UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLÍN

FACULTAD DE CIENCIAS

POSGRADO EN MATEMÁTICAS

EL TEOREMA DEL PASO DE LA MONTAÑA:

APLICACIÓN Y GENERALIZACIÓN

Por

Carlos Augusto Vélez López

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de Magister en Matemáticas.

Director : Jorge Cossio B.

Diciembre de 2001

EL TEOREMA DEL PASO DE LA MONTAÑA: APLICACIÓN Y GENERALIZACIÓN

Carlos Augusto Vélez L.

Aprobado por:

Jorge Cossio B.

Director

Alfonso Castro B.

Firma Diego Mejía, Director de Programas Curriculares en Matemáticas por Alfonso Castro, quien envió concepto escrito.

Jorge Mejía L.

Jurado

Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por COLCIENCIAS,
Proyecto código 1118-05-11412.

AGRADECIMIENTOS

Agradezo inmensamente a los profesores del Posgrado en Matemáticas quienes, con sus enseñanzas y correcciones, han hecho posible la culminación de este trabajo. Muy especialmente quiero agradecer al Profesor Jorge Cossio por sus valiosos consejos académicos y personales.
Tambien agradezco a Gloria Candia por su amabilidad y apoyo.

RESUMEN

En este trabajo se estudia El Teorema del Paso de la Montaña. En el capítulo I se usa dicho teorema para probar la existencia de soluciones clásicas de un signo de un problema de Dirichlet sublineal. En el capítulo II se estudia una generalización del Teorema del Paso de la Montaña que, además de garantizar la existencia de puntos críticos de minimax de funcionales definidos en espacios de Banach, caracteriza el comportamiento del funcional alrededor de dichos puntos.

CONTENIDO

Página

INTRODUCCIÓN

Una de las principales herramientas empleadas para estudiar la existencia de soluciones de problemas elípticos semilineales es la teoría de puntos críticos. A su vez, uno de los resultados principales de esta teoría es el Teorema del Paso de la Montaña debido a A. Ambrosetti y P. Rabinowitz (ver [2]). Este teorema garantiza, bajo hipótesis adecuadas, la existencia de puntos críticos de minimax para funcionales $I : E \to \mathbb{R}$ donde E es un espacio de Banach real. A continuación se describe este resultado de manera precisa.

Sean E un espacio de Banach real e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Se dice que I satisface *la condición de Palais-Smale* (en adelante escrita como (PS)), si cualquier sucesión $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ en E, para la cual $\{I(u_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es acotada y $\lim\limits_{m\to\infty} I'(u_m) = 0$, admite una subsucesión convergente.

Teorema (Teorema del Paso de la Montaña ([2])). *Sea E un espacio de Banach real y sea $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ un funcional que satisface la condición (PS). Supóngase que $I(0) = 0$ y*
(I_1) existen constantes positivas ρ y α tales que $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$, y
(I_2) existe un $e \in E - \overline{B_\rho}(0)$ tal que $I(e) \leq 0$.
Entonces I posee un valor crítico $c \geq \alpha$. Además c puede ser caracterizado como

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} I(u),$$

donde $\Gamma = \{g \in C([0,1], E)/\ g(0) = 0,\ g(1) = e\}$.

En el Capítulo I de este trabajo, se presenta una aplicación del Teorema del Paso de la Montaña en la solución del problema

$$\text{(0.1)} \qquad \begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, es un dominio acotado con frontera suave, Δ es el operador de Laplace, y la función f es sublineal y subcrítica. Más específicamente se demuestra el siguiente teorema.

Teorema A. *Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable que satisface las siguientes condiciones:*
(i) $f(0) = 0$,
(ii) $f'(0) < \lambda_1$; *y*
(iii) $f'(\infty) := \lim_{|t| \to +\infty} f(t)t^{-1} \in (\lambda_1, +\infty)$,
donde λ_1 es el valor propio principal del operador $-\Delta$ con condición de Dirichlet cero en la frontera, el problema (0.1) tiene una solución clásica positiva y una solución clásica negativa.

Sea $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...$ la sucesión de valores propios del operador $-\Delta$ en Ω con condición de Dirichlet cero en la frontera.
En [5], Castro y Cossio establecen resultados análogos al que se presenta aquí, pero allí, además de las hipótesis *(i)* y *(ii)* del Teorema A, se hace uso de las siguientes hipótesis adicionales: existen $k \geq 2$ y $\delta > 0$ tales que
(iv) $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ y
(v) $f'(t) \leq \lambda_{k+1} - \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
Estas condiciones permiten aplicar una técnica, denominada Método de Reducción de Lyapunov-Schmidt, para reducir la solubilidad de (0.1) a la solubilidad de un problema finito dimensional.
El Teorema A, a diferencia de los teoremas de [5], no depende del acotamiento global de la derivada de la no linealidad. Lo novedoso en la prueba de este resultado, es que sólo se hace uso del Teorema del Paso de la Montaña para probar la existencia de soluciones débiles de un problema asociado a (0.1) y, con la ayuda de resultados clásicos de Análisis no Lineal, se demuestra que dichas soluciones débiles son soluciones clásicas de un signo. En la primera sección del Capítulo I se resumen algunos resultados de Análisis tales como los Teoremas de Encaje de Sobolev, la Desigualdad de Poincaré y el Lema de Vainberg, entre otros. La prueba de estos resultados aparece en los textos que se citan como referencia. En la segunda sección se presenta la demostración de la existencia de soluciones de un signo de (0.1).
Por otra parte, en el Capítulo II del presente trabajo se estudia una generalización del Teorema del Paso de la Montaña debida a H. Hofer (ver [9]). Este resultado, además de dar condiciones para la existencia de puntos críticos de tipo minimax de funcionales definidos en espacios de Banach, describe el comportamiento local del

funcional alrededor de sus puntos críticos y caracteriza dichos puntos como puntos de mínimo local o del tipo paso de la montaña.
Sean E un espacio de Banach real e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Se definen los siguientes conjuntos: Para $c, s \in \mathbb{R}$, $A_s := \{u \in E/\ I(u) \leq s\}$, $\overset{\circ}{A}_s := \{u \in E/\ I(u) < s\}$ y $K_c := \{u \in E/\ I(u) = c \text{ y } I'(u) = 0\}$.
Se dice que $u_0 \in E$ es un *punto crítico del tipo paso de montaña de* I si, para algún $c \in \mathbb{R}$, $u_0 \in K_c$ y se cumple la siguiente condición: para cada vecindad abierta $U \subset E$ de u_0, $\overset{\circ}{A}_c \cap U \neq \emptyset$ y $\overset{\circ}{A}_c \cap U$ no es arco-conexo.

Teorema B(Generalización del Teorema del Paso de la Montaña ([9])). *Sea E un espacio de Banach real y sea $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ un operador que satisface la condición (PS). Supóngase que $e_0 \in E$, $e_1 \in E$ y $e_0 \neq e_1$. Se definen $A := \{a \in C([0,1], E) : a(0) = e_0, a(1) = e_1\}$, $d := \max\{I(e_0), I(e_1)\}$ y*

$$c := \inf_{a \in A} \max_{t \in [0,1]} I(a(t)).$$

Supóngase que $c > d$. Entonces $K_c \neq \emptyset$. Además existe al menos un punto crítico $u_0 \in K_c$ el cual es de mínimo local o del tipo paso de montaña. Más aun, si todos los puntos críticos de K_c son aislados, K_c contiene al menos un punto del tipo paso de montaña.

Para demostrar el teorema anterior requerimos dos lemas. El primero es un lema topológico cuya demostración se incluye en el Capítulo II. El segundo es una variante del Lema de Deformación (ver [11]) de la cual sólo se indica cómo se prueba a partir de la demostración del Lema de Deformación que aparece en [11].

