SOBRIEDAD VERSUS COMPACIDAD EN ESPACIOS DE STONE

EDNA MARGARITA ROA VARGAS

Trabajo de grado presentado para optar al título de
MAGISTER EN MATEMÁTICAS

Director
LORENZO ACOSTA GEMPELER

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, 2009

FORMATO UNICO PARA ENTREGA DE LOS TRABAJOS DE GRADO

TÍTULO: SOBRIEDAD VERSUS COMPACIDAD EN ESPACIOS DE STONE

TITLE: SOBERNESS VS COMPACTNESS IN STONE SPACES

RESUMEN:

El espectro primo de un anillo conmutativo es el conjunto de sus ideales primos dotado con la topología de Zariski. Este espacio topológico siempre es sobrio y coherente y si el anillo tiene unidad es también compacto. Un teorema de Hoschter establece que todo espacio topológico sobrio, coherente y compacto es homeomorfo al espectro primo de un anillo conmutativo con unidad. Es por esto que este tipo de espacios se denominan espacios espectrales. Si el espacio es sobrio y coherente es llamado up-espectral. Un espacio es A- espectral si su compactación de Alexandroff es espectral.

En la primera parte del trabajo se estudian los espacios A-espectrales con base en su caracterización topológica y se establece que la clase de estos espacios es cerrada para sumas finitas. También se muestra que no todo espacio up-espectral es A-espectral.

En la segunda parte del trabajo se estable que el contexto de los espacios de Stone, es decir los espectros primos de retículos distributivos, la noción de sobriedad es dual de la noción de compacidad.

ABSTRACT:

The prime spectrum of a commutative ring is the set of its prime ideals endowed whit the Zariski topology. This topological space is always sober and coherent and if the ring has a unity element it is also a compact space. A theorem of Hoschter says that every saber, coherent and compact topological space is homeomorphic to the prime spectrum of some commutative ring whit unity element, so these spaces are called spectral spaces. If the space is sober and coherent is called up-spectral. A space is A-spectral if its Alexandroff compactification is a spectral space.

In the first part of this work we study the A-spectral spaces based on its topological characterization and we show that the class of these spaces is closed under finite sums. It is also shown that there is an up-spectral space which is not an A-spectral one.

In the second part, we establish that in the context of in Stone space, that is the prime spectrum of distributive lattices , the notion of soberness is dual of the notion of compactness.

PALABRAS CLAVE: Espacios espectrales, espacios A-espectrales, sobriedad, compacidad, espacios de Stone.

KEYWORDS: Spectral spaces, A-spectral spaces, sober, compact, Stone Spaces

DIRECTOR: LORENZO ACOSTA GEMPELER ________________________

EDNA MARGARITA ROA VARGAS, 1982

CESIÓN DE DERECHOS PARA PUBLICACIÓN EN LA RED

Señor Estudiante:

La Universidad reconoce en todo momento los derechos morales y patrimoniales de autor sobre todo trabajo de tesis. Los derechos morales se refieren a que el nombre del autor debe aparecer vinculado a su trabajo de tesis y, sobre este derecho, no cabe cesión de ninguna especie. Los derechos patrimoniales pueden ser cedidos por el autor a la Universidad, mediante este documento y esta cesión se caracteriza por ser gratuita, indefinida y enmarcada en el contexto de la relación académica de la cual se desprende el trabajo de tesis. En el documento, queda consignado que la cesión del derecho patrimonial se da, en el entendido de que el trabajo no tendrá una destinación final con ánimo de lucro. Se pretende, solamente, darle una mayor difusión como aporte a la investigación.

Yo, EDNA MARGARITA ROA VARGAS , manifiesto en este documento mi voluntad de ceder a la Universidad Nacional de Colombia los derechos patrimoniales, consagrados en el artículo 72 de la Ley 23 de 1982, del trabajo final de grado denominado: SOBRIEDAD VERSUS COMPACIDAD EN ESPACIOS DE STONE producto de mi actividad académica para optar el título de MAGISTER EN MATEMÁTICAS en la Universidad Nacional de Colombia. La Universidad Nacional de Colombia, entidad académica sin ánimo de lucro, queda por lo tanto facultada para ejercer plenamente los derechos anteriormente cedidos en su actividad ordinaria de investigación, docencia y publicación. La cesión otorgada se ajusta a lo que establece la Ley 23 de 1982. Con todo, en mi condición de autor me reservo los derechos morales de la obra antes citada con arreglo al artículo 30 de la Ley 23 de 1982. En concordancia suscribo este documento en el momento mismo que hago entrega del trabajo final a la Biblioteca Central de la Universidad Nacional de Colombia.

NOMBRE ________________________________ **FIRMA**________________________________

CÉDULA __________________________

Bogotá,

***"Los derechos de autor recaen sobre las obras científicas, literarias y artísticas en las cuales se comprenden las creaciones del espíritu en el campo científico, literario y artísti-**

co, cualquiera que sea el modo o forma de expresión y cualquiera que sea su destinación, tales como: los libros, folletos y otros escritos; las conferencias, alocuciones, sermones y otras obras de la misma naturaleza; las obras dramáticas o dramático-musicales; las obras coreográficas y las pantomimas; las composiciones musicales con letra o sin ella; las obras cinematográficas, a las cuales se asimilan las obras expresadas por procedimiento análogo a la cinematografía, inclusive los videogramas, las obras de dibujo, pintura, arquitectura, escultura, grabado, litografía; las obras fotográficas a las cuales se asimilan las expresas por procedimiento análogo o la fotografía; las obras de artes plásticas; las ilustraciones, mapas, planos, croquis y obras plásticas relativas a la geografía, a la topografía, a la arquitectura o a las ciencias, en fin, toda producción del dominio científico, literario o artístico que puedan producirse o definirse por cualquier forma de impresión o de reproducción, por fonografía, radiotelefonía o cualquier otro medio conocido o por conocer". (artículo 2 de la Ley 23 de 1982).

Tabla de Contenido

Introducción

Este trabajo se enmarca en el contexto de las relaciones entre los espacios topológicos, los anillos conmutativos y los retículos distributivos a través de los espectros primos, la topología de Zariski y el orden de especialización.

Dado un anillo conmutativo con unidad A, el conjunto de los ideales primos de A dotado con la topología de Zariski es un espacio topológico con las siguientes propiedades:

i) Es compacto: todo recubrimiento abierto puede reducirse a un sub-recubrimiento finito.

ii) Es sobrio: todo cerrado irreducible no vacío es la adherencia de un único punto.

iii) Es coherente: tiene una base de abiertos compactos cerrada para intersecciones finitas.

Un famoso resultado de Hochster [15] establece que cualquier espacio topológico con las propiedades i), ii) y iii) es homeomorfo al espectro primo de algún anillo conmutativo con unidad. Por esta razón, este tipo de espacios topológicos se conoce con el nombre de *espacios espectrales.*

Una construcción análoga permite obtener el espectro primo de un retículo distributivo. Se puede probar [9] que un espacio topológico es homeomorfo al espectro primo de un retículo distributivo si y sólo si tiene las siguientes propiedades:

(I) Es T_0.

(II) Es coherente.

(III) Si S y T son conjuntos no vacíos de abiertos compactos tales que $\cap S \subseteq \cup T$ entonces existen $S_1 \subseteq S$ y $T_1 \subseteq T$, finitos, tales que $\cap S_1 \subseteq \cup T_1$.

Este tipo de espacios topológicos se conoce en algunos contextos como *espacios de Stone* [9] en honor al famoso matemático norteamericano Marshall Stone (es de anotar que esta terminología no es uniforme en la literatura, ver por ejemplo [17]).

Es fácil verificar que todo espacio espectral es un espacio de Stone y que un espacio de Stone es espectral si y sólo si es compacto y satisface además

(IV) ϕ es fundamental: Si S es un conjunto no vacío de abiertos compactos tales que $\cap S = \phi$ entonces existe $S_1 \subseteq S$, finito, tal que $\cap S_1 = \phi$.

En términos de retículos: el espectro de un retículo distributivo es un espacio espectral si y sólo si el retículo es acotado (tiene mínimo y máximo).

Por otro lado, el espectro primo de un anillo conmutativo con unidad tiene una estructura natural de orden: la inclusión. Al poner en contacto este orden con la topología de Zariski se obtiene:

$$I \subseteq J \Leftrightarrow J \in \overline{\{I\}}$$

lo que da origen a la noción de *orden de especialización* en un espacio topológico T_0 arbitrario:

$$x \leq y \Leftrightarrow y \in \overline{\{x\}}.$$

(Es importante señalar que en algunos textos, el orden de especialización es justamente el orden inverso).

Una pregunta que ha dado origen a muchos trabajos de investigación es la siguiente:

¿Qué propiedades caracterizan a los conjuntos ordenados que surgen de los espectros primos de los anillos conmutativos con unidad?

Se han encontrado condiciones necesarias pero hasta donde sabemos no hay caracterizaciones. En el estudio de estas condiciones (ver [10], [11] y [13]) aparecen las nociones de

· *Espacio "up-espectral"*: Espacio sobrio y coherente.

· *Espacio "down-espectral"*: Espacio compacto y coherente en el que todo cerrado irreducible propio y no vacío es la adherencia de un punto.

· *Espacio "A-espectral"*: Espacio cuya compactación de Alexandroff es un espacio espectral.

En vista de lo expuesto, es evidente que hay una relación entre la sobriedad de un espacio de Stone y la propiedad (IV) que no es otra cosa que la existencia de mínimo en el retículo correspondiente. Esto sugiere que la sobriedad (que es una propiedad de separación), corresponde a la compacidad de un espacio topológico asociado con el espacio original. Más precisamente, en el contexto de los espacios de Stone, sobriedad y compacidad son nociones duales.

* * *

En el primer capítulo presentamos las nociones preliminares para entender el contenido del trabajo. En particular recordamos la noción de topología de Zariski y las propiedades básicas del espectro primo de un anillo conmutativo. También hacemos un repaso de la construcción de Alexandroff para compactar espacios topológicos adjuntando un punto y establecemos relaciones entre las propiedades del espacio original y las de su compactación de Alexandroff. A su vez, veremos cómo se define la suma topológica y cómo se construyen los ideales primos en un anillo después de adjuntarle unidad.

En el segundo capítulo de este trabajo estudiaremos la noción de espacio A-espectral, reconstruyendo la caracterización topológica presentada en [11]. Aprovechando resultados de [14], [24] y [23], mostraremos métodos de producción de espacios A-espectrales. En particular demostraremos que la clase de los espacios A-espectrales es cerrada para sumas finitas. La mayoría de estos espacios resultan ser espacios up-espectrales por lo que es natural preguntarse si todo espacio up-espectral es un espacio A-espectral. Presentamos también aquí un ejemplo, contruido en [13], de un espacio up-espectral que no es A-espectral.

En el tercer capítulo se definen los retículos distributivos y se recuerdan las propiedades de su espectro. Se estudia también, la relación que existe entre las propiedades de sobriedad y compacidad en los espacios de Stone, demostrando en particular que, en este

contexto, las dos nociones son duales. Más precisamente, aprovechando que la categoría de los retículos distributivos es auto-dual, se construye una dualidad de la categoría de los espacios de Stone en sí misma de tal manera que se cumple que un espacio de Stone es compacto si y sólo si su dual es sobrio y viceversa.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo haremos una recopilación de definiciones básicas. Presentaremos la construcción del espectro primo de un anillo conmutativo y las propiedades topológicas de dicho espectro. También recordaremos la noción de compactación por un punto, veremos la construcción de Alexandroff y algunas de sus propiedades. En particular, presentaremos relaciones entre las propiedades del espacio original y las de su compactación de Alexandroff. Por último, se define la suma topológica y se muestra cómo se construyen los ideales primos en un anillo después de adjuntarle unidad.

1.1. Anillos conmutativos e ideales primos

Sea A un anillo conmutativo. Un subconjunto I de **A** es un ideal si es un subgrupo aditivo y además es absorbente para la multiplicación.

Si I es un ideal de A decimos que I es propio si $I \neq A$.

I es primo si I es propio y $ab \in I$ implica $a \in I$ ó $b \in I$.

I es maximal si I es propio y no existen ideales propios de A que contengan estrictamente a I.

Proposición 1.1. *Sea I un ideal de A.*

(i) I es primo si y solamente si A/I es un anillo sin divisores de cero.

