del elemento. Una perturbación simple inducida sobre la función de peso convencional, que logra la modificación requerida, se plantea en la expresión (7).

$$W_i^* = N_i + \frac{ch}{2} \frac{dN_i}{dx} \quad (7)$$

En esta última ecuación, $\frac{dN_i}{dx}$ es la función de perturbación y α es un coeficiente que se emplea para controlar el peso adicional sobre los nodos aguas arriba (ϕ_{i-1}), pues una ponderación excesiva haría que este esquema fuera equivalente a un planteamiento en diferencias finitas hacia atrás, es decir, reduciría el método a una aproximación de primer orden.

Incorporando la nueva función de peso (7) en la ecuación de residuos ponderados (3), la ecuación de ensamble (4) toma la forma de la expresión (8).

$$-\left[1 + \sigma P_e \left(\frac{1}{3} + \frac{\alpha}{2}\right) + P_e(\alpha + 1)\right] \phi_{i-1} + 2\left(1 - \frac{2}{3} \sigma P_e + P_e \alpha\right) \phi_i - \left[1 + \sigma P_e \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) + P_e(\alpha - 1)\right] \phi_{i+1} = \frac{h^2}{k} Q \quad (8)$$

lo que en el caso particular de un problema sin términos reactivos, esta se reduce a:

$$-[1 + P_e(\alpha + 1)] \phi_{i-1} + 2(1 + P_e \alpha) \phi_i - [1 + P_e(\alpha - 1)] \phi_{i+1} = \frac{h^2}{k} Q \quad (9)$$

Derivación del coeficiente de perturbación óptimo

Dado que el empleo de un coeficiente de perturbación muy pequeño no permite la estabilización completa de la solución, en tanto que el empleo de uno muy alto conduce a una pérdida en la exactitud de la aproximación, se hace necesario determinar el valor adecuado u óptimo con el que se debe perturbar la función de peso original. Para la deducción de dicho valor, se requiere convertir la ecuación de residuos ponderados (2) en un planteamiento autoadjunto, lo cual puede lograrse modificando la función de peso W , multiplicándola por una función conveniente p , tal como se plantea en (10).

$$\int_{\Omega} W \cdot p \left(k \frac{d^2 \phi}{dx^2} + u \frac{d\phi}{dx} - s\phi - Q \right) dx = 0 \quad (10)$$

Debilitando y agrupando términos de la anterior expresión, se llega a la ecuación (11):

$$\int_{\Omega} \left[k \frac{dW}{dx} \cdot p \frac{d\phi}{dx} + W \left(k \frac{dp}{dx} + u \cdot p \right) \frac{d\phi}{dx} - s \cdot W \cdot p \cdot \phi - Q \cdot W \cdot p \right] dx = 0 \quad (11)$$

De este modo resulta claro que si se desea que la expresión de residuos ponderados contenga únicamente operadores autoadjuntos, entonces el segundo término de la integral debe anularse, tal

como se muestra en (12). De lo anterior se deduce la forma adecuada de la función p , la cual se plantea en (13).

$$k \frac{dp}{dx} + u \cdot p = 0 \quad (12)$$

$$p = C \cdot e^{-\frac{2P_e x}{h}} \quad (13)$$

Al reemplazar el resultado de (13) en la ecuación (11), se obtiene la ecuación (14).

$$\int_{\Omega} k \frac{dW}{dx} \cdot e^{-\frac{2P_e x}{h}} \frac{d\phi}{dx} dx + \int_{\Omega} -s \cdot W \cdot e^{-\frac{2P_e x}{h}} \cdot \phi dx - \int_{\Omega} Q \cdot W \cdot e^{-\frac{2P_e x}{h}} dx = 0 \quad (14)$$

Empleando una aproximación discreta del tipo $\phi^e = \sum_{m=1}^2 \phi_m N_m$ y adoptando el método de Bubnov-Galerkin, se obtiene la ecuación de ensamble para un nodo interior i mostrada en (15).

$$K_{21}^e \phi_{i-1} + (K_{11}^{e+1} + K_{22}^e) \phi_i + K_{12}^{e+1} \phi_{i+1} = f_i \quad (15)$$