CAPÍTULO I

UNA APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL PASO DE LA MONTAÑA A LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE DIRICHLET SUBLINEAL

En este capítulo se usa el Teorema del Paso de la Montaña para probar la existencia de soluciones no triviales del problema

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, es un dominio acotado con frontera suave y la función f satisface ciertas condiciones que se aclararán más adelante. En la Sección 1.1 se enuncian algunos resultados técnicos que se requieren para probar, en la segunda sección, el resultado principal. Las demostraciones de estos lemas aparecen en los textos que se citan como referencia. La demostración del teorema principal, Teorema A, se basa en la aplicación del Teorema del Paso de la Montaña para garantizar la existencia de soluciones débiles del problema planteado y se hace en la Sección 1.2.

A lo largo de este capítulo se supondrá que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, es un conjunto abierto, conexo y acotado con frontera suave. Se denotará por Δ al operador de Laplace y por $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ la sucesión de valores propios del operador $-\Delta$ en Ω con condición de Dirichlet cero en la frontera. Además, $H := H_0^1(\Omega)$ y $\|.\|_p$ denotará la norma en $L^p(\Omega)$.

§ 1.1 Preliminares.

Teorema 1.1.1 (Encajes de Sobolev). *La inyección*

$$H_0^1(\Omega) \subset L^s(\Omega), \text{ donde } 1 \leq s \leq \frac{2N}{N-2},$$

es continua.

Además, en $H_0^1(\Omega)$ la norma de $H^1(\Omega)$ es equivalente a la norma definida, para $u \in H$, por

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Más aun, para cada $u \in H_0^1(\Omega)$ *se tiene la* **Desigualdad de Poincaré:**

$$\int_\Omega u^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_\Omega \|\nabla u\|^2 dx.$$

Demostración. Ver [3] (págs. 168, 173, 174), [4] y [7].
En virtud del Teorema 1.1.1, a lo largo de este capítulo, se supondrá que $H_0^1(\Omega)$ está dotado de esta última norma.

Teorema 1.1.2. (Rellich-Kondrachov). *La inyección*

$$H_0^1(\Omega) \subset L^s(\Omega), \text{ para todo } s \in [1, \frac{2N}{N-2})$$

es compacta.

Demostración. Ver [3] pág. 169, 173.

Teorema 1.1.3. (Lema de Vainberg). *Sea* g *una función tal que*
(g_1) $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, *y*
(g_2) *Existen constantes* $r \geq 1$, $s \geq 1$, $a_1 \geq 0$ *y* $a_2 \geq 0$ *tales que*

$$|g(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^{r/s}$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}$.
Entonces el operador $\phi(\cdot) \mapsto g(\cdot, \phi(\cdot))$ *pertenece a la clase* $C(L^r(\Omega), L^s(\Omega))$.

Demostración. Ver [11] (Apéndice B).

Definición 1.1.4. Sean E un espacio de Banach real e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Se dice que I satisface *la condición de Palais-Smale* (en adelante escrita como (PS)), si cualquier sucesión $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ en E, para la cual $\{I(u_m)\}_{m=1}^\infty$ es acotada y $\lim_{m \to \infty} I'(u_m) = 0$, admite una subsucesión convergente.

Teorema 1.1.5. *Sea* p *una función tal que*
(p_1) $p \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, *y*
(p_2) *Existen constantes* $a_1 \geq 0$ *y* $a_2 \geq 0$ *tales que*

$$|p(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^s$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$ *y* $\xi \in \mathbb{R}$, *donde* $0 \leq s < \frac{N+2}{N-2}$. *Si*

$$\begin{aligned} P: \ & \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & (x,\xi) \mapsto P(x,\xi) := \int_0^\xi p(x,t)\, dt \end{aligned}$$

y el funcional $J: \ H \to \mathbb{R}$ *se define por*

$$J(u) := \int_\Omega (\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 - P(x,u))\, dx, \qquad \text{para cada } \ u \in H,$$

entonces $J \in C^1(H,\mathbb{R})$ *y*

$$DJ(u)v = \int_\Omega (\nabla u.\nabla v - p(x,u)v)\, dx, \quad \forall u \in H, \ \forall v \in H.$$

Además, si $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ *es una sucesión acotada en* H *tal que* $DJ(u_m) \to 0$, *cuando* $m \to \infty$, *entonces* $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ *tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Ver [11] (Apéndice B).

Definición 1.1.6. Si $p \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $u \in H$ satisface la ecuación

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi - p(x,u))\varphi\, dx = 0$$

para toda $\varphi \in H$, se dice que u es *solución débil* del problema

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} \Delta u + p(x,u) = 0 \ \text{ en } \ \Omega \\ \qquad\qquad\quad u = 0 \ \text{ en } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisface ambas ecuaciones en (1.1), se dice que u es *solución clásica* de (1.1).

Teorema 1.1.7. *Sea* $p: \ \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función localmente Lipschitz, i.e. dado* $(x_0,\xi_0) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, *existen* $r > 0$ *y* $C > 0$ *tales que, si* $(x,\xi),(x',\xi') \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, $x, x' \in B_{\mathbb{R}^N}(x_0,r)$ *y* $\xi,\xi' \in B_{\mathbb{R}}(\xi_0,r)$,

$$|p(x,\xi) - p(x',\xi')| \leq C(\|x - x'\| + |\xi - \xi'|).$$

Supóngase , además, que p *satisface la condición* (p_2) *de el enunciado del Teorema 1.1.5. Entonces toda solución débil del problema (1.1) es solución clásica.*

Demostración. Ver [1].

Teorema 1.1.8. *Si $\Omega' \subset \Omega$ es abierto y no vacío, cualquier valor propio de $-\Delta$ en Ω' con condición de Dirichlet igual a cero, es mayor o igual a λ_1.*

Demostración. Este resultado es consecuencia del Teorema 2, pág. 408 de [6].

Teorema 1.1.9. *Sea u una solución clásica del problema*

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

Si u es no negativa y existe un $x \in \Omega$ tal que $u(x) > 0$, entonces $\lambda = \lambda_1$.

Demostración. Este resultado es consecuencia de la Proposición 1.15, pág. 48 de [7].

Teorema 1.1.10 (Principio del Máximo Fuerte). *Sea L un operador de la forma*

$$L[w] = \Delta w + c(x)w,$$

donde $x \in \Omega$, $w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y c es una función acotada en Ω tal que $c \leq 0$ en Ω. Si $L[v] \geq 0$ en Ω y v es no constante, entonces v no puede alcanzar un máximo no negativo en Ω.

Demostración. Ver [10] (pág. 64, Teorema 6).

Teorema 1.1.11 (Teorema del Paso de la Montaña). *Sea E un espacio de Banach real y sea $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ un operador que satisface la condición (PS). Supóngase que $I(0) = 0$ y*

(I_1) existen constantes positivas ρ y α tales que $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$, y

(I_2) existe un $e \in E - \overline{B_\rho}(0)$ tal que $I(e) \leq 0$.

Entonces I posee un valor crítico $c \geq \alpha$. Además c puede ser caracterizado como

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} I(u),$$

donde $\Gamma = \{g \in C([0,1], E) / \ g(0) = 0,\ g(1) = e\}$.

Demostración. Ver [2].

§ 1.2 Una Aplicación.

A lo largo de esta sección se supondrá que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable que satisface las siguientes condiciones:
(i) $f(0) = 0$,
(ii) $f'(0) < \lambda_1$; y
(iii) $f'(\infty) := \lim_{|t|\to+\infty} f(t)t^{-1} \in (\lambda_1, +\infty)$.

Teorema A. *El problema*

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & en \ \ \Omega \\ u = 0 & en \ \ \partial\Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

tiene una solución clásica positiva y una solución clásica negativa.

