Una familia de funciones meromorfas definida a partir de un criterio de Nehari.

por

Hugo Javier Arbeláez Pulgarín

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al Título de

Magister en Matemáticas

Director: Diego Mejía Duque

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Septiembre 2004

Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por COLCIENCIAS,

Código 1118-05-13-633.

Y realizado en medio del proyecto DIME código Quipú 20101004430.

Resumen

En la primera parte de este trabajo se estudian las familias de Nehari introducidas por Martín Chuaqui, y un teorema de acotamiento, establecido por este, para las funciones en dichas familias. En la segunda parte se definen una nuevas familias de funciones, con base en un criterio de Nehari diferente, y se establece un nuevo teorema de acotamiento para las funciones en esta familia; por último se derivan algunas consecuencias de este teorema.

Contenido

Una Familia de Funciones Meromorfas Definidas a partir de un Criterio de Nehari

Hugo Javier Arbeláez Pulgarín

APROBADO:

——————————

Diego Mejía Duque

Director.

——————————

Margarita Toro Villegas

Jurado.

——————————

Carlos Mario Parra Londoño

Jurado.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mis padres y hermanos por su constante e incondicional apoyo. Al profesor Diego Mejía por su orientación y enseñanzas, a partir de las cuales fue posible la realización de este trabajo. A los profesores Margarita Toro y Carlos Parra jurados de este trabajo. A todos los profesores que de una u otra forma contribuyeron a mi formación profesional; así como a los compañeros y amigos que han estado a mi lado durante la realización del posgrado.

Introducción

Sea D un dominio en el plano complejo $\mathbb{C}$ y sea $f : D \to \mathbb{C}$ una función meromorfa localmente inyectiva. Definamos un mapeo $S_f : D \to \mathbb{C}$ tal que para todo $z \in D$

$$S_f(z) = \left(\frac{f''}{f'}\right)'(z) - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2(z).$$

A S_f se le llama *la derivada Schwarziana de* f. Puesto que f es localmente inyectiva en D, se tiene que $f'(z) \neq 0$ para todo z en D y así, S_f es analítica.

En 1949 Nehari [11] mostró que si f es una función analítica en el disco unidad $\mathbb{D}$, y su derivada Schwarziana satisface la condición

$$|S_f(z)| \leq \frac{2}{\left(1 - |z|^2\right)^2}, \tag{1}$$

entonces f es univalente en $\mathbb{D}$. Además, fué probado por Ahlfors y Weill en [1], que si se tiene

$$|S_f(z)| \leq \frac{2t}{\left(1 - |z|^2\right)^2}, \qquad 0 \leq t < 1, \tag{2}$$

entonces, no solamente f es univalente en $\mathbb{D}$, sino que ésta tiene una extensión cuasiconforme al plano. Por otro lado según Krauss [7], una condición necesaria para univalencia se obtiene remplazando por 6 el 2 en el numerador de (1).

Utilizando las propiedades de la derivada Schwarziana puede demostrarse que las desigualdades en (1) y (2) son independientes de cualquier normalización para f. En particular, f puede ser normalizada en la forma $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $f''(0) = 0$. Se definen las *familias de Nehari,* N_o y N_o^t, $0 \leq t < 1$, como el conjunto de las funciones meromorfas con la anterior normalización y que satisfacen (1) ó (2), respectivamente. M. Chuaqui y B. Osgood en su artículo *Sharp Distortion Theorems Associated with the Schwarzian Derivative,* [2], obtienen cotas inferiores y superiores, explícitas y precisas, para $|f|$ y $|f'|$, en donde $f \in N_o$, N_o^t. Además, derivan algunas consecuencias importantes de este resultado.

Nehari [11] también probó que si f es analítica en $\mathbb{D}$, la condición

$$|S_f(z)| \leq \frac{\pi^2}{2}, \tag{3}$$

es suficiente para que f sea univalente en $\mathbb{D}$. De acuerdo a [5], si se tiene que

$$|S_f(z)| \leq t\frac{\pi^2}{2}, \qquad 0 \leq t < 1, \tag{4}$$

entonces, f tiene una extensión cuasiconforme al plano.

Con base en esto definimos una nueva familia de funciones, $\mathcal{F}_0^t$, $0 \leq t < 1$, como el conjunto de funciones meromorfas localmente inyectivas en $\mathbb{D}$ con la normalización anterior y que satisfacen (4). Además, usando las mismas ideas de Chuaqui y Osgood, mostramos un nuevo teorema en el cual se establecen cotas inferiores y superiores, explícitas y precisas, para $|f|$ y $|f'|$, cuando f está en $\mathcal{F}_0^t$, $0 \leq t < 1$, y derivamos algunas consecuencias curiosas e importantes a partir de dicho teorema, tales como el hecho de que una función $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ analítica y localmente univalente en $\mathbb{D}$, la cual satisface (3) no puede asumir el valor $-a_2^{-1}$ en $\mathbb{D}$.

Cabe resaltar que la familia $\mathcal{F}_0^t$, $0 \leq t < 1$, y el nuevo teorema son originales y, surgen de una idea dada por Chuaqui y Osgood al final del su artículo [2].

Capítulo 1

Preliminares

En este trabajo utilizaremos las siguientes notaciones: $\mathbb{C}$ denota al plano complejo; $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ es el disco unitario del plano complejo; con $M\ddot{o}b$ denotamos el conjunto de las transformaciones de Möbius, es decir, el conjunto de las funciones $T : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde $ad - bc \neq 0$.

1.1 La derivada Schwarziana

En esta sección definimos el operador derivada Schwarziana y presentamos algunas de sus propiedades más importantes, en las cuales vemos su estrecha relación con las transformaciones de Möbius.

Definición 1.1.1 *Sean $D \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f : D \to \mathbb{C}$ una función analítica localmente inyectiva. El mapeo $S_f : D \to \mathbb{C}$ definido por*

$$S_f(z) = \left(\frac{f''}{f'}\right)'(z) - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2(z), \quad z \in D, \tag{1.1}$$

se llama la derivada Schwarziana de f.

Puesto que f es localmente inyectiva, se tiene que $f'(z) \neq 0$ y así, S_f es analítica en D.

A continuación enunciamos algunas de las propiedades más importantes de la derivada Schwarziana.

Sea $f : D \to \mathbb{C}$ como antes, entonces $S_f = 0$ si y sólo si f es una transformación de Möbius.

Si $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D$, se sigue de (1.1) que

$$S_f(z) = S_{\frac{1}{f}}(z). \tag{1.2}$$

Usando (1.2) podemos definir S_f cuando f es meromorfa localmente inyectiva en D. Si f tiene un polo en z_0, entonces este polo es simple y, por lo tanto, $\frac{1}{f}$ es analítica en z_0. Además, cerca de z_0, $S_f(z) = S_{\frac{1}{f}}(z)$, luego

$$\lim_{z \to z_0} S_f(z) = \lim_{z \to z_0} S_{\frac{1}{f}}(z) = S_{\frac{1}{f}}(z_0).$$

Por consiguiente definimos $S_f(z_0) = S_{\frac{1}{f}}(z_0)$. De esta manera S_f resulta ser analítica en z_0.
Regla de la cadena: Sea g una función meromorfa localmente inyectiva en $f(D)$. La siguiente igualdad se cumple en todo punto $z \in D$ donde f es analítica

$$S_{g \circ f}(z) = (S_g(z) \circ f(z))(f'(z))^2 + S_f(z).$$

Observamos que si f es una transformación de Möbius entonces $S_f(z) = 0$, con lo cual

$$S_{g \circ f}(z) = (S_g(z) \circ f(z))(f'(z))^2.$$

Otra propiedad importante de la derivada Schwarziana es la siguiente

Proposición 1.1.1 *Sean f y g funciones meromorfas localmente inyectivas definidas en un dominio D. Entonces $S_g = S_f$ en D si y sólo si $g = T \circ f$ en D, donde $T \in Möb$.*
(Ver [9], pág. 54).

Un estudio más detallado de la derivada Schwarziana se encuentra en [9].

1.2 Resultados generales

En esta parte citamos algunos resultados generales del analísis complejo, los cuales se usarán en el desarrollo del trabajo. Además, probamos algunos lemas los cuales no aparecen en los textos de analísis complejo.

Teorema 1.2.1 *Si f es una función meromorfa en un conjunto abierto U, entonces existen funciones analíticas g y h en U tal que $f = g/h$. (Ver [3], pág. 173)*

Teorema 1.2.2 *(Principio de identidad) Si las funciones f y g son anaíticas en un dominio D y si $f(z) = g(z)$ para todo z en algún subconjunto A de D que tiene un punto límite en D, entonces $f(z) = g(z)$ para todo z en D. (Ver [12], pág. 307)*

Lema 1.2.3 *Sea f una función analítica y localmente inyectiva en $\mathbb{D}$, $f(0) = 0$. Supongamos que el mínimo de $|f|$ sobre el círculo $|z| = r < 1$ es asumido en un punto z_1. Sea I el segmento que une 0 con $\zeta_1 = f(z_1)$. Entonces existe una trayectoria J en el disco $|z| \leq r$ que une 0 con z_1 tal que $I = f(J)$.*

Prueba. Denotemos por D_r el disco $|z| \leq r < 1$ y por C_r su frontera. Primero que todo mostremos que $I \subset f(D_r)$. En efecto, dado que $f(0) = 0$ y que ζ_1 está en la frontera de $f(D_r)$, es suficiente probar que si $w \in \partial f(C_r)$ entonces $w = f(z)$ para algún $z \in C_r$. Sea $w \in \partial f(C_r)$ entonces existe una sucesión $\{w_n\}$ en $f(D_r)$ la cual converge a w. Consideremos la sucesión $\{z_n\} = \left\{f^{-1}(w_n)\right\}$, dado que D_r es compacto entonces $\{z_n\}$ tiene una subsucesión convergente la cual tiene que converger a un punto $z \in C_r$, dado que f es una función abierta; de lo cual se sigue la afirmación. Ahora, vamos a construir a J de manera recursiva.

