Minimización de Funcionales, Método de Reducción de Lyapunov-Schmidt y Aplicaciones a Problemas Elípticos Semilineales

por

John Bayron Baena Giraldo

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al Título de

Magister en Matemáticas

Director: Dr. Jorge Cossio

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Septiembre 2003

Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por COLCIENCIAS,
Contrato No. 063-2002, Código 1118-05-11412.

Resumen

En este trabajo se estudian, en primer lugar, algunos teoremas relacionados con la minimización de funcionales y algunas aplicaciones de éstos a la existencia de soluciones débiles de problemas elípticos semilineales. En segunda instancia se estudia el Método de Reducción de Lyapunov-Schmidt, herramienta importante para buscar puntos críticos de funcionales, y se presentan aplicaciones a problemas de Dirichlet no lineales.

Contenido

Agradecimientos

Quisiera agradecer, en primer lugar, a los Profesores Abraham Asmar, Jorge Mejía, Pedro Isaza, Horacio Arango y Carlos Mejía, por ser unos grandes maestros y amigos, y por ayudarme, con mucha paciencia, a ingresar lentamente en este inmenso universo de las matemáticas. Un agradecimiento especial va para el Profesor Jorge Cossio, quien no sólo ha sido esa persona que ha enriquecido mi pequeño conocimiento de las matemáticas, sino también ese alguien que, con consejos y uno que otro regaño, me ha enseñado lecciones muy valiosas e importantes para mi vida laboral y personal. También quisiera agradecer a esos profesores que sin darme clase siempre estuvieron disponibles a cualquier pregunta que les hiciera, ellos son Diego Mejía, Carlos Parra, Volker Stallbohm, Margarita Toro, Débora Tejada, Rodney Jaramillo y Sigifredo Herrón, este último de gran ayuda por sus valiosos aportes bibliográficos. De igual manera agradezco a los Profesores Arturo Jessie Manuel, Carlos Rivillas, Luis Alfonso Velez, Luz Elena Muñoz e Iván Asmar, por la paciencia y por el apoyo recibido durante la realización de estos estudios. También agradezco a mis compañeros de Maestría por haber creado un agradable ambiente de estudio, de compañerismo y de amistad.

Agradezco a mi familia por estar siempre ahí y por haberme inculcado los buenos valores, la honestidad y la humildad. Nuevamente agradezco a la familia Lozada Carrillo por haberme recibido en su casa y permitir que pudiera estudiar, y por acogerme como un hijo más. A mi novia Adriana por la paciencia y apoyo, y a su familia por ser incondicionales a cada momento. Muchas gracias a la familia Bonett Díaz por haber sido tan auténticos y amables conmigo.

Agradezco a mis amigos, los de antes, los de ahora y los de siempre (Edwin, Luis, Diego, Babintong, Carlos, Jorge, los de rugby, los de petróleos y sus secuaces, Alejandro, Leiva, José Manuel y todos los demás). Un agradecimiento especial a José Manuel por su apoyo en la revisión y detección de errores en este trabajo.

También quisiera agradecer a los profesores Guillermo Ramírez y Gonzalo Castro quienes con sabiduría y desprendimiento sembraron en mí las semillas del gusto por las matemáticas. Esto está tan largo que ya no sé si queda alguien por fuera, así que doy las gracias a todo aquel que haya sido importante en mi vida.

Dedicado a la memoria de mi gran amigo Carlos Alberto Bonett Díaz y de mi abuela Ana Lucía Rendón.

Introducción

En este trabajo se estudian dos teoremas de minimización y el Método de Reducción de Lyapunov-Schmidt. Se presentan aplicaciones de estos resultados a la existencia de soluciones para problemas elípticos no lineales, más precisamente, a la búsqueda de soluciones débiles del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado con frontera suave, $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ es el operador de Laplace y $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función no lineal.

En el Capítulo 1 se presentan algunos resultados del Análisis Funcional y de la teoría general de Ecuaciones Diferenciales Parciales, necesarios en los Capítulos 2 y 3. Entre ellos se destacan dos teoremas abstractos de minimización, un teorema de teoría espectral, la desigualdad de Poincaré y el Teorema de Inmersión de Rellich-Kondrachov. Las pruebas de todos los teoremas de este capítulo aparecen en los textos que se citan como referencia.

En el Capítulo 2 se demuestran dos teoremas de minimización de funcionales definidos en espacios de dimensión infinita. Los dos resultados siguientes son consecuencia del primer teorema de optimización.

Teorema A. Supongamos que existe una constante $\overline{\mu}$, $0 < \overline{\mu} < \lambda_1$, tal que para casi todo $x \in \Omega$ se tiene que

$$f'(x,+\infty) := \lim_{s \to +\infty} \frac{f(x,s)}{s} \leq \overline{\mu} \quad \text{y}$$
$$f'(x,-\infty) := \lim_{s \to -\infty} \frac{f(x,s)}{s} \leq \overline{\mu}.$$

Entonces el problema de Dirichlet (1) posee al menos una solución débil $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. λ_1 denota el primer valor propio de $-\Delta$ en Ω con condición de Dirichlet cero en la frontera.

Teorema B. (Mawhin-Ward-Willem [11]) Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Carathéodory (ver Definición 1.1.2) que satisface la condición de crecimiento

$$|f(x,s)| \leq c\,|s|^{p-1} + b(x) \qquad \forall s \in \mathbb{R} \text{ y casi todo } x \in \Omega,$$

donde

$$\begin{cases} 1 \leq p < \frac{2N}{N-2} & \text{si } N \geq 3 \\ 1 \leq p < +\infty & \text{si } N = 2, \end{cases}$$

$b \in L^{p'}(\Omega)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y c es una constante positiva. Supongamos que

$$\begin{aligned} \limsup_{s \to +\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} &\leq \alpha(x) \leq \lambda_1 \quad \text{y} \\ \limsup_{s \to -\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} &\leq \alpha(x) \leq \lambda_1, \end{aligned}$$

donde $F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)\, d\tau$, $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ y $\alpha(x) < \lambda_1$ en un conjunto de medida positiva. Entonces el problema de Dirichlet (1) tiene al menos una solución débil $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

El segundo teorema de minimización del Capítulo 2, que se usará de manera esencial en la demostración del resultado principal del Capítulo 3, nos permite demostrar la siguiente aplicación.

Teorema C. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si existe $k > 0$ tal que

$$f'(t) \leq k < \lambda_1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

entonces el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

tiene al menos una solución débil $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

En el Capítulo 3 se presenta el Método de Reducción de Lyapunov-Schmidt, el cual es una técnica para encontrar puntos críticos de funcionales y consiste en transformar un problema variacional en dimensión infinita a un problema de optimización en un espacio de dimensión finita, generalmente, más fácil de resolver. En la Sección 3.1 se demuestra el teorema central del método de reducción que se usará en las dos aplicaciones que se presentan en la Sección 3.2, las cuales se enuncian a continuación.

Sea $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots.. \leq \lambda_k \leq \ldots.$ la sucesión de valores propios de -Δ en Ω con condición de Dirichlet cero en la frontera.

Teorema D. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes condiciones:

i) f es Lipschitz, con constante de Lipschitz α tal que $0 < \alpha < \lambda_{k+1}$, donde k es algún entero positivo.

ii) Existen constantes β y γ, con $\beta > \lambda_k$, tales que

$$F(s) \geq \frac{\beta}{2} s^2 + \gamma \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

donde $F(s) = \int_0^s f(t)\,dt$. Entonces el problema de Dirichlet (2) posee al menos una solución débil en $H_0^1(\Omega)$.

Teorema E. (A. Castro y J. Cossio [5]) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable que satisface las siguientes condiciones:

i) Existe $k \geq 2$ entero positivo tal que

$$f'(+\infty) := \lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{s} \in (\lambda_k, \lambda_{k+1}) \text{ y}$$
$$f'(-\infty) := \lim_{s \to -\infty} \frac{f(s)}{s} \in (\lambda_k, \lambda_{k+1}).$$

ii) Existe una constante α tal que

$$f'(s) \leq \alpha < \lambda_{k+1} \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Entonces el problema de Dirichlet (2) posee al menos una solución débil en $H_0^1(\Omega)$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan algunos resultados de Análisis Funcional y de la teoría general de Ecuaciones Diferenciales Parciales. Entre ellos destacamos dos teoremas abstractos de minimización, un teorema de teoría espectral, la desigualdad de Poincaré y el Teorema de Inmersión de Rellich-Kondrachov. Estos resultados se usarán en capítulos posteriores, especialmente en las aplicaciones. Las pruebas de estos teoremas aparecen en los textos que se citan como referencia.

1.1 Teoremas

Definición 1.1.1 *Sea X un espacio normado. Un funcional $G : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se dice*

- *inferiormente semicontinuo si*

$$x_n \to x \implies G(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} G(x_n) \quad y$$

- *débilmente inferiormente semicontinuo si*

$$x_n \rightharpoonup x \implies G(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} G(x_n).$$

Teorema 1.1.1 *Sean X un espacio de Banach y $G : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, entonces*

G es inferiormente semicontinua si y sólo si G es débilmente inferiormente semicontinua.