Demostración. Se define $f^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f^+(t) := \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ f'(0)t, & t < 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Claramente f^+ es diferenciable en $\mathbb{R}$. Sea F^+ la función

$$\begin{aligned} F^+ :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & \xi \mapsto F^+(\xi) := \int_0^\xi f^+(t)\ dt. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Sea $J^+ : H \to \mathbb{R}$ el funcional definido por

$$J^+(u) := \int_\Omega (\frac{1}{2}\left\|\nabla u\right\|^2 - F^+(u))\ dx, \qquad \text{para cada} \ \ u \in H. \tag{1.6}$$

Afirmación 1. El funcional J^+ es de la clase $C^1(H, \mathbb{R})$ y

$$DJ^+(u)v = \int_\Omega (\nabla u . \nabla v - f^+(u)v)\ dx, \quad \forall u \in H,\ \forall v \in H. \tag{1.7}$$

Prueba. Dado que $f'(\infty) \in \mathbb{R}$, existe $k > 0$ tal que

$$t \geq k \Longrightarrow |f^+(t)| = |f(t)| \leq (1 + |f'(\infty)|)\ |t|. \tag{1.8}$$

Por la continuidad de f en $[0,k]$ existe $M_1 > 0$ tal que

(1.9) $$t \in [0,k] \Longrightarrow \left|f^+(t)\right| = |f(t)| \leq M_1.$$

Si se toma $a_1 := \max\{1 + |f'(\infty)|, |f'(0)|\}$ y $a_2 := M_1$, por la definición de f^+, de (1.8) y (1.9) se obtiene

(1.10) $$\left|f^+(t)\right| \leq a_1 |t| + a_2, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La afirmación se sigue de (1.10) y del Teorema 1.1.5. □
De la afirmación anterior es claro que u es solución débil del problema

(1.11) $$\begin{cases} \Delta u + f^+(u) = 0 & \text{en } \ \Omega \\ u = 0 & \text{en } \ \partial\Omega \end{cases}$$

si y sólo si u es un punto crítico del funcional J^+. La existencia de un punto crítico de J^+ se obtendrá con la ayuda del Teorema del Paso de la Montaña. Claramente $J^+(0) = 0$. Las afirmaciones siguientes permiten demostrar que J^+ satisface las demás hipótesis de dicho teorema.
Afirmación 2. Existen $\alpha > 0$ y $\rho > 0$ tales que

(1.12) $$\|u\|_H = \rho \Longrightarrow J^+(u) \geq \alpha.$$

Prueba. Por la hipótesis (ii) existe $\varepsilon > 0$ tal que

(1.13) $$f'(0) < \lambda_1 - 2\varepsilon \quad \text{y} \quad \lambda_1 - 2\varepsilon > 0.$$

Por tanto, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < t < \delta$ entonces

(1.14) $$\frac{f(t)}{t} < f'(0) + \varepsilon < \lambda_1 - \varepsilon.$$

Usando (1.14) se sigue que

(1.15) $$F^+(\xi) = \int_0^\xi f^+(t)\, dt \leq (\lambda_1 - \varepsilon)\frac{\xi^2}{2}, \quad \forall \xi \in (-\delta, \delta).$$

Similarmente, usando (1.10) se tiene

$$|F^+(\xi)| \leq a_1 \frac{|\xi|^2}{2} + a_2 |\xi|, \quad \forall \xi \in (-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty). \tag{1.16}$$

Sea $\eta > 0$. De (1.16) se sigue que

$$F^+(\xi) \leq (\frac{a_1}{2|\xi|^\eta} + \frac{a_2}{|\xi|^{\eta+1}}) |\xi|^{2+\eta}, \quad \text{si} \quad |\xi| \geq \delta,$$

y por tanto,

$$F^+(\xi) \leq (\frac{a_1}{2\delta^\eta} + \frac{a_2}{\delta^{\eta+1}}) |\xi|^{2+\eta} =: P(\delta) |\xi|^{2+\eta}, \quad \text{si} \quad |\xi| \geq \delta. \tag{1.17}$$

Sea $u \in H$. Sean $A_1 := \{x \in \Omega \,/\, |u(x)| < \delta\}$ y $A_2 := \{x \in \Omega \,/\, |u(x)| \geq \delta\}$. No hay que olvidar que u es un representante de una clase en H. Por tanto, $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A$ para algún conjunto A tal que $|A| = 0$.
Usando (1.15) y (1.17) se tiene que

$$\begin{aligned} J^+(u) &= \frac{1}{2} \|u\|_H^2 - \int_{A_1} F^+(u)\, dx - \int_{A_2} F^+(u)\, dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_H^2 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{2} \int_\Omega u^2\, dx - P(\delta) \int_\Omega |u|^{2+\eta}\, dx. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Si $\eta \leq \frac{4}{N-2}$ entonces por el Teorema 1.1.1 $H \hookrightarrow L^{2+\eta}(\Omega)$ con inyección continua. Así, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{2+\eta} \leq C \, \|u\|_H . \tag{1.19}$$

Por la desigualdad de Poincaré

$$\int_\Omega u^2\, dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_\Omega \|\nabla u\|^2\, dx. \tag{1.20}$$

De (1.18), (1.19) y (1.20) se sigue que

$$
\begin{aligned}
J^+(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{2\lambda_1}\|u\|_H^2 - C\ P(\delta)\|u\|_H^{2+\eta} \\
&= \|u\|_H^2\,(\frac{\varepsilon}{2\lambda_1} - C\ P(\delta)\|u\|_H^{\eta}).
\end{aligned} \tag{1.21}
$$

La afirmación se sigue de (1.21). □

Afirmación 3. Existe $\hat{u} \in H$ tal que $\|\hat{u}\|_H > \rho$ y $J^+(\hat{u}) < 0$.

Prueba. Teniendo en cuenta que $f'(\infty) > \lambda_1$, se sigue que, para a_3 tal que $f'(\infty) > a_3 > \lambda_1$, existe $M_2 > 0$ tal que

$$
f^+(t) = f(t) \geq a_3\ t, \quad \forall t \geq M_2 > 0. \tag{1.22}
$$

Por tanto

$$
\begin{aligned}
F^+(\xi) &= \int_0^{M_2} f^+(t)\ dt + \int_{M_2}^{\xi} f^+(t)\ dt \\
&\geq a_3\frac{\xi^2}{2} + a_4 \quad \forall \xi \geq M_2,
\end{aligned}
$$

donde a_4 es una constante. De la desigualdad anterior se sigue que

$$
F^+(\xi) \geq a_3\frac{\xi^2}{2} + a_5 \quad \forall \xi \geq 0 \tag{1.23}
$$

donde a_5 es constante. Sea φ_1 una función propia positiva de $-\Delta$ asociada a λ_1.
Al tomar $t \geq 0$ se tiene $t\varphi_1 \geq 0$.
Por la definición de J^+ y (1.23)

$$
\begin{aligned}
J^+(t\varphi_1) &= \int_\Omega (\frac{1}{2}\|\nabla(t\varphi_1)\|^2 - F^+(t\varphi_1))\ dx \\
&\leq \frac{t^2}{2}\int_\Omega \|\nabla\varphi_1\|^2 dx - \frac{t^2 a_3}{2}\int_\Omega {\varphi_1}^2 dx - a_5\,|\Omega| \\
&\leq \frac{t^2}{2}\int_\Omega \|\nabla\varphi_1\|^2 dx - \frac{t^2 a_3}{2}\int_\Omega {\varphi_1}^2 dx - a_5\,|\Omega|
\end{aligned}
$$

Además, vía integración por partes se obtiene

$$
\int_\Omega \|\nabla\varphi_1\|^2 dx = -\int_\Omega \varphi_1\ \Delta\varphi_1\ dx = \int_\Omega \lambda_1{\varphi_1}^2 dx. \tag{1.24}
$$

De la desigualdad anterior a (1.24) y de (1.24) se sigue que

$$J^+(t\varphi_1) \leq \frac{t^2}{2}(\lambda_1 - a_3)\int_\Omega \varphi_1^2 dx - a_5\,|\Omega|\,. \tag{1.25}$$

De (1.25), recordando que $a_3 > \lambda_1$, se tiene que $J^+(t\varphi_1) \to -\infty, \quad t \to +\infty$.
De esta última expresión se sigue la afirmación. □

Afirmación 4. El funcional J^+ satisface la condición de Palais-Smale. Es decir, dada una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en H tal que $\{J^+(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y $DJ^+(u_n) \to 0$, existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente.