En esta última ecuación, los coeficientes multiplicativos de los valores nodales están definidos por:

$$K_{11}^{e+1} = - \int_{x_i}^{x_i+h} e^{-\frac{2P_e x}{h}} \frac{dN_1}{dx} k \frac{dN_1}{dx} dx = -\frac{k}{h} e^{-\frac{2P_e x_i}{h}} \left[\frac{e^{-2P_e} (e^{2P_e} - 1)}{2P_e} \right] \quad (16)$$

$$K_{12}^{e+1} = - \int_{x_i}^{x_i+h} e^{-\frac{2P_e x}{h}} \frac{dN_1}{dx} k \frac{dN_2}{dx} dx = \frac{k}{h} e^{-\frac{2P_e x_i}{h}} \left[\frac{e^{-2P_e} (e^{2P_e} - 1)}{2P_e} \right] \quad (17)$$

$$K_{21}^e = - \int_{x_i-h}^{x_i} e^{-\frac{2P_e x}{h}} \frac{dN_2}{dx} k \frac{dN_1}{dx} dx = \frac{k}{h} e^{-\frac{2P_e x_i}{h}} \left[\frac{(e^{2P_e} - 1)}{2P_e} \right] \quad (18)$$

$$K_{22}^e = - \int_{x_i-h}^{x_i} e^{-\frac{2P_e x}{h}} \frac{dN_2}{dx} k \frac{dN_2}{dx} dx = -\frac{k}{h} e^{-\frac{2P_e x_i}{h}} \left[\frac{(e^{2P_e} - 1)}{2P_e} \right] \quad (19)$$

En tanto que el término independiente f_i , se define en (20).

$$f_i = - \int_{x_i-h}^{x_i} e^{-\frac{2P_e x}{h}} N_2 Q dx - \int_{x_i}^{x_i+h} e^{-\frac{2P_e x}{h}} N_1 Q dx = -\frac{Q h e^{-\frac{2P_e (x_i+h)}{h}} (e^{2P_e} - 1)^2}{4P_e} \quad (20)$$

Reemplazando las expresiones (16) a (20) en la ecuación (15), se llega a la ecuación (21).

$$-\frac{2P_e (e^{2P_e} - 1)}{(e^{P_e} - e^{-P_e})^2} \phi_{i-1} + \frac{2P_e (e^{2P_e} - e^{-2P_e})}{(e^{P_e} - e^{-P_e})^2} \phi_i - \frac{2P_e (1 - e^{-2P_e})}{(e^{P_e} - e^{-P_e})^2} \phi_{i+1} = \frac{Q h^2}{k} \quad (21)$$

Nótese que esta expresión lleva a una matriz de rigidez simétrica (dada la naturaleza autoadjunta de la expresión de residuos ponderados), aun cuando los pesos con los que se ponderan los términos ϕ_{i+1} y ϕ_{i-1} son diferentes. Así entonces, al comparar los coeficientes de la expresión estabilizada (9), con los coeficiente del planteamiento autoadjunto (21), se puede encontrar el valor adecuado para el coeficiente de perturbación α , tal como se muestra en (22).

$$\alpha_{op} = \frac{e^{P_e} + e^{-P_e}}{e^{P_e} - e^{-P_e}} - \frac{1}{P_e} = \text{Coth}(P_e) - \frac{1}{P_e} \quad (22)$$

En todo caso, el valor máximo de α (o valor crítico), con el que se puede perturbar la función de peso original sin perder la información proveniente de los nodos aguas abajo, está dado por (23) y se

deriva haciendo igual a cero el coeficiente que multiplica el valor nodal ϕ_{i+1} en la ecuación (9).

$$\alpha_{crit} = 1 - \frac{1}{|P_e|} \quad (23)$$

Estabilización Petrov-Galerkin en contracorriente para problemas de advección-difusión bidimensionales

La revisión del problema unidimensional resulta en extremo valiosa para el análisis de la corrección impuesta por el método SUPG. Sin embargo, el paso a problemas en dos o tres dimensiones necesita considerar algunos conceptos adicionales. Se puede verificar fácilmente cómo la ecuación de ensamble (9), alcanzada con la estabilización SUPG, puede ser construida de otra forma partiendo de un planteamiento Bubnov-Galerkin y aumentando artificialmente el término difusivo, tal como se plantea en (24).