(ii) Si A tiene elemento unidad entonces, I es maximal si y solamente si A/I es un campo.

(iii) Si A tiene elemento unidad entonces I es maximal implica I es primo.

Consideremos ahora el conjunto $\mathcal{I} = \{I \subseteq A : I$ es un ideal primo de $A\}$. Para cada $a \in A$ definimos $D(a) = \{I \in \mathcal{I} : a \notin I\}$.

Proposición 1.2. *(i) $D(0) = \emptyset$.*

(ii) Si A tiene unidad $D(1) = \mathcal{I}$.

(iii) $D(ab) = D(a) \cap D(b)$.

(iv) $D(a + b) \subseteq D(a) \cup D(b)$.

Así, vemos que el conjunto $\{D(a) : a \in A\}$ es una base para una topología sobre $\mathcal{I}$. Esta topología se llama la topología de Zariski y el espacio topológico correspondiente es el espectro de A y se notará $S(A)$.

1.2. Propiedades topológicas de $S(A)$

En esta sección enunciaremos las propiedades topológicas del espectro primo de un anillo conmutativo. Las demostraciones de éstas, pueden consultarse por ejemplo en [1]. En lo que sigue A denota un anillo conmutativo.

Proposición 1.3. *$S(A)$es un espacio T_0.*

Lema 1.1. *Sea J un ideal de A y sea M un subconjunto no vacío de A que es cerrado para la multiplicación. Si $J \cap M = \emptyset$ entonces existe un ideal primo P de A tal que $J \subseteq P$ y $P \cap M = \emptyset$.*

Proposición 1.4. *Para todo $a \in A$, $D(a)$ es compacto.*

Demostración. Supongamos que $D(a) \subseteq \bigcup_i D(a_i)$. Sea $J = \langle \{b_i\}_i \rangle$ y sea $M = \{a^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$. Si $J \cap M = \emptyset$ entonces existe P primo tal que $J \subseteq P$ y $P \cap M = \emptyset$. Así, $P \in D(a)$ pero $P \notin \bigcup_i D(a_i)$, lo cual es un absurdo. Concluimos que $J \cap M \neq \emptyset$. Por consiguiente existe un entero positivo n tal que $a^n \in J$ y

$$\begin{aligned}
a^n &= \sum_{l=1}^{m} z_l b_{i_l} + \sum_{j=1}^{n} r_j b_{k_j}, z_1, ...z_m \in \mathbb{Z}, r_1, ..., r_n \in A \\
D(a) = D(a^n) &= D(\sum_{l=1}^{m} z_l b_{i_l} + \sum_{j=1}^{n} r_j b_{k_j}) \\
&\subseteq (\bigcup_{l=1}^{m} D(z_l b_{i_l})) \cup (\bigcup_{j=1}^{n} D(r_j b_{k_j})) \\
&\subseteq (\bigcup_{l=1}^{m} D(z_l b_{i_l})) \cup (\bigcup_{j=1}^{n} D(r_j) \cap D(b_{k_j})) \\
&\subseteq (\bigcup_{l=1}^{m} D(b_{i_l})) \cup (\bigcup_{j=1}^{n} D(b_{k_j})) \ \textit{puesto que } D(z_l b_{i_l}) \subseteq D(b_{i_l})
\end{aligned}$$

Así tenemos que $D(a)$ es compacto. □

Corolario 1.1. *Si A tiene unidad entonces $S(A)$ es compacto.*

Basta observar que $S(A) = D(1)$.

Proposición 1.5. *Si $B \subseteq S(A)$ entonces $\overline{B} = \{I \in S(A) : \cap B \subseteq I\}$.*

Dado $B \subseteq S(A)$**, la intersección** $\cap B$ **se llama el núcleo de** B**. Así,** $\overline{B}$ **viene siendo la envolvente del núcleo de** B**. Es por esta razón que la topología de Zariski también se conoce como topología de la envolvente del núcleo (*hull-kernel topology*).**

Corolario 1.2. *Para todo $I \in S(A)$, $\overline{\{I\}} = \{J \in S(A) : I \subseteq J\}$.*

Definición 1.1. *Sea X un espacio topológico. Un cerrado F es irreducible si para todo G, H cerrados de X, $F = G \cup H$ implica $F = G$ ó $F = H$. Un abierto U es primo si para todo C, D abiertos de X, $C \cap D \subseteq U$ implica $C \subseteq U$ ó $D \subseteq U$.*

La siguiente proposición relaciona las nociones de cerrado irreducible y abierto primo.

Proposición 1.6. *F es un cerrado irreducible si y sólo si F^c es un abierto primo.*

Definición 1.2. *Sea F un cerrado. Diremos que x es un punto genérico de F si $F = \overline{\{x\}}$.*

Definición 1.3. *Un espacio topológico X es sobrio si todo cerrado irreducible no vacío tiene un único punto genérico.*

La siguiente proposición justifica el que la sobriedad sea considerada una propiedad de separación.

Proposición 1.7. *a) Si X es sobrio entonces es T_0.*

b) Si X es T_2 entonces X es sobrio.

Proposición 1.8. *$S(A)$ es un espacio topológico sobrio.*

Demostración. Sea F un cerrado irreducible no vacío. Consideremos el ideal $J = \cap F$.

$$\begin{aligned}
ab \in J &\Rightarrow (\forall I \in F)(ab \in I) \\
&\Rightarrow (\forall I \in F)(a \in I \text{ } o \text{ } b \in I) \\
&\Rightarrow (\forall I \in F)(I \notin D(a) \text{ } o \text{ } I \notin D(b)) \\
&\Rightarrow F \subseteq D(a)^c \cup D(b)^c \\
&\Rightarrow D(a) \cap D(b) \subseteq F^c \\
&\Rightarrow D(a) \subseteq F^c \text{ } o \text{ } D(b) \subseteq F^c \\
&\Rightarrow F \subseteq D(a)^c \text{ } o \text{ } F \subseteq D(b)^c \\
&\Rightarrow (\forall I \in F)(I \notin D(a)) \text{ } o \text{ } (\forall I \in F)(I \notin D(b)) \\
&\Rightarrow a \in J \text{ } o \text{ } b \in J.
\end{aligned}$$

Así $J \in S(A)$. Además, $\overline{\{J\}} = \{I \in S(A) : J \subseteq I\} = \{I \in S(A) : \cap F \subseteq I\} = \overline{F} = F$. □

Definición 1.4. *Diremos que un espacio topológico es coherente si tiene una base de abiertos-compactos que es cerrada para intersecciones finitas.*

En virtud de la Proposición 1.2 (*iii*) se tiene que el espectro de un anillo conmutativo con unidad es un espacio coherente.

Para resumir, podemos enunciar las propiedades de todos los espectros de los anillos conmutativos con unidad.

Teorema 1.1. *Si A es un anillo conmutativo con unidad entonces $S(A)$ es un espacio compacto, sobrio y coherente.*

Estas tres propiedades caracterizan en realidad a los espacios que son espectros de anillos

conmutativos con unidad. Este famoso resultado de Hochster [15] justifica la siguiente definición.

Definición 1.5. *Un espacio topológico compacto, sobrio y coherente se denomina un espacio espectral.*

A continuación definiremos un anillo de Boole y mostraremos algunas propiedades adicionales de su espectro.

Definición 1.6. *Se dice que un anillo B es de Boole si todos sus elementos son idempotentes.*

Proposición 1.9. *Sea B un anillo de Boole.*

1. *$S(B)$ es un espacio T_2.*

2. *$D(a)^c = \bigcup_{x\in B} D(ax+x)$. Es decir $D(a)$ es cerrado para todo $a \in B$.*

Demostración. 1. Si $I \neq J$ entonces existen $a \in I - J$ y $b \in J - I$. Tenemos que $J \in D(a)$, $I \in D(b+ab)$ y $D(a) \cap D(b+ab) = \emptyset$.

2. Aún si B no tiene unidad tenemos que $a(ax+x) = 0$ para todo x, luego $D(a) \bigcap D(ax+x) = \emptyset$ para todo x. Así, $D(ax+x) \subseteq D(a)^c$ para todo x, por lo tanto $\bigcup_{x\in B} D(ax+x) \subseteq D(a)^c$.

   Por otro lado si $J \in D(a)^c$, $a \in J$, así que $ax \in J$ para todo x. Si $ax + x \in J$ entonces $x \in J$. De esta manera debe existir un $x \in B$ tal que $ax + x \notin J$. Por lo tanto $J \in D(ax+x)$ para algún x, es decir $J \in \bigcup_{x\in B} D(ax+x)$. □

Por la proposición anterior se tiene que el espectro de un anillo de Boole es un espacio de Hausdorff, localmente compacto y totalmente disconexo. Además es compacto si y sólo si el anillo B tiene unidad.

1.3. Compactación de Alexandroff

En la sección anterior mostramos que el espectro de un anillo conmutativo con unidad es un espacio espectral. Cuando un anillo A no tiene unidad, su espectro en ocasiones resulta no compacto. Siguiendo la nomenclatura de [23] llamaremos anillo compacto a un anillo conmutativo cuyo espectro primo es compacto. Más adelante veremos si al compactar

por el método de Alexandroff el espectro de un anillo no compacto específico, se obtiene un espacio espectral. En esta sección presentamos la construcción de Alexandroff para compactar espacios topológicos adjuntando un punto y establecemos relaciones entre las propiedades del espacio original y las de su compactación de Alexandroff.

Definición 1.7. *Sea X un espacio topológico. Un espacio topológico compacto Y es una compactación de X si X es homeomorfo a un subespacio denso de Y. Si $Y - X$ consiste en un único punto, entonces Y se denomina* ***compactación por un punto*** *de X.*

Consideremos el espacio topológico (X, τ) y $X^w = X \cup \{w\}$ una compactación por un punto de X cuya topología es $\tau^w = \tau \cup \{X^w\}$. Los cerrados en X^w son X^w y $C \cup \{w\}$, donde C es cerrado en X. Si C es cerrado en X entonces $\overline{\{C\}}^{X^w} = C \cup \{w\}$.

Proposición 1.10. *Si X es sobrio entonces X^w es sobrio.*

Demostración. Sea F un cerrado irreducible de X^w, luego $F \neq X^w$. Por ser F cerrado $F = C \cup \{w\}$, donde C es cerrado en X y supongamos que distinto de vacío. Veamos que C es irreducible en X. Supongamos que $C = C_1 \cup C_2$ siendo C_1 y C_2 cerrados en X. $C_1 \cup \{w\}$ y $C_2 \cup \{w\}$ son cerrados en X^w. Así, $F = (C_1 \cup \{w\}) \cup (C_2 \cup \{w\})$ y como F es irreducible, $F = C_1 \cup \{w\}$ o $F = C_2 \cup \{w\}$. Entonces $C = C_1$ o $C = C_2$. Como X es sobrio existe un único $x \in X$ tal que $C = \overline{\{x\}}^X$, luego $x \in C \subseteq F$. Así, $\overline{\{x\}}^{X^w} \subseteq F$. Ahora probemos que $C \subseteq \overline{\{x\}}^{X^w}$. Sean $y \in C$ y $U \in \tau^w$ tales que $y \in U$. Si $U \in \tau$ entonces $U \cap \{x\} \neq \emptyset$ y si $U \notin \tau$, $U = X \cup \{w\}$, entonces $U \cap \{x\} \neq \emptyset$ por lo tanto $y \in \overline{\{x\}}^{X^w}$. Luego $C \subseteq \overline{\{x\}}^{X^w} \subseteq F$ y obtenemos que $F = \overline{\{x\}}^{X^w}$. Si $C = \emptyset$ entonces $F = \{w\}$ y por ser $\{w\}$ cerrado se tiene que $\overline{\{w\}} = \{w\} = F$. □

Sean X un espacio topológico no compacto y $w \notin X$. Consideremos a $X^* = X \cup \{w\}$ un espacio cuyos abiertos son todos los subconjuntos abiertos de X junto con todos los subconjuntos de la forma $U \cup \{w\}$, donde U es un subconjunto abierto de X con complemento compacto. Entonces X^* cumple las siguientes propiedades:

- **X^* es compacto.**
- **X es un subespacio denso de X^*.**
- **X es abierto en X^*.**

El espacio X^* se conoce como la *compactación de Alexandroff de* X.