Prueba. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ tal que $\{J^+(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y $DJ^+(u_n) \to 0$, $n \to \infty$. Según el Teorema 1.1.5 basta probar que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada para obtener la condición de Palais-Smale.

Supóngase, razonando por el absurdo, que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada. Entonces, existe una subsucesión, que por abuso de notación llamaremos $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\|u_n\|_H \to +\infty$, $n \to \infty$. Se define la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$h(t) = \begin{cases} f'(\infty)\,t, & t \geq 0 \\ f'(0)\,t, & t < 0. \end{cases} \tag{1.26}$$

Claramente h es continua y, por la definición de f^+,

$$f^+(t) = h(t) + \gamma(t), \tag{1.27}$$

donde

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{\gamma(t)}{t} = 0. \tag{1.28}$$

Dado que $\lim_{n\to\infty} DJ^+(u_n) = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_H = +\infty$, $\frac{DJ^+(u_n)}{\|u_n\|_H} \to 0$, $n \to \infty$.
Así, usando (1.7) y (1.27), para cada $v \in H$,

$$\int_\Omega (\nabla(\frac{u_n}{\|u_n\|_H}).\nabla v - \frac{h(u_n)}{\|u_n\|_H}\, v - \frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_H}\, v)\, dx \to 0, \text{ cuando } n \to \infty. \tag{1.29}$$

A continuación se demuestra que

$$(1.30)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left(\frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_H}v\right)\,dx = 0, \quad \forall v\in H.$$

En efecto, dado $\varepsilon>0$, por (1.28), existe $M_3>0$ tal que

$$(1.31)\qquad |t|\geq M_3 \Longrightarrow \left|\frac{\gamma(t)}{t}\right| < \varepsilon.$$

Por la continuidad de γ, existe $k>0$ tal que

$$(1.32)\qquad \forall t\in[-M_3,M_3]\,,\quad |\gamma(t)|\leq k.$$

Entonces, para $v\in H$ fijo, teniendo en cuenta (1.31), (1.32), la Desigualdad de Hölder y la continuidad del encaje de H en $L^2(\Omega)$,

$$(1.33)\qquad \begin{aligned}\left|\int_\Omega\left(\frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_H}\,v\right)\,dx\right| &\leq \int_{|u_n|>M_3}\left|\frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_H}\,v\right|\,dx+\int_{|u_n|\leq M_3}\left|\frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_H}\,v\right|\,dx\\ &\leq \int_{|u_n|>M_3}\left|\frac{\gamma(u_n)}{u_n}\,\frac{u_n}{\|u_n\|_H}v\right|\,dx+\frac{k}{\|u_n\|_H}\,\|v\|_2\,|\Omega|^{\frac12}\\ &\leq \frac{\varepsilon}{\|u_n\|_H}\,\|u_n\|_2\,\|v\|_2+\frac{k}{\|u_n\|_H}\,\|v\|_2\,|\Omega|^{\frac12}\\ &\leq \varepsilon\,C\,\|v\|_2+\frac{k\,|\Omega|^{\frac12}}{\|u_n\|_H}\,\|v\|_2\,.\end{aligned}$$

Como $\frac{k\,|\Omega|^{\frac12}\,\|v\|_2}{\|u_n\|_H}\to 0$, $n\to\infty$, de (1.33) se sigue (1.30). Por (1.29) y (1.30) se sigue que

$$(1.34)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left(\nabla\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_H}\right).\nabla v-\frac{h(u_n)}{\|u_n\|_H}\,v\right)\,dx=0,\quad \forall v\in H.$$

Puesto que $\{\frac{u_n}{\|u_n\|_H}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, existe una subsucesión, que por abuso se denotará igual, tal que

$$(1.35)\qquad \frac{u_n}{\|u_n\|_H}\rightharpoonup\omega\quad\text{en } H$$

para algún $\omega \in H$. Dado que el encaje $H \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es compacto,

$$\frac{u_n}{\|u_n\|_H} \longrightarrow \omega \quad \text{en } L^2(\Omega). \tag{1.36}$$

A continuación se demuestra que $\omega \neq 0$. Supóngase que $\omega = 0$. Es claro que

$$\left| \frac{DJ^+(u_n)}{\|u_n\|_H} \frac{u_n}{\|u_n\|_H} \right| \leq \frac{\|DJ^+(u_n)\|_{H^*}}{\|u_n\|_H} \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty. \tag{1.37}$$

Luego, por (1.27)

$$\left\| \frac{u_n}{\|u_n\|_H} \right\|_H^2 - \int_\Omega \left[\frac{h\,(u_n)}{\|u_n\|_H} \frac{u_n}{\|u_n\|_H} + \frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_H} \frac{u_n}{\|u_n\|_H} \right] dx \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty. \tag{1.38}$$

Por una demostración similar a la de (1.30) se llega a

$$\int_\Omega \left(\frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_H} \frac{u_n}{\|u_n\|_H} \right) dx \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty. \tag{1.39}$$

Además, en virtud de (1.36) y la hipótesis $\omega = 0$

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \left(\frac{h(u_n)}{\|u_n\|_H} \frac{u_n}{\|u_n\|_H} \right) dx \right| \leq \\
&\left| \int_{u_n \geq 0} \left(\frac{h(u_n)}{\|u_n\|_H} \frac{u_n}{\|u_n\|_H} \right) dx \right| + \left| \int_{u_n < 0} \left(\frac{h(u_n)}{\|u_n\|_H} \frac{u_n}{\|u_n\|_H} \right) dx \right| = \\
&|f'(\infty)| \int_{u_n \geq 0} \frac{u_n^2}{\|u_n\|_H^2}\, dx + |f'(0)| \int_{u_n < 0} \frac{u_n^2}{\|u_n\|_H^2}\, dx \leq \\
&|f'(\infty)| \left\| \frac{u_n}{\|u_n\|_H} \right\|_2^2 + |f'(0)| \left\| \frac{u_n}{\|u_n\|_H} \right\|_2^2 \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Combinando (1.38), (1.39) y (1.40) se llega a $1 = 0$, lo cual es absurdo. Se concluye que $\omega \neq 0$. Por (1.35), se tiene

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega \nabla \left(\frac{u_n}{\|u_n\|_H} \right) . \nabla v \; dx = \int_\Omega \nabla \omega . \nabla v \; dx.$$

Por la definición de h, se cumple que, para cualquier $\lambda > 0$, $h(\lambda t) = \lambda h(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Así, de (1.36) y el Lema de Vainberg (tomando $r = s = 2$) se sigue que

$$\frac{h(u_n)}{\|u_n\|_H} \longrightarrow h(\omega), \text{ en } L^2(\Omega).$$

Por la desigualdad de Hölder, para cada $v \in H$,

$$\int_\Omega \frac{h(u_n)}{\|u_n\|_H}\, v\, dx \longrightarrow \int_\Omega h(\omega) v\, dx, \; n \longrightarrow \infty.$$

Luego, (1.34) implica que

$$\int_\Omega (\nabla\omega . \nabla v - h(\omega)v)\, dx = 0 \quad \forall v \in H. \tag{1.41}$$

Esto lleva a concluir que ω es solución débil no trivial del problema

$$\begin{cases} \Delta\omega + h(\omega) = 0 & \text{en } \Omega \\ \omega = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.42}$$

Por el Teorema 1.1.7, ω es solución clásica de (1.42). Si $\Omega_1 := \{x \in \Omega \;/\; \omega(x) < 0\}$, entonces $\omega = 0$ en $\partial\Omega_1$. Luego

$$\begin{cases} \Delta\omega + f'(0)\,\omega = 0 & \text{en } \Omega_1 \\ \omega = 0 & \text{en } \partial\Omega_1. \end{cases} \tag{1.43}$$

Por el Teorema 1.1.8 se concluye que $\Omega_1 = \emptyset$. Así, $\omega \geq 0$ en Ω y por (1.42)

$$\begin{cases} \Delta\omega + f'(\infty)\,\omega = 0 & \text{en } \Omega \\ \omega = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.44}$$

pero esto, por el Teorema 1.1.9, contradice la condición $f'(\infty) > \lambda_1$. Por lo tanto, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada.