Prueba. Ver Brézis [2], p. 38. ■

Teorema 1.1.2 *Sean X un espacio topológico compacto y $G : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un funcional inferiormente semicontinuo. Entonces G está acotado inferiormente y existe $x_0 \in X$ tal que*

$$G(x_0) = \min_{x \in X} G(x).$$

Prueba. Ver De Figueiredo [6], p. 1. ■

Teorema 1.1.3 *Sea X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *X es reflexivo.*
- *$\overline{B}_1(0) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ es compacta en la topología débil.*
- *$\overline{B}_1(0) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ es débilmente compacta para sucesiones.*

Prueba. Ver Brézis [2], p. 44. ■

De los dos teoremas anteriores se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 1.1.4 *Sea X un espacio de Banach reflexivo. Si $G : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es un funcional coercivo, es decir,*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} G(x) = +\infty,$$

débilmente inferiormente semicontinuo y no idénticamente igual a $+\infty$, entonces G está acotado inferiormente y existe $x_0 \in X$ tal que

$$G(x_0) = \min_{x \in X} G(x).$$

Teorema 1.1.5 *En un espacio normado X con $\dim X < +\infty$, una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ es débilmente convergente si y sólo si es fuertemente convergente.*

Prueba. Ver Brézis [2], p. 36. ■

Teorema 1.1.6 *(Rellich-Kondrachov) Sea $p \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} 1 \leq p < \frac{2N}{N-2} & si\ N \geq 3 \\ 1 \leq p < +\infty & si\ N = 2, \end{cases}$$

entonces

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),$$

con inclusión compacta.

Prueba. Ver Brézis [2], p. 169. ■

Teorema 1.1.7 *sea $\{\lambda_i\}_{i=1}^{+\infty}$ la sucesión de valores propios y $\{\phi_i\}_{i=1}^{+\infty}$ la sucesión de funciones propias de $-\Delta$ con condición de Dirichlet cero en la frontera. Sean $X = gen\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k\}$ y $Y = gen\{\phi_{k+1}, \phi_{k+2}, ...\}$. Entonces:*

- *X y Y son subespacios cerrados de $H_0^1(\Omega)$.*
- *$H_0^1(\Omega) = X \oplus Y$.*
- *$\|y\|_{H_0^1}^2 \geq \lambda_{k+1} \int_\Omega y^2 \qquad \forall y \in Y$.*
- *$\|x\|_{H_0^1}^2 \leq \lambda_k \int_\Omega x^2 \qquad \forall x \in X$.*

Prueba. Ver Brézis [2], p. 192 y Mitrović-Žubrinić [10], p. 243. ■

Teorema 1.1.8 *(Desigualdad de Poincaré) Para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ se tiene*

$$\int_\Omega u^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

Prueba. Ver Brézis [2], p. 168-174, A. Castro [4] y De Figueiredo [7]. ■

Definición 1.1.2 *$f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función Carathéodory si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

- *Para todo $s \in \mathbb{R}$ fijo, la función $f(\cdot, s)$ es medible en Ω.*
- *Para casi todo $x \in \Omega$ fijo la función $f(x, \cdot)$ es continua en $\mathbb{R}$.*

Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Carathéodory. Consideremos el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Definición 1.1.3 *Decimos que u es una solución clásica de (1.1) si*

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right), \\ -\Delta u(x) = f(x, u(x)) & \forall x \in \Omega \quad y \\ u(x) = 0 & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Decimos que u es una solución débil (o generalizada) de (1.1) si

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) & y \\ \int_\Omega \nabla u . \nabla v = \int_\Omega f(x, u)\, v & \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{1.2}$$

Teorema 1.1.9 *Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Carathéodory que cumple la condición de crecimiento*

$$|f(x, s)| \leq c\,|s|^{p-1} + b(x) \qquad \forall s \in \mathbb{R} \text{ y casi todo } x \in \Omega, \tag{1.3}$$

donde

$$\begin{cases} 1 \leq p < \frac{2N}{N-2} & \text{si } N \geq 3 \\ 1 \leq p < +\infty & \text{si } N = 2, \end{cases}$$

$b \in L^{p'}(\Omega)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y c es una constante positiva.

Sea $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ el funcional definido por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} F(x,u),$$

donde $F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)\, d\tau$. Entonces J está bien definido, J es débilmente inferiormente semicontinuo, $J \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$ y además

$$\begin{aligned} J'(u)[v] &= \langle \nabla J(u), v\rangle_{H_0^1} \\ &= \int_{\Omega} \nabla u.\nabla v - \int_{\Omega} f(x,u)\, v \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Prueba. Ver De Figueiredo [6], p. 18, y Rabinowitz [12], p. 90. ■

Nota 1.1.1 *De (1.4) es claro que $u \in H_0^1(\Omega)$ es un punto crítico de J si y sólo si u es una solución débil de (1.1). Por lo tanto la búsqueda de soluciones débiles de (1.1) se transforma en la búsqueda de puntos críticos de J, lo cual es precisamente lo que haremos en las aplicaciones.*

Capítulo 2

Teoremas de Minimización

En este capítulo se demuestran dos teoremas referentes a la minimización de funcionales. Estos teoremas, que se demuestran en la Sección 2.1, se usarán en la Sección 2.2 en algunas aplicaciones a ecuaciones elípticas semilineales; así mismo el segundo de ellos se utilizará, de manera esencial, en la demostración del teorema central del Capítulo 3. En las aplicaciones de la Sección 2.2 lo que se hace es exhibir condiciones suficientes que garantizan las hipótesis de los teoremas de la Sección 2.1 y de esta manera asegurar la existencia de soluciones débiles para algunos problemas de Dirichlet no lineales.

2.1 Dos Teoremas de Minimización

Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Carathéodory que satisface la condición de crecimiento

$$|f\,(x,s)| \leq c\,|s|^{p-1} + b(x) \qquad \forall s \in \mathbb{R} \text{ y casi todo } x \in \Omega, \tag{2.1}$$

donde

$$\begin{cases} 1 \leq p < \frac{2N}{N-2} & \text{si } N \geq 3 \\ 1 \leq p < +\infty & \text{si } N = 2, \end{cases}$$

$b \in L^{p'}(\Omega)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y c es una constante positiva.

Consideremos el funcional $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F\,(x,u)\,,$$

donde $F(x,s) = \int_0^s f\,(x,\tau)\,d\tau$. Este funcional está bien definido, es $C^1\left(H_0^1(\Omega),\mathbb{R}\right)$ y es débilmente inferiormente semicontinuo, de acuerdo al Teorema 1.1.9.

El siguiente resultado se demostrará usando el Teorema 1.1.2.

Teorema 2.1.1 *Si f satisface la condición (2.1), entonces para todo $r > 0$ existen $\lambda_r \leq 0$ y $u_r \in \overline{B}_r(0) \subset H_0^1(\Omega)$ tales que $\nabla J(u_r) = \lambda_r u_r$ y J restringido a $\overline{B}_r(0)$ asume su mínimo en u_r, es decir,*

$$J(u_r) = \min_{u \in \overline{B}_r(0)} J(u).$$

Prueba. Sea $r > 0$. Como $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, se sigue que la bola

$$\overline{B}_r(0) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|_{H_0^1} \leq r \right\}$$

es débilmente compacta (ver Teorema 1.1.3). Aplicando el Teorema 1.1.2, en la topología débil, al funcional $J|_{\overline{B}_r(0)}$ obtenemos un punto $u_r \in \overline{B}_r(0)$ tal que

$$J(u_r) = \min_{u \in \overline{B}_r(0)} J(u).$$

Sea $v \in \overline{B}_r(0)$. Como $\overline{B}_r(0)$ es convexa entonces $tv + (1-t)u_r \in \overline{B}_r(0)$ para todo $t \in [0,1]$, y como $J(u_r) = \min \left\{ J(u) : u \in \overline{B}_r(0) \right\}$ se tiene

$$J(u_r) \leq J(tv + (1-t)u_r) = J(u_r + t(v - u_r)).$$

Como J es Fréchet diferenciable se sigue que J es Gateaux diferenciable, por lo tanto

$$J(u_r + t(v - u_r)) = J(u_r) + t \left\langle \nabla J(u_r), v - u_r \right\rangle_{H_0^1} + o(t).$$

Así

$$J(u_r) \leq J(u_r) + t \left\langle \nabla J(u_r), v - u_r \right\rangle_{H_0^1} + o(t) \qquad \forall t \in (0,1].$$

Dividiendo por t y tomando límite cuando $t \to 0^+$ se tiene que

$$\left\langle \nabla J(u_r), v - u_r \right\rangle_{H_0^1} \geq 0 \qquad \forall v \in \overline{B}_r(0). \tag{2.2}$$

Analicemos dos casos:

▶ *u_r es un punto interior de $\overline{B}_r(0)$:*

Existe $\delta > 0$ tal que $\overline{B}_\delta(u_r) \subset B_r(0)$, luego, por (2.2), es claro que

$$\langle \nabla J(u_r), w \rangle_{H_0^1} \geq 0 \qquad\qquad \forall w \in \overline{B}_\delta(0). \tag{2.3}$$

Sea $w \in \overline{B}_\delta(0)$. Claramente $-w \in \overline{B}_\delta(0)$ y así, por (2.3),

$$\langle \nabla J(u_r), w \rangle_{H_0^1} \geq 0 \;\text{ y }\; -\langle \nabla J(u_r), w \rangle_{H_0^1} \geq 0,$$

por lo tanto

$$\langle \nabla J(u_r), w \rangle_{H_0^1} = 0 \qquad\qquad \forall w \in \overline{B}_\delta(0).$$

Si $v \in H_0^1(\Omega)$ con $v \neq 0$ entonces $\delta v / \|v\|_{H_0^1} \in \overline{B}_\delta(0)$ y así

$$\left\langle \nabla J(u_r), \delta \frac{v}{\|v\|_{H_0^1}} \right\rangle_{H_0^1} = 0$$

y por lo tanto

$$\langle \nabla J(u_r), v \rangle_{H_0^1} = 0 \qquad\qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En particular, tomando $v = \nabla J(u_r)$ se tiene que

$$\nabla J(u_r) = 0, \tag{2.4}$$

es decir, u_r es un punto crítico de J. La conclusión del teorema se sigue tomando $\lambda_r = 0$.