Proposición 1.11. *(Tomada de [11]) Sean X un espacio topológico no compacto y X^* la compactación de Alexandroff de X.*

(1) X^* es un espacio T_0 si y sólo si X es un espacio T_0.

(2) Los subconjuntos cerrados de X^* son:

- *Los $C \cup \{w\}$, donde C es un subconjunto cerrado de X.*
- *Los subconjuntos cerrados compactos de X.*

(3) Si C es un subconjunto cerrado no compacto de X entonces la clausura de C en X^* es $\overline{C}^{X^*} = C \cup \{w\}$.

(4) Si A es un cerrado irreducible de X^* entonces $A \cap X$ es un cerrado irreducible de X.

Proposición 1.12. *(Tomada de [11]) Sea X un espacio topológico. X^* es sobrio si y sólo si X es sobrio.*

1.4. Suma topológica y adjunción de unidad a un anillo conmutativo

En esta sección recopilamos una serie de resultados obtenidos en [23], las pruebas de éstos pueden consultarsen allí.

A continuación definimos la suma topológica y veremos que el espectro del producto cartesiano de un número finito de anillos conmutativos es homeomorfo a la suma topológica de sus espectros.

Definición 1.8. *Sean X y Y dos espacios topológicos y sea*

$$X \coprod Y = X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}.$$

Podemos identificar de forma natural a X con $X \times \{0\}$ y a Y con $Y \times \{1\}$, de modo que ahora $X \cap Y = \emptyset$. Consideramos a $X \coprod Y$ con la topología para la cual un conjunto A es abierto si y sólo si $A \cap X$ es abierto en X y $A \cap Y$ es abierto en Y. Al espacio resultante se le llama suma topológica de X y Y.

Se desprende de forma inmediata de la definición anterior que, considerando a X y a Y como sub-espacios de $X \coprod Y$, su topología original coincide con la que heredan de la suma. También es claro que X y Y son abiertos disyuntos en $X \coprod Y$.

Mostraremos ahora cómo son los ideales primos del producto cartesiano de anillos conmutativos.

Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ un familia de anillos conmutativos y $\mathbb{A} = \prod_{i\in I} A_i$ su producto cartesiano, es decir el producto cartesiano de los conjuntos A_i con las operaciones definidas componente a componete. Si K_j es un ideal de A_j, designaremos por $\widetilde{K}_j$ al producto $\prod_{i\in I} K_i$ donde $K_i = A_i$ siempre que $i \neq j$.

Proposición 1.13. *Si K_j es un ideal primo de A_j entonces $\widetilde{K}_j$ es un ideal primo de $\mathbb{A}$.*

Proposición 1.14. *Sea I finito. Si K es un ideal primo de $\mathbb{A}$ entonces existe $j \in I$ tal que $K = \widetilde{K}_j$, donde K_j es ideal primo de A_j.*

Veamos cómo se relaciona el espectro de $\mathbb{A}$ con la suma topológica.

Proposición 1.15. *Si I es finito entonces $S(\mathbb{A})$ es homeomorfo a la suma topológica $\coprod_{i\in I} S(A_i)$.*

Cuando A es un anillo conmutativo sin unidad siempre existe una forma de incluirlo en un anillo con unidad $\widehat{A}$. La manera estándar de hacerlo es considerar el conjunto $A \times \mathbb{Z}$ dotado con las operaciones

$$(a, m) + (b, n) = (a + b, m + n)$$
$$(a, m)(b, n) = (ab + na + mb, mn).$$

Si A es un anillo de característica p y se quiere conservar la característica, entonces en la construcción anterior se sustituye $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}_p$. En particular, si A es un anillo de característica dos entonces $\widehat{A} = A \times \mathbb{Z}_2$ es un anillo de característica dos y unidad $(0, 1)$. En lo que resta de esta sección A será un anillo conmutativo de característica dos.

Proposición 1.16. *Si $\widehat{A}_0 = A \times \{0\}$ entonces*

1. *A es isomorfo a $\widehat{A}_0$.*

2. $\widehat{A}_0$ *es un ideal maximal de* $\widehat{A}$ *y por consiguiente primo (pues* $\widehat{A}$ *tiene unidad).*

Proposición 1.17. *Si* J *es un ideal primo de* A*,* $b \notin J$ *y existe un* $a \in A \backslash J$ *tal que* $ab + a \in J$ *entonces para todo* $x \in A$ *se tiene que* $xb + x \in J$*.*

Antes de ver cómo son los ideales primos en $\widehat{A}$, enunciamos una proposición que será útil para esta tarea.

Proposición 1.18. *Si* $I \times \{0\}$ *no es un ideal primo de* $\widehat{A}$ *existe un* $b \notin I$ *tal que* $xb + x \in I$ *para todo* $x \in A$*.*

Todo ideal primo J de $\widehat{A}$, diferente de $\widehat{A}_0$, es de uno de los siguientes tipos:

Tipo 1: $J = I \times \{0\}$ **, donde I es un ideal primo de A.**

Tipo 2: $J = I \times \{0\} \cup [(b, 1) + I \times \{0\}]$, **donde I es un ideal primo de A tal que $I \times \{0\}$ no es un ideal primo de $\widehat{A}$ y b es el elemento mencionado en la Proposición 1.18.**

Ejemplo:

Veamos cómo son los ideales primos de $\widehat{A} = \widehat{B \times C}$, donde B es un anillo de Boole no compacto y C es un anillo con unidad de característica dos. Usando la Proposición 1.13 tenemos que los ideales primos de $B \times C$ son de la forma $I \times C$ donde I es un ideal primo de B o $B \times J$ donde J es un ideal primo de C.

Así, los ideales primos de tipo 1 de $\widehat{A}$ serían de la forma $I \times C \times \{0\}$ o de la forma $B \times J \times \{0\}$. Pero $I \times C \times \{0\}$ nunca es primo, ya que existen $(b, 1, 0), (b, 1, 1) \notin I \times C \times \{0\}$ donde $b \notin I$, tales que $(b, 1, 0)(b, 1, 1) = (0, 0, 0) \in I \times C \times \{0\}$. $B \times J \times \{0\}$ tampoco es primo ya que existen $(0, 1, 1), (0, 1, 0) \notin B \times J \times \{0\}$ donde $(0, 1) \notin B \times J$ tales que $(0, 1, 1)(0, 1, 0) = (0, 0, 0) \in B \times J \times \{0\}$.

Concluimos que los ideales primos de $\widehat{A}$ diferentes de $\widehat{A_0}$ son todos de tipo 2 y tienen la forma $I \times C \times \{0\} \cup [(b, 1, 1) + I \times C \times \{0\}]$, donde $b \notin I$ o $B \times J \times \{0\} \cup [(0, 1, 1) + B \times J \times \{0\}]$.

Así, $\widehat{A}$ tiene exactamente un ideal más que A.

Concluimos entonces esta sección con el resultado más importante de [23].

Teorema 1.2. *Si* A *es un anillo de característica dos, no compacto, entonces* $S(\widehat{A})$ *es una compactación por un punto de* $S(A)$ *que no siempre es la compactación de Alexandroff.*

Capítulo 2

Espacios A-espectrales

En este capítulo definimos los espacios A-espectrales y enunciamos una condición necesaria y suficiente para que un espacio topológico X sea un espacio A-espectral. Mostramos también cómo producir espacios A-espectrales y probamos que la clase de éstos es cerrada para sumas finitas. Finalmente exhibimos un ejemplo de un espacio up-espectral que no es A-espectral.

2.1. Una caracterización de los espacios A-espectrales

En esta sección presentamos una caracterización de los espacios A-espectrales tomada de [11]. Luego, haremos uso de dicha caracterización para mostrar que el espectro de un anillo de Boole sin unidad es un espacio A-espectral, hecho ya probado en [14].

Definición 2.1. *Un espacio topológico X es un espacio A-espectral, si la compactación de Alexandroff de X es un espacio espectral.*

Definición 2.2. *Sean X un espacio topológico y U un subconjunto de X.*

*(1) U es **IQO**, si para todo conjunto abierto compacto O de X, $U \cap O$ es compacto.*

*(2) U es **IQC**, si para todo conjunto cerrado compacto C de X, $U \cap C$ es compacto.*

*(3) U es **IQOC**, si éste es **IQO** e **IQC**.*

(4) Sea $\mathcal{P}$ una propiedad. U es co-$\mathcal{P}$ si $X \setminus U$ satisface la propiedad $\mathcal{P}$.

Proposición 2.1. *(Tomada de [11]) Sean X un espacio A-espectral y O un subconjunto abierto compacto de X^* que contiene a w.*

1. *$X^* \setminus O$ es un subconjunto cerrado compacto de X.*
2. *Para cada subconjunto abierto compacto U de X, $O \cap U$ es compacto en X.*
3. *Para cada subconjunto cerrado compacto C de X, $O \cap C$ es compacto en X.*

En la demostración del siguiente teorema tomado de [11], se corrigió la prueba de que cada elemento de B^* es compacto.

Teorema 2.1. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) X es A-espectral.

(2) X tiene las siguientes propiedades:

- *(i) X tiene una base de subconjuntos abiertos compactos cerrada bajo intersecciones finitas.*
- *(ii) X es sobrio.*
- *(iii) Para cada subconjunto cerrado compacto F de X, existe un subconjunto abierto O co-compacto e **IQOC** de X tal que $O \subseteq X \setminus F$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $\mathcal{B}^*$ una base de subconjuntos abiertos compactos de X^* cerrada bajo intersecciones finitas.

- (i) Es fácil ver que $\mathcal{B} = \{O \in \mathcal{B}^* \mid w \notin O\}$ es una base de subconjuntos abiertos compactos de X cerrada bajo intersecciones finitas.
- (ii) Se sigue de la Proposición 1.12.
- (iii) Sea F un subconjunto cerrado compacto de X. Se tiene que $(X \backslash F) \cup \{w\}$ un subconjunto abierto de X^*. Por consiguiente existe $O_w \in \mathcal{B}^*$ tal que $O_w \subseteq (X \backslash F) \cup \{w\}$ y $w \in O_w$. Sea $O = O_w \cap X$; entonces O es un subconjunto abierto de X y $O \subseteq (X \backslash F)$. Así, por la Proposición 2.1 se tiene que O es **IQOC** y que $X \setminus O$ es un subconjunto cerrado compacto de X.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $\mathcal{B}$ una base de subconjuntos abiertos compactos de X, la cual es cerrada bajo intersecciones finitas. Consideremos $\mathcal{B}^* = \mathcal{B} \cup \{O \cup \{w\} : O$ es un subconjunto abierto co-compacto e **IQOC** de $X\}$.

1. Veamos que $\mathcal{B}^*$ es una base de X^*. Sea U un subconjunto abierto de X^*. Consideremos dos casos:

   Caso 1: $w \notin U$. En este caso U es un abierto de X, luego existe una colección $\{O_i : i \in I\}$ de elementos de $\mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup_{i \in I} O_i$.

   Caso 2: $w \in U$. En este caso, existe un subconjunto cerrado compacto F tal que $U = (X \setminus F) \cup \{w\}$. Como $\mathcal{B}$ es una base de X, existe una colección $\{O_i : i \in I\}$ de elementos de $\mathcal{B}$ tal que $X \setminus F = \bigcup_{i \in I} O_i$. Por hipótesis existe un subconjunto abierto O co-compacto e **IQOC** de X tal que $O \subseteq X \setminus F$. Luego $O \cup \{w\} \in \mathcal{B}^*$ y por lo tanto $U = (\bigcup_{i \in I} O_i) \cup (O \cup \{w\})$. Así se tiene que $\mathcal{B}^*$ es una base de X^*.

2. Veamos que cada elemento de $\mathcal{B}^*$ es compacto.

   Sea $O \cup \{w\} \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$, con V_i abierto básico de X^*. De esta manera V_i es un abierto básico W_j de X o $V_i = U_k \cup \{w\}$ donde U_k es abierto, co-compacto e **IQOC** en X.

   $$O \cup \{w\} \subseteq (\bigcup_{j \in J} W_j) \cup (\bigcup_{k \in K} U_k \cup \{w\}).$$

   Entonces

   $$O \subseteq (\bigcup_{j \in J} W_j) \cup (\bigcup_{k \in K} U_k).$$

   Luego, para algún $k_0 \in K$,

   $$O \setminus U_{k_0} \subseteq (\bigcup_{j \in J} W_j) \cup (\bigcup_{k \in K} U_k).$$

   Como $O \setminus U_{k_0} = O \cap U_{k_0}^c$ y O es **IQOC** entonces $O \cap U_{k_0}^c$ es compacto, así,

   $$O \setminus U_{k_0} \subseteq (\bigcup_{s=1}^{n_1} W_{j_s}) \cup (\bigcup_{t=1}^{n_2} U_{k_t}).$$

   Por lo tanto

   $$O \cup \{w\} \subseteq (\bigcup_{s=1}^{n_1} W_{j_s}) \cup (\bigcup_{t=1}^{n_2} U_{k_t}) \cup (U_{k_0} \cup \{w\})$$

   y $O \cup \{w\}$ resulta compacto.

