# INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE PUNTOS CRÍTICOS CON APLICACIONES A PROBLEMAS ELÍPTICOS SEMILINEALES

**TRABAJO DE AÑO SABÁTICO**

**Agosto 1999 - Julio 2000**

**Universidad Nacional de Colombia**

**Sede Medellín**

**Presentado por:**

**Jorge Cossio**

**Profesor Titular**

**Departamento de Matemáticas**

**Facultad de Ciencias**

**Medellín, julio, 2000**

## CONTENIDO

## INTRODUCCIÓN

Una de las áreas de la matemática de mayor desarrollo durante los últimos años ha sido el Análisis no Lineal. Los trabajos de Ljusternik y Schnirelman (ver [22]) y el famoso trabajo de Ambrosetti y Rabinowitz (ver [5]) en el cual se demuestra el Teorema del Paso de la Montaña han motivado e inspirado la investigación en esta área y han permitido el desarrollo de las *Teorías de Minimax y de Morse.*

El objetivo principal de este trabajo es presentar una subárea del Análisis no Lineal, llamada la *Teoría de Puntos Críticos.* Esta teoría identifica una clase importante de problemas no lineales que pueden ser escritos en una forma abstracta como

$$D[u] = 0, \tag{1}$$

donde $u$ pertenece a un espacio de Hilbert $H$ adecuado y $D = I'$ es la derivada de Fréchet de un cierto funcional $I : H \longrightarrow \mathbb{R}$. Es decir, el Problema (1) se escribe en la forma

$$I'(u) = 0. \tag{2}$$

La ventaja de esta nueva formulación es la de poder hallar las soluciones del Problema (1) como los puntos críticos del funcional $I$, que en ciertas circunstancias pueden ser más faciles de encontrar. Por ejemplo, si el funcional $I$ es diferenciable y tiene un mínimo en $u$ entonces (2) es válido y por lo tanto $u$ es una solución del Problema (1).

En este trabajo estamos interesados en encontrar puntos críticos de funcionales $I : H \to \mathbb{R}$. Al hablar de puntos críticos es natural pensar en primer lugar en puntos de mínimo (o de máximo) local o global y en segundo lugar en puntos críticos de tipo "minimax".

Este trabajo está dividido en tres capítulos. En el Capítulo 1 presentamos un resultado básico de la *teoría de minimización* de funcionales que son coercivos y débilmente inferiormente semicontinuos y mostramos algunas aplicaciones a la existencia de soluciones débiles para ecuaciones diferenciales semilineales.

En el Capítulo 2 estudiamos algunos *métodos de minimax* para encontrar puntos críticos de funcionales. Estos métodos caracterizan los valores críticos de un funcional como un minimax sobre una clase de conjuntos adecuados. El Teorema del Paso de la Montaña es el primer resultado de minimax que estudiaremos. Su enunciado involucra la condición de Palais-Smale, la cual aparece repetidamente en la teoría de puntos críticos y permite construir una cierta "compacidad" sobre el funcional $I$. Una herramienta fundamental en los resultados abstractos de tipo minimax es el llamado Lema de Deformación, el cual será presentado en la primera sección de ese capítulo. También presentaremos un Teorema de Punto de Silla. Finalmente utilizaremos el Lema de Deformación, el Teorema del Paso de la Montaña y el Teorema de Punto de Silla para presentar algunas aplicaciones a la solución de problemas elípticos no lineales.

En el Capítulo 3 estudiaremos una técnica que permite reducir el estudio de los puntos críticos de un funcional $I$ definido en un espacio de Hilbert $H$ al estudio de los puntos críticos de un funcional $\hat{I}$ definido en un subespacio cerrado de H, el cual es, generalmente, de dimensión finita. Esta técnica, se conoce como el *método de reducción*, y es muy útil para demostrar existencia y multiplicidad de soluciones de problemas de Dirichlet no lineales. El método de reducción tiene su orígen en las investigaciones de los profesores Lazer, Landesman y Meyers (ver [21]) y Castro y Lazer (ver [12]).

Como se mencionó anteriormente existe otro método muy importante para estudiar teoría de puntos críticos, que no presentaremos en este trabajo, este es la Teoría de Morse. Al lector interesado le sugerimos para su estudio los trabajos de Milnor ([24]), Chang ([14]) y Conley ([16]).

Espero que estas notas sirvan para estimular el interés por el estudio de la teoría de puntos críticos y de los métodos topológicos en ecuaciones diferenciales. Al lector interesado en profundizar estos aspectos le sugerimos consultar los trabajos de Ambrosetti ([3] y [4]), Brezis y Nirenberg ([7]), Castro y Cossio ([10]), Castro y Lazer ([11] y [12]), Chang ([13] y [14]), Ghoussoub ([20]), Nirenberg ([25]), Rabinowitz ([26], [27], [28], [29], [30], [31], [32] y [33]) y de Willem ([34]).

Quiero agradecer a la Universidad Nacional de Colombia el permitirme la escritura de estas notas durante mi año sabático. También quiero agradecer al profesor Alfonso Castro por su motivación permanente a hacer investigación en este campo, su constante colaboración y su apoyo a lo largo de estos últimos años y al profesor

Hugo Aduén por la cuidadosa revisión que hizo del trabajo. Finalmente quiero expresar mi reconocimiento a Débora Tejada y a Pilar Cossio por su paciencia y estímulo durante la elaboración de este trabajo.

Julio 2000.

**Jorge Cossio**

## CAPÍTULO 1

## PUNTOS CRÍTICOS VIA MINIMIZACIÓN

En este capítulo presentaremos una técnica de minimización de funcionales definidos en espacios de Hilbert, la cual permite encontrar puntos críticos de funcionales que sean coercivos y débilmente inferiormente semicontinuos. En la Sección 1 presentaremos los teoremas abstractos fundamentales. En la Sección 2 demostraremos tres proposiciones de caracter técnico que permiten verificar, en las aplicaciones a ecuaciones diferenciales, las hipótesis requeridas en los teoremas fundamentales. Y en la Sección 3, utilizando los teoremas abstractos, demostraremos la existencia de soluciones débiles para problemas elípticos no lineales. Al lector interesado en algunas generalizaciones importantes de esta teoría a la existencia de puntos críticos con restricciones le sugerimos ver los trabajos de Costa ([18]) y de Costa y Willem ([19]).

### 1. Teoremas Fundamentales

Nuestro primer teorema es un resultado topológico que será utilizado en la demostración del teorema central de esta sección.

**Teorema 1.1.1.** *Sean $X$ un espacio topológico compacto y $\Phi : X \to \mathbb{R}$ un funcional semicontinuo inferiormente (i.e. $\forall a \in \mathbb{R}, \Phi^{-1}(a, \infty)$ es un abierto en $X$). Entonces*

*$\Phi$ está acotado inferiormente y, además, existe $u_0 \in X$ tal que*

$$\Phi(u_0) = \inf_{u \in X} \Phi(u).$$

**Demostración.** Como

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi^{-1}(-n, \infty),$$

$\Phi^{-1}(-n, \infty)$ es abierto -por ser $\Phi$ semicontinua inferiormente- y $X$ es compacto se sigue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{n_0} \Phi^{-1}(-n, \infty).$$

Por lo tanto

$$\Phi(u) > -n_0 \quad \forall u \in X.$$

Es decir, $\Phi$ está acotado inferiormente.

Sea

$$c = \inf_{u \in X} \Phi(u).$$

Demostraremos a continuación que existe $u_0 \in X$ tal que $\Phi(u_0) = c$. En efecto, supongamos, por contradicción, que $\Phi(u) > c$ para todo $u \in X$. Entonces

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi^{-1}(c + \frac{1}{n}, \infty).$$

Por ser $X$ compacto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{k} \Phi^{-1}(c + \frac{1}{n}, \infty).$$

Luego

$$\Phi(u) > c + \frac{1}{k} \quad \forall u \in X.$$

De donde se sigue que

$$c = \inf_{u \in X} \Phi(u) \geq c + \frac{1}{k}.$$

Esta contradicción demuestra que existe $u_0 \in X$ tal que $\Phi(u_0) = c$. Lo cual concluye la prueba del teorema. ■

Como una consecuencia del Teorema 1.1.1 demostraremos a continuación el resultado fundamental de esta sección.

**Teorema 1.1.2.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert. Supongamos que el funcional $\Phi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface las siguientes condiciones:*

*(i) $\Phi$ es débilmente inferiormente semicontinuo y*

*(ii) $\Phi$ es coercivo (i.e. $\Phi(u) \to +\infty$ cuando $\|u\| \to \infty$).*

*Entonces $\Phi$ está acotado inferiormente y existe $u_0 \in H$ tal que*

$$\Phi(u_0) = \inf_{u \in H} \Phi(u).$$

**Demostración.** De la coercividad de $\Phi$ se sigue que existe $R > 0$ tal que

$$\Phi(u) \geq \Phi(0) \quad \forall u \in H \quad \text{con} \quad \|u\| \geq R. \tag{1.1}$$

Como la bola cerrada $\overline{B_R(0)}$ es compacta en la topología débil (ver [6], Teorema III.16) y la restricción de $\Phi$ a la bola cerrada $\overline{B_R(0)}$ es semicontinua inferiormente en la topología débil, se sigue del Teorema 1.1.1 que existe $u_0 \in \overline{B_R(0)}$ tal que

$$\Phi(u_0) = \inf_{u \in \overline{B_R(0)}} \Phi(u). \tag{1.2}$$

De (1.1) y (1.2) se deduce que

$$\Phi(u_0) = \inf_{u \in H} \Phi(u).$$

Lo cual demuestra el teorema. ■

Observamos que si además de las hipótesis del Teorema 1.1.2, el funcional $\Phi : H \to \mathbb{R}$ es diferenciable entonces cualquier punto de mínimo $u_0$ es un punto crítico de $\Phi$, i.e. $\Phi'(u_0) = 0$.

En el Capítulo 2 demostraremos un principio de minimización cuando el funcional no es coercivo (ver Proposición 2.1.4). En el Capítulo 3 se utilizará el Teorema 1.1.2 para demostrar el método de reducción (ver Lema 3.1.2).

Veremos a continuación otra consecuencia del Teorema 1.1.1.

**Teorema 1.1.3.** *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 1.1.2, dado un conjunto cerrado, convexo y no vacío $C \subset H$ existe $u_0 \in C$ tal que*

$$\Phi(u_0) = \inf_{u \in C} \Phi(u).$$

**Demostración.** De la coercividad de $\Phi$ se sigue que existe $R > 0$ tal que

$$\Phi(u) \geq \Phi(p) \quad \forall u \in C \text{ con } \|u\| \geq R,$$

donde $p \in C$ es un punto fijado arbitrariamente. Ahora, el conjunto $\overline{B_R(0)} \cap C$ es cerrado, convexo y acotado, por lo tanto es compacto en la topología débil (ver [6], Corolario III.19). La demostración se concluye como se hizo en el Teorema 1.1.2. ■

## 2. Proposiciones Auxiliares

El objetivo central de esta sección es demostrar tres proposiciones de carácter técnico, que permiten verificar en las aplicaciones a ecuaciones diferenciales algunas de las hipótesis que son requeridas tanto en los teoremas fundamentales que han sido presentados en la Sección 1 como en los teoremas que presentaremos en los Capítulos 2 y 3.

Inicialmente presentaremos un teorema de sustitución.

**Proposición 1.2.1.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado. Supongamos que $g$ es una función que satisface las siguientes condiciones:*

*(i) $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y*

*(ii) Existen constantes $r, s \geq 1$ y $a_1, a_2 \geq 0$ tales que*

$$|g(x,t)| \leq a_1 + a_2 \, |t|^{\frac{r}{s}} \quad \forall x \in \overline{\Omega}, t \in \mathbb{R}.$$

*Entonces la función $u(x) \longrightarrow g(x, u(x))$ pertenece a $C(L^r(\Omega), L^s(\Omega))$.*

**Demostración.** Sea $u \in L^r(\Omega)$, usando la hipótesis (ii) se sigue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |g(x,u(x))|^s \, dx &\leq \int_\Omega (a_1 + a_2 \, |u(x)|^{\frac{r}{s}})^s \, dx \\ &\leq a_3 \int_\Omega (1 + |u(x)|^r) \, dx, \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde $a_3$ es una constante. Por lo tanto la función $g : L^r(\Omega) \longrightarrow L^s(\Omega)$ está bien definida.

Para demostrar la continuidad de la función $g$, observamos inicialmente que $g$ es continua en $\phi$ si y sólo si la función

$$f(x, z(x)) := g(x, z(x) + \phi(x)) - g(x, \phi(x))$$

es continua en $z = 0$. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\phi = 0$ y $g(x, 0) = 0$.