Sean D_0 el disco de radio mayor tal que f es univalente en D_0 y $G_0 = f(D_0)$, es claro que G_0 resulta ser simplemente conexo y que $0 \in G_0$. Luego, existe $w_1 \in I$ tal que el segmento $I_0 = [0, w_1] \subset G_0$ es igual a $f(J_0)$ con J_0 una curva en D_0 la cual tiene punto inicial 0. Denotemos por v_1 el punto final de J_0 y por D_1 el disco más grande alrededor de v_1 en el cual f es univalente. Sea J_1 una curva con punto inicial v_1 tal que $J_1 \subset D_1$ entonces, por la forma en la que se escogió D_1, existe $w_2 \in I$ tal que el segmento $I_1 = [w_1, w_2]$ está contenido en $G_1 = f(D_1)$ y además, $J_1 = f(I_1)$. Podemos hacer este proceso un número finito de pasos y construir $J = J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_k$; de tal manera que $f(J) = I$. Supongamos que el proceso no fuera finito, entonces la sucesión de puntos, $\{w_i\}$, escogidos en I tiene un punto de acumulación, y por lo tanto, la sucesión $\{v_i\}$ tiene un punto de acumulación, con lo cual, en el límite el radio de univalencia local de f es cero lo cual no podría suceder. ■

Teorema 1.2.4 *Sean X un espacio métrico, Y un espacio métrico completo y A un subespacio denso de X. Si f es una función uniformemente continua de A en Y, entonces f puede ser extendida de forma única a una función uniformemente continua g de X en Y.*
(Ver [13], pág. 78)

Definición 1.2.1 *Sean z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$ y C una circunferencia que pasa por z_1 y z_2, e intercepta ortogonalmente la frontera de $\mathbb{D}$. Al arco de C entre z_1 y z_2 interior a $\mathbb{D}$ se le denomina el segmento hiperbólico que une z_1 con z_2.*

Lema 1.2.5 *Para z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$, sea Γ el segmento hiperbólico que une z_1 con z_2. Entonces Γ tiene longitud euclidiana $l \leq \frac{\pi}{2}|z_1 - z_2|$ y $\min\{s, l-s\} \leq \frac{\pi}{2}(1 - |\xi|)$ para cada ξ en Γ, donde s es la longitud de arco euclidiana de la parte de Γ entre z_1 y ξ.*

Prueba. De la figura 1 tenemos que $l = r\theta$, $\theta \in (0, \pi)$. Puesto que $\text{sen}(\frac{\theta}{2}) = \frac{1}{2}\frac{|z_1 - z_2|}{r}$, se sigue que $l = |z_1 - z_2| \frac{(\frac{\theta}{2})}{\text{sen}(\frac{\theta}{2})}$. Así, es suficiente probar que $\frac{x}{\text{sen}x} \leq \frac{\pi}{2}$, para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, esto es, $0 \leq \frac{\pi}{2}\text{sen}x - x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. La función $f(x) = \frac{\pi}{2}\text{sen}x - x$ verifica $f(0) = 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ y $f'(x) = 0$ para $x = \cos^{-1}(\frac{2}{\pi}) \approx 0.881$ y, en este valor, $f(x) \approx 0.331$. Se sigue que el mínimo ocurre en los extremos, lo cual concluye la prueba de la primera parte.

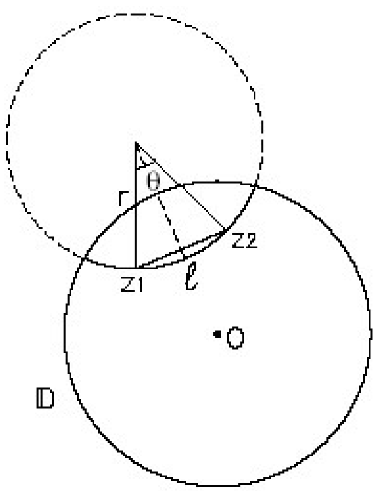

Figura 1

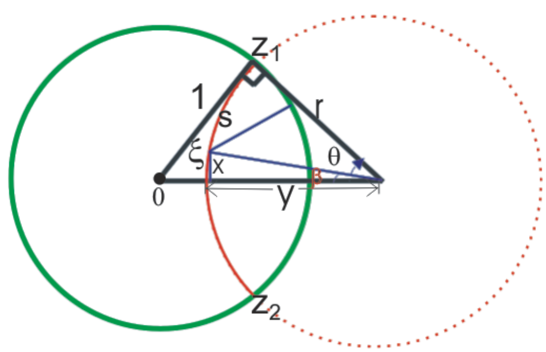

Figura 2

Para probar la segunda parte es suficiente suponer que z_1 y z_2 estan en los extremos de Γ y, por simetría, probar que $s \leq \frac{\pi}{2}(1 - |\xi|)$. Para esto consideramos la figura 2, de la cual se tiene que $s = r\theta$, $0 \leq \theta \leq \tan^{-1}(\frac{1}{r})$, es decir, nuestro propósito es mostrar que $r\theta \leq \frac{\pi}{2}(1 - |\xi|)$, o equivalentemente, que $|\xi|^2 \leq \left(1 - \frac{2r\theta}{\pi}\right)^2$, $0 \leq \theta \leq \tan^{-1}(\frac{1}{r})$. Se sigue de la gráfica que

$$\begin{aligned} |\xi|^2 &= x^2 + \left(\sqrt{1+r^2} - y\right)^2 = x^2 + 1 + r^2 - 2y\sqrt{1+r^2} + y^2 \\ &= 1 + 2r^2 - 2r\sqrt{1+r^2}\cos\beta = 1 + 2r^2 - 2r^2\cos\theta - 2r\mathrm{sen}\theta. \end{aligned}$$

Para ver que $\left(1 + 2r^2 - 2r^2\cos\theta - 2r\mathrm{sen}\theta\right) \leq \left(1 - \frac{2r\theta}{\pi}\right)^2$, $0 \leq \theta \leq \tan^{-1}(\frac{1}{r})$ empleamos un procedimiento gráfico ayudados por el programa Derive, el cual corrobora la afirmación. $\blacksquare$

Capítulo 2

Familias de Funciones a partir de Criterios de Nehari y Teoremas de Acotamiento

En 1949 Nehari, [11], mostró que si f es una función analítica en el disco unidad $\mathbb{D}$, y su derivada Schwarziana satisface la condición

$$|S_f(z)| \leq \frac{2}{\left(1 - |z|^2\right)^2} \tag{2.1}$$

entonces f es univalente en $\mathbb{D}$. En este mismo año Hille probó, [6], que la constante 2 es la mejor posible. Además, Ahlfors y Weill en [1] demostraron que si se tiene

$$|S_f(z)| \leq \frac{2t}{\left(1 - |z|^2\right)^2}, \qquad 0 \leq t < 1, \tag{2.2}$$

entonces, no solamente f es univalente en $\mathbb{D}$, sino que ésta tiene una extensión cuasiconforme al plano (Ver [8], pág. 96). Por otro lado, según Krauss [7], una condición necesaria para la univalencia de f se obtiene remplazando por 6 el 2 en el numerador de (2.1); Krauss también prueba que la constante 6 es la mejor posible.

Utilizando las propiedades de la derivada Schwarziana, puede demostrarse que las desigualdades en (2.1) y (2.2) son independientes de cualquier normalización para f. En particular, f puede ser normalizada en la forma $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $f''(0) = 0$. En efecto, sea g una función meromorfa localmente inyectiva definida en $\mathbb{D}$, la cual satisface (2.1) ó (2.2). Definimos la transformación de Möbius $\sigma(z) = \frac{z - g(0)}{g'(0)}$; claramente se tiene que $(\sigma \circ g)(0) = 0$ y $(\sigma \circ g)'(0) = 1$. De lo cual se sigue que $\sigma \circ g$ tiene una expansión alrededor del origen de la forma $(\sigma \circ g)(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$. Consideremos $\tau \in M\ddot{o}b$ con $\tau(z) = \frac{z}{1 + a_2 z}$, entonces definimos $f(z) = \frac{(\sigma \circ g)(z)}{1 + a_2 (\sigma \circ g)(z)}$, $z \in \mathbb{D}$. Por un cálculo directo verificamos que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y

$f''(0) = 0$. Y por la Proposición 1.0.1 se sigue que $S_f = S_g$ y por tanto f satisface (2.1) ó (2.2), según sea el caso; lo cual prueba la afirmación.

Se definen las *familias de Nehari,* $\mathcal{N}_o$ y $\mathcal{N}_o^t$, $0 \le t < 1$, como el conjunto de las funciones meromorfas con la anterior normalización y que satisfacen (2.1) ó (2.2), respectivamente.

Introducimos las siguientes funciones

$$n(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1+z)^{\sqrt{2}} - (1-z)^{\sqrt{2}}}{(1+z)^{\sqrt{2}} + (1-z)^{\sqrt{2}}}, \qquad N(z) = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}, \qquad z \in \mathbb{D} \tag{2.3}$$

y, para $0 \le t < 1$,

$$A_t(z) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \frac{(1+z)^{\sqrt{1-t}} - (1-z)^{\sqrt{1-t}}}{(1+z)^{\sqrt{1-t}} + (1-z)^{\sqrt{1-t}}} \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{2.4}$$

Estas funciones son analíticas en $\mathbb{D}$ y se verifíca fácilmente que tienen la normalización anterior. Sus derivadas Schwarzianas estan dadas por

$$S_n(z) = \frac{-2}{(1-z^2)^2}, \qquad S_N(z) = \frac{2}{(1-z^2)^2},$$

y

$$S_{A_t}(z) = \frac{2t}{(1-z^2)^2}.$$

Para la función A_{-t}, $0 \le t < 1$, la cual también necesitamos, se tiene $S_{A_{-t}}(z) = -S_{A_t}(z)$.

M. Chuaqui y B. Osgood en su artículo *Sharp Distortion Theorems Associated with the Schwarzian Derivative,* [2], obtuvieron cotas inferiores y superiores, explícitas y precisas, para $|f|$ y $|f'|$, en donde $f \in \mathcal{N}_o$, $\mathcal{N}_o^t$. Los valores exactos de las cotas los verifican las funciones definidas en (2.3) y (2.4). En este sentido, diremos que tales funciones son *extremales.*

2.1 Geometría de las funciones extremales

En esta sección veremos las propiedades de transformación de las funciones extremales mencionadas antes, es decir, veremos de una forma geométrica como mapean dichas funciones al disco unidad $\mathbb{D}$.

(i) $N(z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$, $z \in \mathbb{D}$.