▶ *$u_r \in \partial \overline{B}_r(0)$:*

Si $\nabla J(u_r) = 0$ la conclusión del teorema se tiene con $\lambda_r = 0$. Para $\nabla J(u_r) \neq 0$, supongamos, por contradicción, que

$$\forall \lambda < 0,\; \nabla J(u_r) \neq \lambda u_r.$$

En partícular para $\lambda = -\|\nabla J(u_r)\|_{H_0^1} / \|u_r\|_{H_0^1}$ se tiene

$$\frac{\nabla J(u_r)}{\|\nabla J(u_r)\|_{H_0^1}} \neq -\frac{u_r}{\|u_r\|_{H_0^1}},$$

así
$$u_r \neq -\|u_r\|_{H_0^1}\frac{\nabla J(u_r)}{\|\nabla J(u_r)\|_{H_0^1}} = -r\frac{\nabla J(u_r)}{\|\nabla J(u_r)\|_{H_0^1}}.$$
Por lo tanto
$$v_0 := -r\frac{\nabla J(u_r)}{\|\nabla J(u_r)\|_{H_0^1}} \in \partial\overline{B}_r(0) \quad \text{y} \quad v_0 \neq u_r.$$
Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que

$$\langle v_0, u_r\rangle_{H_0^1} < \|v_0\|_{H_0^1}\|u_r\|_{H_0^1} = r^2. \tag{2.5}$$

Por otro lado, tomando $v = v_0$ en (2.2) tenemos

$$\langle \nabla J(u_r), v_0 - u_r\rangle_{H_0^1} \geq 0.$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle \frac{r}{\|\nabla J(u_r)\|_{H_0^1}}\nabla J(u_r), v_0 - u_r\right\rangle_{H_0^1} \\ &= \langle -v_0, v_0 - u_r\rangle_{H_0^1}, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \langle v_0, u_r\rangle_{H_0^1} &\geq \|v_0\|_{H_0^1}^2 \\ &= r^2, \end{aligned}$$

lo cual contradice (2.5). Por lo tanto existe $\lambda_r < 0$ tal que $\nabla J(u_r) = \lambda_r u_r$, y así se concluye la demostración del teorema. ■

El siguiente corolario se usa en la demostración de los Teoremas 2.2.1 y 2.2.2.

Corolario 2.1.2 *Si f satisface la condición (2.1) y existen constantes $r_0 > 0$ y a tales que*

$$J(u) \geq a > 0 \qquad \forall u \in \partial\overline{B}_{r_0}(0) \tag{2.6}$$

entonces el funcional J posee un punto crítico.

Prueba. Como $J(0) = 0$ y $J(u) > 0 \ \ \forall u \in \partial\overline{B}_{r_0}(0)$, concluímos que el mínimo de J en $\overline{B}_{r_0}(0)$ se logra en un punto interior de la bola, digamos u_{r_0}. De (2.4) se sigue que $\nabla J(u_{r_0}) = 0$, con lo cual se concluye la demostración. ■

A continuación se demostrarán dos lemas que serán utilizados en la prueba del Teorema 2.1.5.

Lema 2.1.3 *Sea H un espacio de Hilbert real. Sean $x, y \in H$ fijos, definamos la función η por*

$$\begin{aligned} \eta : \mathbb{R} \quad &\longrightarrow \quad H \\ s \quad &\longmapsto \quad \eta(s) = x + s(y-x). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Entonces $\eta \in C^1(\mathbb{R}, H)$ y $\eta'(s) = y - x$ ($\eta'(s) \in BL(\mathbb{R}, H)$ se identifica con $\eta'(s)[1] \in H$).

Prueba. Sean $s, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{\eta(s+\varepsilon t) - \eta(s)}{\varepsilon} &= \frac{x + (s+\varepsilon t)(y-x) - [x + s(y-x)]}{\varepsilon} \\ &= (y-x)t. \end{aligned}$$

De donde se concluye que la derivada de Gateaux de η en s es $\eta'_G(s) = y - x$.

$$\begin{aligned} \eta'_G : \mathbb{R} \quad &\longrightarrow \quad BL(\mathbb{R}, H) \\ s \quad &\longmapsto \quad \eta'_G(s) = y - x \end{aligned}$$

Sea $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ tal que $s_n \to s$ en $\mathbb{R}$, entonces

$$\eta'_G(s_n) = y - x \underset{(n \to +\infty)}{\longrightarrow} y - x = \eta'_G(s) \quad \text{en } BL(\mathbb{R}, H)$$

luego $\eta'_G : \mathbb{R} \ \longrightarrow \ BL(\mathbb{R}, H)$ es continua, por lo tanto la derivada de Fréchet es igual a la derivada de Gateaux, es decir,

$$\eta'(s) = \eta'_G(s) = y - x$$

y además es $C^1(\mathbb{R}, H)$. $\blacksquare$

Lema 2.1.4 ***(Lema de Hadamard)*** *Sea H un espacio de Hilbert real. Si $G : H \longrightarrow \mathbb{R}$ es C^1 entonces*

$$G(y) - G(x) = \int_0^1 \langle \nabla G\left(x + s(y-x)\right), y - x\rangle \, ds \qquad \forall x, y \in H.$$

Prueba. Sean $x, y \in H$. Consideremos la restricción de la función η, definida por (2.7), a $[0,1]$. Es decir,

$$\begin{array}{rcl} \eta : [0,1] & \longrightarrow & H \\ s & \longmapsto & \eta(s) = x + s(y-x). \end{array}$$

Por el lema anterior $\eta \in C^1([0,1], H)$. Definamos la siguiente función

$$\begin{array}{rcl} h = G \circ \eta : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & h(s) = G\left(\eta(s)\right) = G\left(x + s(y-x)\right). \end{array}$$

Es claro que $h \in C^1([0,1], \mathbb{R})$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene

$$h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(s) ds$$

o equivalentemente

$$G(y) - G(x) = \int_0^1 \left(G \circ \eta\right)'(s) ds.$$

Pero

$$\begin{array}{rcl} \left(G \circ \eta\right)'(s) & = & G'\left(\eta(s)\right)\left[\eta'(s)\right] \\ & = & G'\left(\eta(s)\right)\left[y - x\right] \\ & = & \langle \nabla G\left(\eta(s)\right), y - x\rangle \\ & = & \langle \nabla G\left(x + s(y-x)\right), y - x\rangle . \end{array}$$

Así

$$G(y) - G(x) = \int_0^1 \langle \nabla G\left(x + s(y-x)\right), y - x\rangle \, ds,$$

y de esta manera queda demostrado el lema. ∎

A continuación presentamos un segundo resultado de minimización de funcionales.

Teorema 2.1.5 *Sean H un espacio de Hilbert real y $G : H \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Si existe $m > 0$ tal que*

$$\langle \nabla G(u) - \nabla G(v), u - v \rangle \geq m \|u - v\|^2 \qquad \forall u, v \in H \tag{2.8}$$

entonces existe un único punto $u_0 \in H$ tal que

$$G(u_0) = \min_{u \in H} G(u).$$

Además, u_0 es el único punto crítico de $G : H \longrightarrow \mathbb{R}$; es decir, $\nabla G(u_0) = 0$.

Prueba. La demostración se hará usando las dos afirmaciones siguientes:

Afirmación 1: G es convexa.

En efecto, sean $x, y \in H$, $t \in (0,1)$ y $s \in (0,1]$. Usando (2.8) con $u = x + ts(y-x)$ y $v = x + s(y-x)$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle \nabla G(x+ts(y-x)) - \nabla G(x+s(y-x)), s\,(t-1)\,(y-x) \rangle &\geq \\ m \|x + ts(y-x) - x - s(y-x)\|^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

entonces

$$s\,(t-1) \langle \nabla G(x+ts(y-x)) - \nabla G(x+s(y-x)), y-x \rangle \geq 0,$$

pero $s\,(t-1) < 0$, luego

$$\langle \nabla G(x+ts(y-x)) - \nabla G(x+s(y-x)), y-x \rangle \leq 0.$$

Por lo tanto

$$\langle \nabla G(x+ts(y-x)), y-x \rangle \leq \langle \nabla G(x+s(y-x)), y-x \rangle . \tag{2.9}$$

Esta última expresión es trivialmente cierta para $s = 0$, por lo que (2.9) es válida $\forall s \in [0, 1]$. Por otro lado, por el Lema de Hadamard se tiene que

$$G(x + t(y - x)) - G(x) = \int_0^1 \langle \nabla G\left(x + s\left[x + t(y - x) - x\right]\right), t\left(y - x\right)\rangle \, ds.$$

De ésta última igualdad y de (2.9) se tiene que

$$\begin{aligned} G(x + t(y - x)) &= G(x) + t \int_0^1 \langle \nabla G\left(x + ts(y - x)\right), y - x\rangle \, ds \\ &\leq G(x) + t \int_0^1 \langle \nabla G(x + s(y - x)), y - x\rangle \, ds. \end{aligned}$$

Por el Lema de Hadamard

$$G(y) - G(x) = \int_0^1 \langle \nabla G\left(x + s(y - x)\right), y - x\rangle \, ds.$$

Luego

$$\begin{aligned} G((1 - t)x + ty) &\leq G(x) + t\left[G(y) - G(x)\right] \\ &= (1 - t)G(x) + tG(y), \end{aligned}$$

lo cual demuestra la Afirmación 1.

Afirmación 2: G es coerciva, es decir, $G\left(x\right) \to +\infty$ cuando $\|x\| \to +\infty$.