3. Veamos que si $V_1, V_2 \in \mathcal{B}^*$ entonces $V_1 \cap V_2$ es compacto.

   a) Supongamos que $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$, entonces claramente $V_1 \cap V_2$ es compacto en X^*.

$b)$ Supongamos que $V_1 \in \mathcal{B}$ y $V_2 = O \cup \{w\}$ donde O es un subconjunto abierto de X co-compacto e **IQOC**. En este caso, $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap O$ es compacto ya que O es **IQO**.

$c)$ Supongamos que $V_1 = O_1 \cup \{w\}$ y $V_2 = O_2 \cup \{w\}$, donde O_1, O_2 son dos subconjuntos abiertos de X co-compactos e **IQOC**.

Sea $V_1 \cap V_2 \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ donde $U_i \in \mathcal{B}^*$. Como $w \in V_1 \cap V_2$, entonces existe un $i_0 \in I$ tal que $w \in U_{i_0}$, siendo $U_{i_0} = W_{i_0} \cup \{w\}$, donde W_{i_0} es un subconjunto abierto de X co-compacto e **IQOC**. Veamos que $X \setminus W_{i_0}$ es un espacio espectral con la topología de subespacio heredada de X. Claramente, (i) implica que $X \setminus W_{i_0}$ tiene una base de subconjuntos abiertos compactos de X cerrada para intersecciones finitas. Que $X \setminus W_{i_0}$ es compacto se dá, ya que W_{i_0} es co-compacto. Finalmente $X \setminus W_{i_0}$ es cerrado y un subconjunto cerrado de un espacio sobrio es sobrio. Con ésto, probamos que $X \setminus W_{i_0}$ es un espacio espectral.

Ahora, como O_1 y O_2 son **IQC** entonces $V_1 \cap (X \setminus W_{i_0}) = O_1 \cap (X \setminus W_{i_0})$ y $V_2 \cap (X \setminus W_{i_0}) = O_2 \cap (X \setminus W_{i_0})$ son dos subconjuntos abiertos compactos de $X \setminus W_{i_0}$. Así,

$$(V_1 \cap V_2) \cap (X \setminus W_{i_0}) = (V_1 \cap (X \setminus W_{i_0})) \cap (V_2 \cap (X \setminus W_{i_0}))$$

es compacta en $X \setminus W_{i_0}$. Luego, existe un subconjunto finito I_0 de I tal que

$$(V_1 \cap V_2) \cap (X \setminus W_{i_0}) \subseteq \bigcup_{i \in I_0} (U_i \cap X).$$

Por lo tanto

$$V_1 \cap V_2 \subset U_{i_0} \cup (\bigcup_{i \in I_0} U_i).$$

4. Que X^* es sobrio se desprende de la Proposición 1.12.

Tenemos entonces la prueba de que X^* es un espacio espectral. $\square$

En [14], se probó que, siendo B anillo de Boole sin unidad, $S(B)^* \simeq S(\widehat{B})$. Ésto implica que $S(B)$ es un espacio A-espectral. A continuación usaremos la caracterización anterior para llegar al mismo resultado. Para ello, es suficiente probar la siguiente proposición, ya que $S(B)$ cumple las condiciones (i) y (ii).

Proposición 2.2. *Para cada subconjunto cerrado compacto F de $S(B)$, existe un subconjunto abierto O co-compacto e **IQOC** de $S(B)$ tal que $O \subseteq S(B) \setminus F$.*

Demostración. Sea F un subconjunto cerrado compacto de $S(B)$. Como F es compacto se tiene que existe $a \in B$ tal que $F \subseteq D(a)$, luego $D(a)^c \subseteq F^c$. Tenemos entonces que $O = D(a)^c$, es el abierto co-compacto contenido en el complemento de F. Veamos ahora que O es **IQOC**. Sea A un subconjunto abierto compacto de $S(B)$. $A = D(b)$ para algún $b \in B$, luego $O \cap A = D(a)^c \cap D(b) \subseteq D(b)$. Como D(b) es cerrado compacto y $D(a)^c$ es cerrado entonces se tiene que la intersección es cerrada; además está contenida en un compacto y así, $O \cap A$ es compacto, por tanto O es **IQO**. Sea F un subconjunto cerrado compacto de $S(B)$. Al igual que en el caso anterior tenemos $F \cap O$ es compacto, ya que esta intersección es cerrada contenida en un compacto. Por lo tanto O es **IQC**. De esta manera queda probado que O es **IQOC**. □

2.2. Métodos de producción de espacios A-espectrales

En esta sección mostramos algunos métodos para producir espacios A-espectrales. También proporcionamos la forma de construir ejemplos donde el espectro de $\widehat{A}$ coincide con la compactación de Alexandroff de el espectro de A, siendo A un anillo de característica dos. Finalmente probamos que la suma topológica finita de espacios A-espectrales es A-espectral.

Veamos entonces, cómo producir espacios A-espectrales a partir del homeomorfismo que existe entre el espectro de un producto cartesiano de anillos conmutativos y la suma topológica de los espectros de estos anillos.

Teorema 2.2. *Sean A un anillo no compacto y C un anillo compacto.*

$$S(A \times C)^* \simeq S(A)^* \coprod S(C).$$

Demostración. Denotamos por P y Q a los ideales primos en A y C respectivamente. Sea

$$f : S(A \times C) \to S(A) \coprod S(C)$$

$$P \times C \mapsto P \times \{0\}$$

$$A \times Q \mapsto Q \times \{1\}.$$

Veamos que f es un homeomorfismo :

- f es biyectiva. Es evidente.

- f es continua:

  En $S(A)\coprod S(C)$ se tienen dos tipos de abiertos básicos:

  Los abiertos básicos de $S(A) : D_A(a) \times \{0\}$ y

  Los abiertos básicos de $S(C) : D_C(c) \times \{1\}$.

  Veamos que la imagen recíproca de cada uno de estos abiertos básicos en $S(A)\coprod S(C)$ es abierto en $S(A \times C)$.

$$
\begin{aligned}
P \times C \in f^{-1}(D_A(a) \times \{0\}) &\Leftrightarrow f(P \times C) \in D_A(a) \times \{0\} \\
&\Leftrightarrow P \times \{0\} \in D_A(a) \times \{0\} \\
&\Leftrightarrow P \in D_A(a) \\
&\Leftrightarrow a \notin P \\
&\Leftrightarrow (a, 0) \notin P \times C \\
&\Leftrightarrow P \times C \in D((a, 0)).
\end{aligned}
$$

  Por lo tanto

$$f^{-1}(D_A(a) \times \{0\}) = D((a, 0)).$$

$$
\begin{aligned}
A \times Q \in f^{-1}(D_C(c) \times \{1\}) &\Leftrightarrow f(A \times Q) \in D_C(c) \times \{1\} \\
&\Leftrightarrow Q \times \{1\} \in D_C(c) \times \{1\} \\
&\Leftrightarrow Q \in D_C(c) \\
&\Leftrightarrow c \notin Q \\
&\Leftrightarrow (0, c) \notin A \times Q \\
&\Leftrightarrow A \times Q \in D((0, c)).
\end{aligned}
$$

  Por lo tanto

$$f^{-1}(D_C(c) \times \{1\}) = D((0, c)).$$

- f es abierta:

  Los abiertos básicos en $S(A \times C)$ son los $D((a, c))$ luego:

  $P \times C \in D((a, c)) \Leftrightarrow (a, c) \notin P \times C \Leftrightarrow a \notin P \Leftrightarrow P \in D_A(a)$

$A \times Q \in D((a,c)) \Leftrightarrow (a,c) \notin A \times Q \Leftrightarrow c \notin Q \Leftrightarrow Q \in D_C(c)$.

$$\begin{aligned} f(D(a,c)) &= \{f(P \times C) : P \times C \in D((a,c))\} \cup \{f(A \times Q) : A \times Q \in D((a,c))\} \\ &= \{f(P \times C) : P \in D_A(a)\} \cup \{f(A \times Q) : Q \in D_C(c)\} \\ &= \{P \times \{0\} : P \in D_A(a)\} \cup \{Q \times \{1\} : Q \in D_C(c)\} \\ &= D_A(a) \times \{0\} \cup D_C(c) \times \{1\}. \end{aligned}$$

Teniendo probado que f es un homeomorfismo, definiremos la función,

$$\begin{aligned} f^* : S(A \times C)^* &\to S(A)^* \coprod S(C) \\ I &\mapsto f(I), \;\; si \; I \in S(A \times C) \\ w &\mapsto w \end{aligned}$$

Veamos que f^* es un homeomorfismo:

- f^* es biyectiva ya que f es biyectiva.
- f^* es continua:

  En $S(A)^* \coprod S(C)$ los abiertos básicos son los abiertos básicos de $S(A)^*$ y los abiertos básicos de $S(C)$.

  Si U es un abierto básico de $S(C)$ entonces $(f^*)^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ es abierto en $S(A \times C)$ (ya que f es continua) y por ende es abierto en $S(A \times C)^*$.

  Si U es un abierto básico de $S(A)^*$ que contiene a w, $U = V \cup \{w\}$ donde V es un abierto de complemento compacto en $S(A)$ y $(f^*)^{-1}(U) = (f^*)^{-1}(V \cup \{w\}) = f^{-1}(V) \cup \{w\}$. Como f es continua se tiene que $f^{-1}(V)$ es un abierto en $S(A \times C)$. Veamos que su complemento es compacto en $S(A \times C)$: $f^{-1}(V)^c = f^{-1}(V^c)$, tenemos que V^c es compacto en $S(A) \coprod S(C)$ ya que $S(C)$ es compacto y por tanto $f^{-1}(V^c)$ es compacto en $S(A \times C)$ pues f^{-1} es continua. Así, tenemos que el complemento de $f^{-1}(V)$ es compacto en $S(A \times C)$. De esta forma queda probado que $(f^*)^{-1}(U)$ es abierto en $S(A \times C)^*$. Si U no contiene a w entonces $(f^*)^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ es un abierto en $S(A \times C)$ ya que f es continua y por ende es abierto en $S(A \times C)^*$.

- f^* es abierta:

  Sea U un abierto en $S(A \times C)^*$. Si U no contiene a w entonces $f^*(U) = f(U)$ es un abierto en $S(A) \coprod S(C)$ ya que f es abierta y por tanto es abierto en $S(A)^* \coprod S(C)$. Ahora si U contiene a

w, $U = V \cup \{w\}$ donde V^c es cerrado y compacto en $S(A \times C)$, $f^*(U) = f(V) \cup \{w\}$, y se tiene que $f(V)^c$ es cerrado y compacto en $S(A) \coprod S(C)$ ya que f es abierta y continua y $f(V)^c = f(V^c)$. Veamos que $f^*(U) \cap S(A)^*$ y $f^*(U) \cap S(C)$ son abiertos en $S(A)^*$ y $S(C)$ respectivamente. $f^*(U) \cap S(C)$ es abierto en $S(C)$ ya que $f^*(U) \cap S(C) = f(V) \cap S(C)$. $f^*(U) \cap S(A)^* = (f(V) \cap S(A)) \cup \{w\}$ y $f(V) \cap S(A)$ es abierto en $S(A)$. Falta ver que su complemento es compacto en $S(A)$, pero esto se tiene ya que este complemento es un cerrado contenido en un compacto, por tanto $f^*(U) \cap S(A)^*$ es abierto en $S(A)^*$. Así, podemos concluir que $f^*(U)$ es abierto en $S(A)^* \coprod S(C)$. $\square$

Teorema 2.3. *Si S(A) es A-espectral y C es un anillo compacto entonces $S(A \times C)$ es A-espectral.*

Demostración. Como $S(A)$ es A-espectral $S(A)^* \cong S(B)$ donde B es un anillo compacto.

$$\begin{aligned} S(A \times C)^* &\simeq (S(A) \coprod S(C))^* \\ &\simeq S(A)^* \coprod S(C) \\ &\simeq S(B) \coprod S(C) \\ &\simeq S(B \times C). \end{aligned}$$

$\square$

Corolario 2.1. *Si B es un anillo de Boole no compacto y C es un anillo compacto entonces $S(B \times C)$ es A-espectral.*

Demostración. Basta notar que si B es un anillo de Boole no compacto entonces $S(B)$ es A-espectral.