$$-\frac{d}{dx} \cdot \left[(k + k_a) \frac{d\phi}{dx} \right] + u \cdot \frac{d\phi}{dx} = Q \quad (24)$$

donde k_a es el término de difusivo incluido para estabilizar la solución y el cual se define como $k_a = \frac{1}{2} \alpha u h$. Esta interpretación del método SUPG resulta especialmente útil para la generalización de la técnica a problemas en dos o tres dimensiones. Así como en problemas unidimensionales la modificación de las funciones de peso es equivalente a adicionar un término difusivo que actúa en la dirección del flujo, para problemas con una o dos dimensiones adicionales se debe garantizar que el efecto de la difusión artificial actúe contrarrestando el efecto advectivo, el cual solo actúa en la dirección de la velocidad \vec{u} (Zienkiewicz et ál., 2000). De acuerdo con este planteamiento, una perturbación sobre la función de forma, como la escrita en la ecuación (25), solo logra estabilizar el efecto advectivo en la dirección x . De forma análoga, se podría perturbar la función de ponderación para estabilizar la advección en la dirección y , como se muestra en (26).

$$W_i^* = W_i + \frac{\alpha h}{2} \frac{\partial W_i}{\partial x} \quad (25)$$

$$W_i^* = W_i + \frac{\alpha h}{2} \frac{\partial W_i}{\partial y} \quad (26)$$

De acuerdo a lo anterior, para lograr estabilizar la solución en la dirección de una velocidad en componentes bidimensionales se requiere ponderar las perturbaciones planteadas en (25) y (26), tal como se muestra en (27) (ver Hughes et ál., 1979).

$$W_i^* = W_i + \frac{\alpha h}{2} \left[\frac{u_x}{|\vec{u}|} \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} \right) + \frac{u_y}{|\vec{u}|} \left(\frac{\partial W_i}{\partial y} \right) \right] \quad (27)$$

donde ∂_x y ∂_y son las componentes de la velocidad en las direcciones globales $x-y$, y α es el coeficiente de perturbación calculado de acuerdo con (23), empleando el valor de la norma de la velocidad y una dimensión característica h , como la mostrada en la Figura 1.

Tomando la expresión (3) en su forma bidimensional, tal como se presenta en (28)

$$\int_{\Omega} \nabla W^* \cdot k \nabla \phi d\Omega + \int_{\Omega} W^* \vec{u} \cdot \nabla \phi d\Omega = \int_{\Omega} W^* Q d\Omega + \int_{\Gamma} W^* k \vec{e}_n \cdot \nabla \phi d\Gamma \quad (28)$$

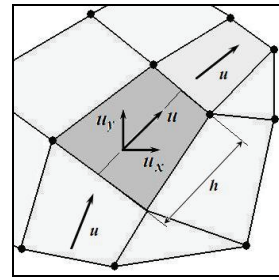


Figura 1. Línea de corriente al interior de un elemento bidimensional.

donde \vec{e}_n es el vector normal al borde de flujo o borde de Neumann, y empleando aproximaciones convencionales $\phi^e = \sum_m N_m \phi_m$, así

como la función de peso modificada (27), se llega a la ecuación (29).

$$\{ [K] + [K_s] \} \phi = \{ [f] + [f_s] \} \quad (29)$$

En esta expresión, $[K]$ y $[f]$ corresponden, respectivamente, a la matriz de rigidez y al vector de términos independientes, obtenidos a partir del planteamiento no estabilizado (Bubnov-Galerkin). Estos términos se presentan en las ecuaciones (30) y (31). En tanto que $[K_s]$ y $[f_s]$ son términos de estabilización adicionados a la solución convencional, los cuales se definen en (32) y (33).

$$[K] = \int_{\Omega^e} k \left[\frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial N_l}{\partial x} + \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_l}{\partial y} \right] d\Omega + \int_{\Omega^e} u_x N_l \frac{\partial N_m}{\partial x} + u_y N_l \frac{\partial N_m}{\partial y} d\Omega \quad (30)$$

$$[f] = \int_{\Omega^e} N_l Q d\Omega \quad (31)$$

$$[K_s] = \int_{\Omega^e} \frac{\alpha h k}{2|u|} \left[u_x \left(\frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) + u_y \left(\frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega^e} \frac{\alpha h k}{2|u|} \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial x} \right] d\Omega + \int_{\Omega^e} \frac{\alpha h}{2|u|} \left[u_x^2 \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} + u_x u_y \left(\frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial y} + \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial x} \right) + u_y^2 \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} \right] d\Omega \quad (32)$$

$$[f_s] = \int_{\Omega^e} \frac{\alpha h}{2|u|} Q \left(u_x \frac{\partial N_l}{\partial x} + u_y \frac{\partial N_l}{\partial y} \right) d\Omega \quad (33)$$