Sea $\epsilon > 0$. Afirmamos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \delta \Longrightarrow \|g(\cdot, u)\|_{L^s(\Omega)} \leq \epsilon.$$

Utilizando la hipótesis (i), la compacidad de $\overline{\Omega}$ y el hecho de que $g(x, 0) = 0$ se prueba que dado $\hat{\epsilon} > 0$ existe $\hat{\delta} > 0$ tal que

$$x \in \overline{\Omega} \text{ y } |t| \leq \hat{\delta} \Longrightarrow |g(x, t)| \leq \hat{\epsilon}.$$

Sea $u \in L^r(\Omega)$ con $\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \delta$, con $\delta$ un número positivo que será fijado posteriormente. Sea

$$\Omega_1 := \{x \in \overline{\Omega}; |u(x)| \leq \hat{\delta}\}.$$

Por lo tanto

$$\int_{\Omega_1} |g(x, u(x))|^s \, dx \leq (\hat{\epsilon})^s |\Omega_1| \leq (\hat{\epsilon})^s |\Omega|, \tag{1.4}$$

donde $|\Omega_1|$ y $|\Omega|$ denotan la medida de $\Omega_1$ y de $\Omega$ respectivamente.

Escojamos $\hat{\epsilon} > 0$ tal que $(\hat{\epsilon})^s\,|\Omega| \leq (\frac{\epsilon}{2})^s$. Sea $\Omega_2 := \overline{\Omega} - \Omega_1$. Similarmente a como se hizo en (1.3), se demuestra fácilmente que

$$\int_{\Omega_2} |g(x,u(x))|^s\,dx \leq a_3(|\Omega_2| + \delta^r). \tag{1.5}$$

Además,

$$\delta^r \geq \int_{\Omega_2} |u|^r\,dx \geq (\hat{\delta})^r|\Omega_2|.$$

Luego

$$|\Omega_2| \leq \left(\frac{\delta}{\hat{\delta}}\right)^r. \tag{1.6}$$

Usando (1.5) y (1.6) se tiene

$$\int_{\Omega_2} |g(x,u(x))|^s\,dx \leq a_3\left(1 + \frac{1}{(\hat{\delta})^r}\right)\delta^r.$$

Escojamos $\delta > 0$ tal que

$$a_3\left(1 + \frac{1}{(\hat{\delta})^r}\right)\delta^r \leq \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^s.$$

De (1.4) y las dos últimas desigualdades se sigue que

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \delta \Longrightarrow \|g(\cdot,u)\|_{L^s(\Omega)} \leq \epsilon.$$

Lo cual demuestra la proposición. ■

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera suave. Sea $H$ el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, el cual es la completación del espacio con producto interno consistente de todas las funciones de clase $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ que tienen su soporte contenido en $\Omega$ y cuyo producto interior está definido por

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx.$$

Al lector interesado en conocer más a fondo los espacios de Sobolev le sugerimos las trabajos de Adams ([1]) y de Brézis ([6]).

La siguiente proposición establece una condición suficiente para saber cuando un funcional es débilmente continuo.

**Proposición 1.2.2.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera suave. Supongamos que $g$ satisface las siguientes condiciones:*

*(i) $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y*

*(ii) Existen constantes $a, b > 0$ y $1 \leq \alpha < \frac{2n}{n-2}$ si $n \geq 3$ ( $1 \leq \alpha < \infty$ si $n = 1, 2$) tales que*

$$|g(x,t)| \leq a\,|t|^\alpha + b.$$

*Entonces el funcional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por*

$$I(u) = \int_\Omega g(x, u(x))\, dx,$$

*es débilmente continuo.*

**Demostración.** Sea $p \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leq p < \frac{2n}{n-2}$. Usando el Teorema de Encaje de Sobolev (ver [6], Teorema IX.16) tenemos que

$$H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega) \quad \forall p \in \left[1, \frac{2n}{n-2}\right].$$

Como $\alpha = \dfrac{p}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)}$, usando la Proposición 1.2.1 se sigue que

$$g(\,\cdot, u(\,\cdot)) \in L^{\frac{p}{\alpha}}(\Omega).$$

Ahora, como

$$L^{\frac{p}{\alpha}}(\Omega) \subset L^1(\Omega),$$

se concluye que el funcional $I$ está bien definido.

Demostraremos a continuación que el funcional $I$ es débilmente continuo. Sean $(u_n)$ una sucesión en $H_0^1(\Omega)$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ tales que $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en $H_0^1$. Como $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ con inclusión compacta (ver [6], Teorema IX,16) tenemos que

$$u_n \to u \quad \text{en} \quad L^p(\Omega).$$

Usando la Proposición 1.2.1 se sigue que

$$g(\,\cdot, u_n) \longrightarrow g(\cdot, u) \quad \text{en} \quad L^{\frac{p}{\alpha}}(\Omega).$$

Como $L^{\frac{p}{\alpha}}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ con inclusión continua se concluye que

$$g(\,\cdot, u_n) \longrightarrow g(\cdot, u) \quad \text{en} \quad L^1(\Omega).$$

Por lo tanto

$$I(u_n) \longrightarrow I(u).$$

Luego $I$ es un funcional débilmente continuo. ■

El siguiente resultado nos proporciona una condición suficiente que garantiza que una clase importante de funcionales que aparecen en el estudio de ecuaciones elípticas semilineales pertenecen a la clase $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

**Proposición 1.2.3.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera suave. Supongamos que $p$ satisface las siguientes condiciones:*

*(i) $p \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y*

*(ii) Existen constantes $a_1, a_2 \geq 0$ tales que*

$$|p(x,t)| \leq a_1 + a_2\, |t|^s \quad \forall x \in \overline{\Omega}, t \in \mathbb{R},$$

*donde $0 \leq s < \frac{n+2}{n-2}$ y $n \geq 3$.*

*Sea $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ el funcional definido por*

$$I(u) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - P(x,u))\, dx,$$

*donde $P(x,t) = \int_0^t p(x,s)\, ds$.*

*Entonces $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ y*

$$I'(u)\phi = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \phi - p(x,u)\, \phi)\, dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

*Además, si $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es el funcional definido por*

$$J(u) = \int_\Omega P(x, u(x))\, dx$$

*entonces $J'$ es un operador compacto.*

**Demostración.** Probaremos inicialmente que $I$ e $I'$ están bien definidos. Sea $u \in H_0^1$. Usando la hipótesis (ii) se sigue que

$$\begin{aligned} |P(x,u)| &\leq \int_0^u |p(x,t)|\, dt \leq \int_0^u (a_1 + a_2|t|^s)ds \\ &\leq a_1|u| + a_2\frac{|u|^{s+1}}{s+1}. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Encaje de Sobolev

$$H_0^1 \subset L^p \qquad \left(1 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}\right).$$

Como $0 \leq s < \frac{n+2}{n-2}$ se sigue que $1 \leq s+1 < \frac{2n}{n-2}$. Luego $u \in L^1$ y $u \in L^{s+1}$. Por lo tanto $P(x,u) \in L^1(\Omega)$ y el funcional $I$ está bien definido.

Sean $u$, $v \in H_0^1$. Utilizando la hipótesis (ii), la desigualdad de Hölder y el Teorema de Encaje de Sobolev se sigue que

$$\begin{aligned} |I'(u)v| &\leq |\langle u, v\rangle| + \int_\Omega |p(x,u)||v|dx \\ &\leq \|u\|\|v\| + \int_\Omega (a_1|v| + a_2|u|^s|v|) \\ &\leq \|u\|\|v\| + a_1\|v\|_{L^1} + a_2\||u|^s\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}}\|v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} < \infty. \end{aligned}$$

Luego $I'(u)$ está bien definido.

La prueba de que el funcional $I$ es de clase $C^1(H_0^1, \mathbb{R})$ se hará con la ayuda de las dos afirmaciones siguientes.

**Afirmación 1.** La función $Q : H_0^1 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(u) := \frac{1}{2}\langle u, u\rangle$ es Fréchet diferenciable, $Q'(u)v = \langle u, v\rangle \, \forall v \in H_0^1$ y $Q'(u)$ es continuo.

**Prueba.** Sean $u, v \in H_0^1$.

$$|Q(u+v) - Q(u) - \langle u, v\rangle\,| = |\frac{1}{2}\langle u+v, u+v\rangle - \frac{1}{2}\langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle\,| = \frac{1}{2}\|v\|^2.$$

Por lo tanto si $v \neq 0$

$$\frac{|Q(u+v) - Q(u) - \langle u, v\rangle\,|}{\|v\|} \leq \frac{1}{2}\|v\|.$$

De esta última desigualdad se sigue que $Q$ es Fréchet diferenciable y $Q'(u)\,v = \langle u, v\rangle$. Veamos ahora que $Q'(u)$ es continuo. En efecto, si $u_n \to u$ en $H_0^1$ entonces

$$\begin{aligned} \|Q'(u_n) - Q'(u)\| &= \sup_{\|v\|\leq 1} |Q'(u_n)v - Q'(u)v| \\ &= \sup_{\|v\|\leq 1} |\,\langle u_n - u, v\rangle\,| \\ &\leq \|u_n - u\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $Q'(u_n) \to Q'(u)$. Lo cual concluye la prueba de la Afirmación 1. $\square$

**Afirmación 2.** El funcional $J : H_0^1 \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) := \int_\Omega P(x, u(x))\, dx$$

es Fréchet diferenciable,

$$J'(u)\phi = \int_\Omega p(x, u(x))\phi(x) dx \quad \forall \phi \in H_0^1$$

y $J'(u)$ es continuo.

**Prueba.** Primero demostraremos que $J$ es Fréchet diferenciable. Sean $u, \phi \in H_0^1$.

Probemos que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|\phi\| \leq \delta$ entonces

$$|J(u+\phi) - J(u) - \int_\Omega p(x,u)\phi\, dx| \leq \epsilon\|\phi\|.$$

Sea

$$\psi(x) := |P(x, u(x) + \phi(x)) - P(x, u(x)) - p(x, u(x))\phi(x)| \quad (x \in \Omega).$$

Definamos

$$\Omega_1 := \{x \in \overline{\Omega} / |u(x)| \geq \beta\}$$

$$\Omega_2 := \{x \in \overline{\Omega} / |\phi(x)| \geq \gamma\}$$

$$\Omega_3 := \{x \in \overline{\Omega} / |u(x)| \leq \beta \text{ y } |\phi(x)\| \leq \gamma\},$$

donde $\beta$ y $\gamma$ son números positivos a determinar.

Por el Teorema del Valor Medio

$$P(x, \xi + \eta) - P(x, \xi) = p(x, \xi + \theta\eta)\eta, \text{ con } \theta \in (0,1).$$

Utilizando la expresión anterior, la hipótesis (ii), la desigualdad de Hölder y el

Teorema de Encaje de Sobolev, tenemos

(1.7)
$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} |P(x,u(x)+\phi(x)) - P(x,u(x))|dx &= \int_{\Omega_1} |p(x,u(x)+\theta\phi(x))|\,|\phi|\,dx \\
&\leq \int_{\Omega_1} (a_1 + a_2(|u|+|\phi|)^s)\,|\phi| \\
&\leq \int_{\Omega_1} a_1|\phi| + a_2 \int_{\Omega_1} (|u|+|\phi|)^s\,|\phi|\,dx \\
&\leq a_1|\Omega_1|^{\frac{n+2}{2n}}\,\|\phi\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} + a_2|\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}}(\int_{\Omega_1} (|u|+|\phi|)^{s+1})^{\frac{s}{s+1}}\,\|\phi\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \\
&\leq a_1|\Omega_1|^{\frac{n+2}{2n}}\,\|\phi\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} + a_3|\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}}(\|u\|_{L^{s+1}} + \|\phi\|)^s_{L^{s+1}}\,\|\phi\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \\
&\leq a_4\|\phi\|(|\Omega_1|^{\frac{n+2}{2n}} + |\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}}(\|u\|^s + \|\phi\|^s)),
\end{aligned}$$

donde $a_3$ y $a_4$ son constantes y $\sigma > 1$ es tal que

$$\frac{1}{\sigma} + \frac{s}{s+1} + \frac{n-2}{2n} = 1.$$

Similarmente, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} |p(x,u(x))\phi(x)|\,dx &\leq \int_{\Omega_1} (a_1 + a_2|u|^s)\,|\phi| \\
&\leq a_1 \int_{\Omega_1} |\phi| + a_2 \int_{\Omega_1} |u|^s|\phi| \qquad (1.8)\\
&\leq a_1|\Omega_1|^{\frac{n+2}{2n}}\,\|\phi\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} + a_2|\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}}\,\|u\|^s_{L^{s+1}}\|\phi\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \\
&\leq a_5\|\phi\|(|\Omega_1|^{\frac{n+2}{2n}} + |\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}}\,\|u\|^s).
\end{aligned}$$

Usando el Teorema de Encaje de Sobolev

$$\|u\| \geq a_6\,\|u\|_{L^2(\Omega)} \geq a_6\,\|u\|_{L^2(\Omega_1)} \geq a_6\,\beta\,|\Omega_1|^{\frac{1}{2}}.$$

Luego

$$|\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}} \leq \left(\frac{\|u\|}{a_6\,\beta}\right)^{\frac{2}{\sigma}} =: M_1,$$

$$|\Omega_1|^{\frac{n+2}{2n}} \leq \left(\frac{\|u\|}{a_6\,\beta}\right)^{\frac{n+2}{n}} =: M_2,$$

donde $M_1$ y $M_2 \to 0$ cuando $\beta \to \infty$.