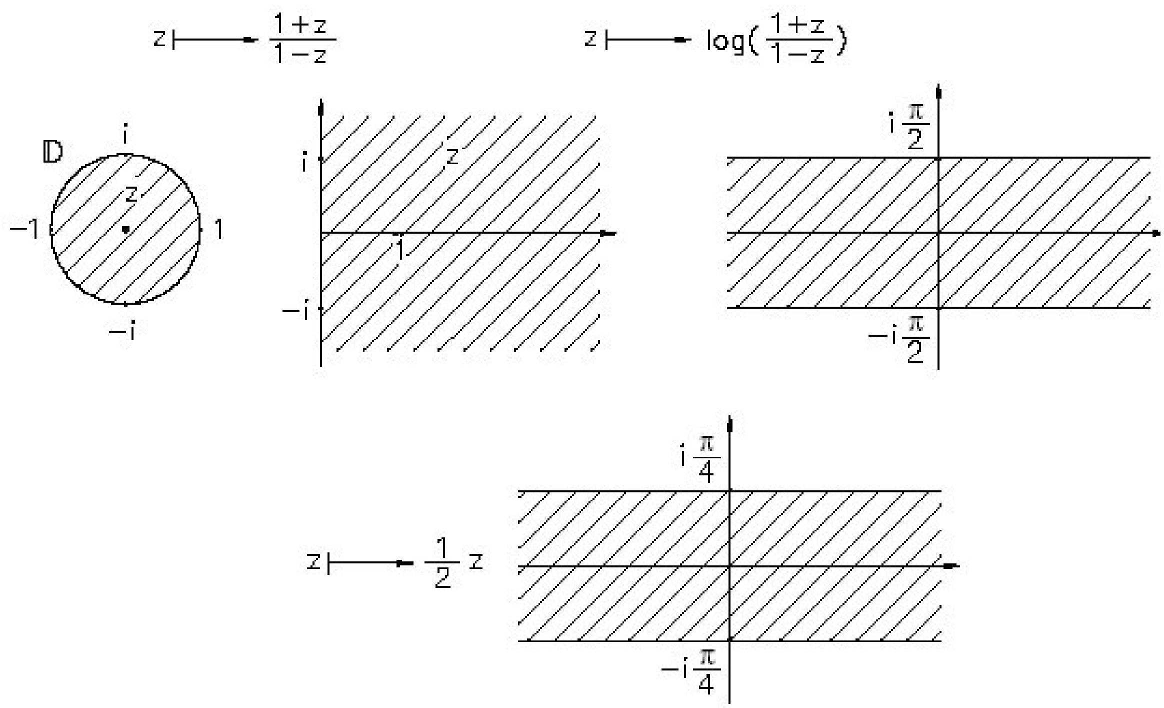

Figura 3

Se sigue que N mapea el disco unidad sobre la banda horizontal $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{4}$.

(ii) $n(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1+z)^{\sqrt{2}}-(1-z)^{\sqrt{2}}}{(1+z)^{\sqrt{2}}+(1-z)^{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\sqrt{2}}-1}{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\sqrt{2}}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\exp\left(\sqrt{2}\log\frac{1+z}{1-z}\right)-1}{\exp\left(\sqrt{2}\log\frac{1+z}{1-z}\right)+1}$, $z \in \mathbb{D}$.

Usando *(i)*, ya sabemos que $\log\frac{1+z}{1-z}$ mapea $\mathbb{D}$ en la banda horizontal $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}$. Por medio de transformaciones conformes (ver figura 4), se sigue que n mapea el disco unidad $\mathbb{D}$ en la unión de las regiones interiores a los círculos $\widetilde{C}_1$ y $\widetilde{C}_2$. Ahora hallemos las ecuaciones de $\widetilde{C}_1$ y $\widetilde{C}_2$. Primero observemos que los puntos de intersección, 0 e ∞, de las fronteras de los semiplanos determinados por l_1 y l_2, H_1 y H_2, respectivamente (ver figura 4), son enviados en -1 y 1, respectivamente, mediante la función $T(z) = \frac{z-1}{z+1}$.

Por otro lado la recta l_1 puede ser parametrizada en la forma $l_1(t) = te^{i\pi/\sqrt{2}}$, $t \in \mathbb{R}$. Con lo cual me queda

$$T\left(l_1(t)\right) = \frac{te^{i\pi/\sqrt{2}}-1}{te^{i\pi/\sqrt{2}}+1}.$$

Notemos que si $t=1$ entonces $k_1 := T\left(l_1(1)\right) = \frac{e^{i\pi/\sqrt{2}}-1}{e^{i\pi/\sqrt{2}}+1} = i\tan\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)$, y si $t=-1$ entonces $k_2 := T\left(l_1(-1)\right) = \frac{e^{i\pi/\sqrt{2}}+1}{e^{i\pi/\sqrt{2}}-1} = -i\cot\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)$. Considerando k_1 y k_2 podemos hallar el centro c del círculo C_1, de tal forma que $c = \frac{k_1+k_2}{2} = \frac{i}{2}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)\right) = -i\cot\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ y su radio es $r = \frac{1}{2}\left|k_1-k_2\right| = \frac{1}{2}\left|i\tan\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) + i\cot\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)\right| = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)}$. De aqui se sigue que $\widetilde{C}_1$ tiene ecuación

$$\left|w + \frac{i}{\sqrt{2}}\cot\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)}.$$

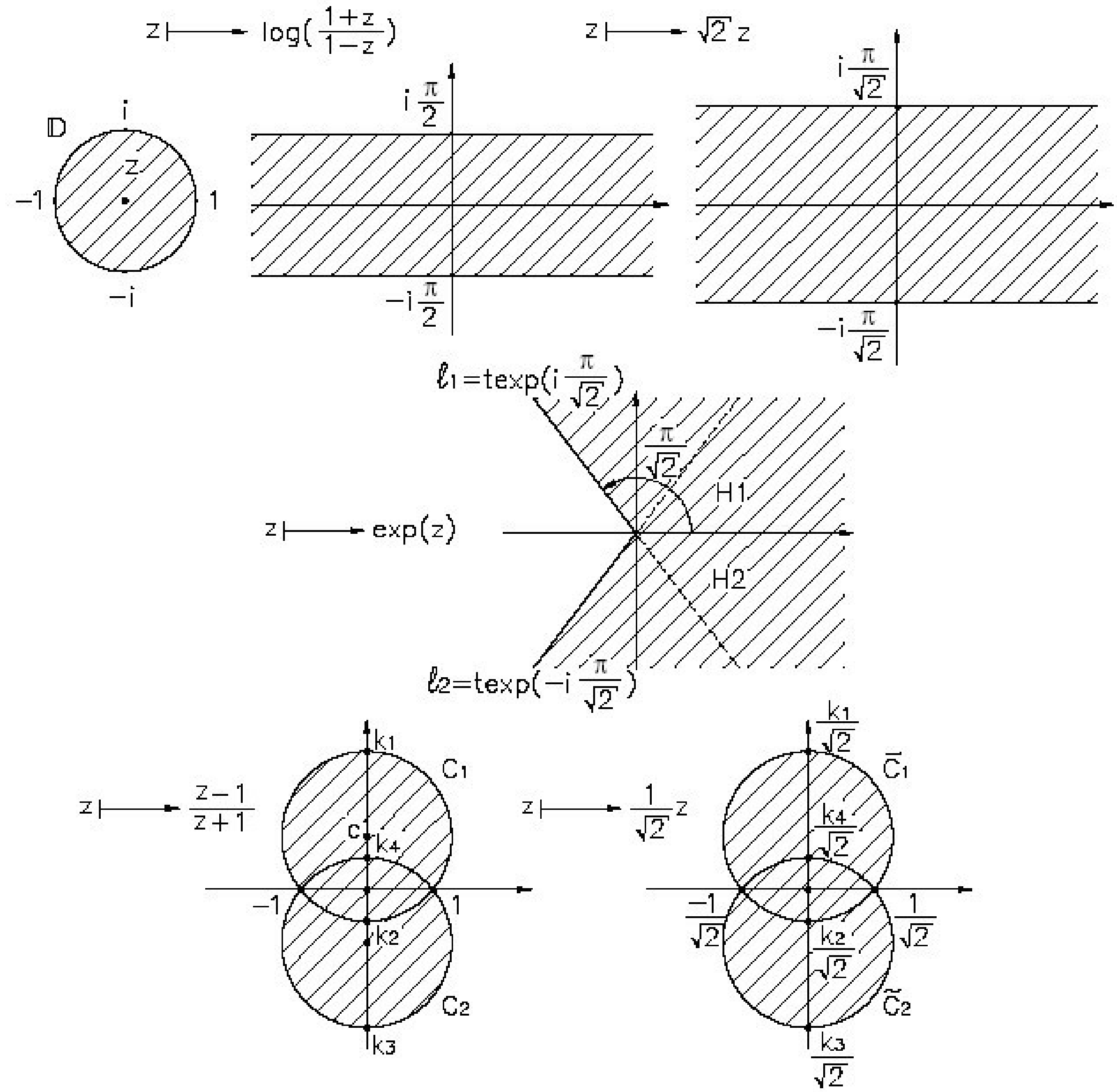

Figura 4

De manera completamente análoga se muestra que la ecuación de $\widetilde{C}_2$ es

$$\left|w - \frac{i}{\sqrt{2}}\cot\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)}.$$

(iii) Si comparamos n con A_t, vemos que resulta la misma función cambiando $\sqrt{2}$ por $\sqrt{1-t}$, de tal forma que usando lo hecho para n podemos ver que A_t mapea el disco unidad de la siguiente manera

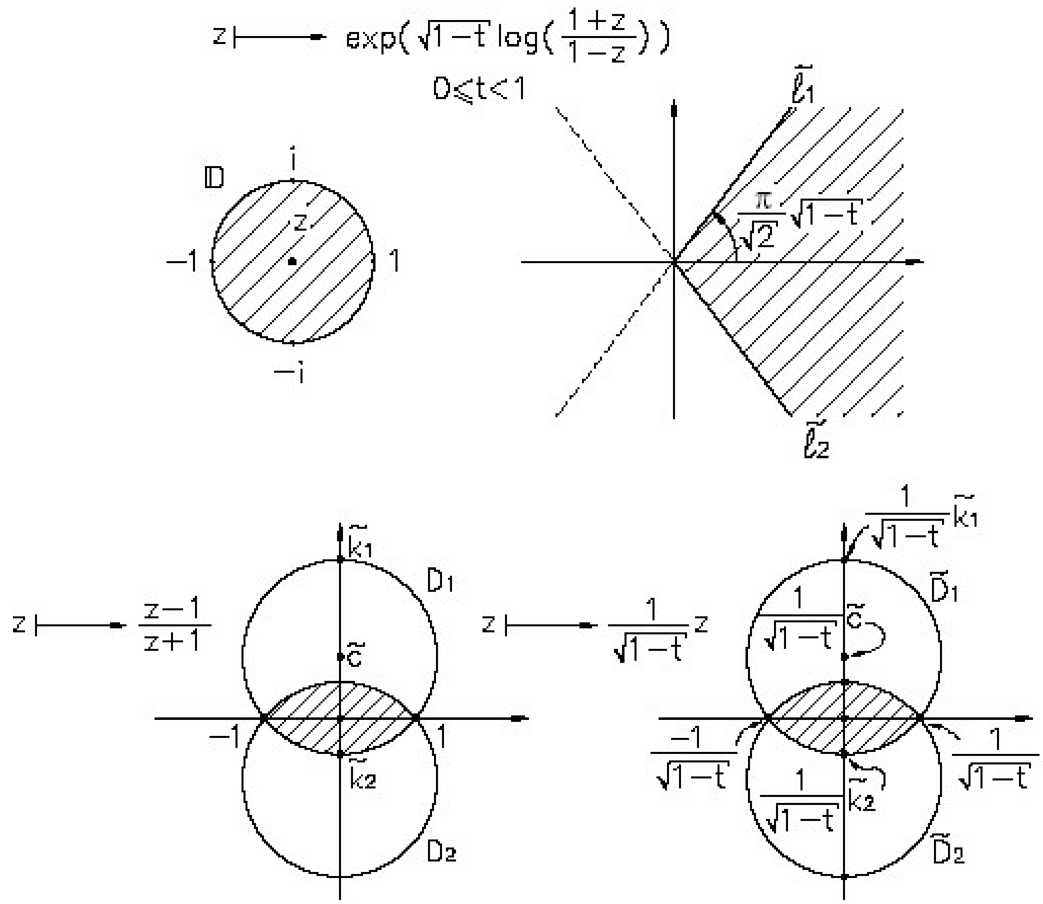

Figura 5

Es decir, A_t envía $\mathbb{D}$ en la intersección de las regiones interiores a los círculos $\widetilde{D}_1$ y $\widetilde{D}_2$. Por analogía a lo hecho en el caso (ii), podemos concluir que las ecuaciones de estos últimos círculos son

$$\left|w \pm \frac{i}{\sqrt{1-t}} \cot\left(\frac{\pi}{\sqrt{1-t}}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{1-t}}\right)},\ 0 \leq t < 1.$$