Implementación numérica

Para la implementación numérica del método SUPG planteado en las ecuaciones (30) a (33) se empleó lenguaje Fortran y se incorporaron las siguientes características: (i) integración numérica por cuadratura gaussiana de cuatro puntos; (ii) cálculo de los coeficientes de perturbación α en cada punto de integración gaussiana empleando la ecuación (22); (iii) cálculo del coeficiente de perturbación empleando la magnitud de la velocidad resultante en cada punto de integración, y una dimensión característica obtenida a partir de una equivalencia entre el área del elemento y la de un círculo con la misma superficie; (iv) cálculo de las derivadas direccionales de cada una de las componentes de velocidad empleando diferencias finitas centradas.

Casos de caso de estudio: ejemplo de Brezzi

El caso de estudio que se presenta, denominado ejemplo de Brezzi (Brezzi et ál., 1998), es el problema comúnmente emplea-

do para evaluar técnicas de estabilización de la EDDAR. La ecuación diferencial que modela este problema está definida en la ecuación (34).

$$-k\nabla^2\phi + \bar{u}(x,y) \cdot \nabla\phi = 0 \quad (34)$$

Sujeta a las condiciones de borde mostradas en la Figura 2, con $k=0,005$ y $\bar{u}(x,y) = [-y, x]$.

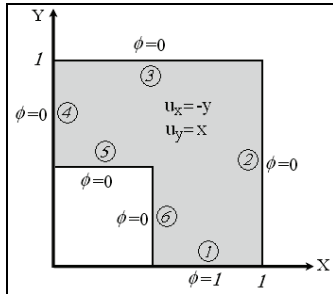


Figura 2. Definición del dominio y condiciones de borde en el problema de Brezzi.

Este caso representa un problema de alta complejidad debido a la presencia de zonas de alto gradiente de ϕ en áreas ubicadas aguas abajo (cercasas a lados 3 y 4 del dominio), así como una zona en la que se combina un punto de singularidad y altos valores en el gradiente de la función (vértice formado por los lados 5 y 6).

La Figura 3 muestra los resultados obtenidos para una malla de 7.500 elementos (tamaño promedio $h = 0,01$), empleando tanto el método de *Bubnov-Galerkin*, como la estabilización *SUPG*. Se observa que para este tamaño de malla los números de Peclet alcanzados son relativamente bajos en todo el dominio ($P_e < 1.4$), especialmente en la zona aguas abajo o zona de salida del flujo (lado 4 del dominio), en donde se alcanzan valores de P_e iguales a la unidad. Por lo anterior, es de esperarse que ambos modelos proporcionen soluciones similares, lo que se evidencia al observar la gráfica de convergencia de la norma de energía mostrada en la Figura 6.

En la Figura 4 se observa la solución obtenida empleando ambas formulaciones y una malla con 507 elementos (tamaño promedio $h = 0,04$). Esta figura muestra cómo la aproximación convencional exhibe una fuerte oscilación en la zona de salida del fluido (lado 4 del dominio), en donde se localiza un alto gradiente de la función o capa límite de salida, junto con un número de Peclet superior a dos. De igual forma, se observa una oscilación localizada en el vértice interno del dominio o punto de singularidad, en donde también se puede ver la presencia de capa límite. Estas oscilaciones espurias desaparecen empleando la técnica de estabilización *SUPG*, como se observa en la misma figura. La gráfica de convergencia de la Figura 7 muestra que la norma de energía de la solución alcanzada por *SUPG* se encuentra más cercana al valor de convergencia que la norma calculada con la solución convencional.