De (1.7) y (1.8) se sigue que

$$\int_{\Omega_1} \Psi(x)\,dx \leq a_7[M_2 + M_1(\|u\|^s + \|\phi\|^s)]\|\phi\|.$$

Asumamos $\delta \leq 1$ y escojamos $\beta$ suficientemente grande tal que

$$a_7[M_2 + M_1(\|u\|^s + 1)] \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Por lo tanto

$$\int_{\Omega_1} \Psi(x)\,dx \leq \frac{\epsilon}{3}\|\phi\|. \tag{1.9}$$

Utilizando estimativos similares a los anteriores se demuestra que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} \Psi(x)\,dx &\leq a_3 \int_{\Omega_2} (1 + (|u(x) + |\phi(x)|)^s)|\phi| \\
&\leq a_4\Big(\int_{\Omega_2} [1 + (|u(x)| + |\phi(x)|)^s)]^{\frac{s+1}{s}}\,dx\Big)^{\frac{s}{s+1}} \|\phi\|_{L^{s+1}(\Omega_2)} \\
&\leq a_5(1 + \|u\|^s + \|\phi\|^s)\left(\int_{\Omega_2} |\phi|^{s+1}\left(\frac{|\phi|}{\gamma}\right)^{m-(s+1)} dx\right)^{\frac{1}{s+1}} \\
&\leq a_6\,\gamma^{\frac{(s+1-m)}{s+1}}(1 + \|u\|^s + \|\phi\|^s)\,\|\phi\|^{\frac{m}{s+1}},
\end{aligned}$$

donde $a_i$ $(i = 3,4,5,6)$ son constantes y $m := \frac{2n}{n-2} > s+1$.

Como $P \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, dados $\hat{\epsilon}$ y $\hat{\beta} > 0$ existe $\hat{\gamma} := \hat{\gamma}(\hat{\epsilon}, \hat{\beta})$ tal que

$$|P(x, \xi + h) - P(x, \xi) - p(x, \xi)h| \leq \hat{\epsilon}|h|$$

siempre que $x \in \overline{\Omega}$, $|\xi| \leq \hat{\beta}$ y $|h| \leq \hat{\gamma}$.

En particular si $\hat{\beta} = \beta$ y $\gamma \leq \hat{\gamma}$ tenemos que

$$\int_{\Omega_3} \Psi(x)\, dx \leq \hat{\epsilon} \int_{\Omega_3} |\phi(x)|\, dx \leq a_7\, \hat{\epsilon} \|\phi\|.$$

Escojamos $\hat{\epsilon} > 0$ tal que $\hat{\epsilon} \leq \dfrac{\epsilon}{3\, a_7}$. Esto determina $\hat{\gamma}$. Sea $\gamma = \hat{\gamma}$. Luego

$$\int_{\Omega} \Psi\, dx \leq \frac{2}{3}\epsilon \|\phi\| + a_6 \gamma^{1-\frac{m}{s+1}} (1 + \|u\|^s + \|\phi\|^s) \|\phi\|^{\frac{m}{s+1}}.$$

Sea $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$a_6\, \gamma^{1-\frac{m}{s+1}} (2 + \|u\|^s)\, \delta^{(\frac{m}{s+1})-1} \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Luego

$$\int_{\Omega} \Psi(x)\, dx \leq \epsilon \|\phi\|.$$

Por lo tanto $J$ es Fréchet diferenciable y

$$J'(u)\phi = \int_{\Omega} p(x, u(x))\phi(x) dx \quad \forall \phi \in H_0^1.$$

Finalmente demostraremos que $J'(u)$ es compacto. En efecto, sea $(u_n) \subset H_0^1$ una sucesión acotada. Como $H_0^1$ es un espacio de Hilbert existen una subsucesión, que denotaremos igual, y un $u \in H_0^1$ tales que $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en $H_0^1$. Por ser la inclusión de $H_0^1$ en $L^p$ $(1 \leq p < \frac{2n}{n-2})$ compacta y como $1 \leq s+1 < \frac{2n}{n-2}$ se sigue que $u_n \to u$ en $L^{s+1}$.

$$\begin{aligned} \|J'(u_n) - J'(u)\| &= \sup_{\|\phi \leq 1} \left| \int_{\Omega} (p(x, u_n) - p(x, u))\phi \right| \\ &\leq a_8 \|p(\cdot, u_n) - p(\cdot, u)\|^{L^{\frac{s+1}{s}}}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

donde $a_8$ es una constante.

Como $s = \frac{(s+1)}{\frac{(s+1)}{s}}$ y $u_n \to u$ en $L^{S+1}$ se sigue de la Proposición 1.2.1 que

$$p(\cdot, u_n) \to p(\cdot, u) \quad \text{en} \quad L^{\frac{s+1}{s}}.$$

Por lo tanto el lado derecho de (1.10) se va a cero cuando $n \to \infty$. Luego $J'$ es compacto. ■

## 3. Aplicaciones a Problemas Elípticos Semilineales

En esta sección mostraremos, como consecuencia de los teoremas abstractos presentados en la Sección 1 y de las proposiciones desarrolladas en la sección anterior, algunas aplicaciones a la solución de problemas elípticos semilineales.

Sea $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \ldots$ la sucesión de valores propios de $-\Delta$ con condición de frontera de Dirichlet en $\Omega$. Para cada entero positivo $m$ sea $\varphi_m$ la función propia correspondiente al valor propio $\lambda_m$. Sea $H$ el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$. como es bien conocido (ver [6], Teorema IX.31), el conjunto $\{\varphi_m\}$ es un conjunto ortonormal completo en $H$.

Consideremos el siguiente problema de Dirichlet no lineal

$$\text{(1.11)} \qquad \begin{cases} \Delta u + f(x,u) = 0, \text{ en } \Omega \\ \qquad\qquad u = 0, \text{ en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega$ es un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ con frontera suave.

Decimos que $u \in H$ es una **solución débil** del problema (1.11) si para todo $\varphi \in H$

$$\int_\Omega (\nabla u . \nabla \varphi - f(x,u)\,\varphi)\, dx = 0.$$

Supongamos que $f$ satisface la siguientes condiciones:

(i) $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$,

(ii) Existen constantes $a, b \geq 0$ tales que

$$|f(x,\xi)| \leq a + b|\xi|^s \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}, \text{ donde } 0 \leq s < \frac{n+2}{n-2} \text{ y } n \geq 3.$$

(iii) Existe $\beta < \lambda_1$ tal que $\liminf\limits_{|\xi|\to\infty} \dfrac{f(x,\xi)}{\xi} \leq \beta$ uniformemente en $x \in \Omega$.

**Teorema 1.3.1.** *Si $f$ satisface las hipótesis (i), (ii) y (iii) entonces el problema (1.11) tiene una solución débil $u \in H_0^1$.*

**Demostración.** Sea $I : H_0^1 \to \mathbb{R}$ el funcional definido por

$$I(u) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u))\, dx,$$

donde $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\, ds$.

Usando la Proposición 1.2.3 se sigue que $I \in C^1(H_0^1, \mathbb{R})$ y que $u \in H_0^1$ es una solución débil de (1.11) si y sólo si $u$ es un punto crítico del funcional $I$.

El funcional $I$ puede escribirse en la forma

$$I(u) = Q(u) - J(u),$$

donde $Q(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$ y $J(u) = \int_\Omega F(x,u)\, dx$.

El funcional $Q$ es débilmente inferiormente semicontinuo (ver [6], Proposición III.5) y por la Proposición 1.2.2 $J$ es débilmente continuo. Por lo tanto el funcional $I$ es débilmente inferiormente semicontinuo.

Por otro lado, la hipótesis (iii) implica que

$$\liminf_{|\xi|\to\infty} \frac{2\,F(x,\xi)}{\xi^2} \leq \beta \quad \text{uniformemente en } x \in \Omega.$$

Fijemos $\beta_1$ con $\beta < \beta_1 < \lambda_1$. Luego existe $R_1 > 0$ tal que

$$F(x,\xi) \leq \frac{1}{2}\,\beta_1\,\xi^2 \quad \forall x \in \Omega \text{ y } |\xi| \geq R_1.$$

Utilizando la hipótesis (i) se sigue que existe una constante $\gamma_1$ tal que

$$F(x,\xi) \leq \gamma_1 \quad \forall x \in \Omega \text{ y } |\xi| \leq R_1.$$

Por lo tanto

$$F(x,\xi) \leq \gamma_1 + \frac{1}{2}\beta_1\,\xi^2 \quad \forall x \in \Omega \text{ y } \xi \in \mathbb{R}.$$

De la desigualdad anterior y de la definición del funcional $I$ se sigue que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{2}\beta_1 \int_\Omega u^2 - \gamma_1\,|\Omega|.$$

Por la desigualdad de Poincaré (ver [9], Lema 4.5) tenemos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \lambda_1 \int_\Omega u^2.$$

Luego

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}(1 - \frac{\beta_1}{\lambda_1}) \int_\Omega |\nabla u|^2 - \gamma_1|\Omega| \\ &= \frac{1}{2}(1 - \frac{\beta_1}{\lambda_1})\|u\|^2 - \gamma_1|\Omega|. \end{aligned}$$

De la desigualdad anterior se concluye que

$$I(u) \longrightarrow +\infty \qquad \text{si} \qquad \|u\| \to \infty.$$

Por lo tanto el funcional $I$ es coercivo. Utilizando el Teorema 1.1.2 tenemos que existe $u_0 \in H_0^1$ tal que

$$I(u_0) = \inf_{u \in H_0^1} I(u).$$

Como $I$ es de clase $C^1(H_0^1, \mathbb{R})$ se sigue que $u_0$ es un punto crítico de $I$. Lo que concluye la demostración del teorema. ■

A continuación veremos otra aplicación del Teorema 1.1.2. Consideremos el problema

$$\begin{cases} \Delta u + f(x,u) = 0, \text{ en } \Omega \\ \\ u = 0, \text{ en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.12}$$

donde $\Omega$ es un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ con frontera suave.

Supongamos que $f$ satisface la siguientes condiciones:

(i) $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$,

(ii) Existe una constante $0 < r < 1$ tal que

$$|f(x,\xi)| \leq a(x) + c\,|\xi|^r \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}, \text{ donde } c > 0 \text{ y } a(x) \in L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega).$$

**Teorema 1.3.2.** *Si $f$ satisface las hipótesis (i) y (ii) entonces el problema (1.12) tiene una solución débil $u \in H_0^1$.*

**Demostración.** Sea $I : H_0^1 \to \mathbb{R}$ el funcional definido por

$$I(u) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u))\,dx,$$

donde $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\,ds$.

El funcional $I$ puede escribirse en la forma

$$I(u) = Q(u) - J(u),$$

donde $Q(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$ y $J(u) = \int_\Omega F(x,u)\,dx$.

Siguiendo los mismos lineamientos de las proposiciones de la Sección 2 y del Teorema 1.3.1 es posible demostrar las siguientes dos afirmaciones, que se dejan como ejercicio al lector.

**Afirmación 1.** La función $\hat{f} : L^{r+1} \to L^{\frac{r+1}{r}}$ definida por $\hat{f}(u) = f(\,\cdot\,, u)$ está bien definida y es continua.

**Afirmación 2** $J \in C^1(H_0^1, \mathbb{R})$,

$$J'(u)\varphi = \int_\Omega f(x,u)\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1,$$

$J$ es débilmente continuo y $J'$ es compacto.

Luego $u \in H_0^1$ es una solución débil de (1.12) si y sólo si $u$ es un punto crítico del funcional $I$.

Como el funcional $Q$ es débilmente inferiormente semicontinuo (ver [6], Proposición III.5) y $J$ es débilmente continuo se concluye que el funcional $I$ es débilmente inferiormente semicontinuo.

Por otro lado, la hipótesis (ii) implica que

$$\begin{aligned} |F(x,u)| &\le \int_0^u |f(x,\xi)| \le \int_0^u (a(x) + c\,|\xi|^r)\, d\xi \\ &\le |a(x)||u(x)| + \frac{c}{r+1}|u(x)|^{r+1}. \end{aligned}$$

Usando el Teorema de Encaje de Sobolev tenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |F(x,u)| &\le \int_\Omega |a(x)|\,|u(x)| + \frac{c}{r+1}\int_\Omega |u|^{r+1} \\ &\le \|a\|_{L^{\frac{r+1}{r}}}\,\|u\|_{L^{r+1}} + \frac{c}{r+1}\|u\|^{r+1}_{L^{r+1}} \\ &\le a_1\|u\| + a_2\|u\|^{r+1}, \end{aligned}$$

donde $a_1$ y $a_2$ son constantes.

De la desigualdad anterior se concluye que

$$I(u) \ge \frac{1}{2}\|u\|^2 - a_1\|u\| - a_2\|u\|^{r+1}.$$

Como $r+1 < 2$ se sigue que

$$I(u) \to +\infty \quad \text{si } \|u\| \to \infty.$$

Luego el funcional $I$ es coercivo.