En efecto, por el Lema de Hadamard para $x \in H$ se tiene

$$\begin{aligned} G(x) &= G(0) + \int_0^1 \langle \nabla G\left(sx\right), x\rangle \, ds \\ &= G(0) + \int_0^1 \langle \nabla G\left(sx\right) - \nabla G(0), x\rangle \, ds + \int_0^1 \langle \nabla G(0), x\rangle \, ds \\ &= G(0) + \int_0^1 \frac{1}{s} \langle \nabla G\left(sx\right) - \nabla G(0), sx - 0\rangle \, ds + \langle \nabla G(0), x\rangle \, . \end{aligned}$$

Usando (2.8) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que

$$\begin{aligned} G(x) &\geq G(0) + \int_0^1 ms \|x\|^2 \, ds - \|\nabla G(0)\| \, \|x\| \\ &= G(0) + \frac{m}{2} \|x\|^2 - \|\nabla G(0)\| \, \|x\| \, . \end{aligned}$$

Como $m > 0$ entonces $G(x) \longrightarrow +\infty$ cuando $\|x\| \longrightarrow +\infty$. Hemos demostrado que la función G es coerciva.

Afirmación 3: G es débilmente inferiormente semicontinua.

En efecto, como G es continua, G es inferiormente semicontinua y además, por la Afirmación 1, G es convexa, se sigue que G es débilmente inferiormente semicontinua, esto último por el Teorema 1.1.1.

Usando las Afirmaciones 2 y 3, y el hecho de que H es reflexivo (por ser Hilbert), por el Teorema 1.1.4, se concluye que existe $u_0 \in H$ tal que

$$G(u_0) = \min_{u \in H} G(u),$$

es decir, u_0 es un mínimo de G. Como G es diferenciable $\nabla G(u_0) = 0$, luego u_0 es un punto crítico de G.

Para la unicidad supongamos que existe otro punto crítico $u_1 \in H$. Por (2.8) se tiene

$$0 = \langle \nabla G(u_0) - \nabla G(u_1), u_0 - u_1 \rangle \geq m \, \|u_0 - u_1\|^2 \geq 0$$

de donde se concluye que

$$u_0 = u_1,$$

por lo tanto el punto crítico es único. ■

2.2 Aplicaciones a Problemas Elípticos Semilineales

2.2.1 Aplicaciones del Corolario 2.1.2

En esta sección se presentan dos aplicaciones del Corolario 2.1.2 que demuestran la existencia de soluciones débiles para problemas elípticos semilineales.

Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Carathéodory. Retomemos el funcional $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x, u),$$

donde $F(x, s) = \int_0^s f(x, \tau)\, d\tau$. J está asociado al problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.10}$$

Teorema 2.2.1 *Supongamos que existe una constante* $\overline{\mu}$, $0 < \overline{\mu} < \lambda_1$, *tal que para casi todo* $x \in \Omega$ *se tiene que*

$$\begin{aligned} f'(x, +\infty) &:= \lim_{s\to+\infty} \frac{f(x, s)}{s} \le \overline{\mu} \quad y \\ f'(x, -\infty) &:= \lim_{s\to-\infty} \frac{f(x, s)}{s} \le \overline{\mu}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Entonces el problema de Dirichlet (2.10) posee al menos una solución débil $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

Prueba. Sea $\mu > 0$ tal que $\overline{\mu} < \mu < \lambda_1$. Por lo tanto $f'(x, -\infty) < \mu$ y $f'(x, +\infty) < \mu$ para casi todo $x \in \Omega$. Luego existe $M_1 > 0$ tal que

$$\frac{f(x, s)}{s} \le \mu \quad \forall\, |s| \ge M_1$$

o equivalentemente

$$|f(x, s)| \le \mu\, |s| \qquad \forall\, |s| \ge M_1. \tag{2.12}$$

Ahora, como para casi todo $x \in \Omega$ $f(x,\cdot)$ es continua en $\mathbb{R}$, existe una constante $c_1 > 0$ tal que

$$|f(x,s)| \leq c_1 \quad \forall\, |s| \leq M_1. \tag{2.13}$$

De (2.12) y (2.13) se tiene que para casi todo $x \in \Omega$

$$|f(x,s)| \leq \mu\,|s| + c_1 \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

es decir, f satisface (2.1) con $p = 2$.

Usando (2.12) y la continuidad de $F(x,\cdot)$ en $\mathbb{R}$ se sigue que

$$F(x,s) \leq \frac{1}{2}\mu s^2 + c_2 \quad \forall s \in \mathbb{R}, \;\; \forall x \in \Omega, \tag{2.14}$$

donde c_2 es una constante positiva.

Sea $u \in H_0^1(\Omega)$. De (2.14) se sigue que

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u) \\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{2}\mu\int_\Omega u^2 - c_2\,|\Omega|\,. \end{aligned}$$

Por la caracterización variacional de λ_1(ver Teorema 1.1.8) sabemos que

$$\int_\Omega u^2 \leq \frac{1}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^2\,.$$

Por lo tanto

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1}\right)\|u\|_{H_0^1}^2 - c_2\,|\Omega|\,.$$

Como $\mu < \lambda_1$ se sigue que

$$J(u) \longrightarrow +\infty \text{ cuando } \|u\|_{H_0^1} \longrightarrow +\infty,$$

lo cual prueba que el funcional J es coercivo. Por lo tanto existen constantes $a > 0$ y $r_0 > 0$

tales que

$$J\left(u\right)\geq a>0\qquad\forall u\in\partial B_{r_0}\left(0\right).$$

Como f satisface (2.1), usando el Corolario 2.1.2 se concluye que J posee un punto crítico, el cual es solución débil del problema (2.10). ■

Teorema 2.2.2 *(Mawhin-Ward-Willem [11]) Supongamos que (2.1) es válido y que*

$$\begin{aligned}\limsup_{s\to+\infty}\frac{2F(x,s)}{s^2} &\leq \alpha(x)\leq\lambda_1 \quad y\\ \limsup_{s\to-\infty}\frac{2F(x,s)}{s^2} &\leq \alpha(x)\leq\lambda_1,\end{aligned}\tag{2.15}$$

donde $\alpha\in L^\infty(\Omega)$ y $\alpha(x)<\lambda_1$ en un conjunto de medida positiva. Entonces el problema de Dirichlet (2.10) tiene al menos una solución débil $u_0\in H_0^1\left(\Omega\right)$.

Prueba. sea $J:H_0^1\left(\Omega\right)\longrightarrow\mathbb{R}$ el funcional definido por

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2-\int_\Omega F\left(x,u\right),$$

donde $F(x,s)=\int_0^s f\left(x,\tau\right)d\tau$. Demostremos que J es coercivo.
Veamos primero que $\exists\epsilon_0>0$ tal que

$$\Theta(u):=\int_\Omega|\nabla u|^2-\int_\Omega\alpha(x)[u(x)]^2\geq\epsilon_0\quad\forall\left\|u\right\|_{H_0^1}=1.\tag{2.16}$$

En efecto, supongamos por contradicción que $\forall n\in\mathbb{N}\ \ \exists u_n\in\ \ H_0^1\left(\Omega\right)$ con $\left\|u_n\right\|_{H_0^1}=1$ y $\Theta(u_n)<\frac{1}{n}$. Como $\alpha(x)\leq\lambda_1$ en Ω y por la caracterización variacional de λ_1 se tiene que

$$\Theta(u)\geq0\qquad\forall u\in H_0^1(\Omega).$$

Por lo tanto, podemos suponer que $\exists u_n\in\ H_0^1\left(\Omega\right)$ tal que $\left\|u_n\right\|_{H_0^1}=1$ y $\Theta(u_n)\to0$. Como $H_0^1\left(\Omega\right)$ es un espacio de Banach reflexivo, entonces $\overline{B}_1(0)=\left\{u\in H_0^1\left(\Omega\right):\left\|u\right\|_{H_0^1}\leq1\right\}$ es débilmente compacta (ver Teorema 1.1.3). Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $u_n\rightharpoonup u_0$ en $H_0^1\left(\Omega\right)$ para algún $u_0\in H_0^1\left(\Omega\right)$. Por otro lado, según en el

Teorema 1.1.6 la inclusión $H_0^1 \hookrightarrow L^2$ es compacta. Luego $u_n \to u$ en $L^2(\Omega)$.

De otra parte, si $g(x,s) = \alpha(x)s$ con $x \in \Omega$ y $s \in \mathbb{R}$, entonces g satisface (2.1). En efecto

$$|g(x,s)| = |\alpha(x)|\,|s| \leq \|\alpha\|_{L^\infty}|s| \qquad \text{para casi todo } x \in \Omega.$$

Si consideramos el funcional

$$\begin{array}{rcl} J_g : H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & J_g(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F_g(x,u), \end{array}$$

donde $F_g(x,s) = \int_0^s g(x,\tau)\,d\tau$, entonces J_g está bien definido, $J_g \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$ y J es débilmente inferiormente semicontinuo, según el Teorema 1.1.9. Ahora, como $\Theta(u) = 2J_g(u)$, entonces Θ tiene las mismas propiedades. Como $u_n \rightharpoonup u_0$ en $H_0^1(\Omega)$, se tiene que

$$0 \leq \Theta(u_0) \leq \liminf_{n\to+\infty} \Theta(u_n) = \lim_{n\to+\infty}\Theta(u_n) = 0 \tag{2.17}$$

y por lo tanto $\Theta(u_0) = 0$.