$\square$

A continuación mostramos cómo se construyen ejemplos donde $S(\widehat{A})$ coincide con la compactación de Alexandroff de S(A), ya que sabemos por el Teorema 1.2, que este resultado no siempre se cumple. Demostraremos entonces que cuando B es un anillo de Boole no compacto y C es un anillo con unidad de característica dos, $S(B \times C)^*$ es homeomorfo a $S(\widehat{B \times C})$. Para ésto, es suficiente probar la siguiente proposición, puesto que del Corolario 2.1 tenemos:

$$\begin{aligned}
S(B \times C)^* &\simeq (S(B) \coprod S(C))^* \\
&\simeq S(B)^* \coprod S(C) \\
&\simeq S(\widehat{B}) \coprod S(C) \\
&\simeq S(\widehat{B} \times C).
\end{aligned}$$

Proposición 2.3. *Si B es un anillo de Boole no compacto y C es un anillo con unidad de característica dos entonces*

$$S(B)^* \coprod S(C) \simeq S(\widehat{B \times C}).$$

Demostración. Denotemos por I, J, B a los elementos de $S(B)^* \coprod S(C)$, donde I es un ideal de B y J es un ideal de C. En el ejemplo de la Sección 1.4 se describieron los ideales primos de $\widehat{B \times C}$. De acuerdo con lo anterior podemos definir la función f de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
f : S(B)^* \coprod S(C) &\to S(\widehat{B \times C}) \\
I &\mapsto (I \times C \times \{0\}) \cup [(b,1,1) + (I \times C \times \{0\})] \text{ } \textit{donde } b \notin I \\
J &\mapsto (B \times J \times \{0\}) \cup [(0,1,1) + (B \times J \times \{0\})] \\
B &\mapsto B \times C \times \{0\}.
\end{aligned}$$

Veamos que f es un homeomorfismo.

- f es una biyección: es evidente.
- f es continua

  Los abiertos básicos en $S(\widehat{B \times C})$ son los conjuntos de la forma $D(a,c,0)$ y los $D(a,c,1)$. Veamos si la imagen recíproca de cada uno de ellos es un abierto en $S(B)^* \coprod S(C)$.

  $$\begin{aligned}
  K \in f^{-1}(D(a,c,0)) &\Leftrightarrow f(K) \in D(a,c,0) \\
  &\Leftrightarrow (a,c,0) \notin f(K)
  \end{aligned}$$

  Se tienen tres casos para K:

- Si $K = I$ entonces,

$$\begin{aligned}(a,c,0) \notin f(K) &\Leftrightarrow (a,c,0) \notin (I \times C \times \{0\}) \cup [(b,1,1) + (I \times C \times \{0\})] \\ &\Leftrightarrow (a,c,0) \notin I \times C \times \{0\} \\ &\Leftrightarrow a \notin I \\ &\Leftrightarrow K \in D(a).\end{aligned}$$

- Si $K = J$ entonces,

$$\begin{aligned}(a,c,0) \notin f(K) &\Leftrightarrow (a,c,0) \notin (B \times J \times \{0\}) \cup [(0,1,1) + (B \times J \times \{0\})] \\ &\Leftrightarrow (a,c,0) \notin B \times J \times \{0\} \\ &\Leftrightarrow c \notin J \\ &\Leftrightarrow K \in D(c).\end{aligned}$$

- Si $K = B$ entonces $(a,c,0) \notin B \times C \times \{0\}$ que es contradictorio, por lo tanto $B \notin f^{-1}(D(a,c,0))$.

Así

$$f^{-1}(D(a,c,0)) = D(a) \cup D(c).$$

Ahora

$$\begin{aligned}K \in f^{-1}(D(a,c,1)) &\Leftrightarrow f(K) \in D(a,c,1) \\ &\Leftrightarrow (a,c,1) \notin f(K)\end{aligned}$$

Se tienen tres casos para K:

- Si $K = I$ entonces,

$$\begin{aligned}(a,c,1) \notin f(K) &\Leftrightarrow (a,c,1) \notin (I \times C \times \{0\}) \cup [(b,1,1) + (I \times C \times \{0\})] \\ &\Leftrightarrow (a,c,1) \notin (b,1,1) + (I \times C \times \{0\}) \\ &\Leftrightarrow a + b \notin I \quad \wedge \quad b \notin I \\ &\Leftrightarrow ab + b \notin I \\ &\Leftrightarrow K \in D(ab + b) \\ &\Leftrightarrow K \in \bigcup_{x \in B} D(ax + x).\end{aligned}$$

- Si $K = J$ entonces,

$$\begin{aligned}(a,c,1) \notin f(K) &\Leftrightarrow (a,c,1) \notin (B \times J \times \{0\}) \cup [(0,1,1) + (B \times J \times \{0\})] \\ &\Leftrightarrow (a,c,1) \notin (0,1,1) + (B \times J \times \{0\}) \\ &\Leftrightarrow c-1 \notin J \\ &\Leftrightarrow K \in D(c-1).\end{aligned}$$

- Si $K = B$ entonces $(a,c,1) \notin B \times C \times \{0\}$, luego $B \in f^{-1}(D(a,c,1))$.

Así

$$f^{-1}(D(a,c,1)) = \bigcup_{x \in B} D(ax+x) \cup D(c-1) \cup \{B\}.$$

Como $f^{-1}(D(a,c,1))$ contiene a B, tenemos que verificar que $S(B) \setminus \bigcup_{x \in B} D(ax+x)$ es cerrado y compacto en $S(B)$. Pero ésto se tiene, ya que por la Proposición 1.9 *2)*, $S(B) \setminus \bigcup_{x \in B} D(ax+x) = D(a)$. Por lo tanto $f^{-1}(D(a,c,1))$ es abierto en $S(B)^* \coprod S(C)$.

- f es abierta:

  Los abiertos básicos de $S(B)^* \coprod S(C)$ son los conjuntos de la forma $D(a)$, $D(c)$ y $W = U \cup \{B\}$ donde $S(B) \setminus U$ es cerrado y compacto en $S(B)$.

$$\begin{aligned}K \in f(D(a)) &\Leftrightarrow K = f(I) \text{ donde } I \in D(a) \\ &\Leftrightarrow K = I \times C \times \{0\} \cup [(b,1,1) + I \times C \times \{0\}] \\ &\Leftrightarrow (a,0,0) \notin K \\ &\Leftrightarrow K \in D(a,0,0).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K \in f(D(c)) &\Leftrightarrow K = f(J) \text{ donde } J \in D(c) \\ &\Leftrightarrow K = B \times J \times \{0\} \cup [(0,1,1) + B \times J \times \{0\}] \\ &\Leftrightarrow (0,c,0) \notin K \\ &\Leftrightarrow K \in D(0,c,0).\end{aligned}$$

Si $W = U \cup \{B\}$ entonces veamos que $f(W) = f(U) \cup (B \times C \times \{0\})$ es abierto en $S(\widehat{B \times C})$, es decir $B \times C \times \{0\}$ es punto interior a $f(U)$. Como $S(B) \setminus U$ es compacto en $S(B)$ se cumple :

$$\begin{aligned}
&S(B) \setminus U \subseteq D(a) \\
\Rightarrow\ &S(B) \setminus D(a) \subseteq U \\
\Rightarrow\ &\bigcup_{x \in B} D(ax + x) \subseteq U \\
\Rightarrow\ &\bigcup_{x \in B} D(ax + x, 0, 0) \subseteq f(U).
\end{aligned}$$

$D(a, 1, 1)$ es un abierto básico que contiene a $B \times C \times \{0\}$. Probaremos que

$$D(a, 1, 1) \setminus \{(B \times C \times \{0\})\} \subseteq f(U).$$

Sea $K \neq B \times C \times \{0\}$ entonces,

$$K \in D(a, 1, 1) \Leftrightarrow (a, 1, 1) \notin K$$

Se tienen dos casos para K.

- $K = I \times C \times \{0\} \cup [(b, 1, 1) + I \times C \times \{0\}]$ donde $b \notin I$

$$\begin{aligned}
(a, 1, 1) \notin K &\Leftrightarrow (a, 1, 1) - (b, 1, 1) \notin I \times C \times \{0\} \\
&\Rightarrow a + b \notin I \ \wedge \ b \notin I \\
&\Rightarrow (a + b)b \notin I \\
&\Rightarrow ab + b \notin I \\
&\Rightarrow I \in D(ab + b) \\
&\Rightarrow K \in D(ab + b, 0, 0) \subseteq \bigcup_{x \in B} D(ax + x, 0, 0) \\
&\Rightarrow K \in f(U).
\end{aligned}$$

- $K = B \times J \times \{0\} \cup [(0, 1, 1) + B \times J \times \{0\}]$,

$$\begin{aligned}
(a, 1, 1) \notin K &\Leftrightarrow (a, 1, 1) - (0, 1, 1) \notin B \times J \times \{0\} \\
&\Leftrightarrow (a, 0, 0) \notin B \times J \times \{0\} \\
&\Leftrightarrow a \notin B \rightarrow\leftarrow \\
&\Rightarrow K \notin D(a, 1, 1).
\end{aligned}$$

De esta forma concluimos que $D(a,1,1) \setminus \{(B \times C \times \{0\})\} \subseteq f(U)$.

Por lo tanto $B \times C \times \{0\}$ es punto interior a $f(U)$.

Así $f(W) = f(U) \cup (B \times C \times \{0\})$ es abierto en $S(\widehat{B \times C})$. $\square$

Proposición 2.4. *Si B es un anillo de Boole no compacto y C es un anillo con unidad de caraterística dos entonces*

$$S(B \times C)^* \cong S(\widehat{B \times C}).$$

Veamos que la suma topológica de las compactaciones de Alexandroff de un número fínito de espacios topológicos resulta ser una compactación por n puntos de la suma topológica de dichos espacios topológicos.

Proposición 2.5. *Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ espacios no compactos y ${X_i}^* = X_i \cup \{w_i\}$ la compactación de Alexandroff de X_i para cada $i \in \{1, ..., n\}$. ${X_1}^* \coprod ... \coprod {X_n}^*$ es una compactación por n puntos de $X_1 \coprod ... \coprod X_n$.*

Demostración. Sea i la función inclusión de $X_1 \coprod ... \coprod X_n$ en ${X_1}^* \coprod ... \coprod {X_n}^*$. Tenemos que i es un homeomorfismo sobre la imagen, además $X_1 \coprod ... \coprod X_n$ es denso en ${X_1}^* \coprod ... \coprod {X_n}^*$ y ${X_1}^* \coprod ... \coprod {X_n}^*$ es un espacio topológico compacto ya que es suma finita de compactos. A su vez se cumple que $| ({X_1}^* \coprod ... \coprod {X_n}^*) \setminus (X_1 \coprod ... \coprod X_n) | = n$, por esta razón ${X_1}^* \coprod ... \coprod {X_n}^*$ es una compactación por n puntos de $X_1 \coprod ... \coprod X_n$ $\square$

En [24] se probó, que cuando $\Re$ es la relación de equivalencia que relaciona todos los puntos w_i, $({X_1}^* \coprod ... \coprod {X_n}^*)/\Re$ es una compactación por un punto de $X_1 \coprod ... \coprod X_n$. Nosotros probamos entonces que $({X_1}^* \coprod ... \coprod {X_n}^*)/\Re$ resulta ser la compactación de Alexandroff de $X_1 \coprod ... \coprod X_n$.