La Figura 5 presenta la aproximación alcanzada para este caso empleando las dos formulaciones y una malla con 108 elementos (tamaño promedio $h = 0,09$). Se puede apreciar el incremento en los picos de las oscilaciones ya existentes en la solución convencional de la Figura 4, así como la aparición de una oscilación adicional en la región aguas abajo, cercana al lado 4 del dominio. Este incremento en las oscilaciones se explica al observar el aumento

en los números de Peclet, los cuales en las zonas de las oscilaciones son superiores a cinco. Nuevamente, estas oscilaciones son evitadas cuando se emplea la técnica de estabilización *SUPG*. En la Figura 6 se puede evaluar un aumento en la diferencia de las normas de energía de las dos soluciones.

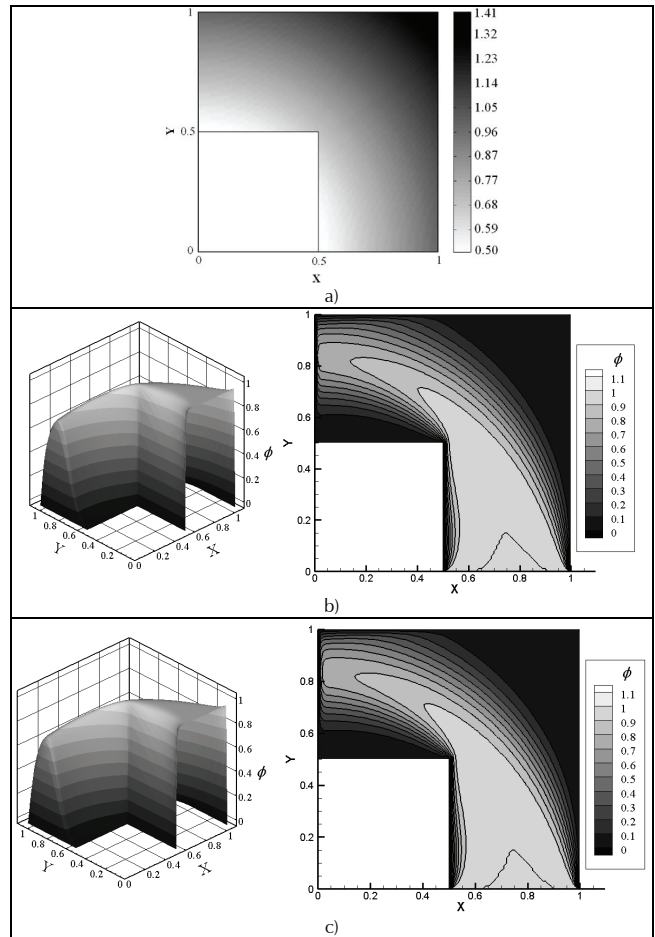


Figura 3. Comportamiento del número de Peclet (a) y solución obtenida con *Bubnov-Galerkin* (b) y *Petrov-Galerkin SUPG* (c), para una malla de elementos rectangulares con $h = 0,01$.

Conclusiones

La implementación del método *SUPG* desarrollada permitió alcanzar aproximaciones numéricas estables para problemas de estacionarios altamente advectivos. Se evaluó la inestabilidad exhibida por las soluciones *Bubnov-Galerkin* a la luz de la magnitud del número de Peclet y se logró establecer que la presencia de las oscilaciones se da en las regiones aguas abajo cuando el número de Peclet supera el valor unitario. No obstante la buena estabilización en las aproximaciones, la exactitud de las mismas no mejora notablemente empleando *SUPG* con respecto al método convencional *Bubnov-Galerkin*. Esto se observa en la gráfica de convergencia de la norma de energía calculada para diferentes mallas, la cual muestra comportamientos similares para los dos métodos.

Bibliografía

- Araya, R., Behrens, E., Rodríguez, R., An adaptive stabilized finite element scheme for the advection–reaction–diffusion equation., *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 54, 2005, pp. 491–503.