(iv) Así como hicimos en (iii) para A_t, podemos observar que A_{-t} se vuelve identica a n si cambiamos $\sqrt{2}$ por $\sqrt{1+t}$, de lo cual inferimos lo siguiente

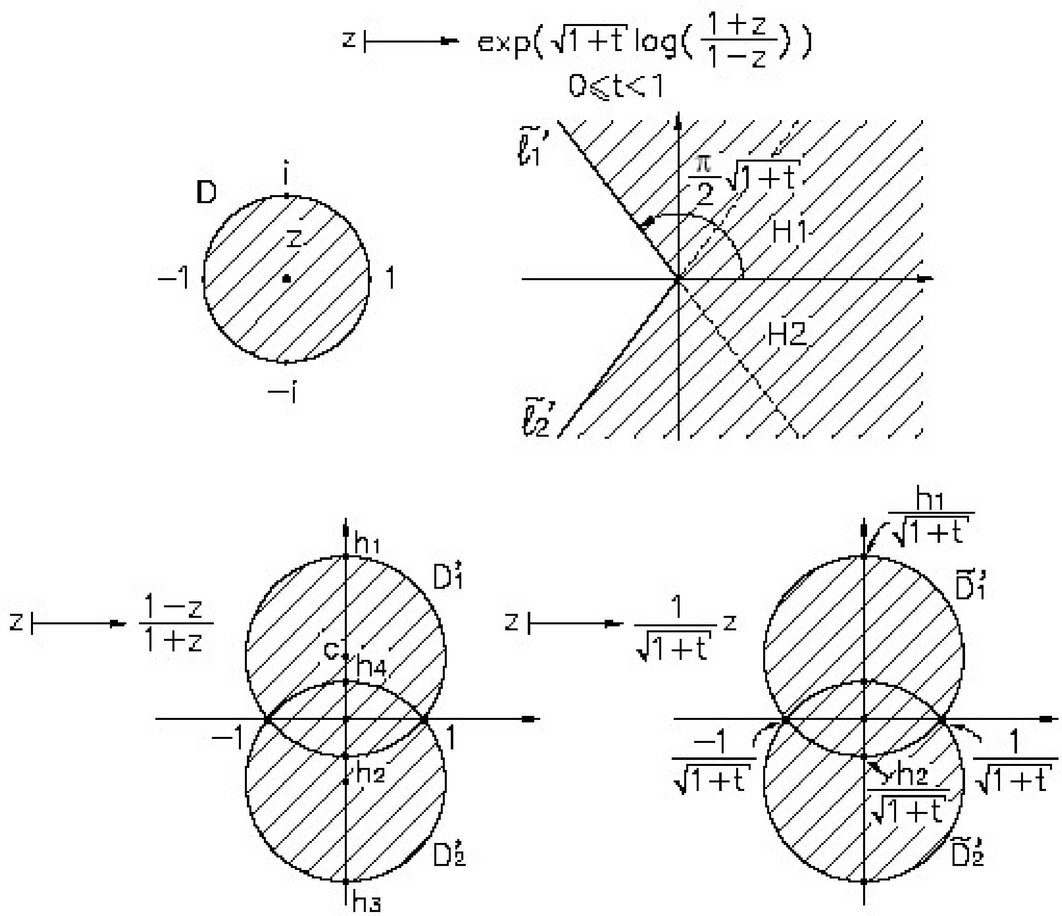

Figura 6

Donde las ecuaciones de $\widetilde{D_1'}$ y $\widetilde{D_2'}$ están dadas por

$$\left|w \pm \frac{i}{\sqrt{1+t}} \cot\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+t}}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+t}} \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+t}}\right)},\ 0 \leq t < 1.$$

2.2 Teorema de acotamiento

Antes de probar el primer teorema de acotamiento debemos ver algunos resultados de comparación, los cuales están esencialmente contenidos en el artículo de Essén y Keogh, [4].

Definamos $p(r) = \frac{t}{(1-r^2)^2}$, $r \in [0,1)$ y t fijo en $[0,1]$.

Proposición 2.2.1 *Supongamos que w es continua y satisface la desigualdad*

$$w''(x) + p(x)w(x) \geq 0, \qquad w(0) = 1, \quad w'(0) = 0,$$

para todo $x \in [0,1)$. Y supongamos que h es continua en $[0,1)$, positiva en $(0,1)$ y satisface el problema de valor inicial

$$h''(x) + p(x)h(x) = 0, \qquad h(0) = 1, \quad h'(0) = 0, \qquad x \in [0,1). \tag{2.5}$$

Entonces, para todo $x \in [0,1)$ se cumple que $h(x) \leq w(x)$.

Prueba. Consideremos la función $g(x) = \frac{w(x)}{h(x)}$, la cual es continua en $[0,1)$ y es tal que $g(0) = 1$. Así, para demostrar la afirmación de la proposición es suficiente verificar que g es creciente en $[0,1)$ lo cual será cierto si $g' = \frac{hw'-wh'}{h^2} \geq 0$ en $(0,1)$. Esto es equivalente a mostrar que $H = hw' - wh' \geq 0$ en $(0,1)$. En $(0,1)$, $H' = hw'' - wh''$. Como h es positiva en $(0,1)$ y además, $w'' \geq -pw$ y $h'' = -ph$, obtenemos $H' \geq -phw + phw = 0$. Esto demuestra que H es creciente en $(0,1)$ y por lo tanto se sigue el resultado, ya que H es continua en $[0,1)$ y $H(0) = 0$. ■

Supongamos ahora que f es meromorfa, localmente inyectiva en $\mathbb{D}$, normalizada de la forma $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, y que satisface la condición

$$|S_f(z)| \leq 2p(|z|). \tag{2.6}$$

Con la derivada Schwarziana de f asociamos el problema de valor inicial

$$u'' + qu = 0, \qquad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \tag{2.7}$$

en el cual $q(z) = \frac{1}{2}S_f$. Por un cálculo directo verificamos que $u = \frac{1}{\sqrt{f'}}$ es solución del problema de valor inicial (2.7). De lo cual se sigue que f tiene la representación

$$f(z) = \int_0^z u^{-2}(\varsigma)d\varsigma. \tag{2.8}$$

La función $u = \frac{1}{\sqrt{f'}}$ está bien definida, es decir, dicha rama de la raíz cuadrada existe. En efecto, la función $\frac{1}{f'}$ es analítica y no se anula en $\mathbb{D}$, excepto posiblemente en los polos de f. Sea P el conjunto de polos de f. Por el Teorema 1.2.1 existe una función G analítica en $\mathbb{D}$ cuyo conjunto de ceros es P. Definimos $g = G^2$; los ceros de g son los polos de f con multiplicidad 2. La función $\frac{1}{f'}\frac{1}{g}$ tiene singularidades removibles en los polos de f y no se anula en $\mathbb{D}$, de donde $f'g$ es una función analítica que no se anula en $\mathbb{D}$. Luego existe H analítica en $\mathbb{D}$ tal que $H^2 = f'g$. Definimos $h = G/H$, la cual es analítica en $\mathbb{D}$ y verifíca $h^2 = \frac{G^2}{H^2} = \frac{g}{f'g} = \frac{1}{f'}$.

Consideremos ahora u restringida al rayo $\left[0, e^{i\theta}\right)$, para algún θ fijo. Sea $r \in [0,1)$, de tal manera que $|u(z)|' = \frac{d}{dr}\left|u(re^{i\theta})\right|$, $z \in \left[0, e^{i\theta}\right)$. Ahora, con $|u|^2 = v^2 + w^2$, derivando nos queda $2\,|u|\,|u|' = 2vv' + 2ww'$. Luego $|u|' = \frac{vv'}{|u|} + \frac{ww'}{|u|}$.

Con base en esto podemos mostrar el siguiente resultado

Proposición 2.2.2 *La solución u de (2.7) satisface $|u(z)|'' + p(|z|)\,|u(z)| \geq 0$ para z en $\left[0, e^{i\theta}\right)$. En donde $p(z) = \frac{t}{(1-z^2)^2}$, $z \in \mathbb{D}$ y t fijo en $[0,1]$.*

Prueba. Sea $r \in [0,1)$ y fijemos $\theta \in [0, 2\pi)$, de tal manera que $u(z) = u(re^{i\theta})$, para $z \in \left[0, e^{i\theta}\right)$. Definamos $\eta = |u|^2 = u\overline{u}$. Puesto que $u = (f')^{-\frac{1}{2}} \neq 0$, sabemos que $|u|$ es diferenciable. Así,

$$2\,|u|\,|u|' = \eta' = u'\overline{u} + u\overline{u}',$$

y luego

$$2\left(\left(|u|'\right)^2 + |u|\,|u|''\right) = \eta'' = u''\overline{u} + u'\overline{u}' + u'\overline{u}' + u\overline{u}'',$$

y usando (2.6) y (2.7), se sigue que

$$\begin{aligned}
2\,|u|\,|u|'' + 2\left(|u|'\right)^2 &= u''\overline{u} + u\overline{u}'' + 2\left|u'\right|^2 \\
&= -(q+\overline{q})\,|u|^2 + 2\left|u'\right|^2 \\
&= -2\mathrm{Re}q\,|u|^2 + 2\left|u'\right|^2 \\
&\geq -2\,|q|\,|u|^2 + 2\left|u'\right|^2 \\
&\geq -2p\,|u|^2 + 2\left|u'\right|^2.
\end{aligned}$$

Pero como $|u'|^2 \geq (|u|')^2$ y $|u| > 0$, obtengo

$$2\,|u|\,|u|'' + 2\left(\left|u'\right|\right)^2 \geq 2\,|u|\,|u|'' + 2\left(|u|'\right)^2 \geq -2p\,|u|^2 + 2\left|u'\right|^2.$$

Entonces concluimos que $|u|'' \geq -p\,|u|$ en $\left[0, e^{i\theta}\right)$, lo cual prueba la proposición. ■

Lema 2.2.3 *Sea p positiva definida en $[0,1)$. Entonces la ecuación diferencial*

$$w' - w^2 = p, \qquad w(0) = 0, \tag{2.9}$$

tiene solución en $[0,1)$ si y sólo si el problema de valor inicial

$$y'' + py = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \tag{2.10}$$

tiene una solución positiva en $[0,1)$.