Proposición 2.6. *Si $\Re$ es la relación de equivalencia que identifica todos los puntos $w_1, ..., w_n$ de ${X_1}^* \coprod ... \coprod {X_n}^*$, entonces $({X_1}^* \coprod ... \coprod {X_n}^*)/\Re \simeq (X_1 \coprod ... \coprod X_n)^*$.*

Demostración. Sea

$$f_\Re : (X_1 \coprod ... \coprod X_n)^* \to ({X_1}^* \coprod ... \coprod {X_n}^*)/\Re$$
$$x \mapsto \{x\} \ si \ x \neq w$$
$$w \mapsto w_\Re = \{w_1, ..., w_n\}.$$

Sea θ la aplicación canónica de ${X_1}^* \coprod ... \coprod {X_n}^*$ en $({X_1}^* \coprod ... \coprod {X_n}^*)/\Re$ que aplica cada elemento en su clase de equivalencia, tenemos entonces que cada elemento $x \neq w_i$ de ${X_1}^* \coprod ... \coprod {X_n}^*$ va a él mismo y w_i con $i \in \{1, 2, ..., , n\}$ va a $w_\Re$. La topología sobre $({X_1}^* \coprod ... \coprod {X_n}^*)/\Re$ es la topología cociente, es decir, U es abierto en $({X_1}^* \coprod ... \coprod {X_n}^*)/\Re$ si $\theta^{-1}(U)$ es abierto en ${X_1}^* \coprod ... \coprod {X_n}^*$. Luego los abiertos de $({X_1}^* \coprod ... \coprod {X_n}^*)/\Re$ son los abiertos básicos de cada X_i y los abiertos de la forma $(U_1 \cup ... \cup U_n) \cup \{w_\Re\}$ donde cada $X_i \setminus U_i$ es cerrado y compacto en X_i con $U_i \neq \emptyset$ para todo $i = \{1, 2, ..., n\}$.

Ahora veamos que $f_\Re$ es un homeomorfismo.

- Es claro que $f_\Re$ es biyectiva.
- Veamos que $f_\Re$ es continua:

  Si U es un abierto básico de X_i entonces ${f_\Re}^{-1}(U) = U$ es un abierto en $(X_1 \coprod ... \coprod X_n)^*$. Si $U = (U_1 \cup ... \cup U_n) \cup \{w_\Re\}$, entonces ${f_\Re}^{-1}(U) = {f_\Re}^{-1}((U_1 \cup ... \cup U_n) \cup \{w_\Re\}) = (U_1 \cup ... \cup U_n) \cup \{w\}$ y $U_1 \cup ... \cup U_n$ es abierto en $X_1 \coprod ... \coprod X_n$ ya que cada U_i es abierto en X_i. Veamos que $(U_1 \cup ... \cup U_n)^c$ es compacto en $X_1 \coprod ... \coprod X_n$. Como $X_1, ..., X_n$ son disyuntos se tiene que $\bigcup_{i=1}^{n}(X_i \setminus U_i) = (\bigcup_{i=1}^{n} X_i) \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} U_i) = (X_1 \coprod ... \coprod X_n) \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} U_i)$. Ahora, cada $X_i \setminus U_i$ es compacto en X_i, entonces tenemos que $(\bigcup_{i=1}^{n} U_i)^c$ es compacto en $X_1 \coprod ... \coprod X_n$ ya que es unión finita de compactos. Así queda probado que ${f_\Re}^{-1}(U)$ es abierto en $(X_1 \coprod ... \coprod X_n)^*$.
- Veamos que $f_\Re$ es abierta:

  Se tiene que los abiertos básicos de $(X_1 \coprod ... \coprod X_n)^*$ son los abiertos básicos de cada X_i y los $U = V \cup \{w\}$ donde V es abierto de complemento compacto en $X_1 \coprod ... \coprod X_n$. Si U es un abierto básico de X_i, $f_\Re(U) = U$ es abierto en $({X_1}^* \coprod ... \coprod {X_n}^*)/\Re$. Ahora, si $U = V \cup \{w\}$ donde V es abierto de complemento compacto en $X_1 \coprod ... \coprod X_n$, entonces $f_\Re(U) = f_\Re(V \cup \{w\}) = V \cup \{w_\Re\}$. Como V es abierto de complemento compacto en $X_1 \coprod ... \coprod X_n$ se tiene que $V \cap X_i$ es un abierto en X_i distinto de $\emptyset$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y $X_i \setminus (V \cap X_i)$ es un cerrado en X_i contenido en un compacto, entonces éste es compacto en X_i. Luego $f_\Re(U) = V \cup \{w_\Re\} = (\bigcup_{i=1}^{n} V \cap X_i) \cup \{w_\Re\}$. Así tenemos que $f_\Re(U)$ es abierto en $({X_1}^* \coprod ... \coprod {X_n}^*)/\Re$. $\square$

Por último veamos que la suma topológica de espacios A-espectrales es A-espectral.

Teorema 2.4. *Si $X_1, X_2, ..., X_n$ son espacios A-espectrales entonces $X_1 \coprod ... \coprod X_n$ es un espacio A-espectral.*

Demostración. Veamos que $X_1 \coprod ... \coprod X_n$ cumple las siguientes condiciones:

1) Es sobrio: Los cerrados irreducibles de $X_1 \coprod ... \coprod X_n$ son los cerrados irreducibles de cada X_i. Como cada X_i es sobrio entonces todo cerrado irreducible no vacío de $X_1 \coprod ... \coprod X_n$ es la aderencia de un punto.

2) Es coherente: La base de abiertos compactos cerrada para intersecciones finitas de $X_1 \coprod ... \coprod X_n$ es la unión de todas las bases de abiertos compactos de cada X_i.

3) Cumple la condición (iii) del Teorema 2.1: Sea F un cerrado irreducuble de $X_1 \coprod ... \coprod X_n$, luego F es un cerrado irreducible de X_j para algún $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Como X_j es A-espectral entonces existe un subconjunto abierto O co-compacto e **IQOC** en X_j tal que $O \subseteq X_j \backslash F$. Luego el abierto co-compacto e **IQOC** de $X_1 \coprod ... \coprod X_n$ contenido en $(X_1 \coprod ... \coprod X_n) \backslash F$ es $O \cup X_1 \cup ... \cup X_{j-1} \cup X_{j+1} \cup ... \cup X_n$.

Entonces por el Teorema 2.1 tenemos que $X_1 \coprod ... \coprod X_n$ es un espacio A-espectral. □

Cuando $X_1, X_2, ..., X_n$ son espacios A-espectrales, ${X_i}^* = S(A_i)$ donde A_i es un anillo compacto, Así:

$$\begin{aligned}(X_1 \coprod ... \coprod X_n)^* &\cong ({X_1}^* \coprod ... \coprod {X_n}^*)/\Re \\ &\cong (S(A_1) \coprod ... \coprod S(A_n))/\Re \\ &\cong S(A_1 \times ... \times A_n)/\Re.\end{aligned}$$

Como $X_1 \coprod ... \coprod X_n$ es un espacio A-espectral entonces $(X_1 \coprod ... \coprod X_n)^* \cong S(A)$ donde A es un anillo compacto. De esta manera,

$$S(A_1 \times ... \times A_n)/\Re \cong S(A).$$

2.3. Un espacio up-espectral que no es A-espectral

Puesto que los espacios A-espectrales presentados en la sección anterior resultaron ser up-espectrales, en esta sección mostramos un ejemplo, construido en [13], de un espacio up-espectral que no es A-espectral. Para ésto, haremos uso de otra caracterización de los espacios A-espectrales.

Definición 2.3. *Un espacio up-espectral es un espacio sobrio, coherente y no compacto.*

Sean $(X, \leq)$ **un conjunto parcialmente ordenado y** $x \in X$**. La especialización de** x **es** $S(x) = \{y \in X : y \geq x\}$**, la generalización de** x **es** $G(x) = \{y \in X : y \leq x\}$**. Se tiene que la colección** $\mathcal{B} = \{G(x) : x \in X\}$ **es una base de una topología sobre** X **llamada la topología discreta de Alexandroff que se denota por** $\mathcal{A}(\leq)$**.**

Definición 2.4. *Sea* $U \subseteq X$*.* U *es un* $\mathbf{T}$*-subconjunto si es cerrado, compacto y co-***IQO** *en* X*.*

Presentamos ahora otra caracterización de los espacios A-espectrales que se necesita para la presentación del ejemplo.

Teorema 2.5. *(Tomado de [13]) Sea* X *un espacio topológico. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. X *es un espacio A-espectral.*
2. X *satisface las siguientes propiedades*
   - *(i)* X *es up-espectral.*
   - *(ii) Para cada subconjunto cerrado* C *de* X*, existe un* $\mathbf{T}$*-subconjunto* D *de* X *tal que* $C \subseteq D$*.*

Presentamos ahora algunas propiedades de la topología discreta de Alexandroff.

Lema 2.1. *(Tomado de [13]) Sea* $(X, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado. Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Un subconjunto* U *de* X *es abierto (resp. cerrado) en* $(X, \mathcal{A}(\leq))$ *si y sólo si* U *es cerrado bajo generalización (resp. especialización). Es decir* $G(x) \subseteq U$*, para cada* $x \in U$ *(resp.* $S(x) \subseteq U$*, para cada* $x \in U$*).*

2. *Para cada* $x \in X$*, la clausura de* $\{x\}$ *en* $(X, \mathcal{A}(\leq))$ *es* $S(x)$.

3. $\{G(x) : x \in X\}$ *es una base de subconjuntos abiertos compactos de* $(X, \mathcal{A}(\leq))$.

4. *Un subconjunto* C *de* X *es compacto en* $(X, \mathcal{A}(\leq))$ *si y sólo si existe una familia finita de elementos* $x_1, , x_2, ..., x_n$ *de* X *tal que*

$$C = G(x_1) \cup G(x_2) \cup ... \cup G(x_n).$$

5. $(X, \mathcal{A}(\leq))$ *es sobrio si y sólo si cada sucesión decreciente del conjunto ordenado* $(X, \leq)$ *es estacionaria.*

Ejemplo:

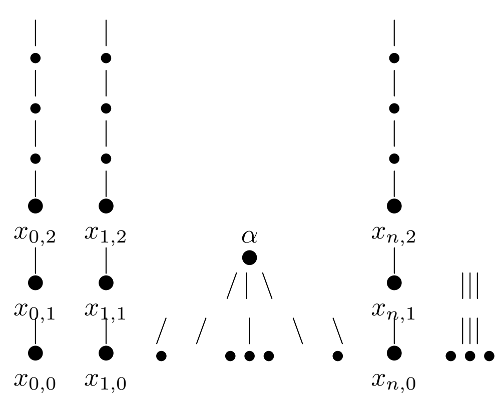
Para cada $n \in \mathbb{N}$***, consideremos el subconjunto*** $X_n = \{x_{n,i} = (n, i) : i \in \mathbb{N}\}$ ***de*** $\mathbb{R}^2$***; y el punto*** $\alpha = (1/2, 1/2)$***. Dotemos el conjunto*** $X = (\cup\{X_n : n \in \mathbb{N}\}) \cup \{\alpha\}$ ***con el orden*** $\leq$ ***definido por:***

- ***Para cada*** $n \in \mathbb{N}$***,*** $x_{n,i} \leq x_{n,j}$ ***si y sólo si*** $i \leq j$

- ***Los elementos de*** X_n ***y*** X_m ***son incomparables, para*** $n \neq m$***.***

- $\alpha \leq \alpha$ ***y*** $x_{n,0} \leq \alpha$***, para cada*** $n \in \mathbb{N}$***.***

Visualización del conjunto ordenado $(X, \leq)$***:***



$(X, \leq)$

Ahora se dota a X de la topología discreta de Alexandroff $(X, \mathcal{A}(\leq))$ asociada con el orden $\leq$.

Veamos que $(X, \mathcal{A}(\leq))$ es un espacio up-espectral que no es A-espectral.

1. **$(X, \mathcal{A}(\leq))$ es up-espectral:**

   - **Claramente, toda sucesión decreciente de $(X, \leq)$ es estacionaria, entonces por el Lema 2.1 (5), $(X, \mathcal{A}(\leq))$ es sobrio.**
   - **La familia $\{G(x) : x \in X\}$ es una base de conjuntos abiertos compactos que es cerrada bajo intersecciones finitas.**

2. **$(X, \mathcal{A}(\leq))$ no es A-espectral:**

   Se tiene que el único cerrado compacto no vacío de X es $\{\alpha\}$. Supongamos que X es A-espectral, entonces por el Teorema 2.5, $\{\alpha\}$ es un T-subconjunto. Pero $\{\alpha\}$ no es co-IQO ya que $G(\alpha)$ es un subconjunto abierto compacto de X, donde $G(\alpha) \cap (X \setminus \{\alpha\}) = \{x_{n,0} : n \in \mathbb{N}\}$ es un subespacio discreto infinito de X que no es compacto en X. Así $\{\alpha\}$ no es un T-subconjunto de X y por el Teorema 2.5 concluimos que $(X, \mathcal{A}(\leq))$ no es A-espectral.