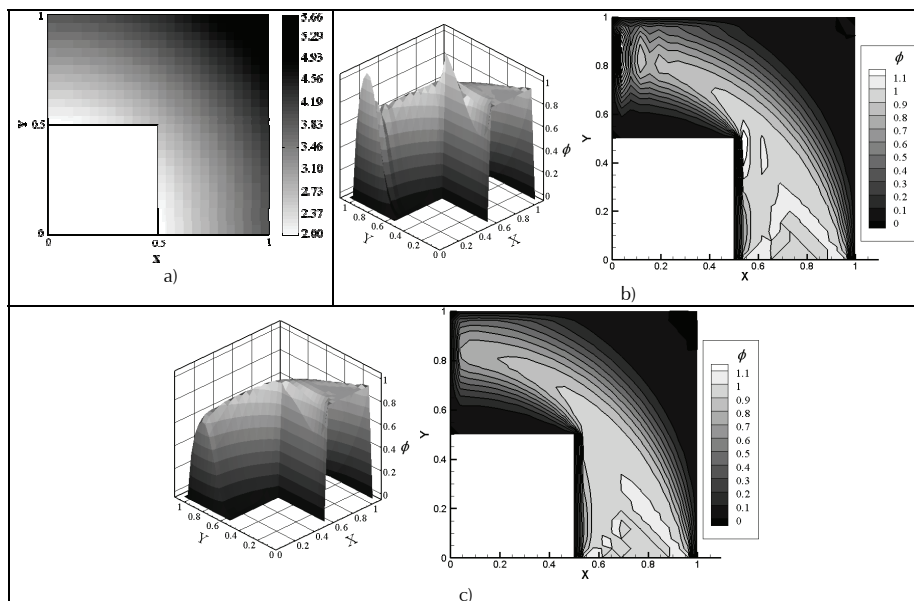


Figura 4. Comportamiento del número de Peclet (a) y solución obtenida con Bubnov-Galerkin (b) y Petrov-Galerkin SUPG (c), para una malla de elementos rectangulares con $h = 0,04$.

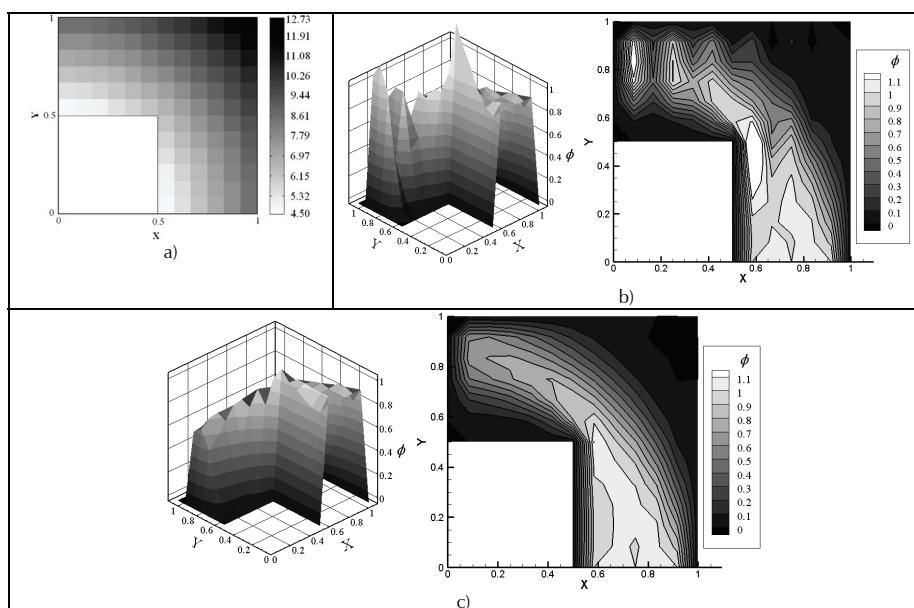


Figura 5. Comportamiento del número de Peclet (a) y solución obtenida con Bubnov-Galerkin (b) y Petrov-Galerkin SUPG (c), para una malla de elementos rectangulares con $h = 0,09$.

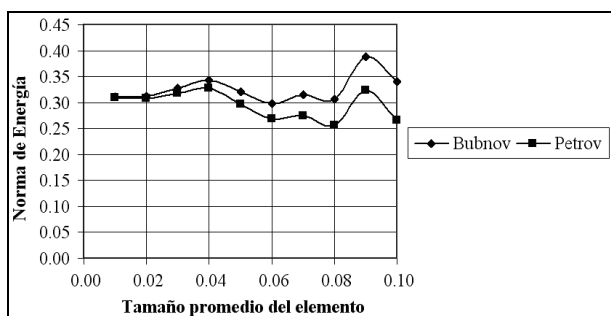


Figura 6. Gráfica de convergencia de la norma de energía en términos del tamaño promedio de elementos.