Por las Afirmaciones 1, 2, 3 y 4 el funcional J^+ satisface las hipótesis del Teorema del Paso de la Montaña, con lo cual se concluye que (1.11) tiene una solución débil no trivial u. Por el Teorema 1.1.7 esa solución es clásica. Sea $\Omega' := \{x \in \Omega | u(x) < 0\}$. Por la definición de f^+ se tiene que

$$\left\{ \begin{array}{rl} \Delta u + f'(0)u = 0 & \text{en } \Omega' \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega'. \end{array} \right. \tag{1.45}$$

Como $f'(0) < \lambda_1$, el Teorema 1.1.8 implica que $\Omega' = \emptyset$. Así, $u \geq 0$ en Ω. Por lo tanto, $f^+(u) = f(u)$. Ahora, (1.3) se puede reescribir como

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(-u) + \dfrac{f_-(u)}{u}(-u) = \dfrac{f_+(u)}{u}u \quad \text{en } \Omega \\ \qquad\qquad u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{1.46}$$

donde $\frac{f_+(\xi)}{\xi} := \frac{\max\{f(\xi),0\}}{\xi}$, $\frac{f_-(\xi)}{\xi} := \frac{\min\{f(\xi),0\}}{\xi}$ para todo $\xi > 0$ y se define $\frac{f_\pm(\xi)}{\xi}(0) := \{f'(0)\}_\pm$. De esta forma, las funciones $\frac{f_\pm(\xi)}{\xi}$ son continuas en $[0, +\infty)$. Sea $c(x) := \frac{f_-(u(x))}{u(x)} \leq 0$. Como $u \in C(\overline{\Omega})$, u es acotada y, por lo tanto, c es acotada. Por el Principio del Máximo Fuerte se sigue que $u > 0$ en Ω. Se ha demostrado la existencia de una solución positiva de (1.3).

Para probar la existencia de una solución negativa, se define la función $f^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f^-(t) := \left\{ \begin{array}{ll} f(t), & t \leq 0 \\ f'(0)t, & t > 0. \end{array} \right.$$

Sea F^- la función

$$\begin{aligned} F^- :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & \xi \mapsto F^-(\xi) := \int_0^\xi f^-(t)\, dt. \end{aligned}$$

Sea $J^- : H \to \mathbb{R}$ el funcional definido por

$$J^-(u) := \int_\Omega (\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - F^-(u))\, dx, \qquad \text{para cada } \ u \in H.$$

Se pueden probar afirmaciones análogas a las afirmaciones 1, 2, 3 y 4 para el funcional J^-. En particular, para verificar que J^- satisface la condición (PS), se toma la función $h^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$h^-(t) = \left\{ \begin{array}{ll} f'(\infty)\, t, & t \leq 0 \\ f'(0)\, t, & t > 0, \end{array} \right.$$

y se razona como en la demostración de la afirmación 4. Se obtiene entonces, por aplicación de Teorema del Paso de la Montaña, la existencia de una solución débil u del problema

$$\begin{cases} \Delta u + f^-(u) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por razonamientos análogos a los escritos anteriormente para probar la existencia de una solución positiva, se sigue que u es solución clásica, que

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

y que $u < 0$. ■

CAPÍTULO II

UNA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DEL PASO DE LA MONTAÑA

En este capítulo se presenta una generalización del Teorema del Paso de la Montaña debida a H. Hofer (ver [8], [9]). Este resultado describe el comportamiento local de funcionales definidos en espacios de Banach en las vecindades de algunos de sus puntos críticos. Para esto, Hofer caracteriza los puntos críticos dados por el Teorema del Paso de la Montaña, como puntos de mínimo local o *del tipo paso de montaña.* Así, en la Sección 2.1, antes de estudiar el resultado de [9], se precisa el concepto de *punto crítico del tipo paso de montaña.* Después de esto, se establecen dos lemas técnicos necesarios en la demostración del Teorema B. El primero de los lemas es de naturaleza topológica y el segundo es una variante del Lema de Deformación (ver [11]). Finalmente, en la Sección 2.2, se presenta la demostración de la generalización del Teorema del Paso de la Montaña.

§ 2.1 Preliminares.

Sean E un espacio de Banach real e $I \in C^1(E,\mathbb{R})$. A lo largo de este capítulo se emplearán las siguientes notaciones: Para $c, s \in \mathbb{R}$, $A_s := \{u \in E/\ I(u) \leq s\}$, $\overset{\circ}{A}_s := \{u \in E/\ I(u) < s\}$ y $K_c := \{u \in E/\ I(u) = c \text{ y } I'(u) = 0\}$.

Definición 2.1.1. Sean E un espacio de Banach real, $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ y $u_0 \in E$. Se dice que u_0 es un *punto crítico del tipo paso de montaña de I* si, para algún $c \in \mathbb{R}$, $u_0 \in K_c$ y se cumple la siguiente condición: para cada vecindad abierta $U \subset E$ de u_0, $\overset{\circ}{A}_c \cap U \neq \emptyset$ y $\overset{\circ}{A}_c \cap U$ no es arco-conexo. Se dice que u_0 es un punto *de mínimo local de I* si existe una vecindad abierta $V \subset E$ de u_0 tal que $I(u) \geq I(u_0)$ para todo $u \in V$.

Se dice que I satisface *la condición de Palais-Smale* (en adelante escrita como (PS)), si cualquier sucesión $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ en E, para la cual $\{I(u_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es acotada y $\lim_{m\to\infty} I'(u_m) = 0$, admite una subsucesión convergente.

Lema 2.1.2. *Sean (X,d) un espacio métrico, $\Sigma \subset X$ no vacío y compacto y $\Gamma \subset X$ tal que $\Sigma \subset \overline{\Gamma}$. Supóngase que existe un cubrimiento abierto $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ de Σ tal que* *para cada $\sigma \in \Sigma$, $\sigma \in U_\sigma$ y $U_\sigma \cap \Gamma$ es arco-conexo. Entonces existe un cubrimiento abierto disjunto y finito $\{V_i\}_{i=1,\ldots,n}$ de Σ en X tal que para cada $i = 1, \ldots, n$, $V_i \cap \Gamma$ está incluido en una arco-componente de $U \cap \Gamma$, donde $U = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma$.*

Demostración. Dado que Σ es compacto, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $\sigma \in \Sigma$, existe un $\overline{\sigma} \in \Sigma$ tal que $B_\delta(\sigma) \subset U_{\overline{\sigma}}$. Se define la relación $\widehat{\sim}$, en Σ, de la siguiente forma: $\sigma \widehat{\sim} \overline{\sigma}$ si y sólo si existe una colección $\{\sigma_j\}_{j=0,\ldots,m+1}$ en Σ tal que $\sigma_0 = \sigma$, $\sigma_{m+1} = \overline{\sigma}$ y $d(\sigma_j, \sigma_{j+1}) < \delta$ para todo $j = 0, 1, \ldots, m$. Claramente $\widehat{\sim}$ es una relación de equivalencia. Se denota por $[\sigma]$ a la clase de equivalencia de σ. Puesto que Σ es compacto, es totalmente acotado y, por esto, existe un número finito de δ-bolas $\{B_\delta(\sigma_l)\}_{l=1,\ldots,k}$ que cubren a Σ. Teniendo en cuenta que las clases de equivalencia de Σ generadas por la relación $\widehat{\sim}$ son no vacías y disjuntas y $B_\delta(\sigma_l) \subset [\sigma_l]$, para todo $l = 1, \ldots, k$, se concluye que existe un número finito de clases Σ_1,...,Σ_n. Para cada $i = 1, \ldots, n$, sea

$$V_i = \{x \in X | d(x, \Sigma_i) < \delta/4\} = d_{\Sigma_i}^{-1}(-\infty, \delta/4).$$