Utilizando el Teorema 1.1.2 se sigue que existe $u_0 \in H_0^1$ tal que

$$I(u_0) = \inf_{u\in H_0^1} I(u).$$

Como $I \in C^1(H_0^1, \mathbb{R})$ tenemos que $u_0$ es un punto crítico de $I$. Por lo tanto una solución débil del problema (1.12). Lo que concluye la demostración del teorema. ■

# CAPÍTULO 2

# PUNTOS CRÍTICOS VIA MINIMAX

En el capítulo anterior estudiamos el problema de localizar puntos críticos que son puntos de mínimo de funcionales. Sin embargo existen muchos problemas, en las aplicaciones a ecuaciones diferenciales, en los cuales los puntos críticos no se obtienen via minimización. En este capítulo discutiremos la existencia de "otros" puntos críticos de funcionales, los cuales no son necesariamente puntos de mínimo, y a los que llamaremos "puntos de tipo minimax".

El propósito central de este capítulo es demostrar el Teorema del Paso de la Montaña, un Teorema de Punto de Silla y presentar algunas aplicaciones a ecuaciones elípticas semilineales. Una herramienta fundamental en la prueba del Teorema del Paso de la Montaña es el llamado Lema de Deformación, el cual será presentado en la Sección 1. Este Lema juega un papel importante en todos los resultados abstractos de tipo minimax. Su demostración la haremos en el contexto de espacios de Hilbert. En [26] se puede consultar su demostración en espacios de Banach. En la Sección 2 demostraremos el Teorema del Paso de la Montaña y el Teorema de punto de Silla. Y en la Sección 3 utilizaremos el Lema de Deformación, el Teorema del Paso de la Montaña y el Teorema de Punto de Silla para presentar algunas aplicaciones a la solución de problemas elípticos no lineales.

## 1. El Lema de Deformación

**Definición 2.1.1.** Sean $E$ un espacio de Hilbert e $I \in C^1(E,\mathbb{R})$. Se dice que $I$ satisface *la condición de Palais-Smale*, si cualquier sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $E$, para la cual $\{I(u_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada y $\lim\limits_{n\to\infty} I'(u_n) = 0$, admite una subsucesión convergente.

El siguiente lema será utilizado en la demostración del Lema de Deformación.

**Lema 2.1.2.** *Sean $E$ un espacio de Hilbert e $I \in C^1(E,\mathbb{R})$. Para $c, s \in \mathbb{R}$, sean $K_c = \{u \in E : I(u) = c \text{ y } I'(u) = 0\}$ y $A_s = \{u \in E : I(u) \leq s\}$. Si $K_c = \emptyset$ e $I$ satisface la condición de Palais-Smale entonces existen constantes $0 < b$, $\epsilon < 1$ tales que*

$$\|I'(u)\| \geq b \quad \forall\, u \in A_{c+\epsilon} - A_{c-\epsilon}. \tag{2.1}$$

**Demostración.** La prueba la haremos por contradicción. Supongamos que no existen constantes $b$, $\epsilon > 0$ que cumplan (2.1). Sean $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones positivas convergentes a cero. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in A_{c+\epsilon_n} - A_{c-\epsilon_n}$ tal que

$$\|I'(u_n)\| < b_n.$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$ se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} I'(u_n) = 0. \tag{2.2}$$

Además, puesto que $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada y

$$c - \epsilon_n \leq I(u_n) \leq c + \epsilon_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}; \tag{2.3}$$

la sucesión $\{I(u_n)\}$ es acotada. Esto, (2.2) y la condición de Palais-Smale implican que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ admite una subsucesión convergente $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Sea $u \in E$ tal que $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = u$. De (2.3) y la continuidad de $I$ y de $I'$ se sigue que

$$I(u) = c \quad \text{y} \quad I'(u) = 0.$$

Luego $u \in K_c$. Por lo tanto $K_c \neq \emptyset$. Esta contradicción demuestra el lema. ∎

En el Lema de Deformación queremos demostrar que si $c$ no es un valor crítico del funcional $I$ entonces podemos deformar el conjunto $A_{c+\epsilon}$ en el conjunto $A_{c-\epsilon}$ para algun $\epsilon > 0$. La idea es resolver una ecuación diferencial ordinaria "apropiada" en el espacio de Hilbert $E$ y seguir el flujo resultante "colina abajo". Como el espacio de Hilbert $E$ es generalmente infinito dimensional se requiere una cierta condición de compacidad del conjunto $K_c$, esta es precisamente la condición de Palais-Smale establecida anteriormente.

**Lema 2.1.3 (Lema de Deformación).** *Sea $E$ un espacio de Hilbert. Supongamos que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ y satisface la condición de Palais-Smale. Para $s, c \in \mathbb{R}$, sean $K_c = \{u \in E : \ I(u) = c \text{ y } I'(u) = 0\}$ y $A_s = \{u \in E : \ I(u) \leq s\}$. Si*

$$K_c = \emptyset.$$

*Entonces dado cualquier $\bar{\epsilon} > 0$, existen una constante $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ y una función*

$$\eta \in C([0,1] \times E, E)$$

*tales que:*

*(i)* $\eta(0,u) = u$ *para todo* $u \in E$,

*(ii)* $\eta(1,u) = u$ *si* $I(u) \notin [c-\bar{\epsilon}, c+\bar{\epsilon}]$,

*(iii)* $\eta(1, A_{c+\epsilon}) \subset A_{c-\epsilon}$.

**Demostración.** Sea $\bar{\epsilon} > 0$. Observamos que si $c \notin \overline{I(E)}$, se puede tomar un $\epsilon > 0$ tal que $(c-\epsilon, c+\epsilon) \cap I(E) = \emptyset$. En este caso, se define $\eta(t,u) = u$ para todo $u \in E$ y todo $t \in [0,1]$. Trivialmente se verifican las conclusiones.

En caso contrario -es decir, si $c \in \overline{I(E)}$-, la función $\eta$ será construida como la solución de cierto problema de valor inicial. El Lema 2.1.2 garantiza la existencia de dos constantes $0 < b$, $\hat{\epsilon} < 1$ tales que

$$\|I'(u)\| \geq b \quad \forall u \in A_{c+\hat{\epsilon}} - A_{c-\hat{\epsilon}}. \tag{2.4}$$

Observamos que (2.4) se mantiene si $\hat{\epsilon}$ decrece. Por esto, se puede asumir que

$$0 < \hat{\epsilon} < \min\{\bar{\epsilon}, \frac{b^2}{2}\}. \tag{2.5}$$

Puesto que $c \in \overline{I(E)}$, se pueden escoger $\hat{\epsilon} > 0$ (cumpliendo (2.5)) y $0 < \epsilon < \hat{\epsilon}$, tales que los conjuntos

$$A := \{u \in E : I(u) \leq c - \hat{\epsilon} \text{ ó } I(u) \geq c + \hat{\epsilon}\} \quad \text{y}$$

$$B := \{u \in E : c - \epsilon \leq I(u) \leq c + \epsilon\}$$

sean no vacios. Observamos, además, que $A$ y $B$ son conjuntos cerrados y disjuntos.

Sea $f : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ la función definida por

$$f(x) := \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)},$$

donde $d(x,A)$ y $d(x,B)$ son las distancias de $x$ a los conjuntos $A$ y $B$ respectivamente.

La función $f$ tiene las siguientes propiedades -las cuales se verifican fácilmente- :$f$ es localmente Lipschitz, $f = 0$ en $A$, $f = 1$ en $B$ y $0 \leq f \leq 1$.

Sea

$$h(s) := \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq s \leq 1 \\ 1/s, & \text{si } s > 1. \end{cases}$$

Definamos $W : E \to E$ por

$$W(x) := -f(x)h(\|I'(x)\|)\, I'(x) \quad (x \in E).$$

Entonces, $0 \leq \|W(x)\| \leq 1$ para todo $x \in E$. Además, la función $W$ es localmente Lipschitz.

Ahora se construirá la función $\eta$ y se demostrará que cumple las afirmaciones (i),(ii) y (iii).

Para cada $u \in E$ consideremos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d\eta_u}{dt} = W(\eta_u(t)) \\ \eta_u(0) = u. \end{cases} \tag{2.6}$$

El problema (2.6) tiene una única solución $\eta_u$ definida en $(-\infty,\infty)$. En realidad, la existencia y unicidad de la solución son consecuencia de la teoría básica de ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach (ver [23]). Además, teniendo en cuenta que $W$ es acotado, se sigue que la solución está definida en $\mathbb{R}$.

Sea

$$\eta : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E.$$

$$(t,u) \mapsto \eta(t,u) := \eta_u(t).$$

Entonces $\eta \in C(\mathbb{R} \times E, E)$. En particular, $\eta|_{[0,1]\times E} \in C([0,1] \times E, E)$. Esta afirmación es consecuencia de la dependencia continua de la solución de (2.6) del dato inicial (ver [23] , Capítulo VI).

Claramente se cumple la afirmación (i).

Sea $u \in E$. Si $I(u) \notin [c-\bar{\epsilon}, c+\bar{\epsilon}]$, puesto que $\hat{\epsilon} < \bar{\epsilon}$ y $f = 0$ en $A$ se sigue que $W(u) = 0$. Así que la solución del problema (2.6), con valor inicial $u$, es constante e igual a $u$ (por la unicidad de la solución al problema de valor inicial). En particular $\eta(1,u) = u$. Se ha demostrado así la afirmación (ii).

Calculemos ahora

$$\begin{aligned} \frac{dI(\eta(t,u))}{dt} &= I'(\eta(t,u))\frac{d\eta}{dt} \\ &= I'(\eta(t,u))W(\eta) \\ &= -I'(\eta)f(\eta)h(\|I'(\eta)\|)\,I'(\eta) \\ &= -f(\eta)\,h(\|I'(\eta)\|)\|I'(\eta)\|^2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Luego

$$\frac{dI(\eta(t,u))}{dt} \leq 0 \quad (u \in E,\ 0 \leq t \leq 1). \tag{2.8}$$

Para demostrar la afirmación (iii) fijemos un punto $u \in A_{c+\epsilon}$. Queremos demostrar que

$$\eta(1,u) \in A_{c-\epsilon}. \tag{2.9}$$

Si $\eta(t_0,u) \notin B$ para algún $0 \leq t_0 \leq 1$, entonces $I(\eta(t_0,u)) < c-\epsilon$. Usando (2.8) se sigue que

$$I(\eta(1,u)) \leq I(\eta(t_0,u)) < c-\epsilon.$$

En este caso, la afirmación (iii) es válida.

Supongamos ahora que $\eta(t,u) \in B$ $(0 \leq t \leq 1)$, entonces $f(\eta(t,u)) = 1$. (2.7) da lugar a

$$\frac{dI(\eta(t,u))}{dt} = -h(\|I'(\eta)\|)\|I'(\eta)\|^2. \tag{2.10}$$

Si $\|I'(\eta)\| \geq 1$, la definición de $h$ y (2.4) implican que

$$\frac{dI(\eta(t,u))}{dt} = -\|I'(\eta)\| \leq -b \leq -b^2. \tag{2.11}$$

Si $\|I'\| \leq 1$, la definición de $h$ y (2.4) implican que

$$\frac{dI(\eta(t,u))}{dt} = -\|I'(\eta)\|^2 \leq -b^2. \tag{2.12}$$

Integrando (2.10) entre 0 y 1, y teniendo en cuenta estas dos desigualdades y (2.5), se tiene

$$I(\eta(1,u)) \leq I(u) - b^2 \leq c + \epsilon - b^2 \leq c - \epsilon.$$

Este estimativo demuestra la afirmación (iii). Lo cual completa la prueba del Lema de Deformación. ∎

Como una consecuencia del Lema de Deformación demostraremos a continuación un principio de minimización que es útil cuando el funcional en consideración no es coercivo. En la Sección 3 de este capítulo presentaremos una aplicación de este principio a ecuaciones diferenciales.

**Proposición 2.1.4.** *Sean $E$ un espacio de Hilbert e $I \in C^1(E,\mathbb{R})$. Supongamos que $I$ satisface la condición de Palais-Smale y que $I$ está acotado inferiormente. Entonces existe $u_0 \in E$ tal que*

$$I(u_0) = \inf_{u \in E} I(u).$$

**Demostración.** Sea

$$c = \inf_{u \in E} I(u).$$

Como el funcional $I$ está acotado inferiormente es claro que $c > -\infty$.

Queremos demostrar que $c$ es un valor crítico de $I$. Razonemos por el absurdo, supongamos que $c$ no es valor crítico de $I$, es decir

$$K_c = \emptyset.$$

Sea $\bar{\epsilon} > 0$. Entonces el Lema de Deformación, garantiza la existencia de un $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ y una función $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ que satisfacen (i),(ii) y (iii) (ver Lema 2.1.3). De la definición de $c$ se sigue que existe $u_* \in E$ tal que

$$I(u_*) \leq c + \epsilon.$$

Utilizando la propiedad (iii) del Lema de Deformación tenemos

$$I(\eta(1, u_*)) \leq c - \epsilon.$$

Luego

$$I(\eta(1, u_*)) \leq c - \epsilon < c \leq I(\eta(1, u_*)).$$

Esta contradicción demuestra que $K_c \neq \emptyset$. ■

## 2. El Teorema del Paso de la Montaña y un Teorema de Punto de Silla

Utilizando el Lema de Deformación, demostraremos a continuación una técnica muy interesante de "minimax" que permite deducir la existencia de un punto crítico de un funcional. Esta técnica fue demostrada en [5] por Ambrosetti y Rabinowitz.