Por otro lado, como $\|u_n\|_{H_0^1} = 1$ se sigue que

$$\Theta(u_n) = 1 - \int_\Omega \alpha(x)[u_n(x)]^2 \to 0.$$

Como

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega \alpha(x)u_n^2(x) - \int_\Omega \alpha(x)u_0^2(x)\right| &\leq \int_\Omega |\alpha(x)|\left|u_n^2(x) - u_0^2(x)\right| \\ &\leq \|\alpha\|_{L^\infty}\int_\Omega |u_n(x) - u_0(x)|\,|u_n(x) + u_0(x)| \\ &\leq \|\alpha\|_{L^\infty}\|u_n - u_0\|_{L^2}\|u_n + u_0\|_{L^2} \\ &\leq c_1\|u_n - u_0\|_{L^2} \to 0, \end{aligned}$$

se sigue que

$$\int_\Omega \alpha(x)[u_n(x)]^2 \to \int_\Omega \alpha(x)[u_0(x)]^2. \tag{2.18}$$

Por lo tanto

$$\int_\Omega \alpha(x)[u_0(x)]^2 = 1. \tag{2.19}$$

De (2.19) se sigue que $\|u_0\|_{L^2} > 0$. De otra parte, volviendo a (2.17), usando la caracterización variacional de λ_1 (Teorema 1.1.8) y el hecho de que $\alpha(x) < \lambda_1$ en un conjunto de medida positiva, se tiene que

$$\lambda_1 \int_\Omega u_0^2 \leq \int_\Omega |\nabla u_0|^2 = \int_\Omega \alpha(x)[u_0(x)]^2 < \lambda_1 \int_\Omega [u_0(x)]^2.$$

Como $\|u_0\|_{L^2} > 0$ se sigue que

$$\lambda_1 < \lambda_1.$$

Esta contradicción demuestra (2.16).

Sea $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$. Por (2.16) se tiene

$$\Theta\left(\frac{u}{\|u\|_{H_0^1}}\right) \geq \epsilon_0.$$

De donde se sigue que

$$\Theta(u) \geq \epsilon_0 \|u\|_{H_0^1}^2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.20}$$

Sea $0 < \epsilon < \lambda_1 \epsilon_0$. Como

$$\limsup_{s \to +\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} := \inf_{s>0} \left\{ \sup_{t \geq s} \frac{2F(x,t)}{t^2} \right\} \quad \text{y}$$
$$\limsup_{s \to -\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} := \inf_{s<0} \left\{ \sup_{t \leq s} \frac{2F(x,t)}{t^2} \right\},$$

(ver Royden [13], p. 48), de (2.15) se tiene que existe $s_1 > 0$ tal que

$$\sup_{|t| \geq s_1} \frac{2F(x,t)}{t^2} < \alpha(x) + \epsilon.$$

Por lo tanto

$$F(x,s) < \frac{\alpha(x)+\epsilon}{2}s^2 \qquad \forall\,|s| \geq s_1.$$

De otro lado, como $F(x,\cdot)$ es continua en $\mathbb{R}$, entonces existe una constante $c_\epsilon > 0$ tal que

$$F(x,s) \leq c_\epsilon \quad \forall\,|s| \leq s_1.$$

De estas dos últimas expresiones se puede ver que

$$F(x,s) < \frac{\alpha(x)+\epsilon}{2}s^2 + c_\epsilon \qquad \forall s \in \mathbb{R}, \ \ \forall x \in \Omega.$$

Sea $u \in H_0^1(\Omega)$. Con base en esta última expresión estimemos $J(u)$

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u) \\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega \alpha(x)u^2 - \frac{\epsilon}{2}\int_\Omega u^2 - \int_\Omega c_\epsilon \\ &= \frac{1}{2}\Theta(u) - \frac{\epsilon}{2}\int_\Omega u^2 - \int_\Omega c_\epsilon. \end{aligned}$$

Usando (2.20) y la caracterización variacional de λ_1 se tiene que

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2}\epsilon_0\,\|u\|^2_{H_0^1} - \frac{1}{2}\frac{\epsilon}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^2 - c_\epsilon\,|\Omega| \\ &= \frac{1}{2}\,\|u\|^2_{H_0^1}\left(\epsilon_0 - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) - c_\epsilon\,|\Omega|. \end{aligned}$$

Como $\epsilon < \lambda_1\epsilon_0$ se sigue que $J(u) \longrightarrow +\infty$ si $\|u\|_{H_0^1} \longrightarrow +\infty$, lo cual prueba que J es coercivo. Por lo tanto existen constantes $a > 0$ y $r_0 > 0$ tales que

$$J(u) \geq a > 0 \qquad \forall u \in \partial B_{r_0}(0).$$

Como f satisface (2.1), usando el Corolario 2.1.2 se concluye J posee un punto crítico, el cual es solución débil del problema (2.10). ■

Nota 2.2.1 *Si en el teorema anterior la hipótesis $\alpha(x) < \lambda_1$ en un conjunto de medida positiva* *se cambia por*

$$\textit{existe una constante } \overline{\mu} < \lambda_1, \ \textit{tal que } \alpha(x) \leq \overline{\mu} \textit{ para casi todo } x \in \Omega,$$

entonces se tendría (2.14) y de esta manera la demostración anterior se reduciría a la prueba que se dió en el Teorema 2.2.1.

2.2.2 Una Aplicación del Teorema 2.1.5

En esta sección se presentará una aplicación del Teorema 2.1.5 a la existencia de soluciones débiles para un problema elíptico semilineal.

Teorema 2.2.3 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si existe $k > 0$ tal que*

$$\left|f'(t)\right| \leq k < \lambda_1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

entonces el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & en\ \Omega \\ \quad u = 0 & en\ \partial\Omega \end{cases} \tag{2.21}$$

tiene al menos una solución débil $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

Prueba. Sea $s \in \mathbb{R}$. Por el Teorema del Valor Medio existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(s) - f(0) = f'(\xi)s.$$

Así

$$\begin{aligned} |f(s)| &= \left|f'(\xi)s + f(0)\right| \\ &\leq \left|f'(\xi)\right| |s| + |f(0)| \\ &\leq k\,|s| + |f(0)|\,. \end{aligned}$$

Luego f satisface la hipótesis de crecimiento (2.1), con $p=2$. Por lo tanto, por el Teorema 1.1.9, el funcional

$$\begin{array}{rcl} J: H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & J(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2-\int_\Omega F(u) \end{array}$$

donde $F(s)=\int_0^s f(t)\,dt$, es tal que $J\in C^1\left(H_0^1(\Omega),\mathbb{R}\right)$ y

$$\langle \nabla J(u), v\rangle_{H_0^1}=\int_\Omega \nabla u.\nabla v-\int_\Omega f(u)\,v \qquad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

Para poder aplicar el Teorema 2.1.5 probemos que se satisface la hipótesis (2.8).

En efecto, sean $u,v\in H_0^1(\Omega)$, luego

$$\begin{aligned} \langle \nabla J(u), u-v\rangle_{H_0^1} &= \int_\Omega \nabla u.\nabla(u-v)-\int_\Omega f(u)(u-v) \\ \langle \nabla J(v), u-v\rangle_{H_0^1} &= \int_\Omega \nabla v.\nabla(u-v)-\int_\Omega f(v)(u-v) \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \langle \nabla J(u)-\nabla J(v), u-v\rangle_{H_0^1} &= \int_\Omega \nabla(u-v).\nabla(u-v)-\int_\Omega [f(u)-f(v)](u-v) \\ &= \|u-v\|_{H_0^1}^2-\int_\Omega [f(u(x))-f(v(x))](u(x)-v(x)). \end{aligned}$$

Por el Teorema del Valor Medio existe $\xi(x)$ entre $u(x)$ y $v(x)$ tal que

$$f(u(x))-f(v(x))=f'(\xi(x))[u(x)-v(x)].$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \langle \nabla J(u)-\nabla J(v), u-v\rangle_{H_0^1} &= \|u-v\|_{H_0^1}^2-\int_\Omega f'(\xi(x))[u(x)-v(x)]^2 \\ &\geq \|u-v\|_{H_0^1}^2-\int_\Omega k(u-v)^2. \end{aligned}$$

Por la caracterización variacional de λ_1 se tiene

$$\begin{aligned}\langle \nabla J(u) - \nabla J(v), u - v\rangle_{H_0^1} &\geq \|u-v\|_{H_0^1}^2 - \frac{k}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla(u-v)|^2 \\ &= \left(1 - \frac{k}{\lambda_1}\right)\|u-v\|_{H_0^1}^2 .\end{aligned}$$

Luego (2.8) se satisface con $m := 1 - k/\lambda_1 > 0$. Por lo tanto existe un único punto crítico u_0 del funcional J, el cual es la única solución débil de (2.21). ■

Capítulo 3

El Método de Reducción de Lyapunov-Schmidt

En este capítulo se presenta el Método de Reducción de Lyapunov-Schmidt, así como también algunas aplicaciones de éste. Como se estudió en el Capítulo 2, cuando se tiene una ecuación diferencial parcial y se quiere estudiar la existencia de soluciones débiles, a veces es posible obtener un problema variacional asociado a dicha ecuación, al cual se le puede encontrar solución mediante una técnica de optimización del funcional asociado a la ecuación diferencial parcial. El método de reducción es una técnica para encontrar puntos críticos de funcionales y consiste en transformar el problema variacional en dimensión infinita a un problema de optimización en un espacio de dimensión finita, el cual, normalmente, es más fácil de resolver. En la Sección 3.1 se demuestra el teorema central del método de reducción y su respectivo corolario, el cual se usará en las dos aplicaciones que se presentan en la Sección 3.2 a problemas elípticos no lineales.

3.1 Teorema Central

En esta sección se demuestra el teorema central del método de reducción. Para su demostración se usará fundamentalmente el Teorema 2.1.5.

Veamos primero el siguiente lema, el cual será de mucha utilidad en la demostración del teorema principal.