Prueba. Supongamos que w es una solución de (2.9) en $[0,1)$. Puesto que $w(0) = 0$ y $w' = w^2 + p > 0$, se sigue que $w \geq 0$. Definimos $W(x) = \int_0^x w(t)dt$ y $y(x) = e^{-W(x)}$. Entonces $y > 0$,

$$y' = -wy, \qquad y'' = -w'y - wy' = y(w^2 - w')$$

y así,

$$y'' + py = y(w^2 - w' + p) = 0.$$

Luego la condición (2.10) es necesaria para la existencia de una solución positiva de (2.9). Recíprocamente, sea y una solución positiva de (2.10) en $[0,1)$ y consideremos $W(x) = -\log y(x)$, $x \in [0,1)$. Entonces $W'(x) = -\frac{y'(x)}{y(x)}$. Definimos $w(x) = W'(x)$, $x \in [0,1)$, de modo que $w(0) = -\frac{y'(0)}{y(0)} = 0$, y se verifica

$$w' - w^2 = W'' - \left(W'\right)^2 = -\frac{yy''}{y^2} + \frac{\left(y'\right)^2}{y^2} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = -\frac{y''}{y} = p.$$

De lo cual se sigue que (2.9) tiene solución en $[0,1)$. ■

Definimos la clase $\mathcal{P}_0$ como las funciones $p : [0,1) \to (0,\infty)$, localmente integrables en $[0,1)$, para las cuales (2.9) tiene solución en $[0,1)$.

Lema 2.2.4 *Sea $p \in \mathcal{P}_0$. Supongamos que f es absolutamente continua en $[0,1]$, $f' \in L^2(0,1)$, y $f(1) = 0$. Entonces*

$$\int_0^1 [f(x)]^2 p(x)dx \leq \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx \tag{2.11}$$

Prueba. Se tiene de (2.9) que $w(0) = 0$, y con esto

$$\begin{aligned}
0 \quad &\leq \quad \int_0^1 (f' + wf)^2 dx = \int_0^1 (f'^2 + w^2 f^2)dx + \int_0^1 wd(f^2) \\
&= \quad \int_0^1 (f'^2 + w^2 f^2)dx + wf^2]_0^1 - \int_0^1 f^2 w' dx \\
&= \quad \int_0^1 [f'^2 + f^2(w^2 - w')]dx.
\end{aligned}$$

Se sigue (2.11) ya que $w^2 - w' = -p$. ■

Definimos $\mathcal{P}$ como la clase de las funciones $p \in \mathcal{P}_0$ que son restricciones a $[0,1)$ de funciones p, las cuales son par, crecientes y analíticas en $\mathbb{D}$. Puesto que p es ahora una función no decreciente, tenemos

$$\rho^2 p(x) < p(x/\rho), \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < x < \rho. \tag{2.12}$$

Usando esta propiedad, para $p \in \mathcal{P}$, probamos la siguiente

Proposición 2.2.5 *Para $0 < \rho < 1$, supongamos que $u \in C[0,\rho)$ y $u' \in L^2(0,\rho)$ son absolutamente continuas, y*

$$0 \leq u'' + pu, \quad u(\rho) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u \geq 0 \quad \text{en } [0,\rho]. \tag{2.13}$$

Entonces $u \equiv 0$.

Prueba. Multiplicando la desigualdad en (2.13) por u e integrando por partes sobre $(0, \rho)$, obtenemos

$$0 \leq \int_0^\rho u'' u dx + \int_0^\rho p u^2 dx = \left(uu'\right)_0^\rho - \int_0^\rho (u')^2 dx + \int_0^\rho p u^2 dx,$$

de donde

$$\int_0^\rho (u')^2 dx \leq \int_0^\rho p u^2 dx. \tag{2.14}$$

Del lema anterior, con $f(x) = u(\rho x)$, se sigue que

$$\int_0^1 [u(\rho x)]^2 p(x) dx \leq \int_0^1 [(u(\rho x))']^2 dx.$$

O equivalentemente,

$$\int_0^\rho \rho^{-2} p(x/\rho) u^2(x) dx \leq \int_0^\rho [u'(x)]^2 dx. \tag{2.15}$$

Supongamos que $u \not\equiv 0$ en $[0, \rho]$. Entonces se sigue de (2.12), (2.14) y (2.15)

$$\int_0^\rho [u'(x)]^2 dx \leq \int_0^\rho p(x) u^2(x) dx < \int_0^\rho \rho^{-2} p(x/\rho) u^2(x) dx \leq \int_0^\rho [u'(x)]^2 dx.$$

Esta contradicción muestra que $u(x) \equiv 0$ en $[0, \rho]$ y completa la prueba de la proposición. ∎

Sea $p : (-1, 1) \to (0, \infty)$ par, localmente integrable y localmente acotada en $(-1, 1)$. Con p asociamos las funciones v_1, v_2 definidas por

$$v_1'' - p v_1 = 0, \qquad v_1(0) = 1, \quad v_1'(0) = 0, \tag{2.16}$$

$$v_2'' - p v_2 = 0, \qquad v_2(0) = 0, \quad v_2'(0) = 1. \tag{2.17}$$

Notemos que v_1 es par, v_2 es impar y, v_1 y v_2 son estrictamente crecientes en $[0, 1)$. En efecto, sea $v_3(x) = v_1(-x)$, luego $v_3(0) = v_1(0) = 1$ y como $v_3'(x) = -v_1'(-x)$, se sigue $v_3'(0) = -v_1'(0) = 0$. Además $v_3''(x) - p v_3(x) = v_1''(-x) - p v_1(-x) = 0$, de lo cual se sigue que $v_3(x) = v_1(x)$, es decir, v_1 es par. Mostremos ahora que v_1 es estrictamente creciente en $[0, 1)$.

De la ecuación (2.16) se tiene que

$$v_1'(x) = v_1'(x) - v_1'(0) = \int_0^x v_1''(r)dr = \int_0^x p(r)v_1(r)dr.$$

Sea $s = \sup\{x \in [0,1) \mid v(t) > 0,\ t \in [0,x]\}$. Supongamos que $s < 1$, por continuidad tenemos que $v_1(s) = 0$. Para todo $t \in [0,s)$ se tiene que $v_1'(t) = \int_0^t p(r)v_1(r)dr > 0$, pues tanto p como v_1 son positivas en $[0,s)$; es decir, v_1 es estrictamente creciente en $[0,s)$, por lo tanto $1 = v_1(0) < v_1(t)$ para todo $t \in (0,s)$ y, por continuidad, $1 \leq v_1(s) = 0$, lo cual es una contradicción. Asi, $s = 1$ y por tanto v_1 es estrictamente creciente en $[0,1)$.
De manera completamente análoga se prueba que v_2 es impar y estrictamente creciente en $[0,1)$.

Con base en lo anterior podemos probar el siguiente lema

Lema 2.2.6 *Sean a y b números dados tales que $a > 0$, $b \geq 0$. Supongamos que f y p son funciones continuas y de valor real en $[0,1)$ y, $p > 0$ en $[0,1)$. Si*

$$f(x) \leq a + bx + \int_0^x p(t)f(t)(x-t)dt, \qquad 0 \leq x < 1, \tag{2.18}$$

entonces

$$f \leq av_1 + bv_2, \tag{2.19}$$

donde v_1 y v_2 están definidos por (2.16) y (2.17), respectivamente. Más aún, si la igualdad se verifica en (2.19) para algún $x_0 \in [0,1)$, entonces $f(x) = av_1(x) + bv_2(x)$ para todo $x \in [0,x_0]$.

Prueba. Definamos

$$F(x) = a + bx + \int_0^x p(t)f(t)(x-t)dt, \qquad 0 \leq x < 1.$$

Así, como $F'(x) = b + \int_0^x p(t)f(t)dt$, se sigue que $F(0) = a$, $F'(0) = b$ y
$F''(x) = p(x)f(x) \leq p(x)F(x)$. Consideremos $G = F/(av_1 + bv_2)$. Con esto también

$$\begin{aligned} F' &= (av_1' + bv_2')G + (av_1 + bv_2)G' \\ F'' &= (av_1'' + bv_2'')G + 2(av_1' + bv_2')G' + (av_1 + bv_2)G'' \\ &= p(av_1 + bv_2)G + 2(av_1' + bv_2')G' + (av_1 + bv_2)G'' \\ &= pF + 2(av_1' + bv_2')G' + (av_1 + bv_2)G''. \end{aligned}$$

Se sigue que $G(0) = 1$, $G'(0) = 0$ y que $2(av_1' + bv_2')G' + (av_1 + bv_2)G'' = F'' - pF \leq 0$, o equivalentemente

$$\frac{\left[(av_1 + bv_2)^2 G'\right]'}{(av_1 + bv_2)} \leq 0.$$

Puesto que $av_1 + bv_2 > 0$, concluimos que $G'(av_1 + bv_2)^2$ es decreciente, por lo tanto

$$G'(x)(av_1(x) + bv_2(x))^2 \leq G'(0)(av_1(0) + bv_2(0))^2 = 0.$$

Así, G es decreciente y $G(x) = F(x)/(av_1(x) + bv_2(x)) \leq G(0) = 1$, esto es,

$$F(x) \leq (av_1(x) + bv_2(x)) \tag{2.20}$$

para todo $x \in [0, 1)$, lo cual prueba (2.19). Supongamos que se tiene la igualdad en (2.19) para algún punto $x_0 \in [0, 1)$; así

$$1 = \frac{f(x_o)}{(av_1(x_0) + bv_2(x_0))} \leq \frac{F(x_0)}{(av_1(x_0) + bv_2(x_0))} \leq 1$$

con lo cual se verifica la igualdad en (2.20) para x_0. Puesto que G es decreciente concluimos que $G(x) = 1$ en $[0, x_0]$. Por lo tanto

$$F(x) = (av_1(x) + bv_2(x)), \quad x \in [0, x_0].$$

Luego, de (2.16) y (2.17),

$$p(x)f(x) = F''(x) = av_1''(x) + bv_2''(x) = p(x)[av_1(x) + bv_2(x)];$$

es decir,

$$f(x) = av_1(x) + bv_2(x), \quad x \in [0, x_0].$$

■

Una proposición que será fundamental para probar nuestro resultado principal en esta sección es la siguiente:

Proposición 2.2.7 *Supongamos que $p \in \mathcal{P}$ y sea P una función analítica en $\mathbb{D}$ tal que*

$$|P(z)| \leq p(|z|), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Si u_1 satisface

$$u_1''(z) + P(z)u_1(z) = 0, \quad u_1(0) = 1, \quad u_1'(0) = 0, \qquad z \in \mathbb{D} \tag{2.21}$$

entonces, para un θ fijo

$$\left| u_1(re^{i\theta}) \right| \leq v_1(r), \qquad 0 \leq r < 1,$$

donde v_1 está definida en (2.16). Si se verifica la igualdad en algún punto $r_0 e^{i\theta}$, $0 < r_0 < 1$, entonces

$$\left| u_1(re^{i\theta}) \right| = v_1(r), \qquad 0 \leq r < 1.$$

Prueba. De (2.21) tenemos

$$u_1'' = -Pu_1, \quad u_1(0) = 1, \quad u_1'(0) = 0.$$

Integrando sobre el segmento $[0, \mathrm{v}]$ para v en $\mathbb{D}$, nos queda

$$u_1'(\mathrm{v}) = -\int_0^{\mathrm{v}} P(w)u_1(w)dw,$$

integrando de nuevo en $[0, z]$, z en $\mathbb{D}$, y tal que $|\mathrm{v}| \leq |z|$, obtenemos

$$u_1(\mathrm{z}) = 1 - \int_0^z \int_0^{\mathrm{v}} P(w)u_1(w)dwd\mathrm{v}.$$

Usando la parametrización $z = re^{i\theta}$ y $\mathrm{v} = te^{i\theta}$, $0 \leq r,\ t < 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} u_1(re^{i\theta}) &= 1 - \int_0^r \int_0^t e^{2i\theta} P(se^{i\theta}) u_1(se^{i\theta}) ds dt \\ &= 1 - \int_0^r \int_s^r e^{2i\theta} P(se^{i\theta}) u_1(se^{i\theta}) dt ds \\ &= 1 - \int_0^r e^{2i\theta} P(se^{i\theta}) u_1(se^{i\theta})(r-s) ds, \end{aligned} \tag{2.22}$$

de donde

$$\begin{aligned} \left| u_1(re^{i\theta}) \right| &\leq 1 + \left| \int_0^r e^{2i\theta} P(se^{i\theta}) u_1(se^{i\theta})(r-s) ds \right| \\ &\leq 1 + \int_0^r \left| P(se^{i\theta}) \right| \left| u_1(se^{i\theta}) \right| (r-s) ds \end{aligned}$$

$$\leq 1 + \int_0^r p(s) \left| u_1(se^{i\theta}) \right| (r-s) ds.$$

Puesto que v_1 es solución de problema de valor inicial (2.16), se sigue del lema anterior, con $a = 1$ y $b = 0$, que

$$\left| u_1(re^{i\theta}) \right| \leq v_1(r), \qquad 0 \leq r < 1.$$

Supongamos que se tiene la igualdad en algún punto $r_0 e^{i\theta}$, $0 < r_0 < 1$. Según el lema anterior, tenemos que

$$\left| u_1(re^{i\theta}) \right| = v_1(r), \qquad r \in [0, r_0].$$

Las desigualdades anteriores implican

$$\begin{aligned} v_1(r) &\leq 1 + \int_0^r \left| e^{2i\theta} P(se^{i\theta}) u_1(se^{i\theta})(r-s) ds \right| \\ &\leq 1 + \int_0^r \left| P(se^{i\theta}) \right| v_1(s)(r-s) ds \\ &\leq 1 + \int_0^r p(s) v_1(s)(r-s) ds, \qquad r \in [0, r_0]. \end{aligned}$$

Además, de (2.16)

$$v_1(r) = 1 + \int_0^r p(s) v_1(s)(r-s) ds. \tag{2.23}$$

Se sigue de lo anterior, que existe un $\alpha \in [0, 2\pi]$ tal que

$$\begin{aligned} e^{2i\theta} P(se^{i\theta}) u_1(se^{i\theta})(r-s) &= e^{i\alpha} \left| e^{2i\theta} P(se^{i\theta}) u_1(se^{i\theta})(r-s) \right| \\ &= e^{i\alpha} p(s) v_1(s)(r-s), \quad s \in [0, r]\,. \end{aligned}$$

De hecho, en esta situación, por (2.22) y (2.23)

$$u_1(re^{i\theta}) = 1 - \int_0^r e^{i\alpha} p(s) v_1(s)\,(r-s)\,ds = 1 - e^{i\alpha}\,(v_1(r) - 1)\,, \qquad r \in [0, r_0]\,.$$

Mostremos que $\alpha = \pi$. En efecto,

$$\begin{aligned} v_1^2(r) &= u_1(re^{i\theta}) \overline{u_1(re^{i\theta})} \\ &= [(1 + e^{i\alpha}) - e^{i\alpha} v_1(r)][(1 + e^{-i\alpha}) - e^{-i\alpha} v_1(r)] \\ &= \left| 1 + e^{i\alpha} \right|^2 - 2\,\mathrm{Re}[(1 + e^{i\alpha}) e^{-i\alpha} v_1(r)] + v_1^2(r) \\ &= 2(1 + \cos\alpha) - 2v_1(r)(1 + \cos\alpha) + v_1^2(r). \end{aligned}$$

Así, $(1 + \cos\alpha)(2 - 2v_1(r)) = 0$ y puesto que $v_1(r) \neq 1$, entonces $\cos\alpha = -1$, es decir, $\alpha = \pi$. Concluimos que $u_1(re^{i\theta}) = v_1(r)$, $r \in [0, r_0]$. Por el Principio de Identidad esta igualdad se cumple en $[0, 1)$. ■

Con base en los resultados anteriores podemos probar el siguiente teorema, el cual es la base del trabajo realizado por M. Chuaqui y B. Osgood en [2].

Teorema 2.2.8 *Sea $f \in \mathcal{N}_o$, entonces para todo $z \in \mathbb{D}$*

$$n(|z|) \leq |f(z)| \leq N(|z|) \tag{2.24}$$

$$n'(|z|) \leq \left| f'(z) \right| \leq N'(|z|). \tag{2.25}$$

Y si $f \in \mathcal{N}_o^t$, $0 \leq t < 1$, entonces

$$A_{-t}(|z|) \leq |f(z)| \leq A_t(|z|) \tag{2.26}$$

$$A'_{-t}(|z|) \leq \left|f'(z)\right| \leq A'_t(|z|), \tag{2.27}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. En caso de igualdad en un punto diferente del origen, en cualquiera de las desigualdades, entonces f es una rotación de $n(z)$, $N(z)$, $A_t(z)$ o $A_{-t}(z)$, según sea el caso.

Prueba. Definimos como antes $q(z) = \frac{1}{2}S_f(z)$ y $p(r) = 1/(1-z^2)^2$, para $z \in \mathbb{D}$, con lo cual la hipótesis (2.1) es entonces $|q(z)| \leq p(|z|)$. Se sigue de las Proposiciones 2.2.1 y 2.2.2, con $w = |u|$, u definida en (2.7), que

$$|u(z)| \geq h(|z|), \tag{2.28}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. La solución h a (2.5) es clásica y está dada por

$$h(z) = \sqrt{1-z^2}.$$

Ahora, ponemos

$$N(z) = \int_0^z h^{-2}(\varsigma)d\varsigma.$$

La integración es bastante simple y produce la expresión en (2.3). Así, con (2.8) y (2.28), tenemos

$$\left|f'(z)\right| = |u(z)|^{-2} \leq h^{-2}(|z|) = N'(|z|)$$

y además,

$$|f(z)| = \left|\int_0^z u^{-2}(\varsigma)d\varsigma\right| \leq \int_0^z |u(\varsigma)|^{-2}|d\varsigma| \leq \int_0^z h^{-2}(|\varsigma|)\,|d\varsigma| = \int_0^z N'(|\varsigma|)\,|d\varsigma| = N(|z|),$$

lo cual establece las cotas superiores en (2.24) y (2.25).

En orden a establecer las correspondientes cotas inferiores consideramos la solución v para el problema de valor inicial

$$v''(z) - p(z)v(z) = 0, \quad v(0) = 1, \quad v'(0) = 0, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Se sigue de la Proposición 2.2.7 que $|u(z)| \leq v(|z|)$ para todo $z \in \mathbb{D}$. La solución v también puede ser encontrada explicitamente, [2], como

$$v(z) = \frac{1}{2}\sqrt{1-z^2}\left\{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right\}.$$

Luego, es fácil ver, derivando a ambos lados de la igualdad, que

$$n(z) = \int_0^z v^{-2}(\varsigma)d\varsigma,$$

y por tanto se tiene la cota inferior para $|f'|$ en (2.25). Para obtener la cota inferior para $|f|$ en (2.24), supongamos que el mínimo de $|f|$, en el círculo $C_r = \{z \mid |z| = r < 1\}$, es asumido en un punto z_1. Sea I el segmento que une 0 con $\zeta_1 = f(z_1)$, se sigue de Lema 1.2.3 que existe una trayectoria J en $|z| < r$ que une 0 con z_1; de tal manera que $I = f(J)$, con lo cual tenemos

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |f(z_1)| = |\varsigma_1| = \int_I |d\varsigma| \\ &= \int_J |f'(z)|\,|dz| \geq \int_J n'(|z|)\,|dz| \\ &\geq \int_0^{|z_1|} n'(|z|)\,|dz| = n(|z_1|) = n(|z|), \qquad z \in C_r, \end{aligned} \tag{2.29}$$

donde la integral final es a lo largo del segmento de 0 a z_1. Y como $r \in (0,1]$ es arbitrario, tenemos la cota inferior para $|f|$ en (2.24).

Ahora consideramos los casos de la igualdad:

(i) $|f(z_0)| = N(|z_0|)$,

(ii) $|f'(z_0)| = N'(|z_0|)$,

(iii) $|f(z_0)| = n(|z_0|)$,

(iv) $|f'(z_0)| = n'(|z_0|)$,

para algún $z_0 \neq 0$. Tomando $e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)$, $e^{i\theta} = z_0/|z_0|$, podemos asumir que $z_0 = x_0 > 0$. El caso (i) será reducido al caso (ii) y el caso (iii) reducido al caso (iv).