**Teorema 2.2.1. (Teorema del Paso de la Montaña).** *Sea $E$ un espacio de Hilbert y sea $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ un funcional que satisface la condición de Palais-Smale. Supongamos que $I(0) = 0$,*

*(i) existen constantes positivas $\rho$ y $\alpha$ tales que*

$$I(u) \geq \alpha \quad si \quad \|u\| = \rho,$$

y

*(ii) existe un elemento $e \in E$ tal que*

$$\|e\| > \rho \quad \text{y} \quad I(e) \leq 0.$$

*Entonces $I$ posee un valor crítico $c \geq \alpha$. Además $c$ puede ser caracterizado como*

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(g(t)), \tag{2.13}$$

*donde* $\Gamma = \{g \in C([0,1], E)/\ g(0) = 0,\ g(1) = e\}$.

**Demostración.** Probaremos inicialmente que $c$, definido por (2.13), es tal que

$$\alpha \leq c < \infty. \tag{2.14}$$

En efecto, para cada $g \in \Gamma$, $\max\limits_{0 \leq t \leq 1} I(g(t))$ existe porque $I \circ g$ es una función escalar continua definida en $[0,1]$. Luego $c < \infty$. Además, si $g \in \Gamma$, la función $\|g(t)\|$ es continua en el intervalo $[0,1]$. Como $\|g(0)\| = 0$ y $\|g(1)\| = \|e\|$ y por hipótesis $\|e\| > \rho > 0$, el Teorema del Valor Intermedio garantiza la existencia de un número $t_0 \in (0,1)$ tal que $\|g(t_0)\| = \rho$. Utilizando la hipótesis (i) se sigue que

$$\max_{0 \leq t \leq 1} I(g(t)) \geq I(g(t_0)) \geq \alpha.$$

Puesto que $g \in \Gamma$ era arbitraria, la anterior desigualdad completa la prueba de (2.14).

Demostraremos a continuación que $c$ es un valor crítico de $I$. Razonemos por el absurdo, supongamos que $c$ no es valor crítico de $I$, es decir

$$K_c = \emptyset. \tag{2.15}$$

Sea $\bar{\epsilon} := \frac{\alpha}{2}$. Entonces el Lema de Deformación, garantiza la existencia de un $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ y una función $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ que satisfacen (i), (ii) y (iii) (ver Lema 2.3.1).

Por (2.13), existe $g_0 \in \Gamma$ tal que

$$\max_{0 \leq t \leq 1} I(g_0(t)) \leq c + \epsilon. \tag{2.16}$$

Definamos

$$h(t) := \eta(1, g_0(t)) \quad \text{para todo } t \in [0,1].$$

Como $\eta(1,\cdot) \in C(E,E)$ y $g_0$ es continua en $[0,1]$, $h = \eta(1,\cdot) \circ g_0$ es tal que $h \in C([0,1], E)$. También $g_0(0) = 0$ e $I(g_0(0)) = I(0) = 0 < \frac{\alpha}{2} \leq c - \bar{\epsilon}$. Por el Lema de Deformación se sigue que $h(0) = \eta(1,0) = 0$. De manera similar, $h(1) = \eta(1,e) = e$. Por esto, $h \in \Gamma$ y por (2.13)

$$c \leq \max_{0 \leq t \leq 1} I(h(t)). \tag{2.17}$$

Por (2.16),

$$I(g_0(t)) \leq c + \epsilon \qquad \text{para todo } t \in [0,1].$$

Usando el Lema de Deformación tenemos

$$I(h(t)) = I(\eta(1, g_0(t)) \leq c - \epsilon \qquad \text{para todo } t \in [0,1].$$

Por lo tanto

$$\max_{0 \leq t \leq 1} I(h(t)) \leq c - \epsilon. \tag{2.18}$$

De (2.17) y (2.18) se sigue que

$$c \leq c - \epsilon.$$

Esta contradicción demuestra que $c$ es un valor crítico de $I$. ■

A continuación presentamos otro teorema de minimax, el cual será utilizado en la sección siguiente para demostrar existencia de soluciones débiles para problemas elípticos semilineales. Un teorema similar a este puede verse en [30].

**Teorema 2.2.2 (un Teorema de Punto de Silla).** *Sea $E$ un espacio de Hilbert. Sean $X$ e $Y$ subespacios cerrados tales que $E = X \oplus Y$ y $\dim X < \infty$. Sea $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ un funcional que satisface la condición de Palais-Smale.*

*Supongamos que existan números positivos $a$ y $b$ y números reales $\alpha, \beta, \delta$ y $\gamma$ tales que*

*(i)* $\alpha := \max\{I(x); x \in X, \|x\| = a\} < \beta := \inf\{I(y); y \in Y, \|y\| \leq b\}$

*(ii)* $\delta := \max\{I(x); x \in X, \|x\| \leq a\} < \gamma := \inf\{I(y); y \in Y, \|y\| = b\}$.

*Entonces $I$ posee un valor crítico $c$, que se caracteriza como*

$$c = \inf_{\sigma \in \sum} \max_{\|x\| \leq a} I(\sigma(x)),$$

*donde* $\sum = \{\sigma : \overline{B_a(0)} \longrightarrow E - \{y \in Y; \|y\| = b\}$, *$\sigma$ es continua,* $\sigma(x) = x$ *si* $\|x\| = a$ *y existe una homotopía* $h : [0,1] \times \overline{B_a(0)} \longrightarrow E - \{y \in Y; \|y\| = b\}$ *tal que* $h(0,x) = x$ *y* $h(1,x) = \sigma(x)$ $\}$.

**Demostración.** Claramente $\sum \neq \emptyset$ ya que la función identidad $I \in \sum$.

Observamos inicialmente que para cada $\sigma \in \sum$ existe $\hat{x} \in \overline{B_a(0)}$ tal que $\sigma(\hat{x}) \in Y$ y $\|\sigma(\hat{x})\| < b$ (esta observación se deja como ejercicio al lector).

Afirmamos que $-\infty < c < +\infty$. En efecto, de la observación anterior y de la definición de $\beta$ se sigue que para cada $\sigma \in \sum$

$$\max_{\|x\| \leq a} I(\sigma(x)) \geq I(\sigma(\hat{x})) \geq \beta.$$

Por lo tanto

$$c \geq \beta > -\infty.$$

Por otro lado, como la función identidad $I \in \sum$ se sigue que

$$c \leq \max_{\|x\| \leq a} I(x) := \delta < +\infty.$$

Lo que demuestra nuestra afirmación.

Probaremos a continuación que $c$ es un valor crítico de $I$. Razonemos por el absurdo, supongamos que $c$ no es valor crítico de $I$, es decir

$$K_c = \emptyset.$$

Como

$$\alpha < \beta \leq c \leq \delta < \gamma,$$

sea $\bar{\epsilon} > 0$ tal que

$$\bar{\epsilon} < \min\{\gamma - c, c - \alpha\}.$$

El Lema de Deformación garantiza la existencia de un $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ y una función $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ que satisfacen (i),(ii) y (iii) (ver Lema 2.1.3).

Por la definición de $c$, existe $\sigma_0 \in \sum$ tal que

$$\max_{\|x\| \leq a} I(\sigma_0(x)) \leq c + \epsilon.$$

Definamos

$$\sigma_1(x) := \eta(1, \sigma_0(x)) \quad \forall x \in \overline{B_a(0)}.$$

Demostraremos a continuación que $\sigma_1 \in \sum$. En efecto, como $\eta(1, \cdot) \in C(E, E)$ y $\sigma_0$ es continua, se sigue que $\sigma_1 = \eta(1, \cdot) \circ \sigma_0$ es continua. Utilizando el hecho de que el funcional $I$ es decreciente a lo largo de la deformación y la definición de $\bar{\epsilon}$ obtenemos

$$I(\sigma_1(x)) = I(\eta(1, \sigma_0)) \leq I(\sigma_0(x)) \leq c + \epsilon < c + \bar{\epsilon} < \gamma.$$

Usando la definición de $\gamma$ se sigue que

$$\sigma_1(x) \in E - \{y \in Y; \|y\| = b\}.$$

Si $\|x\| = a$, como $\sigma_0 \in \sum$, entonces $\sigma_0(x) = x$. Utilizando la definición de $\alpha$ y de $\bar{\epsilon}$ obtenemos

$$I(\sigma_0(x)) \leq \alpha < c - \bar{\epsilon}.$$

Por el Lema de Deformación se sigue que

$$\sigma_1(x) = \eta(1, \sigma_0(x)) = \sigma_0(x) = x.$$

Ahora como $\sigma_1$ es homotópica a $\sigma_0$ (la homotopía es la función $\eta$) y $\sigma_0$ es homotópica a la identidad (porque $\sigma_0 \in \sum$) se sigue que $\sigma_1$ es homotópica a la identidad. Hemos demostrado que la función $\sigma_1 \in \sum$.

Como

$$I(\sigma_0(x)) \leq c + \epsilon \qquad \forall x \in \overline{B_a(0)},$$

se sigue, por el Lema de Deformación, que

$$I(\sigma_1(x)) = I(\eta(1, \sigma_0(x)) \leq c - \epsilon.$$

Luego

$$c \leq \max_{\|x\| \leq a} I(\sigma_1(x)) \leq c - \epsilon.$$

Esta contradicción demuestra que $c$ es un valor crítico de $I$. ■

## 3. Aplicaciones a Problemas Elípticos Semilineales

En esta sección ilustraremos la utilidad del Lema de Deformación, el Teorema del Paso de la Montaña y el Teorema de Punto de Silla, en la investigación de la existencia de soluciones débiles para ecuaciones diferenciales semilineales.

Inicialmente presentaremos una aplicación del principio de minimización desarrollado en la Proposición 2.1.4.

**Teorema 2.3.1.** *Sea $\Omega$ un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ con frontera suave. Sea $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada. Entonces el problema de Dirichlet no lineal*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = g(x,u), \text{ en } \Omega \\ u = 0, \text{ en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.19}$$

*Tiene al menos una solución débil en $H_0^1(\Omega)$.*

**Demostración.** Imitando la prueba de la Proposición 1.2.3 se demuestra que el funcional $I : H_0^1 \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \int_\Omega (\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}u^2 - G(x,u))\, dx,$$

donde $G(x,t) = \int_0^t g(x,s)\, ds$, es un funcional de clase $C^1(H_0^1, \mathbb{R})$.

Además,

$$I'(u)\, v = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + u\, v - g(x,u)\, v)\, dx \quad \forall v \in H_0^1. \tag{2.20}$$

Luego $u \in H_0^1$ es una solución débil de (2.19) si y sólo si $u$ es un punto crítico del funcional $I$.

Probemos ahora que el funcional $I$ está acotado inferiormente. En efecto, como $g$ es acotada existe $M > 0$ tal que $|g(x,u(x))| \leq M$. Luego

$$|G(x,u(x))| \leq \int_0^{u(x)} |g(x,t)|\, dt \leq M|u(x)| \leq \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{2}|u(x)|^2.$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 - \frac{1}{2}M^2\,|\Omega| - \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}M^2\,|\Omega| \\
&\geq -\frac{1}{2}M^2\,|\Omega|.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Luego $I$ está acotado inferiormente.

Demostraremos ahora que el funcional $I$ satisface la condición de Palais-Smale. Para esto supongamos que $(u_n)$ es una sucesión en $H_0^1$ tal que

$$
(I(u_n)) \quad \text{está acotada} \quad \text{y } I'(u_n) \to 0.
$$

Usando (2.21) se prueba que la sucesión $(u_n)$ está acotada en $H_0^1$. Luego existen una subsucesión $(u_{n_j})$ y $u \in H_0^1$ tal que $u_{n_j} \rightharpoonup u$ débilmente en $H_0^1$. Como la inclusión de $H_0^1$ en $L^2$ es compacta (ver [6], Teorema IX.16) se sigue que $u_{n_j} \to u$ en $L^2$.

Sean $k, l \in \mathbb{N}$. De (2.20) tenemos que

$$
\begin{aligned}
(I'(u_k) - I'(u_l))\,(u_k - u_l) = &\int_\Omega (|\nabla(u_k - u_l)|^2 + (u_k - u_l)^2 \\
&- \int_\Omega (g(x, u_k(x)) - g(x, u_l(x)))\,(u_k(x) - u_l(x))\,dx
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
(I'(u_k) - I'(u_l))\,(u_k - u_l) = &\,\|u_k - u_l\|^2 + \|u_k - u_l\|_{L^2}^2 \\
&- \int_\Omega (g(x, u_k(x)) - g(x, u_l(x)))\,(u_k(x) - u_l(x))\,dx
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

Como $I'(u_n) \to 0$ se sigue que el lado izquierdo de (2.22) tiende a cero cuando $k, l \to \infty$. Además, el segundo término y la integral en el lado derecho de (2.22) también tienden a cero cuando $k, l \to \infty$. Por lo tanto

$$\|u_k - u_l\|^2 \to 0 \quad \text{cuando } k, l \to \infty.$$

Luego $(u_n)$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Hilbert $H_0^1$ y por lo tanto converge. Se concluye así que el funcional $I$ satisface la condición de Palais-Smale. Usando la Proposición 2.1.4 se concluye que existe un punto crítico $u \in H_0^1$. Lo cual completa la demostración del teorema. ∎

El Teorema del Paso de la Montaña se utilizará a continuación para probar la existencia de soluciones débiles de problemas elípticos semilineales. Consideremos el problema

$$\text{(2.23)} \qquad \begin{cases} \Delta u + p(x, u) = 0 \text{ en } \Omega \\ \\ \qquad\qquad u = 0 \text{ en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado con frontera suave $(n \geq 3)$.