Lema 3.1.1 *Sean H un espacio de Hilbert real y $G : H \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1. Sean X y Y subespacios cerrados de H tales que $H = X \oplus Y$. Para cada $x \in X$ definamos el funcional*

$$\begin{aligned} G_x : Y &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto G_x(y) = G(x + y), \end{aligned}$$

entonces $G_x \in C^1(Y,\mathbb{R})$, $G_x'(y) = G'(x+y)|_Y \in Y'$ *y además*

$$\langle \nabla G_x(y), t\rangle = \langle \nabla G(x+y), t\rangle \qquad \forall y,t \in Y. \tag{3.1}$$

Prueba. Sean $y,t \in Y$, $t \neq 0$. Por definición

$$\frac{|G_x(y+t) - G_x(y) - G'(x+y)[t]|}{\|t\|} = \frac{|G(x+y+t) - G(x+y) - G'(x+y)[t]|}{\|t\|},$$

pero

$$\frac{|G(x+y+t) - G(x+y) - G'(x+y)[t]|}{\|t\|} \to 0$$

cuando $\|t\| \to 0$, ya que G es Fréchet diferenciable en $x+y$. Se tiene entonces que G_x es Fréchet diferenciable y que $G_x'(y) = G'(x+y)|_Y \in Y'$ $\forall y \in Y$.
Por el Teorema de Representación de Riesz se tiene que

$$\langle \nabla G_x(y), t\rangle = G_x'(y)[t] = G'(x+y)[t] = \langle \nabla G(x+y), t\rangle \qquad \forall y,t \in Y. \tag{3.2}$$

Por último veamos que

$$\begin{aligned} G_x' : Y &\longrightarrow Y' \\ y &\longmapsto G_x'(y) \end{aligned}$$

es una función continua. En efecto, supongamos que $y_n \to y$ en Y, luego $x + y_n \to x + y$ en H y como G es $C^1(H,\mathbb{R})$, entonces, por la continuidad del producto interno, se tiene que

$$\langle \nabla G(x+y_n), t\rangle \to \langle \nabla G(x+y), t\rangle \qquad \forall t \in Y,$$

es decir, $G_x'(y_n) \to G_x'(y)$ en Y'. Se tiene entonces que $G_x \in C^1(Y,\mathbb{R})$. ■

Ahora si veamos el teorema central en el cual se basa el método de reducción.

Teorema 3.1.2 *Sean* H *un espacio de Hilbert real y* $G : H \longrightarrow \mathbb{R}$ *un funcional de clase* C^1. *Sean* X *y* Y *subespacios cerrados de* H *tales que* $H = X \oplus Y$. *Supongamos que existe una* *constante $m > 0$ tal que*

$$\langle \nabla G(x+y_1) - \nabla G(x+y_2), y_1 - y_2 \rangle \geq m \|y_1 - y_2\|^2 \qquad \forall x \in X, \quad \forall y_1, y_2 \in Y. \quad (3.3)$$

Entonces se tiene lo siguiente:

(i). Existe una función continua $\psi : X \longrightarrow Y$ tal que

$$G\left(x + \psi(x)\right) = \min_{y \in Y} G\left(x + y\right) \qquad \forall x \in X.$$

(ii). El funcional

$$\begin{array}{rcl} \widehat{G} : X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \widehat{G}(x) = G\left(x + \psi(x)\right) \end{array}$$

es de clase C^1 y

$$\left\langle \nabla \widehat{G}(x), h \right\rangle = \langle \nabla G(x + \psi(x)), h \rangle \qquad \forall x, h \in X.$$

(iii).

$$\langle \nabla G(x + \psi(x)), y \rangle = 0 \qquad \forall y \in Y.$$

Prueba. Sea $x \in X$. Por el Lema 3.1.1 sabemos que el funcional

$$\begin{array}{rcl} G_x : Y & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & G_x(y) = G\left(x + y\right) \end{array}$$

es C^1, $G_x'(y) = G'\left(x+y\right)|_Y \in Y'$ y además que

$$\langle \nabla G_x(y), t \rangle = \langle \nabla G(x+y), t \rangle \qquad \forall y, t \in Y.$$

De esta última expresión y de la hipótesis (3.3) se observa que

$$\begin{array}{rcl} \langle \nabla G_x(y_1) - \nabla G_x(y_2), y_1 - y_2 \rangle & = & \langle \nabla G(x+y_1) - \nabla G(x+y_2), y_1 - y_2 \rangle \\ & \geq & m \|y_1 - y_2\|^2 \qquad \forall y_1, y_2 \in Y. \end{array}$$

Utilizando el Teorema 2.1.5, se tiene que existe un único punto $u_x \in Y$ donde G_x alcanza su mínimo, es decir,

$$G_x\left(u_x\right) = \min_{y \in Y} G_x(y).$$

Como $x \in X$ se escogió arbitrariamente, podemos definir la función

$$\begin{array}{rcl} \psi : X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & \psi(x) = u_x, \end{array}$$

la cual es tal que

$$G_x(\psi\left(x\right)) = \min_{y \in Y} G_x(y),$$

o equivalentemente

$$G(x + \psi\left(x\right)) = \min_{y \in Y} G(x + y) \qquad \forall x \in X.$$

Como G_x es diferenciable, entonces $G'_x(\psi\left(x\right)) = 0 \in Y'$. Por lo tanto, por (3.1), se tiene que $\psi\left(x\right)$ es el único elemento de Y tal que

$$0 = \langle \nabla G_x(\psi\left(x\right)), y \rangle = \langle \nabla G(x + \psi\left(x\right)), y \rangle \qquad \forall y \in Y, \tag{3.4}$$

con lo cual se prueba (iii).

Demostremos ahora que ψ es continua. Supongamos por contradicción que $\psi : X \to Y$ no es continua. Por lo tanto existen $x_1 \in X$, $\delta > 0$ y $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset X$ tales que

$$x_n \to x_1 \text{ en } X \qquad \text{y} \qquad \|\psi\left(x_n\right) - \psi\left(x_1\right)\| \geq \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Claramente $x_n + \psi\left(x_1\right) \to x_1 + \psi\left(x_1\right)$ en H, y como $G \in C^1\left(H, \mathbb{R}\right)$, entonces

$$\nabla G(x_n + \psi\left(x_1\right)) \to \nabla G(x_1 + \psi\left(x_1\right)) \text{ en } H. \tag{3.6}$$

Sean $P : H \to Y \subset H$ la proyección de H sobre Y y $P^* : H \to H$ el operador adjunto de P. Recordemos que

$$\langle Px, y \rangle = \langle x, P^* y \rangle \qquad \forall x, y \in H.$$

Sean $u \in X$ y $v \in H$. Como $H = X \oplus Y$ existen $x \in X$ y $y \in Y$ tales que $v = x + y$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle P^*\nabla G(u+\psi(u)), v\rangle &= \langle P^*\nabla G(u+\psi(u)), x\rangle + \langle P^*\nabla G(u+\psi(u)), y\rangle \\ &= \langle \nabla G(u+\psi(u)), Px\rangle + \langle \nabla G(u+\psi(u)), Py\rangle = 0. \end{aligned}$$

En esta última expresión hemos usado (3.4). Se tiene entonces que

$$P^*\nabla G(x+\psi(x)) = 0 \qquad \forall x \in X.$$

Volviendo a (3.6) y como $P^* : H \to H$ es continuo, se sigue que

$$P^*\nabla G(x_n+\psi(x_1)) \to P^*\nabla G(x_1+\psi(x_1)) = 0 \text{ en } H.$$

Por lo tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|P^*\nabla G(x_{n_0}+\psi(x_1))\| < m\delta. \tag{3.7}$$

De otra parte, por (3.3), se tiene que

$$\langle \nabla G(x_{n_0}+\psi(x_{n_0})) - \nabla G(x_{n_0}+\psi(x_1)), \psi(x_{n_0}) - \psi(x_1)\rangle \geq m\|\psi(x_{n_0}) - \psi(x_1)\|^2.$$

Pero como $\psi(x_{n_0}) - \psi(x_1) \in Y$, entonces $P(\psi(x_{n_0}) - \psi(x_1)) = \psi(x_{n_0}) - \psi(x_1)$. Además, por (3.4), se tiene que $\langle \nabla G(x_{n_0}+\psi(x_{n_0})), \psi(x_{n_0}) - \psi(x_1)\rangle = 0$, por lo tanto

$$\langle -\nabla G(x_{n_0}+\psi(x_1)), P(\psi(x_{n_0}) - \psi(x_1))\rangle \geq m\|\psi(x_{n_0}) - \psi(x_1)\|^2.$$

Así

$$\langle -P^*\nabla G(x_{n_0}+\psi(x_1)), \psi(x_{n_0}) - \psi(x_1)\rangle \geq m\|\psi(x_{n_0}) - \psi(x_1)\|^2.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sabe que

$$\langle -P^*\nabla G(x_{n_0}+\psi(x_1)), \psi(x_{n_0}) - \psi(x_1)\rangle \leq \|-P^*\nabla G(x_{n_0}+\psi(x_1))\|\,\|\psi(x_{n_0}) - \psi(x_1)\|.$$

De las dos desigualdades anteriores se sigue que

$$\left\| P^{*}\nabla G\left(x_{n_0}+\psi\left(x_1\right)\right)\right\| \left\|\psi\left(x_{n_0}\right)-\psi\left(x_1\right)\right\| \geq m\left\|\psi\left(x_{n_0}\right)-\psi\left(x_1\right)\right\|^{2}.$$

Usando (3.5) y la desigualdad anterior se tiene

$$\begin{aligned}\left\| P^{*}\nabla G\left(x_{n_0}+\psi\left(x_1\right)\right)\right\| &\geq m\left\|\psi\left(x_{n_0}\right)-\psi\left(x_1\right)\right\| \\ &\geq m\delta,\end{aligned}$$

lo cual contradice (3.7). Por lo tanto ψ es una función continua. De esta manera queda demostado (i).