Supongamos que $|f'(x_0)| = N'(x_0)$. Entonces, así como en la Proposición 2.2.2 donde $|u| = |f'|^{-\frac{1}{2}}$, la función $y = |f'|^{-\frac{1}{2}} - (N')^{-\frac{1}{2}}$ satisface

$$y''(x) + p(x)y(x) \geq 0, \quad y \geq 0, \quad y'(0) = 0$$

y $y(x_0)=0$, para $x\in[0,x_0]$. Se sigue de la Proposición 2.2.5 que $y\equiv 0$, esto es, $|f'(x)|=N'(x)$ para todo $x\in[0,x_0]$. Veamos que $2q(x)=S_f(x)=S_N(x)=2p(x)$ para todo $x\in[0,1)$. Sea $\psi=|f'|^{-1}=|u|^2=(N')^{-1}=h^2$ en $[0,x_0]$. Entonces, como en la Proposición 2.2.2,

$$-2=(h^2)''=\psi''=-(q+\overline{q})\,|u|^2+2\left|u'\right|^2\geq -2ph^2+2(h')^2=-2.$$

Pero $|u'|^2\geq(|u|')^2=(h')^2$ y $-(q+\overline{q})\geq -2p$. Así debemos tener que $|u'|^2=(h')^2$ y $-(q+\overline{q})=-2p$; es decir, $\mathrm{Re}q=p$. Pero por hipótesis $p^2=(\mathrm{Re}q)^2\leq|q|^2\leq p^2$, lo cual implica que $q=p$ en $[0,1)$ y así en el disco entero; luego por la Proposición 1.1.1 $f=T\circ N$, $T\in M\ddot{o}b$. Ahora, supongamos que $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, $z\in\mathbb{D}$; entonces $0=f(0)=T(N(0))=T(0)=\frac{b}{d}$ implica $b=0$ y $d\neq 0$. Por otro lado, $1=f'(0)=T'(N(0))N'(0)=T'(0)=\frac{a}{d}$ lo cual implica $a=d$. De manera análoga tenemos que $0=f''(0)=T'(N(0))N''(0)+T''(N(0))\left(N'(0)\right)^2=T''(0)=\frac{-2c}{a}$, de donde $c=0$ y podemos concluir que $T(z)=z$ y así $f=N$ en $\mathbb{D}$; lo cual establece el caso (ii). Para establecer el caso (i), supongamos $|f(x_0)|=N(x_0)$. Entonces la cadena de desigualdades,

$$|f(x_0)|\leq\int_0^{x_0}\left|f'(x)\right|dx\leq\int_0^{x_0}N'(x)dx=N(x_0),$$

implica $|f'(x)|=N'(x)$ para toda $x\in[0,x_0]$ y estamos nuevamente en el caso (ii).

Ahora reducimos el caso (iii) al caso (iv). Supongamos $|f(x_0)|=n(x_0)$, $x_0\in(0,1)$, entonces en las desigualdades de (2.29) tenemos igualdad en todas partes. Esto implica que J es el intervalo $[0,x_0]$ y que $|f'(x)|=n'(x)$ a lo largo del intervalo $[0,x_0]$. Ahora, con

$$|u(x_0)|=\left|f'(x_0)\right|^{-\frac{1}{2}}=\left(n'(x_0)\right)^{-\frac{1}{2}}=v(x_0),\qquad x_0\in(0,1),$$

se sigue de la Proposición 2.2.7 que $|f'(x)|=n'(x)$, para todo x en $[0,1)$; y usando el mismo argumento anterior, con $q=-\frac{1}{2}S_f$, se tiene que $S_f=S_n$ en $\mathbb{D}$, y así que $f=n$ en $\mathbb{D}$.

Esto termina la prueba de la primera parte del teorema. La prueba de la segunda parte es completamente análoga, usando la solución explícita a la ecuación diferencial para las funciones normalizadas que satisfacen $S_f(z)=\pm 2t/(1-z^2)^2$, (Ver [2]). $\blacksquare$

Observemos que las funciones f ,en el teorema anterior, realmente son funciones analíticas; pues mostramos que están acotadas por funciones de las cuales ya sabemos que son analíticas.

El caracter simple de las cotas en el Teorema 2.2.8 hace posible deducir otros hechos interesantes

Corolario 2.2.9 *Si* $f \in \mathcal{N}_o^t$, $0 \leq t < 1$, *entonces* f *tiene una extensión Hölder continua a* $\overline{\mathbb{D}}$. *Con*

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{4\pi}{\sqrt{1-t}} |z_1 - z_2|^{\sqrt{1-t}}, \tag{2.30}$$

para todo z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$.

Prueba. Supongamos que $f \in \mathcal{N}_o^t$, $0 \leq t < 1$. De (2.27) tenemos

$$\begin{aligned} \left|f'(z)\right| &\leq A_t'(|z|) = 4\frac{(1+|z|)^{2v-1}(1-|z|)^{2v-1}}{((1+|z|)^{2v} + (1-|z|)^{2v})^2} \leq \frac{4(1-|z|)^{2v-1}}{((1+|z|)^{2v} + (1-|z|)^{2v})^2} \\ &\leq \frac{4(1-|z|)^{2v-1}}{((1+|z|)^{2v})^2} \leq 4(1-|z|)^{2v-1} = \frac{4}{(1-|z|)^{1-2v}}, \end{aligned}$$

donde $2v = \sqrt{1-t}$. Para z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$, sea Γ el segmento hiperbólico que une z_1 y z_2. Por Lema 1.2.5, Γ tiene longitud euclidiana $l \leq \frac{\pi}{2} |z_1 - z_2|$ y $\min\{s, l-s\} \leq \frac{\pi}{2}(1 - |\xi|)$ para cada ξ en Γ, donde s es la longitud de arco euclidiana de la parte de Γ entre z_1 y ξ. Con lo cual tenemos

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &\leq \int_\Gamma \left|f'(\xi)\right| |d\xi| \leq \int_\Gamma A_t'(|\xi|) \, |d\xi| \leq 4 \int_\Gamma \frac{|d\xi|}{(1-|\xi|)^{1-2v}} \\ &\leq 4\left(\int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-2v} \frac{ds}{s^{1-2v}} + \int_{\frac{l}{2}}^{l} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-2v} \frac{ds}{(l-s)^{1-2v}} \right) \\ &= 2 * 4 \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-2v} \frac{ds}{s^{1-2v}}. \end{aligned}$$

La integración, junto con $l \leq \frac{\pi}{2} |z_1 - z_2|$, produce

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &\leq 2 * 4 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-2v} \left(\frac{s^{2v}}{2v}\right)_0^{\frac{l}{2}} = \frac{2*4}{2v} \frac{\pi^{1-2v}}{2^{1-2v}} \left(\frac{l^{2v}}{2^{2v}}\right) \\ &= \frac{4\pi^{1-2v}}{2v} l^{2v} \leq \frac{4\pi^{1-2v}}{2v} \frac{\pi^{2v}}{2^{2v}} |z_1 - z_2|^{2v} \\ &= \frac{4\pi}{2v 2^{2v}} |z_1 - z_2|^{\sqrt{1-t}} \leq \frac{4\pi}{\sqrt{1-t}} |z_1 - z_2|^{\sqrt{1-t}}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Esto muestra la continuidad uniforme en $\mathbb{D}$ y así, por el Teorema 1.2.4, f puede ser extendida de manera continua a $\overline{\mathbb{D}}$ y dicha extensión, por continuidad, satisface la misma condición de

Hölder. Esto completa la prueba del Corolario. ■

Otro hecho curioso acerca de las funciones localmente univalentes que poseen la anterior normalización se muestra en el siguiente Corolario

Corolario 2.2.10 *Sea $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ analítica y localmente univalente en $\mathbb{D}$.*
(1) *Si f satisface (2.1) entonces f no asume el valor $-a_2^{-1}$ en $\mathbb{D}$.*
(2) *Si f satisface*

$$|S_f(z)| \leq \frac{2\alpha}{\left(1 - |z|^2\right)^2}, \tag{2.32}$$

donde $\alpha > 1$, entonces f no asume el valor $-a_2^{-1}$ en el disco $|z| < \tanh\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha-1}}\right)$.

Prueba. Sea $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ y consideremos $g = f/(1 + a_2 f) = z + \left(a_3 - a_2^2\right) z^3 + \cdots$. La función g es claramente meromorfa en $\mathbb{D}$ y el problema es ver si ésta tiene un polo en un punto z_0, donde $f(z_0) = -a_2^{-1}$. Supongamos primero que f satisface (2.1). Luego por la Proposición 1.1.1 g satisface (2.1), donde sabemos que la derivada Schwarziana en un polo está definida vía inversión. Si $|z| < r \leq 1$ es el disco más grande sobre el cual g es analítica, entoces se sigue del Teorema 2.2.8 que

$$|g(z)| \leq N(|z|) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

en $|z| < r$. Luego g es acotada sobre $|z| < r$ y así no puede tener polos en $\mathbb{D}$. Por lo tanto f no asume el valor $-a_2^{-1}$.

Ahora, supongamos que f, y así g, satisface (2.32) para $\alpha > 1$. De nuevo supongamos que el disco más grande sobre el cual g es analítica es $|z| < r$. La función

$$F_\alpha(z) = \frac{1}{\sqrt{\alpha - 1}} \tan\left(\frac{\sqrt{\alpha - 1}}{2} \log \frac{1 + z}{1 - z}\right)$$

cumple $F_\alpha(0) = 0$, $F_\alpha'(0) = 1$, $F_\alpha''(0) = 0$, con $S_{F_\alpha}(z) = 2\alpha/(1 - z^2)^2$, y F_α es analítica en el disco $|z| < r_1 = \tanh(\pi/(2\sqrt{\alpha - 1}))$. En efecto, F_α es analítica en donde $\tan\left(\frac{\sqrt{\alpha-1}}{2} \log \frac{1+z}{1-z}\right)$

sea analítica, es decir, $0 < \frac{\sqrt{\alpha-1}}{2} \log \frac{1+|z|}{1-|z|} < \frac{\pi}{2}$, o lo que es equivalente

$$\begin{aligned} \log \frac{1+|z|}{1-|z|} &< 2\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha-1}}\right) \Leftrightarrow \frac{1+|z|}{1-|z|} < e^{2\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha-1}}\right)} \\ \Leftrightarrow \quad |z| &< \frac{e^{2\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha-1}}\right)}-1}{e^{2\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha-1}}\right)}+1} = \frac{e^{\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha-1}}}-e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha-1}}}}{e^{\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha-1}}}+e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha-1}}}} = \tanh\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha-1}}\right). \end{aligned}$$

Ahora, con $p := \frac{\alpha}{(1-r^2)^2}$, $\alpha > 1$, la solución h a (2.5) está dada por

$$h(z) = \sqrt{1-z^2}\cos\left(\frac{\sqrt{\alpha-1}}{2}\log\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Y se verifíca fácilmente que

$$F_\alpha(z) = \int_0^z h^{-2}(\varsigma)d\varsigma.$$

Con esto se sigue, como en el Teorema 2.2.8, que $|g(z)| \leq F_\alpha(|z|)$ sobre el disco $|z| < \min\{r, r_1\}$. Por consiguiente, debemos tener $r \geq r_1$, esto es, f no puede asumir el valor $-a_2^{-1}$ en el disco $|z| < r_1$, que es lo que queríamos probar. ■