Supongamos que $p$ satisface las siguientes condiciones:

(i) $p \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$,

(ii) Existen constantes $a_1, a_2 \geq 0$ tales que

$$|p(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^s \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R},$$

donde $0 \leq s < \frac{n+2}{n-2}$.

(iii) $p(x,\xi) = o(|\xi|)$ cuando $\xi \to 0$, uniformemente en $x$.

(iv) Existen constantes $\mu > 2$ y $r \geq 0$ tales que para todo $|\xi| \geq r$

$$0 < \mu P(x,\xi) \leq \xi\, p(x,\xi),$$

donde $P(x,\xi) = \int_0^\xi p(x,s)\, ds$.

**Teorema 2.3.2.** *Si la funcion $p$ satisface las hipótesis (i)-(ii)-(iii)-(iv) entonces el problema (2.23) tiene una solución débil no trivial.*

**Demostración.** De la Proposición 1.2.3 se sigue que $u \in H := H_0^1(\Omega)$ es una solución débil de (2.23) si y sólo si $u$ es un punto crítico del funcional $I \in C^1(H_0^1, \mathbb{R})$ definido por

$$I(u) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - P(x,u))\, dx. \tag{2.24}$$

Además,

$$I'(u)\, v = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - p(x,u)\, v)\, dx \quad \forall v \in H_0^1. \tag{2.25}$$

Debemos verificar que el funcional $I$ satisface las hipótesis del Teorema del Paso de la Montaña.

La continuidad de la función $p$ y la hipótesis (iii) implican que $p(x,0) = 0$. Luego el problema (2.23) posee la solución trivial $u \equiv 0$. Además, de (2.24) se sigue que $I(0) = 0$.

La primera hipótesis del Teorema del Paso de la Montaña (hipótesis (i) del Teorema 2.2.1) es una consecuencia de la siguiente afirmación.

**Afirmación 1.** $u = 0$ *es un punto de mínimo local estricto del funcional* $I$.

**Prueba.** Por la hipótesis (iii), dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|\xi| \leq \delta \Longrightarrow |p(x, \xi)| \leq \epsilon\, |\xi| \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Por lo tanto,

$$|\xi| \leq \delta \Longrightarrow |P(x, \xi)| \leq \int_0^\xi |p(x, s)|\, ds \leq \frac{1}{2}\epsilon\, |\xi|^2 \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{2.26}$$

De la hipótesis (ii) se sigue que si $|\xi| \geq \delta$ entonces

$$\begin{aligned} |P(x, \xi)| &\leq \int_0^\xi |p(x, t)|\, dt \leq \int_0^\xi (a_1 + a_2|t|^s)\, dt \\ &\leq a_1|\xi| + \frac{a_2}{s+1}|\xi|^{s+1} \\ &\leq |\xi|^{s+1}\left(\frac{a_1}{\delta^s} + \frac{a_2}{s+1}\right) \\ &= A(\delta)|\xi|^{s+1} \qquad \forall x \in \overline{\Omega}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Combinando las dos últimas estimaciones, se sigue que

$$|P(x, \xi)| \leq \frac{1}{2}\epsilon\, |\xi|^2 + A\, |\xi|^{s+1} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Utilizando la desigualdad anterior, (2.24), la desigualdad de Poincaré y el Teorema de Encaje de Sobolev tenemos que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}\epsilon\, \|u\|_{L^2}^2 - A\, \|u\|_{L^{s+1}}^{s+1} \\ &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) \|u\|^2 - A^*\, \|u\|^{s+1} \quad (A^* \text{ es una constante}) \\ &= (c_\epsilon - A^*\, \|u\|^{s-1})\, \|u\|^2, \end{aligned} \tag{2.28}$$

donde $c_\epsilon := \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\epsilon}{\lambda_1}\right)$.

Sean $0 < \epsilon < \lambda_1$ y $s > 1$ en (ii). Si $u \in H$ es tal que $0 < \|u\| \leq \left(\frac{c_\epsilon}{2\,A^*}\right)^{\frac{1}{s-1}}$ de la desigualdad (2.28) se sigue que

$$I(u) > I(0) = 0.$$

Luego $u = 0$ es un punto de mínimo del funcional $I$. $\square$

Demostraremos ahora la segunda hipótesis del Teorema del Paso de la Montaña (hipótesis (ii) del Teorema 2.2.1).

Usando la hipótesis (iv) se prueba fácilmente que existen constantes $a_3, a_4 > 0$ tales que

$$P(x,\xi) \geq a_3|\xi|^\mu - a_4 \qquad \forall x \in \overline{\Omega} \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.29}$$

Observamos que como $\mu > 2$, $P(x,\xi)$ es "supercuadrática" en $\xi$. Por (iv), $p(x,\xi)$ es "superlineal" cuando $|\xi| \to \infty$.

Fijemos un elemento $v \in H$ tal que $v \neq 0$. Sea $u = t\,v$, donde $t > 0$. Usando (2.24) y (2.29) se sigue que

$$I(u) = I(t\,v) \leq \frac{1}{2}t^2\,\|v\|^2 - a_3\,t^\mu\,\|v\|^\mu_{L^\mu} + a_4|\Omega|. \tag{2.30}$$

Tomando el límite en (2.30) cuando $t \to +\infty$ y teniendo en cuenta que $\mu > 2$ tenemos que

$$I(t\,v) \to -\infty \qquad \text{si } t \to +\infty.$$

Luego la segunda hipótesis del Teorema del Paso de La Montaña es válida.

Demostraremos ahora que el funcional $I$ satisface la condición de Palais-Smale. Sea $(u_n)$ una sucesión en $H_0^1$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} I'(u_n) = 0 \quad \text{y} \quad |I(u_n)| \leq M, \text{ para alguna constante } M > 0. \tag{2.31}$$

Usando (2.24) y (2.25) tenemos

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega P(x, u_n)\, dx \tag{2.32}$$

y

$$\frac{1}{\mu} I'(u_n)\, u_n = \frac{1}{\mu}\|u_n\|^2 - \frac{1}{\mu}\int_\Omega p(x, u_n)\, u_n\, dx. \tag{2.33}$$

Usando (2.31) se sigue que para $n$ suficientemente grande

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n) u_n \leq M + \frac{1}{\mu}\|u_n\|.$$

De (2.32), (2.33) y la desigualdad anterior se sigue que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 + \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu} p(x, u_n)\, u_n - P(x, u_n)\right) \leq M + \frac{1}{\mu}\|u_n\|. \tag{2.34}$$

Sea $T := \frac{1}{\mu} p(x, u_n)\, u_n - P(x, u_n)$. Ahora

$$\int_\Omega T\, dx = \int_{\{x\in\Omega;\, |u(x)|\geq r\}} T\, dx + \int_{\{x\in\Omega;\, |u(x)|\leq r\}} T\, dx. \tag{2.35}$$

Por la hipótesis (iv) la primera integral del lado derecho de (2.35) es positiva. Además, la segunda integral está acotada inferiormente por una constante $K > 0$ que no depende de $n$.

Luego (2.34) y la observación anterior implican que

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 + K \leq M + \frac{1}{\mu}\|u_n\|.$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 - \frac{1}{\mu}\|u_n\| + K \leq M. \tag{2.36}$$

Como $\mu > 2$, (2.36) implica que la sucesión $(u_n)$ es una sucesión acotada en $H$. Por lo tanto $(u_n)$ tiene una subsucesión convergente (ver [26], Proposición B.35). Lo que demuestra la condición de Palais-Smale para el funcional $I$.

Como el funcional $I$ satisface las hipótesis del Teorema del Paso de la Montaña se concluye que el funcional $I$ tiene un punto crítico $u \in H$. Como $I(0) = 0$ y $I(u) \geq \alpha > 0$ se sigue que $u$ es una solución no trivial. Hemos concluído la demostración del teorema. ■

**Observación 2.3.3** Si en el Teorema 2.3.2 la función $p(x,\xi)$ es localmente Lipschitz en $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ entonces la solución débil del problema (2.23) es también una solución clásica (ver [2]).

**Observación 2.3.4** En el Capítulo 3 daremos otra aplicación del Teorema del Paso de la Montaña (ver Teorema 3.2.3). En dicho Teorema la demostración de que el funcional satisface la condición de Palais-Smale la haremos utilizando el método de reducción que será explicado en el capítulo siguiente.

A continuación presentaremos una aplicación del Teorema de Punto de Silla visto en la Sección 2.

**Teorema 2.3.3.** *Sea $\Omega$ un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ con frontera suave. Sea $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada. Sea $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$. Entonces el problema de Dirichlet no lineal*

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda\, u + g(x,u) = 0, \text{ en } \Omega \\ u = 0, \text{ en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.37}$$

*Tiene al menos una solución débil.*

**Demostración.** Sea $I : H_0^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ el funcional definido por

$$I(u) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{2}\lambda\, u^2 - G(x,u))\, dx, \tag{2.38}$$

donde $G(x,\xi) = \int_0^\xi g(x,s)\, ds$.

Como la función $p(s,\xi) := \lambda\xi + g(s,\xi)$ satisface las hipótesis de la Proposición 1.2.3 se sigue que $I \in C^1(H_0^1, \mathbb{R})$ y

$$I'(u)\,\varphi = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla\varphi - \lambda\, u\,\varphi - g(x,u)\,\varphi)\, dx \quad \forall \varphi \in H_0^1. \tag{2.39}$$

Sean $X = \langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \rangle$ e $Y = \langle \varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}, \ldots \rangle$. Entonces

$$H = X \oplus Y.$$

Por el Teorema 4.8 de [9] el conjunto $(\varphi_j)$ es un conjunto ortonormal completo en $L^2(\Omega)$ y cada $\varphi_j$ es solución débil del problema lineal

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda_j\, u = 0, \text{ en } \ \Omega \\ \qquad\quad u = 0, \text{ en } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.40}$$

En la prueba del teorema necesitamos las siguientes afirmaciones.

**Afirmación 1.**

(a) $\|x\| \le \lambda_k \int_\Omega x^2 \qquad \forall x \in X.$

(b) $\|y\| \ge \lambda_{k+1} \int_\Omega y^2 \qquad \forall y \in Y.$

**Demostración.** Sea $x \in X$. Luego $x = \sum_{i=1}^{k} c_i\, \varphi_i$.

$$\begin{aligned} \|x\|^2 = \int_\Omega \nabla x \cdot \nabla x &= \int_\Omega (\sum_{i=1}^{k} c_i\, \nabla\varphi_i) \cdot (\sum_{i=1}^{k} c_i\, \nabla\varphi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i^2 \int_\Omega \nabla\, \varphi_i \cdot \nabla\, \varphi_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i^2 \lambda_i \int_\Omega \varphi_i^2 \\ &\le \lambda_k \sum_{i=1}^{k} c_i^2 \\ &= \lambda_k \int_\Omega x^2. \end{aligned}$$

Lo que demuestra la parte (a).