Babuska, I., Ihlenburg, F., Paik, E., Sauter, S., A generalized finite element method for solving the Helmholtz equation in two dimensions with minimal pollution., *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 128, 1995, pp. 325-359.

Baiocchi, C., Brezzi, F., Franca, L., Virtual bubbles and Galerkin/least-square type methods., *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 105, 1993, pp. 125-141.

Brezzi, F., Marini D., Russo A., Applications of the pseudo residual-free bubbles to the stabilization of convection-diffusion problems., *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 166, 1998, pp. 51-63.

Brooks, A., Hughes, T., Stream upwind Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flow with particular emphasis on the incompressible Navier Stokes equations., *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 32, 1982, pp. 199-259.

Chrispell, J., Ervin, V., Jenkins, E., A fractional step θ -method for convection-diffusion problems., *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 333, 2007, pp. 204-218.

Christie, I., Griffiths, D., Zienkiewicz, O., Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives., *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, 1976, pp. 1389-1396.

Cockburn, B., Karniadakis, G., Shu, C., *Discontinuous Galerkin Methods- Theory, Computational and Application*, Springer (ed.), 2000.

Dan, D., Mueller, C., Chen, K., Glazier, J., Solving the advection-diffusion equations in biological contexts using the cellular Potts model., *Physical Review*, Vol. 72, 2005, 041909.

Harari, I., Hughes, T., Stabilized finite element methods for steady advection-diffusion with production., *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 115, 1994, pp. 165-191.

Hughes, T., Brooks, A., A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion., In *Finite Element Method for Convection Dominated Flows (ASME)*, Vol. 34, 1979, pp. 19-35.

Hughes, T., Franca, L., Hulbert, G., Johan Z., Sakhil, F., The Galerkin least square method for advective diffusion equations., *Recent Developments in Computational Fluid Mechanics, AMD 94-ASME*, 1988.

Hughes, T., Franca, L., Hulbert, G., A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/least-squares method for advective diffusive equations., *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 73, 1989, pp. 173-189.

Onate, E., Derivation of stabilized equations for numerical solution of advective diffusive transport and fluid flow problems.,

- Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 151, 1998, pp. 233-265.
- Richter, O., Modelling dispersal of populations and genetic information by finite element methods., *Environmental Modelling & Software*, Vol. 23, No. 2, 2008, pp. 206-214.
- Rieben, R., White, D., Wallin, B., Solberg, J., An arbitrary Lagrangian–Eulerian discretization of MHD on 3D unstructured grids., *Journal of Computational Physics*, Vol. 226, No. 1, 2007, pp. 534-570.
- Russo, A., Bubble stabilization of the finite element method for the linearized incompressible Navier-Stokes equation., *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 132, 1996, pp. 335-343.
- Sanín, M., Montero, G., A finite difference model for air pollution simulation., *Advances in Engineering Software*, Vol. 38, 2007, pp. 358–365.
- Smith, R., Optimal and near-optimal advection-diffusion finite-difference schemes iii. Black-Scholes equation., *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 456, 2000, pp. 1019-1028.
- Vellando, P., Puertas, J., Bonillo, J., Fe, J., Una formulación en elementos finitos para la resolución del flujo viscoso incompresible no permanente., *IV Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, Sevilla, 1999.
- Zienkiewicz, O., Gallagher, R., Hood, P., Newtonian and non-Newtonian viscous incompressible flow. Temperature induced flows and finite elements solutions., *The Mathematics of Finite Elements and Applications*, Academic Press (ed.), 1975.
- Zienkiewicz, O., Heinrich, J., Huyakorn, P., Mitchel, A., An upwind finite element scheme for two dimensional convective transport equations., *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, 1977, pp. 131-144.
- Zienkiewicz, O., Löhner, R., Morgan, K., Nakazawa, S., Finite Elements in Fluid mechanics- a decade of progress., *Finite Elements in Fluids*, Vol. 5, Cap. 1, 1984, pp. 1-26.
- Zienkiewicz, O., Taylor, R., *Finite Element Method* Vo. 3, Butterworth-Heinemann College (ed.), 2000, pp. 5-150.