Por la continuidad de la función distancia se sigue que cada V_i es abierto. Además $\Sigma = \cup\Sigma_i \subset \cup V_i$. Teniendo en cuenta que las clases Σ_1,...,Σ_n son disjuntas, se tiene que la colección $\{V_i\}_{i=1,\ldots,n}$ es disjunta. Queda por demostrar que para cada $i = 1, \ldots, n$, $V_i \cap \Gamma$ está incluido en una arco-componente de $U \cap \Gamma =: \Gamma^*$.
Sea $\sim$ la relación de equivalencia definida en Γ^* por sus arco-componentes, i.e. dados $x, y \in \Gamma^*$, $x \sim y$ si y sólo si x y y están en la misma arco-componente de Γ^* o, de otra forma, si y sólo si existe un arco continuo en Γ^* que une a x con y. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$ fijo. Para probar que $V_i \cap \Gamma$ está incluido en una arco-componente de $U \cap \Gamma =: \Gamma^*$, sean $x, y \in V_i \cap \Gamma$. Se debe probar que $x \sim y$. Por definición de V_i existe una colección $(\sigma_j)_{j=0,1,\ldots,k+1} \subset \Sigma_i$ tal que

$$(2.1) \quad d(x, \sigma_0) < \frac{\delta}{4}, \quad d(y, \sigma_{k+1}) < \frac{\delta}{4}, \quad \text{y } d(\sigma_j, \sigma_{j+1}) < \delta \quad \text{para todo} \quad j = 0, \ldots, k.$$

Se toma $\epsilon := \frac{1}{2}(\delta - \max\{d(x, \sigma_0), d(y, \sigma_{k+1}), d(\sigma_0, \sigma_1), \ldots, d(\sigma_k, \sigma_{k+1})\})$. Obsérvese que $0 < \epsilon < \delta$. Puesto que $(\sigma_j)_{j=0}^{k+1} \subset \Sigma_i \subset \overline{\Gamma}$, para cada $j \in \{0, \ldots, k+1\}$, existe un $x_j \in \Gamma$ tal que

$$(2.2) \qquad d(\sigma_j, x_j) < \epsilon < \delta.$$

Por tanto $x_j \in B_\delta(\sigma_j) \subset U_{\overline{\sigma}_j} \subset U$, para algún $\overline{\sigma}_j \in \Sigma$. Así, para cada $j \in \{0, ..., k+1\}$,

$$x_j \in U \cap \Gamma = \Gamma^*. \tag{2.3}$$

Además, por la desigualdad triangular,

$$d(x_j, x_{j+1}) \leq d(x_j, \sigma_j) + d(\sigma_j, \sigma_{j+1}) + d(\sigma_{j+1}, x_{j+1}) < 2\epsilon + d(\sigma_j, \sigma_{j+1}) \leq \delta, \tag{2.4}$$

para cada $j = 0, ..., k$. Ahora se demuestra que $x \sim x_0, y \sim x_{k+1}$ y $x_j \sim x_{j+1}$ para $j = 0, ..., k$.
Por (2.1), (2.2) y la escogencia de δ, $\{x, x_0\} \subset B_\delta(\sigma_0) \subset U_{\overline{\sigma}_0}$, para algún $\overline{\sigma}_0 \in \Sigma$. Dado que $\{x, x_0\} \subset \Gamma$, se tiene entonces que $x, x_0 \in U_{\overline{\sigma}_0} \cap \Gamma$, el cual es arco-conexo por hipótesis. Luego, $x \sim x_0$. Por un argumento similar, se obtiene que $y \sim x_{k+1}$. Ahora, sea $j \in \{0, ..., k\}$. Por la desigualdad triangular se tiene que

$$d(\sigma_j, x_{j+1}) \leq d(\sigma_j, \sigma_{j+1}) + d(\sigma_{j+1}, x_{j+1}) < d(\sigma_j, \sigma_{j+1}) + \epsilon \leq \delta.$$

Por esto, (2.2) y (2.3), $\{x_j, x_{j+1}\} \subset B_\delta(\sigma_j) \cap \Gamma \subset U_{\overline{\sigma}_j} \cap \Gamma$, el cual es arco-conexo. Luego, $x_j \sim x_{j+1}$. Se concluye entonces que $x \sim x_0 \sim x_1 \sim ... \sim x_{k+1} \sim y$. Así, $V_i \cap \Gamma$ es arco-conexo. ■

Lema 2.1.3. *Sean E un espacio de Banach real e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ un funcional que satisface la condición (PS). Dados $\overline{\epsilon} > 0$, $c \in \mathbb{R}$ y vecindades abiertas W y V de K_c tales que $\overline{W} \subset V$ y $\alpha := dist(\partial V, W) > 0$, existen $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon}]$ y $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tales que:*

(i) para todo $u \in E$, $\eta(0, u) = u$ y $t \mapsto I(\eta(t, u))$ es una función no creciente,
(ii) $\eta(1, A_{c+\epsilon} - W) \subset A_{c-\epsilon}$,
(iii) $\eta([0,1] \times \overline{W}) \subset V$,
(iv) $\eta(t, u) = u$ para todo $t \in [0,1]$, si $I(u) \notin (c - \overline{\epsilon}, c + \overline{\epsilon})$.

NOTA: El Lema 2.1.3 es una variante del Lema de Deformación, el cual se presenta en [11](Apéndice A, Teorema A.4).

§ 2.2 Demostración del Teorema Principal.

Teorema 2.2.1. Generalización del Teorema del Paso de la Montaña ([8], [9]). *Sea E un espacio de Banach real y sea $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ un operador que satisface la condición (PS). Supóngase que $e_0 \in E$, $e_1 \in E$ y $e_0 \neq e_1$. Se definen $A := \{a \in C([0,1],E) : a(0) = e_0, a(1) = e_1\}$, $d := \max\{I(e_0), I(e_1)\}$ y*

$$c := \inf_{a\in A} \max_{t\in[0,1]} I(a(t)).$$

Supóngase que $c > d$. Entonces $K_c \neq \emptyset$. Además existe al menos un punto crítico $u_0 \in K_c$ el cual es de mínimo local o del tipo paso de montaña. Más aun, si todos los puntos críticos de K_c son aislados, K_c contiene al menos un punto del tipo paso de montaña.

Demostración. La demostración de que $K_c \neq \emptyset$ es análoga a la que se hace en [2] y [11] y se estudió en [12]. Para demostrar la segunda afirmación del teorema, se razona por contradicción : supóngase que K_c no contiene puntos de mínimo local ni del tipo paso de montaña. Sean $\Gamma := \overset{\circ}{A}_c$ y $\Sigma := K_c$.

Afirmación 1. Para cada $\sigma \in \Sigma$ existe una vecindad abierta U_σ de σ tal que $U_\sigma \cap \Gamma$ es arco-conexo.

Prueba. Puesto que ningún punto de Σ es punto crítico del tipo paso de montaña, para cada $\sigma \in \Sigma$ existe una vecindad U_σ de σ tal que $U_\sigma \cap \Gamma = \emptyset$, o, $U_\sigma \cap \Gamma$ es arco-conexo . Si $U_\sigma \cap \Gamma = \emptyset$ entonces para todo $\sigma' \in U_\sigma$ se tiene $I(\sigma') \geq c$, es decir, $\sigma \in \Sigma$ es de mínimo local: absurdo! Luego, $U_\sigma \cap \Gamma$ es arco-conexo. □

Afirmación 2. El conjunto Σ es compacto y $\Sigma \subset \overline{\Gamma}$.