Sea $y \in Y$. Luego $y = \sum_{i=k+1}^{\infty} c_i \varphi_i$. Sea $y_N = \sum_{i=k+1}^{N} c_i \varphi_i$.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla y_N \cdot \nabla y_N &= \int_\Omega \Big(\sum_{i=k+1}^{N} c_i \nabla \varphi_i\Big) \cdot \Big(\sum_{i=K+1}^{N} c_i \nabla \varphi_i\Big) \\
&= \sum_{i=k+1}^{N} c_i^2 \int_\Omega \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_i \\
&= \sum_{i=k+1}^{N} c_i^2 \lambda_i \int_\Omega \varphi_i^2 \\
&\geq \lambda_{k+1} \sum_{i=k+1}^{N} c_i^2 \\
&= \lambda_{k+1} \int_\Omega y_N^2 .
\end{aligned}$$

Como

$$\int_\Omega \nabla y \cdot \nabla y \geq \int_\Omega \nabla y_N \cdot \nabla y_N$$

se sigue que

$$\int_\Omega \nabla y \cdot \nabla y \geq \lambda_{k+1} \int_\Omega y_N^2 .$$

Como $y_N \underset{(N \to \infty)}{\longrightarrow} y$ en $L^2(\Omega)$ tenemos

$$\int_\Omega \nabla y \cdot \nabla y \geq \lambda_{k+1} \int_\Omega y^2 .$$

Lo que demuestra la parte (b). $\square$

**Afirmación 2.**

$$I(x) \longrightarrow -\infty \quad \text{cuando} \quad \|x\| \longrightarrow \infty \quad (x \in X).$$

**Demostración.** Sea $x \in X$. De (2.38) tenemos

$$I(x) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla x|^2 - \frac{1}{2}\lambda\, x^2 - G(\xi, x))\, d\xi,$$

Como $g$ es una función acotada existe $M > 0$ tal que $|G(\xi, x)| \leq M|x|$. Usando la afirmación 1(a), la desigualdad de Hölder y el Teorema de Encaje de Sobolev tenemos

$$\begin{aligned} I(x) &\leq \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda_k}\,\|x\|^2 + \int_\Omega M|x| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\|x\|^2 + M\,|\Omega|^{\frac{1}{2}}\,\|x\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\|x\|^2 + C\,\|x\|. \end{aligned}$$

Como por hipótesis $\lambda > \lambda_k$ se sigue que

$$I(x) \longrightarrow -\infty \quad \text{cuando} \quad \|x\| \longrightarrow \infty \quad (x \in X). \quad \square$$

**Afirmación 3.**

El funcional $I$ está acotado inferiormente y

$$I(y) \longrightarrow +\infty \quad \text{cuando} \quad \|y\| \to \infty \quad (y \in Y).$$

**Demostración** Sea $y \in Y$. De (2.38) tenemos

$$I(y) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla y|^2 - \frac{1}{2}\lambda\, y^2 - G(\xi, y))\, d\xi.$$

Como $g$ es una función acotada existe $M > 0$ tal que $G(\xi, y) \leq M|y|$. Usando la afirmación 1(b) y la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned} I(y) &\geq \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\,\|y\|^2 - M\,|\Omega|^{\frac{1}{2}}\|y\|_{L^2} \\ &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\|y\|^2 - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}\,M\,|\Omega|^{\frac{1}{2}}\,\|y\|. \end{aligned}$$

Como por hipótesis $\lambda < \lambda_{k+1}$ se sigue que

$$I(y) \longrightarrow +\infty \quad \text{cuando} \quad \|y\| \longrightarrow \infty \quad (y \in Y).$$

Y, además, el funcional $I$ está acotado inferiormente. $\square$

**Afirmación 4.** El funcional $I$ satisface la condición de Palais-Smale.

**Demostración.** Sea $(u_n) \subset H_0^1$ tal que

$$(2.41) \qquad I'(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{y} \qquad I(u_n) \leq M^*, \quad \text{donde } M^* \text{ es una constante.}$$

Como $H = X \oplus Y$ entonces existen $x_n \in X$ y $y_n \in Y$ tales que $u_n = x_n + y_n$. De (2.41) se sigue que dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$(2.42) \qquad I'(u_n)(-x_n + y_n) \leq \epsilon\|x_n - y_n\| = \epsilon\|x_n + y_n\|.$$

Usando (2.39) tenemos

$$\begin{aligned} I'(u_n)\,(-x_n + y_n) = \int_\Omega \{&\nabla(x_n + y_n) \cdot \nabla(-x_n + y_n) - \lambda\,(x_n + y_n)\,(-x_n + y_n) \\ &- g(\xi, x_n + y_n)\,(y_n - x_n)\} \end{aligned}$$

De (2.42) y la igualdad anterior se sigue que

$$\begin{aligned} I'(u_n)\,(-x_n + y_n) &= \int_\Omega \{-|\nabla x_n|^2 + |\nabla y_n|^2 + \lambda x_n^2 - \lambda y_n^2 - g(\xi, x_n + y_n)\,(y_n - x_n)\} \\ &\leq \epsilon\|x_n + y_n\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto

(2.43)

$$\int_\Omega |\nabla y_n|^2 + \lambda \int_\Omega x_n^2 \leq \epsilon\|x_n + y_n\| + \lambda \int_\Omega y_n^2 + \int_\Omega |\nabla x_n|^2 + \int_\Omega g(\xi, x_n + y_n)\,(y_n - x_n).$$

Utilizando el acotamiento de la función $g$, la desigualdad de Hölder y el Teorema de Encaje de Sobolev se sigue que

$$\int_\Omega g(\xi, x_n + y_n)(y_n - x_n) \leq M \int_\Omega (y_n - x_n) \leq M^{*\frac{1}{2}} \|y_n - x_n\|_{L^2}$$
$$\leq M_1 \|y_n - x_n\| \leq M_1(\|x_n\| + \|y_n\|),$$

donde $M^*$ y $M_1$ son constantes.

Usando la desigualdad anterior y la Afirmación 1 en (2.43) tenemos

$$\int_\Omega |\nabla y_n|^2 + \lambda \int_\Omega x_n^2 \leq (\epsilon + M_1)(\|x_n\| + \|y_n\|) + \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}} \|y_n\|^2 + \lambda_k \int_\Omega x_n^2.$$

Por lo tanto

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right) \|y_n\|^2 + (\lambda - \lambda_k)\|x_n\|_{L^2}^2 \leq (\epsilon + M_1)(\|x_n\| + \|y_n\|).$$

Luego

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right) \|y_n\|^2 + \frac{(\lambda - \lambda_k)}{\lambda_k}\|x_n\|^2 \leq (\epsilon + M_1)(\|x_n\| + \|y_n\|).$$

Como, por hipótesis, los coeficientes en el lado izquierdo de la desigualdad anterior son positivos se sigue que las sucesiones $(x_n)$ y $(y_n)$ están acotadas en $H_0^1$. Por lo tanto la sucesión $(u_n)$ está acotada. Por la Proposición B.35 de [26] se sigue que $(u_n)$ tiene una subsucesión convergente. Luego el funcional $I$ satisface la condición de Palais-Smale. $\square$

De las Afirmaciones 2 y 3 demostradas anteriormente se concluye que existen números positivos $a$ y $b$, suficientemente grandes, tales que

$$\max\{I(x); x \in X, \|x\| = a\} < \inf\{I(y); y \in Y, \|y\| \leq b\} \quad \text{y}$$

$$\max\{I(x); x \in X, \|x\| \leq a\} < \inf\{I(y); y \in Y, \|y\| = b\}.$$

Utilizando el Teorema 2.2.2 se deduce que el funcional $I$ tiene un punto crítico. Y por lo tanto el problema (2.37) tiene solución débil. Lo que concluye la demostración del teorema. ■

# CAPÍTULO 3

# PUNTOS CRÍTICOS VIA REDUCCIÓN

En este capítulo presentaremos una técnica que permite reducir el estudio de los puntos críticos de un funcional $I$ definido en un espacio de Hilbert $H$ al estudio de los puntos críticos de un funcional $\hat{I}$ definido en un subespacio cerrado de $H$, el cual es, generalmente, de dimensión finita. Esta técnica se conoce como el *método de reducción* y permite demostrar la existencia y multiplicidad de soluciones para problemas de Dirichlet no lineales.

En la Sección 1 demostraremos los resultados principales que explican el método de reducción (ver Teoremas 3.1.3 y 3.1.4) y en la Sección 2 aplicaremos dicho método para probar la existencia de soluciones débiles para problemas elípticos semilineales.

## 1. Teoremas Centrales

Sean $H$ un espacio de Hilbert real y $f : H \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Sea $f'(u)$ la derivada de Fréchet de $f$ en $u \in H$. Por el Teorema de Representación de Riesz, existe un único elemento $\nabla f(u) \in H$, que llamaremos el gradiente de $f$ en $u$, tal que

$$f'(u)\, v = \langle \nabla f(u), v \rangle \qquad \forall v \in H.$$

El siguiente lema será utilizado ampliamente en esta sección.

**Lema 3.1.1 (Lema de Hadamard).** *Sea $H$ un espacio de Hilbert real. Si $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase $C^1$ entonces*

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \langle \nabla f(x + s(y - x)), y - x \rangle \, ds \quad \forall x, y \in H$$

**Demostración.** Sean $x$, $y \in H$. Sea

$$\rho : [0,1] \to H$$
$$s \longmapsto \rho(s) = x + s(y - x).$$

Luego $f \circ \rho : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función de clase $C^1$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\begin{aligned} f(\rho(1)) - f(\rho(0)) &= \int_0^1 (f \circ \rho)'(s)\, ds, \\ f(y) - f(x) &= \int_0^1 f'(\rho(s))\rho'(s)\, ds, \\ f(y) - f(x) &= \int_0^1 \langle \nabla f(x + s(y - x)), (y - x) \rangle \, ds. \ \blacksquare \end{aligned}$$

El siguiente lema será una herramienta de gran utilidad en la demostración del resultado principal de este capítulo.

**Lema 3.1.2.** *Sea $f : H \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^1$. Si existe $m > 0$ tal que*

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq m \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in H,$$

*entonces $f$ tiene un único punto de mínimo en $H$. Además, el punto de mínimo es el único punto crítico de $f$.*

**Demostración.** Probaremos inicialmente que $f$ es una función convexa. En efecto, sean $x, y \in H$ y $0 < t < 1$. Por el Lema de Hadamard

$$f(x + t(y - x)) = f(x) + \int_0^1 \langle \nabla f(x + ts(y - x)), t(y - x) \rangle \, ds.$$

Usando la hipótesis y el hecho de que $s(t - 1) \leq 0$ para todo $s \in [0, 1]$, se sigue que

$$\langle \nabla f(x + ts(y - x)) - \nabla f(x + s(y - x)), (st - s)(y - x) \rangle \geq 0$$

$$\langle \nabla f(x + ts(y - x)) - \nabla f(x + s(y - x)), (y - x) \rangle \leq 0$$

Luego

$$\langle \nabla f(x + ts(y - x)), y - x \rangle \leq \langle \nabla f(x + s(y - x)), (y - x) \rangle .$$

Usando la expresión integral vista arriba y el Lema de Hadamard se sigue que

$$\begin{aligned} f(x + t(y - x)) &\leq f(x) + t \int_0^1 \langle \nabla f(x + s(y - x), (y - x) \rangle \, ds \\ &= f(x) + t(f(y) - f(x)) \\ &= (1 - t) f(x) + t\, f(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto $f$ es una función convexa.

Como $f$ es una función continua y convexa se sigue que $f$ es débilmente inferiormente semicontinua (ver [6], Corolario III.8).

Demostraremos a continuación que $f$ es una función coerciva. Usando el Lema de Hadamard, la hipótesis y la desigualdad de Schwarz tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^1 \langle \nabla f(sx), x \rangle \, ds \\ &= f(0) + \int_0^1 \langle \nabla f(sx) - \nabla f(0), x \rangle \, ds + \langle \nabla f(0), x \rangle \\ &\geq f(0) + m \int_0^1 s \|x\|^2 \, ds - \|\nabla f(0)\| \, \|x\| \\ &= f(0) + \frac{m}{2} \|x\|^2 - \|\nabla f(0)\| \, \|x\|. \end{aligned}$$

Luego $f(x) \longrightarrow \infty$ cuando $\|x\| \longrightarrow \infty$. Por lo tanto $f$ es una función coerciva.

Usando el Teorema 1.1.2 se sigue que $f$ está acotada inferiormente y que existe $u_0 \in H$ tal que

$$f(u_0) = \inf_{u \in H} f(u).$$

Luego $u_0$ es un punto de mínimo de $f$ en $H$. Como $f$ es diferenciable se concluye que $u_0$ es un punto crítico de $f$.

Demostraremos ahora que $f$ tiene un único punto crítico. En efecto, supongamos que existe otro punto crítico $u_1 \in H$. Usando la hipótesis tenemos que

$$0 = \langle \nabla f(u_0) - \nabla f(u_1), u_0 - u_1 \rangle \geq m \|u_0 - u_1\|^2.$$

Por lo tanto

$$u_0 = u_1.$$

Lo que concluye la prueba del teorema. ■

A continuación presentamos el resultado principal de este capítulo.

**Teorema 3.1.3.** *Sea $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^1$. Supongamos que existen subespacios cerrados $X$ e $Y$ de $H$ tales que $H = X \oplus Y$ y que existe una constante $m > 0$ tal que*

$$\langle \nabla f(x + y_1) - \nabla f(x + y_2), y_1 - y_2 \rangle \geq m \|y_1 - y_2\|^2 \quad \forall x \in X, \forall y_1, y_2 \in Y. \tag{3.1}$$

*Entonces existe una función continua $\phi : X \longrightarrow Y$ que satisface:*

*i)* $f(x+\phi(x)) = \min_{y\in Y} f(x+y)$,

*ii) La función*

$$\hat{f} : X \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \hat{f}(x) = f(x+\phi(x))$$

*es de clase* $C^1$ *y*

$$(3.2)\qquad \begin{aligned} &\left\langle \nabla \hat{f}(x), h \right\rangle = \langle \nabla f(x+\phi(x)), h\rangle \qquad \forall\, x, h \in X \\ &\langle \nabla f(x+\phi(x)), y\rangle = 0 \qquad \forall x \in X, \forall\, y \in Y \end{aligned}$$

**Demostración.**

Para cada $x \in X$ definamos la función

$$f_x : Y \to \mathbb{R}$$

$$y \mapsto f_x(y) = f(x+y)$$

**Afirmación 1.** $f_x \in C^1(Y, \mathbb{R})$, $f_x^{'}(y) = f^{'}(x+y)|_Y$ y

$$(3.3)\qquad \langle \nabla f_x(y), h\rangle = \langle \nabla f(x+y), h\rangle \;\; \forall\, h \in Y.$$

**Prueba.** Sean $y, h \in Y$. Como $f \in C^1(H, \mathbb{R})$, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|h\| \leq \delta$ entonces

$$|f_x(y+h) - f_x(y) - f^{'}(x+y)\, h| = |f(x+y+h) - f(x+y) - f^{'}(x+y)\, h| \leq \epsilon\, \|h\|.$$

Luego $f_x$ es Fréchet diferenciable y $f_x'(y) = f'(x+y)$ en $Y$.