Consideremos ahora el funcional

$$\begin{aligned}\widehat{G}:X &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \widehat{G}(x)=G\left(x+\psi(x)\right).\end{aligned}$$

Sean $x,h\in X$ y $\varepsilon>0$. Por el Lema de Hadamard se tiene que

$$G\left(x+\psi\left(x\right)+\varepsilon h\right)-G\left(x+\psi\left(x\right)\right)=\int_0^1\left\langle \nabla G\left(x+\psi\left(x\right)+s\varepsilon h\right),\varepsilon h\right\rangle ds. \tag{3.8}$$

Teniendo en cuenta que $\psi\left(x\right)$ es el mínimo de $G_x:Y\to\mathbb{R}$ y la expresión (3.8), estimemos el siguiente cociente de diferencias

$$\begin{aligned}\frac{\widehat{G}\left(x+\varepsilon h\right)-\widehat{G}\left(x\right)}{\varepsilon} &= \frac{G\left(x+\varepsilon h+\psi(x+\varepsilon h)\right)-G\left(x+\psi(x)\right)}{\varepsilon}\\ &\leq \frac{G\left(x+\varepsilon h+\psi(x)\right)-G\left(x+\psi(x)\right)}{\varepsilon}\\ &= \int_0^1\left\langle \nabla G\left(x+\psi\left(x\right)+s\varepsilon h\right),h\right\rangle ds. \end{aligned}\tag{3.9}$$

Como G es $C^1(H,\mathbb{R})$, de (3.9) y el Lema de Fatou (ver Fleming [8], p. 230-232) se sigue que

$$\begin{aligned}
\limsup_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\widehat{G}(x+\varepsilon h)-\widehat{G}(x)}{\varepsilon} &\leq \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^1 \langle \nabla G(x+\psi(x)+s\varepsilon h), h\rangle\, ds \\
&\leq \int_0^1 \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \langle \nabla G(x+\psi(x)+s\varepsilon h), h\rangle\, ds \\
&= \int_0^1 \langle \nabla G(x+\psi(x)), h\rangle\, ds \\
&= \langle \nabla G(x+\psi(x)), h\rangle. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la función $\psi : X \to Y$ es continua y con justificaciones similares a las anteriores se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{\widehat{G}(x+\varepsilon h)-\widehat{G}(x)}{\varepsilon} &= \frac{G(x+\varepsilon h+\psi(x+\varepsilon h))-G(x+\psi(x))}{\varepsilon} \\
&\geq \frac{G(x+\varepsilon h+\psi(x+\varepsilon h))-G(x+\psi(x+\varepsilon h))}{\varepsilon} \\
&= \int_0^1 \langle \nabla G(x+\psi(x+\varepsilon h)+s\varepsilon h), h\rangle\, ds
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\liminf_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\widehat{G}(x+\varepsilon h)-\widehat{G}(x)}{\varepsilon} &\geq \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^1 \langle \nabla G(x+\psi(x+\varepsilon h)+s\varepsilon h), h\rangle\, ds \\
&\geq \int_0^1 \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \langle \nabla G(x+\psi(x+\varepsilon h)+s\varepsilon h), h\rangle\, ds \\
&= \int_0^1 \langle \nabla G(x+\psi(x)), h\rangle\, ds \\
&= \langle \nabla G(x+\psi(x)), h\rangle. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

De (3.10) y (3.11) se tiene que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\widehat{G}(x+\varepsilon h)-\widehat{G}(x)}{\varepsilon} = \langle \nabla G(x+\psi(x)), h\rangle \qquad \forall x, h \in X. \qquad (3.12)$$

De manera análoga se demuestra que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{\widehat{G}(x+\varepsilon h)-\widehat{G}(x)}{\varepsilon} = \langle \nabla G(x+\psi(x)), h\rangle \qquad \forall x, h \in X. \qquad (3.13)$$

De (3.12) y (3.13) se sigue que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\widehat{G}\left(x+\varepsilon h\right)-\widehat{G}\left(x\right)}{\varepsilon}=\left\langle \nabla G\left(x+\psi\left(x\right)\right),h\right\rangle \qquad \forall x,h\in X. \tag{3.14}$$

De (3.14), por la continuidad del producto interno y sabiendo que la función $\psi : X \to Y$ es continua y que G es $C^1\left(H,\mathbb{R}\right)$, se tiene que $\widehat{G}$ posee derivada de Gateaux continua. Por lo tanto $\widehat{G}$ es Fréchet diferenciable, $\widehat{G}\in C^1\left(X,\mathbb{R}\right)$ y

$$\left\langle \nabla\widehat{G}(x),h\right\rangle = \langle \nabla G(x+\psi(x)),h\rangle \quad \forall x,h\in X. \tag{3.15}$$

Con lo cual se demuestra (ii). Se concluye así la prueba del teorema. ■

A continuación se presenta un corolario del teorema anterior que se usa para conseguir puntos críticos de funcionales de tipo "maxmin". Este corolario lo usaremos frecuentemente en las aplicaciones en la Sección 3.2.

Corolario 3.1.3 *Supongamos las mismas hipótesis del Teorema 3.1.2, y sea $\widehat{G} : X \to \mathbb{R}$ como en dicho teorema. Supongamos, además, que*

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} G\left(x\right) = -\infty \qquad \left(x\in X\right). \tag{3.16}$$

Si $-\widehat{G} : X \to \mathbb{R}$ es débilmente inferiormente semicontinuo entonces existe $u_0 \in H$ tal que $\nabla G(u_0) = 0$ y

$$G(u_0) = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} G(x+y).$$

Prueba. En esta demostración utilizaremos las mismas definiciones y notaciones de la prueba del Teorema 3.1.2. Sabemos que la función $\psi : X \to Y$ es continua y que $\widehat{G}\in C^1\left(X,\mathbb{R}\right)$. Teniendo en cuenta que $\psi\left(x\right)$ es el mínimo de $G_x : Y \to \mathbb{R}$, se sigue que

$$-\widehat{G}\left(x\right) = -G\left(x+\psi(x)\right) \geq -G\left(x\right) \qquad \forall x\in X.$$

Por lo tanto

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} -\widehat{G}(x) = +\infty \qquad (x \in X).$$

Se tiene entonces que $-\widehat{G} : X \to \mathbb{R}$ es débilmente inferiormente semicontinua y coerciva. Además X es un espacio de Banach reflexivo, por ser un espacio de Hilbert. Por el Teorema 1.1.4 se sigue que existe $x_0 \in X$ tal que

$$\left(-\widehat{G}\right)(x_0) = \min_{x\in X} \left(-\widehat{G}\right)(x)$$

o equivalentemente

$$\widehat{G}(x_0) = \max_{x\in X} \widehat{G}(x). \tag{3.17}$$

Como $\widehat{G} \in C^1(X, \mathbb{R})$, se sigue que

$$\left\langle \nabla\widehat{G}(x_0), x \right\rangle = 0 \qquad \forall x \in X. \tag{3.18}$$

Por otro lado se sabe que $\widehat{G}(x) = G(x + \psi(x)) = \min_{y\in Y} G(x+y)$. De (3.17) se tiene

$$G(x_0 + \psi(x_0)) = \max_{x\in X} \min_{y\in Y} G(x+y). \tag{3.19}$$

Sea $u \in H$. Como $H = X \oplus Y$, existen $x \in X$ y $y \in Y$ tales que $u = x + y$. Usando (ii) del Teorema 3.1.2, (3.4) y (3.18) se sigue que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla G(x_0 + \psi(x_0)), u\rangle &= \langle \nabla G(x_0 + \psi(x_0)), x\rangle + \langle \nabla G(x_0 + \psi(x_0)), y\rangle \\
&= \left\langle \nabla\widehat{G}(x_0), x \right\rangle + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $u_0 := x_0 + \psi(x_0) \in H$ es tal que $\nabla G(u_0) = 0$ y

$$G(u_0) = \max_{x\in X} \min_{y\in Y} G(x+y),$$

con lo cual se concluye la prueba del corolario. ■

3.2 Aplicaciones a Problemas Elípticos Semilineales

En esta sección se presentan algunas aplicaciones del método de reducción a la existencia de soluciones débiles para problemas de Dirichlet no lineales.

En toda esta sección consideraremos el funcional

$$\begin{array}{rcl} J : H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(u)\,, \end{array}$$

donde $F(s) = \int_0^s f(\tau)\, d\tau$. Este funcional está asociado al problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.20}$$

Sea $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ..... \leq \lambda_k \leq ....$ la sucesión de valores propios y $\{\phi_i\}_{i=1}^{+\infty}$ la sucesión de funciones propias de $-\Delta$ con condición de Dirichlet cero en la frontera.

Teorema 3.2.1 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes condiciones:*

i) f es Lipschitz, con constante de Lipschitz α tal que $0 < \alpha < \lambda_{k+1}$, donde k es algún entero positivo.

ii) Existen constantes β y γ, con $\beta > \lambda_k$, tales que

$$F(s) \geq \frac{\beta}{2} s^2 + \gamma \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.21}$$

Entonces el problema de Dirichlet (3.20) posee al menos una solución débil en $H_0^1(\Omega)$.

Prueba. Sean $X = gen\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k\}$ y $Y = gen\left\{\phi_{k+1}, \phi_{k+2}, ...\right\}$. Del Teorema 1.1.7 sabemos que X y Y son subespacios cerrados de $H_0^1(\Omega)$ y que $H_0^1(\Omega) = X \oplus Y$.