Capítulo 3

Sobriedad Versus Compacidad en Espacios de Stone

En este capítulo definimos el espectro de un retículo distributivo junto con algunas propiedades elementales. A su vez, retomamos el concepto de espacio de Stone de [9], estableciendo una relación entre sobriedad y la existencia de mínimo en un retículo distributivo. Por último, trabajando en el contexto de categorías, definimos una dualidad en los espacios de Stone, mostrando que la noción de sobriedad corresponde a compacidad de un espacio topológico asociado con el espacio original.

3.1. Retículos distributivos

Definimos ahora el espectro de un retículo distributivo y recordamos algunas propiedades básicas de dicho espectro.

Definición 3.1. *Un conjunto ordenado $(L, \leq)$ se llama retículo si todo par de elementos tiene extremo superior y extremo inferior.*

El extremo superior de $\{a, b\}$ lo notaremos $a \vee b$ y el extremo inferior $a \wedge b$. Si la operación $\vee$ es distributiva con respecto a la operación $\wedge$, diremos que el retículo es distributivo.

Si el retículo tiene mínimo, éste se notará 0 y si tiene máximo éste se notará 1. En lo que sigue L denotará un retículo distributivo.

Definición 3.2. *Un anillo de conjuntos es un conjunto no vacío R de subconjuntos de X tal que si $A, B \in R$ entonces $A \cup B \in R$ y $A \cap B \in R$.*

Claramente, un anillo de conjuntos R es un retículo y para cada elemento $A, B \in R$, $A \vee B = A \cup B$ y $A \wedge B = A \cap B$. Éste a su vez es un retículo distributivo.

Definición 3.3. *Un subconjunto no vacío I de L se llama un ideal de L si es cerrado para extremos superiores finitos y es absorbente para extremos inferiores. I es primo si es propio y $a \wedge b \in I$ implica $a \in I$ ó $b \in I$.*

La noción dual de ideal en un retículo es la noción de filtro.

Definición 3.4. *Un filtro en L es un subconjunto no vacío e L que es cerrado para extremos inferiores finitos y es absorbente para extremos superiores. Un filtro F es primo si es propio y $a \vee b \in F$ implica $a \in F$ ó $b \in F$.*

Es claro además que el complemento de un ideal primo es un filtro primo y viceversa.

Teorema 3.1. *(Tomado de [9])[Teorema del Ideal Primo] Supongamos que I es un ideal en L, F es un filtro en L e $I \cap F = \emptyset$. Entonces existe un ideal primo J tal que $I \subseteq J$ y $J \cap F = \emptyset$.*

Sea $\mathfrak{I} = \{I \subseteq L : I$ es un ideal primo de $L\}$. Para cada $a \in L$ definimos $d(a) = \{I \in \mathfrak{I} : a \notin I\}$. Entonces

1. **$d(a) \cup d(b) = d(a \vee b)$ para todo $a, b \in L$.**

$$\begin{aligned} I \in d(a) \cup d(b) &\Leftrightarrow I \in d(a) \ \ o \ \ I \in d(b) \\ &\Leftrightarrow a \notin I \ \ o \ \ b \notin I \\ &\Leftrightarrow a \vee b \notin I \\ &\Leftrightarrow I \in d(a \vee b). \end{aligned}$$

2. $d(a) \cap d(b) = d(a \wedge b)$ **para todo** $a, b \in L$**.**

$$\begin{aligned} I \in d(a) \cap d(b) &\Leftrightarrow I \in d(a) \ \ y \ \ I \in d(b) \\ &\Leftrightarrow a \notin I \ \ y \ \ b \notin I \\ &\Leftrightarrow a \wedge b \notin I \\ &\Leftrightarrow I \in d(a \wedge b). \end{aligned}$$

3. Si $a \leq b$ **entonces** $d(a) \subseteq d(b)$**.**

Por las propiedades de d **tenemos que el conjunto** $\{\emptyset\} \cup \{d(a) : a \in L\}$ **es una base de una topología sobre el conjunto de los ideales primos de** L**. El espacio topológico correspondiente lo notaremos** $s(L)$ **y se llamará el espectro de** L**. Tenemos que** $d(L) = \{d(a) : a \in L\}$ **es un anillo de conjuntos. Y la asignación** $a \longmapsto d(a)$ **es un isomorfismo entre** L **y** $d(L)$**. Concluimos que todo retículo distributivo es isomorfo a un anillo de conjuntos.**

Proposición 3.1. *Si* L_1*,* L_2 *son subconjuntos no vacíos de* L *tales que* $\bigcap\{d(a) : a \in L_1\} \subseteq \bigcup\{d(b) : b \in L_2\}$ *entonces existen* $L_1' \subseteq L_1$ *y* $L_2' \subseteq L_2$ *finitos tales que* $\bigcap\{d(a) : a \in L_1'\} \subseteq \bigcup\{d(b) : b \in L_2'\}$*.*

Demostración. Sean $[L_1)$ y $(L_2]$ el filtro y el ideal generados por L_1 y L_2 respectivamente. Si $[L_1) \cap (L_2] = \emptyset$ existe, por el Teorema del ideal primo, un ideal primo I tal que $(L_2] \subseteq I$ y $[L_1) \cap I = \emptyset$. Tenemos que $L_2 \subseteq I$ y $L_1 \cap I = \emptyset$. Tenemos entonces la contradicción $I \in \bigcap\{d(a) : a \in L_1\} - \bigcup\{d(b) : b \in L_2\}$. Por lo tanto $[L_1) \cap (L_2] \neq \emptyset$, luego existe un $u \in [L_1) \cap (L_2]$. Así existen $L_1' \subseteq L_1$ y $L_2' \subseteq L_2$ finitos tales que $\bigwedge L_1' \leq \bigvee L_2'$, donde el isomorfismo $a \longmapsto d(a)$, implica $\bigcap\{d(a) : a \in L_1'\} \subseteq \bigcup\{d(b) : b \in L_2'\}$. $\square$

Corolario 3.1. *Si* $a \in L$ *entonces* $d(a)$ *es compacto.*

3.2. Espacios de Stone

El objetivo de esta sección es mostrar que en un espacio de Stone la noción de sobriedad es equivalente a que vacío es fundamental, que no es otra cosa que la existencia de mínimo en el retículo distributivo correspondiente. También, veremos que la sobriedad

y la compacidad son nociones duales. La teoría sobre espacios de Stone se tomó de [9]. En lo que sigue, L denota un retículo distributivo no acotado.

Definición 3.5. *Un espacio de Stone es un espacio topológico X que satisface las siguientes condiciones:*

(i) X es un espacio T_0.

(ii) La colección de subconjuntos abiertos compactos de X es un anillo de conjuntos y una base para X.(Equivalente a que X es un espacio coherente).

(iii) Si S y T son conjuntos no vacíos de abiertos compactos de X tales que $\cap S \subseteq \cup T$ entonces existen $S_1 \subseteq S$ y $T_1 \subseteq T$, finitos, tales que $\cap S_1 \subseteq \cup T_1$.

Sea $\mathfrak{D}$ la categoría de los retículos distributivos, asociamos a cada $L \in \mathfrak{D}$ un espacio de Stone $s(L)$ llamado el espectro primo de L, definido como el espacio topológico cuyos miembros son los ideales primos del retículo L con la topología determinada por la base $\mathfrak{B} = \{\emptyset\} \cup \{d(a) : a \in L\}$ donde $d(a) = \{I \subseteq L : a \notin I$ e I es un ideal primo de $L\}$.

Teorema 3.2. *Si $L \in \mathfrak{D}$ entonces $s(L)$ es un espacio de Stone y el conjunto de abiertos compactos es exactamente $\mathfrak{B}$.*

Demostración. $\mathfrak{B} = \{\emptyset\} \cup \{d(a) : a \in L\}$ es un anillo de conjuntos y sirve como base para el conjuto de ideales primos de L.

(i) Sean $I, J \in s(L)$ e $I \neq J$. Si $a \in I - J$ entonces $J \in d(a)$ e $I \notin d(a)$ por lo tanto $s(L)$ es un espacio T_0.

(ii) Del Corolario 3.1 se tiene que los elementos de $\mathfrak{B}$ son conjuntos abiertos compactos en $s(L)$. Más aún, cada conjunto abierto no vacío tiene la forma $A = \bigcup_{a\in L'} d(a)$, $\emptyset \neq L' \subseteq L$ y también, si A es compacto, entonces existe $L'_1 \subseteq L'$ finito tal que $A = \bigcup_{a\in L'_1} d(a)$. Siendo $A = d(\bigvee L'_1)$. Ésto establece la validez de la condición (ii).

(iii) Se deduce de la Proposición 3.1. □

Ahora procedemos a identificar los elementos de $L \in \mathfrak{D}$ con los subconjuntos abiertos compactos de $s(L)$.

Definición 3.6. *Sea X un espacio topológico arbitrario. Un subconjunto no vacío $A \subseteq X$ es llamado* ***fundamental*** *si A es abierto y compacto. El conjunto vacío, es llamado* ***fundamental*** *si para cada colección no vacía S de subconjuntos abiertos compactos de X tal que $\cap S = \emptyset$ se tiene que existe $S_1 \subseteq S$ finito tal que $\cap S_1 = \emptyset$.*

$\mathfrak{R}(X)$ denota el conjunto de subconjuntos fundamentales de X.

Teorema 3.3. *Si X es un espacio de Stone entonces $\mathfrak{R}(X)$ es un anillo de conjuntos.*

Demostración. Sean A y B subconjuntos fundamentales en X. Claramente de la condición (ii) de la definición 3.5 se tiene que, $A \cup B$ y $A \cap B \neq \emptyset$ son fundamentales. Supongamos ahora $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ y probemos que $\emptyset$ es fundamental. Supongamos que $\cap S = \emptyset$ donde S es una colección no vacía de subconjuntos abiertos compactos de X. Se tienen dos casos.

a)Si $A_S = \emptyset$ para algún $A_S \in S$ entonces $S_1 = A_S$.

b) Si $\cap S \subseteq A$ y $\cap S \subseteq B$ entonces, por la condición (iii) de la Definición 3.5 tenemos que existen $S_1, S_2 \subseteq S$ finitos tales que $\cap S_1 \subseteq A$ y $\cap S_2 \subseteq B$. También $\cap(S_1 \cup S_2) \subseteq A \cap B = \emptyset$. Por lo tanto $\emptyset$ es fundamental. $\square$

Teorema 3.4. *Para $L \in \mathfrak{D}$, los conjuntos fundamentales de $s(L)$ son exactamente los conjuntos $d(a)$, $a \in L$.*

Demostración. Supongamos que A es fundamental. Si $A \neq \emptyset$ entonces por el Teorema 3.2 se tiene el resultado. Ahora, suponemos que $\emptyset$ es fundamental. Luego $I \in \bigcap_{a \in L} d(a)$ implica $I = \emptyset$ lo cual no es posible ya que I es primo. Tenemos entonces que $\bigcap_{a \in L} d(a) = \emptyset$. Como $\emptyset$ es fundamental, existe un $L_1 \subseteq L$ finito tal que $\bigcap_{a \in L_1} d(a) = \emptyset$, así $\emptyset = d(\bigwedge L_1)$. Recíprocamente para cada $a \in L$, $d(a)$ es fundamental si éste no es vacío. Supongamos que $d(a) = \emptyset$ para algún $a \in L$, probaremos que $\emptyset$ es fundamental. Supongamos que existe una colección no vacía S de subconjuntos abiertos compactos tal que $\bigcap S = \emptyset$. Si $A_s = \emptyset$ para algún $A_s \in S$ entonces $S_1 = A_s$. Ahora asumamos que para cada $A_s \in S$, $A_s = d(a_s)$ para algún $a_s \in L$. Entonces por la Proposición 3.1 $\bigcap\limits_{As \in S} d(a_s) \subseteq d(a)$ implica que existe $S_1 \subseteq S$ finito tal que $\bigcap S_1 = \bigcap\limits_{As \in S_1} d(a_s) \subseteq d(a)$. Así probamos que $\emptyset$ es fundamental. $\square$

Corolario 3.2. $\mathfrak{R}(s(L)) \cong L$.