Prueba. Por la condición (PS) claramente Σ es compacto. La inclusión de Σ en $\overline{\Gamma}$ se sigue por un razonamiento similar al de la prueba de la Afirmación 1 y teniendo en cuenta que Σ no contiene puntos de mínimo local. □

Como consecuencia de las dos afirmaciones anteriores y del Lema 2.1.2, existen $V_1, V_2, ..., V_n$ abiertos disjuntos tales que $\Sigma \subset \cup_{i=1}^n V_i =: V$ y, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $V_i \cap \Gamma$ está incluido en una arco-componente de $\Gamma^* = \Gamma \cap U = \Gamma \cap (\cup_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma)$. Dado que Σ es compacto, V es abierto y $\Sigma \subset V$, $\Sigma \cap \partial V = \emptyset$ y $\alpha := dist(\Sigma, \partial V) > 0$. Se definen

$$\bar{\epsilon} := \frac{c-d}{2}, \ \delta := \frac{1}{8} \min\{dist(\partial U \cup \{e_0, e_1\}, \Sigma), \alpha\}, \ W := \{u \in E | dist(u, \Sigma) < \delta\}.$$

A continuación se verifican las hipótesis del Lema 2.1.3. Claramente $\bar{\epsilon} > 0$ y W y V son vecindades de $K_c = \Sigma$. Queda por verificar que $\overline{W} \subset V$ y que $dist(W, \partial V) > 0$. Sea $w \in \overline{W}$. Entonces $dist(w, \Sigma) \leq \delta < \frac{\alpha}{4}$. Por esto, existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $dist(w, \sigma) < \frac{\alpha}{4}$. Dado cualquier $v \in \partial V$, se tiene que

$$dist(v, w) \geq dist(\sigma, v) - dist(\sigma, w) \geq \alpha - \frac{\alpha}{4}$$

pues $dist(\sigma, v) \geq \alpha$. Luego, como $w \in \overline{W}$ y $v \in \partial V$ son arbitrarios,

$$dist(\partial V, W) = dist(\partial V, \overline{W}) \geq \frac{3\alpha}{4} > 0.$$

De manera similar se sigue que $\overline{W} \subset V$. Por el Lema 2.1.3 existen $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon}]$ y $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tales que (i), (ii), (iii) y (iv) se cumplen. Por la definición de c existe un $a \in A$ tal que

$$\max_{t \in [0,1]} I(a(t)) \leq c + \epsilon. \tag{2.5}$$

Sean $M := \{t \in [0,1] : a(t) \notin W\}$ y $B := (U \cap \Gamma) \cup (\eta(1 \times a(M)))$. Debido a la escogencia de δ y a la definición de W, $e_0 \notin W$ y $e_1 \notin W$. Por tanto, $0 \in M$ y $1 \in M$. Además, $I(e_i) \leq d < c - \bar{\epsilon}$ para $i = 0, 1$. Por (iv) se sigue entonces que $e_i = \eta(1, e_i) = \eta(1, a(i))$ para $i = 0, 1$. Así $e_0 \in B$ y $e_1 \in B$. Se toma $\widetilde{B}$ como la componente arco-conexa de B que contiene a e_0. Se probará que $e_1 \in \widetilde{B}$. Puesto que por (2.5), la definición de M y (ii) se sigue que $\eta(1 \times a(M)) \subset A_{c-\epsilon} \subset \mathring{A}_c$, se tendría que $\widetilde{B} \subset B \subset \mathring{A}_c$. Por tanto, existiría un arco $f : [0,1] \to B$ tal que $f \in A$ y $\max_{t \in [0,1]} I(f(t)) < c$ lo cual contradice la definición de c. Queda por demostrar entonces que $e_1 \in \widetilde{B}$.

En el caso $M = [0,1]$, se toma $b : [0,1] \to E$ definida por $b(t) := \eta(1, a(t))$. Claramente b es continua, $b([0,1]) = b(M) \subset B$ y $b(i) = e_i$, para $i = 0, 1$. Luego $e_1 \in \widetilde{B}$ y el resultado se sigue. Por esto, se puede asumir que $M \neq [0,1]$ (Notar, además, que M es cerrado pues $M = a^{-1}(E - W)$ y W es abierto). Sea

$$t_0 := \sup\{t \in M : \eta(1, a(t)) \in \widetilde{B}\}.$$

En virtud de la definición de δ, $dist(e_1, \Sigma) > 2\delta$ y por esto $a(1) = e_1 \in E - \overline{W}$. Entonces existe $r > 0$ tal que

$$B_r(a(1)) \subset E - \overline{W}. \tag{2.6}$$

Este hecho y con la continuidad de a garantizan la existencia de un $\xi \in (0,1)$ tal que $[\xi, 1] \subset M$.

Afirmación 3. Si $t_0 = 1$ entonces $e_1 \in \widetilde{B}$.

Prueba. Por la propiedad de aproximación al supremo, existe un $t' \in (\xi, t_0]$ tal que $\eta(1, a(t')) \in \widetilde{B}$. Además el arco $b(s) := \eta(1, a(s))$ para $s \in [t', t_0]$ es continuo y $b([t', t_0]) \subset \eta(1, \times a(M)) \subset B$ pues $[\xi, 1] \subset M$. Luego $\eta(1, a(t'))$ y $\eta(1, a(t_0)) = \eta(1, a(1))$ pertenecen a la misma componente arco-conexa de B, es decir (por (iv)) $\eta(1, a(1)) = e_1 \in \widetilde{B}$. □ En lo que resta de la demostración se supondrá que $t_0 < 1$ y a partir de esta suposición se llegará a una contradicción. Ésta y la Afirmación 3 llevan al fin de la demostración.

Así como se hizo para ξ, se puede probar que existe $\zeta \in (0,1)$ tal que $[0, \zeta] \subset M$. Por un razonamiento análogo al que se usa en la prueba de la Afirmación 3, se deduce (por contradicción) que $0 < t_0$. Luego, se asumirá que $t_0 \in (0,1)$. Como M es cerrado, $t_0 \in M$ y existe una única componente de conexidad de M que contiene a t_0. Sea $[t^-, t^+] \subset M$ dicha componente.

Afirmación 4. Con las notaciones anteriores, $t_0 = t^+$ y $\eta(1, a(t_0)) \in \widetilde{B}$.

Prueba. Se procede por disyunción de casos: si $t^- = t^+$, $t_0 = t^+$. En el caso en que $t^- < t^+$ y $t^- < t_0$, existe $t' \in (t^-, t_0]$ tal que $\eta(1, a(t')) \in \widetilde{B}$. En este caso, teniendo en cuenta que $[t', t^+] \subset [t^-, t^+] \subset M$, se procede al igual que en la prueba de la Afirmación 3 y se obtiene que $\eta(1, a(t^+)) \in \widetilde{B}$, lo cual implica que $t^+ \leq t_0$ y de esto $t_0 = t^+$. Ahora se considera el caso en que $t_0 = t^- < t^+$. Se llegará a una contradicción.

Dada cualquier vecindad Z de $a(t^-)$, teniendo en cuenta la continuidad de a y la condición $t^- = t_0 \in (0,1)$, existe un $\lambda > 0$ tal que $a(t) \in Z$ para todo $t \in (t^- - \lambda, t^- + \lambda)$. Puesto que $[t^-, t^+]$ es una componente de M, en la vecindad $(t^- - \lambda, t^- + \lambda)$ de t^-, existen un $t_1 \notin M$ (y por tanto $a(t_1) \in W \cap Z$) y un $t_2 \in M$ (y por tanto $a(t_2) \in Z - W$). Luego

$$a(t^-) \in \partial W. \tag{2.7}$$

Por (2.5) y (ii) (en el Lema 2.1.3), $\eta(1, a(t^-)) \in A_{c-\epsilon} \subset \Gamma$ y por (iii) en el mismo lema, $\eta(1, a(t^-)) \in V_i$ para algún $i \in \{1, ..., n\}$. Luego, $\eta(1, a(t^-)) \in \Gamma \cap V_i \subset \Gamma \cap U$, donde la última inclusión se debe al Lema 2.1.2. Así como $\Gamma \cap U$ es abierto, $\eta(1, a(t^-)) \in intB$. Por lo tanto, existe $\hat{\epsilon} > 0$ tal que $B_\epsilon(\eta(1, a(t^-))) \subset B$. Nuevamente la continuidad de a y la condición $t^- = t_0 \in (0,1)$ garantizan la existencia de un $\lambda' > 0$ tal que $\eta(1 \times a(t^- - \lambda', t^- + \lambda')) \subset B_\epsilon(\eta(1 \times a(t^-)))$. Con esto, por la propiedad de aproximación al supremo, existe $t_3 \in (t^- - \lambda', t_0 = t^-] \cap M$ tal que $\eta(1, a(t_3)) \in \widetilde{B} \cap B_\epsilon(\eta(1, a(t^-)))$. Teniendo en cuenta que $B_\epsilon(\eta(1, a(t^-))) \subset B$ y que $B_\epsilon(\eta(1, a(t^-)))$ es arco-conexa, se obtiene que

$$\eta(1, a(t^-)) \in \widetilde{B}. \tag{2.8}$$

Además, el arco $b(t) := \eta(1, a(t))$ es continuo y $b(t) \in B$ para todo $t \in [t^-, t^+]$ pues $[t^-, t^+] \subset M$. Luego, $\eta(1, a(t^+)) \in \widetilde{B}$. Entonces, $t^+ \leq t_0$. Esto contradice la suposición inicial de que $t_0 = t^- < t^+$.
Finalmente, en caso de que $t^- = t^+$, trivialmente $t^- = t_0 = t^+$ y la segunda parte de la Afirmación 4 se sigue por (2.8). □