Además, por el Teorema de Representación de Riesz tenemos

$$\langle \nabla f_x(y), h \rangle = f_x'(y)\, h = f'(x+y)\, h = \langle \nabla f(x+y), h \rangle .$$

Probemos ahora que

$$\begin{aligned} f_x' : Y &\to Y' \\ y &\mapsto f_x'(y) \end{aligned}$$

es una función continua. En efecto, supongamos que $y_n \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} y$.

$$\begin{aligned} \|f_x'(y_n) - f_x'(y)\| &= \sup_{\|h\|\le 1} |f_x'(y_n)h - f_x'(y)h| \\ &= \sup_{\|h\|\le 1} |f'(x+y_n)h - f'(x+y)h| \\ &\le \|f'(x+y_n) - f'(x+y)\| \end{aligned}$$

Como $f \in C^1$ tenemos que el lado derecho de la desigualdad anterior converge a 0.

Luego $f_x \in C^1$. $\square$

Usando (3.3) y la hipótesis (3.1) se sigue que

$$\begin{aligned} \langle \nabla f_x(y_1) - \nabla f_x(y_2), y_1 - y_2 \rangle &= \langle \nabla f(x+y_1) - \nabla f(x+y_2), y_1 - y_2 \rangle \\ &\ge m\|y_1 - y_2\|^2. \end{aligned}$$

Utilizando el Lema 3.1.2 se concluye que $f_x$ tiene un único punto de mínimo en $Y$, que denotaremos $\phi(x)$. Luego

$$f_x(\phi(x)) = \min_{y\in Y} f_x(y).$$

Por lo tanto,

$$f(x+\phi(x)) = \min_{y\in Y} f(x+y).$$

En particular, $\phi(x)$ es el único elemento de $Y$ tal que

$$(3.4) \qquad 0 = \langle \nabla f_x(\phi(x)), y\rangle = \langle \nabla f(x+\phi(x)), y\rangle \quad \forall y \in Y.$$

Demostremos ahora que

$$\phi : X \to Y$$

$$x \to \phi(x)$$

es continua. En efecto, supongamos por contradicción que $\phi$ no es continua. Luego existen $\delta > 0$ y una sucesión $(x_n) \subset X$ tales que

$$x_n \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} x \qquad \text{y} \qquad \|\phi(x_n) - \phi(x)\| \geq \delta.$$

Luego

$$x_n + \phi(x) \longrightarrow x + \phi(x).$$

Como $f \in C^1$, se sigue que

$$(3.5) \qquad \nabla f(x_n + \phi(x)) \longrightarrow \nabla f(x+\phi(x)).$$

Sean $P : H \to Y \subset H$ la proyección de $H$ sobre $Y$ y $P^* : H \to H$ el operador adjunto de $P$.

Observamos que para todo $x \in X$

$$P^* \nabla f(x+\phi(x)) = 0.$$

En efecto, sean $x_0 \in X$ y $h = x + y \in H$.

$$\begin{aligned}\langle P^* \nabla f(x_0 + \phi(x_0)), h\rangle &= \langle P^* \nabla f(x_0 + \phi(x_0)), x\rangle + \langle P^* \nabla f(x_0 + \phi(x_0)), y\rangle \\ &= \langle \nabla f(x_0 + \phi(x_0)), Px\rangle + \langle \nabla f(x_0 + \phi(x_0)), Py\rangle \\ &= 0 + 0.\end{aligned}$$

Usando (3.5), la observación anterior y la continuidad de $P^*$ tenemos

$$P^* \nabla f(x_n + \phi(x)) \longrightarrow P^* \nabla f(x + \phi(x)) = 0.$$

Luego para $n$ suficientemente grande se tiene

$$\|P^* \nabla f(x_n + \phi(x))\| < m\delta. \tag{3.6}$$

Además, por hipótesis

$$\langle \nabla f(x_n + \phi(x_n)) - \nabla f(x_n + \phi(x)), \phi(x_n) - \phi(x)\rangle \geq m \,\|\phi(x_n) - \phi(x)\|^2.$$

Como $\langle \nabla f(x_n + \phi(x_n)), y\rangle = 0 \ \forall\, y \in Y$ y $P(\phi(x_n) - \phi(x)) = \phi(x_n) - \phi(x)$ tenemos

$$\langle -\nabla f(x_n + \phi(x)), P(\phi(x_n) - \phi(x))\rangle \geq m \,\|\phi(x_n) - \phi(x)\|^2.$$

Luego,

$$\langle -P^*(\nabla f(x_n + \phi(x))), \phi(x_n) - \phi(x)\rangle \geq m \,\|\phi(x_n) - \phi(x)\|^2.$$

Usando la desigualdad de Schwarz se sigue que

$$\|P^* \nabla f(x_n + \phi(x))\| \|\phi(x_n) - \phi(x)\| \geq m \,\|\phi(x_n) - \phi(x)\|^2.$$

Por lo tanto

$$\|P^* \nabla f(x_n + \phi(x))\| \geq m\, \|\phi(x_n) - \phi(x)\| \geq m\, \delta.$$

Esta expresión contradice la desigualdad (3.6). Por lo tanto $\phi$ es una función continua. Y se concluye así la demostración de la primera parte del teorema.

Demostraremos a continuación que la función

$$\hat{f} : X \to \mathbb{R}$$

$$x \to \hat{f}(x) = f(x + \phi(x))$$

es de clase $C^1$ y

$$\left\langle \nabla \hat{f}(x), h \right\rangle = \langle \nabla f(x + \phi(x)), h\rangle \quad \forall x, h \in X.$$

En efecto, sean $x, h \in X$ y $t > 0$. Usando el hecho de que $\phi(x)$ es el mínimo de $f_x$ y el Lema de Hadamard se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\hat{f}(x + t\,h) - \hat{f}(x)}{t} &= \frac{f(x + t\,h + \phi(x + t\,h)) - f(x + \phi(x))}{t} \\ &\leq \frac{f(x + t\,h + \phi(x)) - f(x + \phi(x))}{t} \\ &= \int_0^1 \langle \nabla f(x + \phi(x) + s\,t\,h), h\rangle\, ds. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Como $\nabla f$ es una función continua, de (3.7) se sigue que

$$\limsup_{t \to 0^+} \frac{\hat{f}(x + t\,h) - \hat{f}(x)}{t} \leq \langle \nabla f(x + \phi(x)), h\rangle\,. \tag{3.8}$$

Analogamente se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\hat{f}(x + t\,h) - \hat{f}(x)}{t} &= \frac{f(x + t\,h + \phi(x + t\,h)) - f(x + \phi(x))}{t} \\ &\geq \frac{f(x + t\,h + \phi(x + t\,h)) - f(x + \phi(x + t\,h))}{t} \\ &= \int_0^1 \langle \nabla f(x + \phi(x + t\,h) + s\,t\,h), h\rangle\, ds. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Como $\phi$ y $\nabla f$ son funciones continuas, de (3.9) se concluye que

$$\liminf_{t\to 0^+} \frac{\hat{f}(x+t\,h)-\hat{f}(x)}{t} \geq \langle \nabla f(x+\phi(x)), h\rangle . \tag{3.10}$$

De (3.8) y (3.10) se sigue que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\hat{f}(x+t\,h)-\hat{f}(x)}{t} = \langle \nabla f(x+\phi(x)), h\rangle \quad \forall x, h \in X. \tag{3.11}$$

De manera similar se demuestra que

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\hat{f}(x+t\,h)-\hat{f}(x)}{t} = \langle \nabla f(x+\phi(x)), h\rangle \quad \forall x, h \in X. \tag{3.12}$$

Por lo tanto

$$\lim_{t\to 0} \frac{\hat{f}(x+t\,h)-\hat{f}(x)}{t} = \langle \nabla f(x+\phi(x)), h\rangle . \tag{3.13}$$

Como $\phi$ y $\nabla f$ son funciones continuas, usando (3.13) tenemos que $\hat{f}$ tiene derivada de Gateaux continua. Por lo tanto $\hat{f}$ es Fréchet diferenciable, $\hat{f}$ es de clase $C^1$ y

$$\left\langle \nabla \hat{f}(x), h \right\rangle = \langle \nabla f(x+\phi(x)), h\rangle \;\; \forall x, h \in X.$$

Lo cual concluye la demostración del teorema. ■

El siguiente resultado está basado en el teorema anterior y permite conseguir puntos críticos de funcionales de tipo "maxmin".

**Teorema 3.1.4.** *Sean $f, \hat{f}, X, Y$ y $H$ como en el Teorema 3.1.3. Si $-\hat{f}$ es débilmente inferiormente semicontinua y*

$$f(x) \longrightarrow -\infty \qquad \text{cuando } \|x\| \to \infty \qquad (x \in X)$$

*entonces existe $u_0 \in H$ tal que $f'(u_0) = 0$ y*

$$f(u_0) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x+y).$$

**Demostración.** Sean $\phi : X \to Y$ y $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ las funciones definidas en el Teorema 3.1.3. Allí se demostró que $\hat{f}$ es de clase $C^1$ y $\phi$ es continua. Como

$$-\hat{f}(x) = -f(x + \phi(x)) \geq -f(x) \quad \text{y } f(x) \to -\infty \qquad \text{cuando} \quad \|x\| \to \infty$$

se sigue que

$$-\hat{f}(x) \longrightarrow +\infty \qquad \text{cuando } \|x\| \to \infty \qquad (x \in X).$$

Luego $-\hat{f}$ es débilmente inferiormente semicontinua y coerciva. Usando el Teorema 1.1.2 se sigue que $-\hat{f}$ tiene un mínimo. Por lo tanto existe $x_0 \in X$ tal que

$$(-\hat{f})(x_0) = \min_{x \in X} (-\hat{f})(x).$$

Luego

$$\hat{f}(x_0) = \max_{x \in X} \hat{f}(x). \tag{3.14}$$

Como $\hat{f}(x) = f(x + \phi(x)) = \min_{y \in Y} f(x + y)$ se concluye que

$$f(x_0 + \phi(x_0)) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x + y). \tag{3.15}$$

De (3.14), usando el hecho de que $\hat{f}$ es de clase $C^1$, tenemos que

$$\left\langle \nabla \hat{f}(x_0), x \right\rangle = 0 \quad \forall x \in X. \tag{3.16}$$

Sean $x \in X$ y $y \in Y$.

$$\langle \nabla f(x_0 + \phi(x_0)), x + y \rangle = \langle \nabla f(x_0 + \phi(x_0)), x \rangle + \langle \nabla f(x_0 + \phi(x_0)), y \rangle \,,$$

De (3.4) se sigue que

$$\langle \nabla f(x_0 + \phi(x_0)), y \rangle = 0.$$

De (3.2) y (3.16)tenemos

$$\langle \nabla f(x_0 + \phi(x_0)), x \rangle = \left\langle \nabla \hat{f}(x_0), x \right\rangle = 0.$$

Por lo tanto,

$$\langle \nabla f(x_0 + \phi(x_0)), x + y \rangle = 0.$$

Si llamamos $u_0 = x_0 + \phi(x_0)$ tenemos que $\nabla f(u_0) = 0$ y

$$f(u_0) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x + y).$$

Lo cual prueba el teorema. ■

## 2. Aplicaciones a Problemas Elípticos Semilineales

Presentamos a continuación tres aplicaciones de los teoremas de la Sección 1 a la existencia de soluciones débiles para problemas elípticos semilineales.

En el resto del capítulo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ designará un dominio acotado con frontera suave. Sean $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots\}$ la sucesión de valores propios y $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots\}$ la sucesión de funciones propias de $-\Delta$ con condición de frontera de Dirichlet.

**Teorema 3.2.1.** *Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface las siguientes condiciones:*

*i) $g$ es una función Lipschitz, con constante de Lipschitz $\alpha$ tal que $0 < \alpha < \lambda_{N+1}$.*

*ii) Existen constantes $\beta$ y $\gamma$ tales que $\beta > \lambda_N$ y*

$$\int_0^t g(s)\,ds \geq \frac{\beta}{2} t^2 + \gamma.$$

*Entonces el problema*

$$\begin{cases} \Delta u + g(u) = 0, \text{ en } \Omega \\ u = 0, \text{ en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.17}$$

*tiene al menos una solución débil en $H_0^1(\Omega)$.*

**Demostración.** Sea $I : H := H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ el funcional definido por

$$I(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - G(u)\right) du,$$

donde $G(t) = \int_0^t g(s)\,ds$.