De las hipótesis se tiene que

$$|f(s) - f(t)| \leq \alpha |s - t| \qquad \forall s, t \in \mathbb{R}. \tag{3.22}$$

De (3.22) se sigue que f es continua en $\mathbb{R}$. De (3.22) también se tiene que

$$|f(s)| - |f(0)| \leq |f(s) - f(0)| \leq \alpha |s - 0| .$$

De donde

$$|f(s)| \leq \alpha |s| + |f(0)| ,$$

es decir, (2.1) se satisface con $p = 2$. Por lo tanto, según el Teorema 1.1.9, el funcional $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ está bien definido, $J \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$, J es débilmente inferiormente semicontinuo y para $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\langle \nabla J(u), v \rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u . \nabla v - \int_\Omega f(u) v \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) .$$

Sean $x \in X$ y $y_1, y_2 \in Y$. Usando la igualdad anterior se sigue que

$$\begin{aligned} \langle \nabla J(x+y_1) - \nabla J(x+y_2), y_1 - y_2 \rangle_{H_0^1} &= \int_\Omega \left[\nabla(x+y_1).\nabla(y_1-y_2) - \nabla(x+y_2).\nabla(y_1-y_2) \right] \\ &\quad - \int_\Omega \left[f(x+y_1)(y_1-y_2) - f(x+y_2)(y_1-y_2) \right] \\ &= \int_\Omega \nabla(y_1-y_2).\nabla(y_1-y_2) \\ &\quad - \int_\Omega \left[f(x+y_1) - f(x+y_2) \right](y_1-y_2) . \end{aligned}$$

Usando (3.22) se tiene

$$f(x+y_1) - f(x+y_2) \leq \alpha |y_1 - y_2| .$$

Así

$$\begin{aligned} \langle \nabla J(x+y_1) - \nabla J(x+y_2), y_1 - y_2 \rangle_{H_0^1} &\geq \|y_1-y_2\|_{H_0^1}^2 - \alpha \int_\Omega |y_1-y_2|(y_1-y_2) \\ &= \|y_1-y_2\|_{H_0^1}^2 - \alpha \int_\Omega (y_1-y_2)^2 . \end{aligned}$$

Del Teorema 1.1.7 se tiene que

$$\|y\|_{H_0^1}^2 \geq \lambda_{k+1} \int_\Omega y^2 \qquad \forall y \in Y.$$

Por lo tanto

$$\langle \nabla J(x+y_1) - \nabla J(x+y_2), y_1 - y_2 \rangle_{H_0^1} \geq \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_{k+1}}\right) \|y_1 - y_2\|^2_{H_0^1} \qquad \forall x \in X, \quad \forall y_1, y_2 \in Y.$$

Luego la hipótesis (3.3) del Teorema 3.1.2 se satisface con $m := 1 - \alpha/\lambda_{k+1} > 0$.

Sea $x \in X$. Usando (3.21) se tiene

$$\begin{aligned} J(x) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla x|^2 - \int_\Omega F(x) \\ &\leq \frac{1}{2}\|x\|^2_{H_0^1} - \frac{\beta}{2}\int_\Omega x^2 - \int_\Omega \gamma. \end{aligned}$$

Del Teorema 1.1.7 se tiene que $\|x\|^2_{H_0^1} \leq \lambda_k \int_\Omega x^2$. Luego

$$J(x) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\lambda_k}\right)\|x\|^2_{H_0^1} - \gamma|\Omega| \qquad \forall x \in X.$$

Por lo tanto

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} J(x) = -\infty \qquad (x \in X),$$

ya que $\beta > \lambda_k$.

Por otra parte, sea $\widehat{J} : X \to \mathbb{R}$ el funcional definido en el Teorema 3.1.2. Por este teorema $\widehat{J}$ es continuo y por lo tanto es inferiormente semicontinuo. Como $\dim X < +\infty$, entonces $\widehat{J} : X \to \mathbb{R}$ es débilmente inferiormente semicontinuo (ver Teorema 1.1.5) y por consiguiente -$\widehat{J} : X \to \mathbb{R}$ también lo es. Luego, por el Corolario 3.1.3, existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\nabla J(u_0) = 0$ y

$$J(u_0) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} J(x+y).$$

Por lo tanto u_0 es un punto crítico del funcional J y por consiguiente una solución débil del problema (3.20). ■

Teorema 3.2.2 (*A. Castro y J. Cossio [5]*) *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable que satisface las siguientes condiciones:*

i) Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$f'(+\infty) := \lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{s} \in (\lambda_k, \lambda_{k+1}) \quad y$$
$$f'(-\infty) := \lim_{s \to -\infty} \frac{f(s)}{s} \in (\lambda_k, \lambda_{k+1}).$$

ii) Existe una constante α tal que

$$f'(s) \leq \alpha < \lambda_{k+1} \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.23}$$

Entonces el problema de Dirichlet (3.20) posee al menos una solución débil en $H_0^1(\Omega)$.

Prueba. Sean $X = gen\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k\}$ y $Y = gen\{\phi_{k+1}, \phi_{k+2}, ...\}$. Del Teorema 1.1.7 sabemos que X y Y son subespacios cerrados de $H_0^1(\Omega)$ y que $H_0^1(\Omega) = X \oplus Y$

Como $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $f'(-\infty), f'(+\infty) \in \mathbb{R}$, existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que

$$|f(s)| \leq c_1 |s| + c_2 \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Es decir, (2.1) se satisface con $p = 2$. Por lo tanto, según el Teorema 1.1.9, el funcional $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ está bien definido, $J \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$, J es débilmente inferiormente semicontinuo y para $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\langle \nabla J(u), v \rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u . \nabla v - \int_\Omega f(u) v \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Sean $x \in X$ y $y_1, y_2 \in Y$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle \nabla J(x+y_1) - \nabla J(x+y_2), y_1 - y_2 \rangle_{H_0^1} &= \int_\Omega [\nabla(x+y_1).\nabla(y_1-y_2) - \nabla(x+y_2).\nabla(y_1-y_2)] \\ &\quad - \int_\Omega [f(x+y_1)(y_1-y_2) - f(x+y_2)(y_1-y_2)] \\ &= \int_\Omega \nabla(y_1-y_2).\nabla(y_1-y_2) \\ &\quad - \int_\Omega [f(x+y_1) - f(x+y_2)](y_1-y_2). \end{aligned}$$

Usando (3.23) y el Teorema del Valor Medio se sigue

$$\begin{aligned}
\langle \nabla J(x+y_1) - \nabla J(x+y_2), y_1 - y_2 \rangle_{H_0^1} &= \|y_1 - y_2\|_{H_0^1}^2 - \int_\Omega f'(\xi)(y_1 - y_2)^2 \\
&\geq \|y_1 - y_2\|_{H_0^1}^2 - \alpha \int_\Omega (y_1 - y_2)^2 .
\end{aligned}$$

Del Teorema 1.1.7 se tiene que $\|y\|_{H_0^1}^2 \geq \lambda_{k+1} \int_\Omega y^2 \quad \forall y \in Y$. Luego

$$\langle \nabla J(x+y_1) - \nabla J(x+y_2), y_1 - y_2 \rangle_{H_0^1} \geq \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_{k+1}}\right) \|y_1 - y_2\|_{H_0^1}^2 \qquad \forall x \in X, \quad \forall y_1, y_2 \in Y.$$

Por lo tanto la hipótesis (3.3) del Teorema 3.1.2 se satisface con $m := 1 - \alpha/\lambda_{k+1} > 0$.

Por otro lado, como $f'(-\infty), f'(+\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$, se prueba fácilmente que existen constantes $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\beta > \lambda_k$ tales que

$$F(s) \geq \frac{\beta}{2} s^2 + \gamma \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Sea $x \in X$. De la expresión anterior se sigue que

$$\begin{aligned}
J(x) &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla x|^2 - \int_\Omega F(x) \\
&\leq \frac{1}{2} \|x\|_{H_0^1}^2 - \frac{\beta}{2} \int_\Omega x^2 - \int_\Omega \gamma.
\end{aligned}$$

Del Teorema 1.1.7 se tiene que $\|x\|_{H_0^1}^2 \leq \lambda_k \int_\Omega x^2$. Luego

$$J(x) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\lambda_k}\right) \|x\|_{H_0^1}^2 - \gamma |\Omega| \qquad \forall x \in X.$$

Por lo tanto

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} J(x) = -\infty \qquad (x \in X),$$

ya que $\beta > \lambda_k$.

Por otra parte, sea $\widehat{J} : X \to \mathbb{R}$ el funcional definido en el Teorema 3.1.2. Por este teorema $\widehat{J}$ es continuo y por lo tanto es inferiormente semicontinuo. Como $\dim X < +\infty$, entonces $\widehat{J} : X \to \mathbb{R}$ es débilmente inferiormente semicontinuo (ver Teorema 1.1.5) y por consiguiente

-$\widehat{J} : X \to \mathbb{R}$ también lo es. Luego, por el Corolario 3.1.3, existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\nabla J(u_0) = 0$ y

$$J(u_0) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} J(x + y).$$

Por lo tanto u_0 es un punto crítico del funcional J y por consiguiente una solución débil del problema (3.20). ■

Bibliografía

[1] A. Ambrosetti and G. Prodi, A Primer Nonlinear Analysis, Cambridge University Press, 1993.

[2] H. Brézis, Análisis Funcional, Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.

[3] A. Castro, Métodos de Reducción Via Minimax, Primer Simposio Colombiano de Análisis Funcional, Medellín, 1981.

[4] A. Castro, Métodos Variacionales y Análisis Funcional no Lineal, X Coloquio Colombiano de Matemáticas, Paipa, Colombia, 1980.

[5] A. Castro and J. Cossio, Multiple Solutions for a Nonlinear Dirichlet Problem, SIAM J. Math. Anal. **25** (1994), 1554-1561.

[6] D. G. De Figueiredo, The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1989.

[7] D. G. De Figueiredo, Positive Solutions of Semilinear Elliptic Problems, Lecture Notes in Mathematics, Differential Equations, Proceedings (São Paulo), Springer-Verlag, 1981.

[8] W. Fleming, Functions of Several Variables, Springer-Verlag, New York, 1977.

[9] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley and Sons, New York, 1978.

[10] D. Mitrović and D. Žubrinić, Fundamentals of Applied Functional Analysis, Pitman Monographs and Survey in Pure and Applied Mathematics, 1991.

[11] J. Mawhin, J. R. Ward Jr. and M. Willem, Variational Methods and Semilinear Elliptic Equations, Sem. Math. Louvain, Rap. 32 (1983).

[12] P. H. Rabinowitz, Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations, Regional Conference Series in Mathematics, number 65, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1986.

[13] H. L. Royden, Real Analysis, Collier Macmillan, New York, 1968.