De manera similar a como se hizo para llegar a (2.7), se obtiene que

$$a(t_0) \in \partial W. \tag{2.9}$$

Como $\overline{W} \subset V = \cup_{i=1}^n V_i$, existe un $i_0 \in \{1, ..., n\}$ tal que $a(t_0) \in V_{i_0}$. Se define

$$\hat{t} := \sup\{t \in [t_0, 1] | a(t) \in \overline{W \cap V_{i_0}}\}.$$

Observar que $\{t \in [t_0, 1] | a(t) \in \overline{W \cap V_{i_0}}\} \neq \emptyset$ pues $a(t_0) \in \partial W \cap V_{i_0} \subset \overline{W \cap V_{i_0}}$. Debido a la continuidad de a, existe un $\lambda'' > 0$ tal que $a(t) \in V_{i_0}$ siempre que $|t - t_0| < \lambda''$. Puesto que $t_0 = t^+$ y $[t^-, t^+]$ es una componente de M, existe un $t'' \in (t_0, t_0 + \lambda'') - M$. Así que $a(t'') \in W \cap V_{i_0}$. Luego, $t_0 < \hat{t}$. Además, por (2.6) y la continuidad de a se tiene que $\hat{t} \in (t_0, 1)$. Este hecho, junto con la continuidad de a permiten probar que

$$a(\hat{t}) \in \partial(W \cap V_{i_0}). \tag{2.10}$$

Entonces $a(\hat{t}) \in \partial(W \cap V_{i_0}) \subset \overline{W \cap V_{i_0}} \subset \overline{W} \cap \overline{V_{i_0}} \subset V \cap \overline{V_{i_0}}$. Por lo tanto, como V es una union disjunta de abiertos,

$$a(\hat{t}) \in V_{i_0}. \tag{2.11}$$

Este hecho implica que

$$a(\hat{t}) \notin W \tag{2.12}$$

pues de lo contrario $a(\hat{t}) \in (V_{i_0} \cap W) \cap \partial(W \cap V_{i_0})$, lo cual es absurdo pues $V_{i_0} \cap W$ es abierto.

Sean $g := \eta(1, a(\hat{t}))$ y $h := \eta(1, a(t_0))$. Por (2.10), $a(\hat{t}) \in \overline{W}$, y entonces por (iii) en el Lema 2.1.3, $g \in V = \cup_{i=1}^{n} V_i$. Análogamente, por (2.9) y (iii), $h \in V = \cup_{i=1}^{n} V_i$. Debido a esto, a la escogencia de V_{i_0}, a (2.11), a (iii), a la continuidad de η respecto a $t \in [0,1]$ y al hecho de que los V_i son disjuntos, se obtiene que $\{g, h\} \subset V_{i_0}$. Además, por (ii), (2.5) y (2.12), $g \in A_{c-\epsilon} \subset \Gamma$. De manera similar, como $t_0 = t^+ \in M$, (ii) y (2.5) implican que $h \in \Gamma$. Con esto, $\{g, h\} \subset V_{i_0} \cap \Gamma$, el cual está incluido en una arco-componente de $U \cap \Gamma \subset B$. Luego, como la Afirmación 4 establece que $h \in \widetilde{B}$, entonces $g \in \widetilde{B}$. En virtud de la definición de t_0, esto implica que $\hat{t} \leq t_0$: Absurdo! pues $\hat{t} \in (t_0, 1)$. Luego, $t_0 = 1$ y por la Afirmación 3, $e_1 \in \widetilde{B}$. Como se aclaró antes, esto lleva a una contradicción y por tanto la suposición inicial de que K_c no contiene puntos del tipo paso de montaña ni de mínimo local es incorrecta.

Esto completa la demostración de la segunda parte del teorema.

A continuación se presenta un esquema de la demostración de la tercera parte del teorema. Esta prueba difiere de la anterior sólo en la definición de algunos conjuntos. Una vez se han fijado estas definiciones, se sigue el mismo razonamiento que se usó para probar la segunda parte del teorema.

Supóngase, razonando por el absurdo, que todos los puntos de $K_c \neq \emptyset$ son aislados y que ninguno es del tipo paso de montaña. Puesto que K_c es compacto debe ser un conjunto finito. Se denota $K_c = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$. Por hipótesis, para todo $i = 1, ..., n$ existe una vecindad U_i de u_i tal que $U_i \cap \overset{\circ}{A}_c$ es vacía o es arco-conexa. Claramente

$K_c \subset \cup_i U_i =: U$. Sean $\bar{\epsilon} := \frac{c-d}{2}$,

$$\delta := \frac{1}{8}\min\{dist((\partial U) \cup \{e_0, e_1\}, K_c), \inf_{i=1,\ldots,n} dist(u_i, K_c - \{u_i\})\},$$

$W := \{u \in E | dist(u, K_c) < \delta\}$ y $V := \{u \in E | dist(u, K_c) < 2\delta\}$. Nótese que $W = \cup_i W_i$ y $V = \cup_i V_i$ donde $W_i = \{u \in E | dist(u, u_i) < \delta\}$ y $V_i = \{u \in E | dist(u, u_i) < 2\delta\}$ para todo $i = 1, ..., n$. Además, $\cap W_i = \emptyset$ y $\cap V_i = \emptyset$ por la selección de δ. A partir de estas definiciones, se razona como en la parte anterior de la demostración y se obtiene una contradicción. ■

REFERENCIAS

[1] S. Agmon, *The L^p approach to the Dirichlet problem*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Vol.13, (1959), pp. 405-448.

[2] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.

[3] H. Brezis, *Análisis Funcional* , Alianza Ed., Madrid, 1983.

[4] A. Castro, *Métodos variacionales y análisis funcional no lineal*, X Coloquio Colombiano de Matemáticas, Paipa, Colombia, 1980.

[5] A. Castro and J. Cossio, *Multiple Solutions for a Nonlinear Dirichlet Problem*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 25 (1994), pp.1554-1561.

[6] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, New York, John Wiley (1989).

[7] D. G. De Figueiredo, *Positive solutions of Semilinear Elliptic Problems*, Lecture Notes in Mathematics, Differential Equations, Proceedings (São Paulo), Springer-Verlag,1981.

[8] H. Hofer, *A note on the topological degree at a critical point of the mountainpass-type*, Proc. Amer. Math. Soc. (2) 90 (1984), 309-315.

[9] H. Hofer, *A geometric description of the neighbourhood of a critical point given by the Mountain-Pass Theorem*, J. London Math. Soc. (2) 31 (1985), 566-570.

[10] M. Protter and H. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice Hall, New Jersey, 1967.

[11] P. H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, Regional Conference Series in Mathematics, number 65, American mathematical Society, Providence, R.I, 1986.

[12] C. Vélez, *El Teorema del paso de la montaña y aplicaciones a problemas elípticos semilineales*, Tesis de grado, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 1999.