Demostración. $\mathfrak{R}(s(L)) = \{d(a) : a \in L\} \cong L$ $\square$

Corolario 3.3. *Un retículo distributivo L tiene* 0 *si y sólo si* $\emptyset$ *es fundamental en* $s(L)$.

Demostración. Si L tiene 0, entonces $\emptyset = d(0)$ es fundamental. Recíprocamente si $\emptyset$ es fundamental, entonces $\emptyset = d(a)$ para algún $a \in L$. Como $d(a) = \emptyset \subseteq d(b)$ para todo $b \in L$. entonces a es el elemento mínimo de L. □

Proposición 3.2. *(Tomada de [9]) Sea L un retículo distributivo. L tiene uno si y sólo si s(L) es compacto.*

Veamos que existe, salvo isomorfismos y homeomorfismos, una correspondencia uno a uno entre los retículos distributivos y los espacios de Stone. La prueba del siguiente teorema puede consultarse en [9].

Teorema 3.5. *Para cada retículo distributivo L, tenemos que* $\Re(s(L))$ *es isomorfo a L y para cada espacio de Stone X tenemos que* $s(\Re(X))$ *es homeomorfo a X.*

Mostraremos a continuación, cómo se relaciona la noción de sobriedad con la propiedad de que vacío es fundamental.

Proposición 3.3. *Si L tiene 0 entonces* $s(L)$ *es sobrio.*

Demostración. Sea F un subconjunto cerrado irreducible de $s(L)$ y sea $I = \cap F$. Como L tiene 0 entonces I es un ideal de L distinto de vacío. Veamos ahora que I es un ideal primo de $s(L)$. Sean $a, b \in L$ tales que $a \wedge b \in I$. Supongamos que $a \notin I$, $b \notin I$,

$$\Rightarrow I \in d(a), I \in d(b)$$

$$\Rightarrow I \in d(a) \cap d(b)$$

$$\Rightarrow I \in d(a \wedge b)$$

$$\Rightarrow a \wedge b \notin I.$$

Como ésto es absurdo concluimos que I es primo.

$$F = \overline{\{F\}} = \{J \in s(L) : \cap F \subseteq J\} = \{J \in s(L) : I \subseteq J\} = \overline{\{I\}}$$

Por lo tanto $s(L)$ es sobrio. □

Sea $\widehat{L}$ el retículo que se obtiene de adjuntar máximo a L. $s(\widehat{L}) = s(L) \cup L$, donde $s(\widehat{L})$ resulta ser una compactación por un punto de $s(L)$, adjuntando sólo el abierto $s(\widehat{L})$.

Proposición 3.4. *Si $s(L)$ es sobrio entonces L tiene 0.*

Demostración. Si $s(L)$ es sobrio entonces por la Proposición 1.10 $s(\widehat{L})$ es sobrio ya que $s(\widehat{L})$ es una compactación por un punto de $s(L)$. Así, tenemos que $s(\widehat{L})$ es espectral. Por lo tanto $\widehat{L}$ es un retículo acotado. En particular $\widehat{L}$ tiene 0, de donde L tiene 0. □

El resultado fundamental de esta sección lo resumimos en el siguiente teorema.

Teorema 3.6. *Sea L un retículo distributivo. Las siguietes propiedades son equivalentes:*

i) $\emptyset$ *es fundamental.*

ii) L *tiene* 0.

iii) $s(L)$ *es sobrio.*

Corolario 3.4. *Sea X un espacio de Stone. X es sobrio si y sólo si $\emptyset$ es fundamental.*

Demostración. X es homeomorfo a $s(\mathfrak{R}(X))$. □

Si notamos L° al retículo que se obtiene de L invirtiendo el orden tenemos también el siguiente corolario.

Corolario 3.5. *$s(L^\circ)$ es compacto si y sólo si $s(L)$ es sobrio.*

Queda visto que en el contexto de los espacios de Stone, sobriedad y compacidad son nociones duales.

3.3. Una dualidad en la categoría de los espacios de Stone

En esta sección precisaremos las ideas anteriores usando el lenguaje de categorías. Haciendo uso de la dualidad existente en la categoría de los retículos distributivos, definiremos una dualidad en la categoría de los espacios de los espacios de Stone. Finalmente re-enunciamos el Corolario 3.5 en términos de esta dualidad.

Sea $\mathfrak{D}$ la categoría de los retículos ditributivos, cuyos morfismos son los *homomorfismos propios*: homomorfismos de retículos que envían ideales primos en ideales primos por imagen recíproca y sea $\mathfrak{S}$ la categoría de los espacios de Stone, cuyos morfismos son las *funciones fuertemente continuas*: funciones que envían conjuntos fundamentales en conjuntos fundamentales por imagen recíproca. Definimos un funtor de $\mathfrak{D}$ en $\mathfrak{S}$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{D} & \xrightarrow{s} & \mathfrak{S} \\ L & & s(L) \\ \Big\downarrow h & & \Big\uparrow s(h) \\ M & & s(M) \end{array}$$

$s(h)$ **se define como:**

$$\begin{aligned} s(h) : s(M) &\longrightarrow s(L) \\ P &\longrightarrow h^{-1}(P). \end{aligned}$$

s **resulta ser una co-equivalencia de categorías, ya que existe el funtor** $\mathfrak{R} : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{D}$ **tal que** $\mathfrak{R}(s(L)) \cong L$ **y** $s(\mathfrak{R}(X))$ **es homeomorfo a** X**.**

Consideremos ahora el funtor opuesto o **de la categoría de los retículos distributivos en la categoría de los retículos distributivos.**

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{D} & \xrightarrow{o} & \mathfrak{D} \\ L & & L^o \\ \Big\downarrow h & & \Big\downarrow h^o=h \\ M & & M^o \end{array}$$

Veamos que h^o **es propia. Para ésto, es suficiente probar que si** P **es un filtro primo de** M **entonces** P^c **es un ideal primo de** M**. Teniendo como base que si** P **es un ideal primo se** M^o **entonces** P **es un filtro primo de** M**.**

1) P^c **es un ideal:**

- **Como P es propio entonces $P^c \neq \emptyset$. Sean $x, y \in P^c$, si $x \vee y \notin P^c$ entonces $x \vee y \in P$, como P es un filtro primo $x \in P$ o $y \in P$, es decir $x \notin P^c$ o $y \notin P^c$, contradiciendo la hipótesis, por lo tanto $x \vee y \in P^c$.**

- **Sean $x \in P^c$ y $z \in M$, si $x \wedge z \notin P^c$ entonces $x \wedge z \in P$, como P es un filtro primo $x \in P$ contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto $x \wedge z \in P^c$.**

2) P^c es primo:

Sean $x, y \in P^c$ tal que $x \wedge y \in P^c$ y supongamos que $x \notin P^c$ y $y \notin P^c$ entonces $x \in P$ y $y \in P$, así se tiene que $x \wedge y \in P$ que es una contradicción. Por lo tanto $x \in P^c$ o $y \in P^c$.

Proposición 3.5. *Sean L, M retículos distributivos y sean L^o, M^o los retículos duales. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $h : L \longrightarrow M^o$ es un homomorfismo.

(2) $h : L^o \longrightarrow M$ es un homomorfismo.

Demostración. Basta probar *(1) $\Rightarrow$ (2)*

$$\begin{aligned} h(x \vee^o y) &= h(x \wedge y) \\ &= h(x) \wedge^o h(y) \\ &= h(x) \vee h(y). \\ h(x \wedge^o y) &= h(x \vee y) \\ &= h(x) \vee^o h(y) \\ &= h(x) \wedge h(y). \end{aligned}$$

□

Corolario 3.6. $[L^o, M] \cong [L, M^o]$.

Teorema 3.7. *Sea $\mathfrak{D}$ la categoría de los retículos ditributivos.*

(1) $o : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}$ es adjunto a izquierda de sí mismo.

(2) $o : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}$ es un isomorfismo involutivo de categorías.

Definición 3.7. *Sean $\mathfrak{D}$ la categoría de los retículos distributivos y $\mathfrak{S}$ la categoría de los espacios de Stone. Definimos $o : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}$ como $o = s \circ o \circ \mathfrak{R}$. Es decir o es el funtor de $\mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}$ que hace el siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D} \arrow[r, "o"] & \mathfrak{D} \arrow[d, "s"] \\
\mathfrak{S} \arrow[u, "\mathfrak{R}"] \arrow[r, "o"'] & \mathfrak{S}.
\end{tikzcd}$$

Como $o : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}$ es un isomorfismo involutivo y $\mathfrak{R}$ y s son co-equivalencias, concluimos que $o : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}$ es una equivalencia, tal que $o \circ o \cong 1_{\mathfrak{S}}$. Como consecuencia obetenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.8. *Sean $\mathfrak{S}$ la categoría de los espacios de Stone y $o : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}$. o es adjunto a izquierda de sí mismo.*

Corolario 3.7. *o respeta límites y co-límites. En particular o respeta productos y co-productos.*

Utilizando el funtor $o : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}$ podemos re-escribir el corolario 3.5 de la siguiente manera.

Teorema 3.9. *Sea X un espacio de Stone.*

1) X es compacto si y sólo si X^o es sobrio.

2) X es sobrio si y sólo si X^o es compacto.

Bibliografía

[1] Acosta, L.,*El funtor espectro: Un puente entre álgebra y topología*, XIX Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, (2003).

[2] Acosta, L., Lozano E., *Una caracterización de las topologías compactas To*, Boletín de Matemáticas, Nueva Serie, Vol VI, Núnmero 2, (1999), 77-34.

[3] Adámek, Herrlich y Strecker, *Abstract and concrete categories*, Jhon Wiley and sons, 1990.

[4] Andima, S.J. and Thron, W.J,*Order-induced Topological Properties*, Pacific J. Math. 75 (1978), 297-304.

[5] Aull, C.E, and Thron,W.J, *Separation axioms between T0 and T1*, Indag. Math. (N.S.) 24 (1963), 26-37.

[6] Aull, C.E. and Lowen, R. (Eds.), *Handbook of the history of general topology*, Kluwer Academic Publishers, 1998. 5

[7] Ávila, J.A., *Propiedades topológicas del espectro primo de un anillo conmutativo unitario*, Tesis de Magister, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2002.

[8] Ávila, J.A., *Sobre algunas clases especiales de anillos*, Boletín de Matemáticas, Nueva Serie, vol. X, no2 (2003), 68-75.

[9] Balbes, R. and Dwinger, P., *Distributive Lattices*, University of Missouri press, 1975.

[10] Belaid, K. and Echi, *On a conjecture about spectral sets*, Topology and its applications 139 (2004), 1-15.

[11] Belaid, K., Echi, O and Gargouri, R., *A-spectral spaces*, Topology and its applications 138 (2004), 315-322.

[12] Bourbaki, N., *General Topology, Part 1, Elements of mathematics*, Addison- Wesley, 1966.

[13] Echi, O and Gargouri, R., *An up-spectral space need not be A-spectral*, New York Journal of Mathematics 10 (2004), 271-277.

[14] Galeano, J., *Una revisión booleana de algunas construcciones relacionadas con el funtor espectro*, Tesis de Magíster, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2004.

[15] Hochster, M., *Prime ideal structure in conmutative rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 142 (1992), 43-60.

[16] Jacobson, N., *Basic algebra I*, W.H. Freeman, 1974.

[17] Johnstone, P., *Stone spaces*, Cambridge University Press, 1986.

[18] Mac Lane, S., *Categories for the working mathematician*, Second Edition, Springer, 1998.

[19] Montgomery, R. G., *Spec A as a set with algebraic structure*, Abstract 68T-458, Notices Amer. Math. Soc. 15 (1968), 637.

[20] Murdeshwar, M. G., *General topology*, Jhon Wiley and sons, 1983.

[21] Szász, G., *Introduction to Laticce Theory*, Academic Press, New York, 1963.

[22] Willard, S., *General Topology*, Addison Wesley, 1968.

[23] Camacho, M., *Anillos compactos y adjunción de unidad*, Tesis de Magister, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2008.

[24] Rubio, M., *Extensiones y compactaciones por finitos puntos.* Tesis de Magister, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2002.