La normalización y la cota inferior en (2.24) pueden ser usadas para obtener una prueba corta del criterio original de univalencia de Nehari

Corolario 2.2.11 *Si f es una función analítica en el disco unidad $\mathbb{D}$ y su derivada Schwarziana satisface la condición (2.1), entonces f es univalente en $\mathbb{D}$.*

Prueba. Supongamos que f es analítica, satisface (2.1) y que $f(z_1) = f(z_2)$ para $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. La condición (2.1) es invariante bajo la composición $M \circ f$, $M \in M\ddot{o}b(\mathbb{D})$, y podemos por lo tanto suponer que $z_1 = 0$. Ahora, normalizamos f por medio de una transformación de Möbius, de tal forma que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $f''(0) = 0$. Entonces la función normalizada f es de nuevo analítica y, de la cota inferior en (2.24), tenemos

$$n(|z_2|) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1+|z_2|)^{\sqrt{2}}-(1-|z_2|)^{\sqrt{2}}}{(1+|z_2|)^{\sqrt{2}}+(1-|z_2|)^{\sqrt{2}}} \leq |f(z_2)| = |f(z_1)| = 0,$$

de lo cual se sigue que $z_2 = 0 = z_1$. ■

2.3 Criterio de Nehari para univalencia

Nehari, [11], también mostró el siguiente teorema; el cual usaremos en la siguiente sección para definir una nueva familia de funciones meromorfas y mostrar, usando las mismas ideas de Chuaqui y Osgood, un resultado similar al Teorema 2.2.8. Cabe resaltar que tanto esta familia como el nuevo teorema son originales.

Teorema 2.3.1 *Sea f meromorfa y localmente univalente en $\mathbb{D}$. Entonces*

$$|S_f(z)| \leq \frac{\pi^2}{2} \tag{2.33}$$

es una condición suficiente para que f sea univalente en $\mathbb{D}$. La cota en (2.33) es inmejorable.

Prueba. Por la teoría clásica de ecuaciones diferenciales, (ver [10], pág. 203), la solución general de la ecuación diferencial

$$S_f(z) = 2p(z) \tag{2.34}$$

es de la forma $f = y_1/y_2$, donde y_1, y_2 son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial

$$y'' + py = 0. \tag{2.35}$$

Probar que la condición (2.33) establece la univalencia de f en $\mathbb{D}$ es, por lo tanto, equivalente a mostrar que la razón y_1/y_2 de dos soluciones de (2.35) es univalente en $\mathbb{D}$, si p está sujeta a la condición

$$|p(z)| \leq \frac{\pi^2}{4}. \tag{2.36}$$

Por otro lado, para que la razón de dos soluciones linealmente independientes de (2.35) sea univalente en un cierto dominio, digamos D, es suficiente y necesario que ninguna solución de (2.35) se anule allí más de una vez. En efecto, si

$$\frac{y_1(z_1)}{y_2(z_1)} = \frac{y_1(z_2)}{y_2(z_2)} = c,$$

z_1, $z_2 \in D$, entonces

$$y_1(z_1) - cy_2(z_1) = y_1(z_2) - cy_2(z_2) = 0.$$

Esto es, la solución $y_1(z) - cy_2(z)$ de (2.35) se anula en dos puntos z_1 y z_2. La parte recíproca es obvia.

Nuestra tarea está por tanto reducida a mostrar que ninguna solución de (2.35) se anula en $\mathbb{D}$ más de una vez si la condición (2.36) se tiene. Para este propósito, multiplicamos la ecuación (2.35) por $\overline{y}dz$ e integramos de z_1 a z_2, para z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$. Esto lleva a

$$\int_{z_1}^{z_2} \overline{y}y''dz + \int_{z_1}^{z_2} p\,|y|^2\,dz = 0,$$

así, integrando por partes, obtenemos

$$\left(\overline{y}y'\right)_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \left|y'\right|^2 \overline{dz} + \int_{z_1}^{z_2} p\,|y|^2\,dz = 0. \tag{2.37}$$

Ahora, supongamos que y es solución de (2.35) y es tal que $y(z_1) = y(z_2) = 0$. Se sigue entonces de (2.37) que

$$\int_{z_1}^{z_2} \left|y'\right|^2 \overline{dz} = \int_{z_1}^{z_2} p\,|y|^2\,dz. \tag{2.38}$$

Usando (2.38) y tomando como arco de integración el segmento de linea que conecta z_1 y z_2, $\Gamma = \frac{z_1+z_2}{2} + re^{i\theta}$, donde θ es el argumento de dicho segmento, se tiene

$$\int_{-\rho}^{\rho} \left|y'\right|^2 dr = e^{2i\theta} \int_{-\rho}^{\rho} p\,|y|^2\,dr, \qquad \rho = |z_1 - z_2|\,/2. \tag{2.39}$$

Escribiendo $y = u + iv$, tenemos $y' = e^{i\theta}(u_r + iv_r)$, ya que $z = re^{i\theta}$. Así $|y|^2 = u^2 + v^2$, $|y'|^2 = u_r^2 + v_r^2$. Usando esto, (2.39) toma la forma

$$\int_{-\rho}^{\rho} \left(u_r^2 + v_r^2\right) dr = e^{2i\theta} \int_{-\rho}^{\rho} p\left(u^2 + v^2\right) dr. \tag{2.40}$$

La desigualdad

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y^2 dx \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(y'\right)^2 dx \tag{2.41}$$

es válida para una función y continua en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y con ceros de primer orden en $x = \pm\frac{\pi}{2}$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (y' + y\tan x)^2 dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(y'\right)^2 dx + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y' y \tan x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y^2 \tan^2 x dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(y'\right)^2 dx + \left(y^2 \tan x\right)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y^2 \sec^2 x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y^2 (\sec^2 x - 1) dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(y'\right)^2 dx + \left(y^2 \tan x\right)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y^2 dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(y'\right)^2 dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y^2 dx
\end{aligned}
$$

lo cual, además, muestra que la igualda en (2.41) puede solamente ocurrir para $y \equiv c\cos x$, pues para esta y se tiene que $y' + y\tan x = 0$.

Reemplazando la variable x en (2.41) por $\left(\frac{\pi r}{2\rho}\right)$, obtenemos

$$
\int_{-\rho}^{\rho} y^2 dr \leq \frac{4\rho^2}{\pi^2} \int_{-\rho}^{\rho} \left(y'\right)^2 dr \tag{2.42}
$$

válida para funciones y que tienen ceros de primer orden en $r = \pm\rho$.

Tanto u como v satisfacen estas condiciones. En vista de (2.33), (2.34) y (2.42), obtenemos

$$
\left| e^{2i\theta} \int_{-\rho}^{\rho} p\left(u^2 + v^2\right) dr \right| \leq \frac{\pi^2}{4} \int_{-\rho}^{\rho} \left(u^2 + v^2\right) dr \leq \rho^2 \int_{-\rho}^{\rho} \left(u_r^2 + v_r^2\right) dr < \int_{-\rho}^{\rho} \left(u_r^2 + v_r^2\right) dr.
$$

Esto contradice (2.40) y así prueba la primera parte del teorema.

Que la constante $\pi^2/2$ en (2.33) es la mejor posible lo muestra la función $f(z) = e^{\pi i(1+\epsilon)z}$, $\epsilon > 0$. Es fácil ver que

$$
S_f(z) = \frac{\pi^2}{2}(1+\epsilon)^2 > \frac{\pi^2}{2}.
$$

Puesto que el periodo de f es $\frac{2}{(1+\epsilon)} < 2$, se sigue que f no puede ser univalente en $\mathbb{D}$. ■

De acuerdo a [5] la condición más fuerte

$$
|S_f(z)| \leq t\frac{\pi^2}{2}, \qquad 0 \leq t < 1, \tag{2.43}
$$

implica que f tiene una extensión cuasiconforme al plano.

2.4 La familia $\mathcal{F}_o^t$ y un teorema de acotamiento

En esta sección usaremos el criterio de Nehari, dado por el teorema probado en la sección anterior, para definir una nueva familia de funciones y probar un teorema de acotamiento similar al probado por Chuaqui y Osgood.

Usando las condiciones (2.33) y (2.43), y el hecho de que f puede ser normalizada en la forma $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, definimos las siguientes familias de funciones:

$$\mathcal{F} = \{f \mid f \text{ es meromorfa y localmente inyectiva en } \mathbb{D}\}$$

y

$$\mathcal{F}_o^t = \{f \mid f \in \mathcal{F}, \text{ está normalizada como antes y satisface } (2.43)\},$$

para algún $0 \leq t < 1$.

Introducimos las nuevas funciones extremales

$$m(z) = \frac{2}{\pi\sqrt{t}} \tanh\left(\frac{\pi\sqrt{t}}{2} z\right), \qquad M(z) = \frac{2}{\pi\sqrt{t}} \tan\left(\frac{\pi\sqrt{t}}{2} z\right), \tag{2.44}$$

para $0 < t \leq 1$ y z en $\mathbb{D}$. Estas funciones son analíticas y están normalizadas como antes. Sus derivadas Schwarzianas son

$$S_m(z) = -t\frac{\pi^2}{2}, \qquad S_M(z) = t\frac{\pi^2}{2},$$

para $0 < t \leq 1$.

Con base en esto podemos establecer un teorema similar al mostrado por M. Chuaqui y B. Osgood en [2].

Teorema 2.4.1 *Sea $f \in \mathcal{F}_o^t$, $0 < t \leq 1$, entonces*

$$m(|z|) \leq |f(z)| \leq M(|z|) \tag{2.45}$$

$$m'(|z|) \leq \left|f'(z)\right| \leq M'(|z|), \tag{2.46}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Si la igualdad se cumple en algún punto distinto de cero entonces f es una *rotación de $m(z)$ o $M(z)$, según sea el caso.*

Prueba. Consideremos como antes $q(z) = \frac{1}{2}S_f(z)$ y definamos $p(z) = t\frac{\pi^2}{4}$, para $0 < t \leq 1$, $z \in \mathbb{D}$, con lo cual la hipótesis (2.43) queda $|q(z)| \leq p(z)$. Se sigue de las Proposiciones 2.2.1 y 2.2.2, con $w = |u|$, que

$$|u(z)| \geq h(|z|), \tag{2.47}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. La solución h a (2.5), con esta nueva p, está dada por

$$h(z) = \cos\left(\frac{\pi\sqrt{t}}{2}z\right). \tag{2.48}$$

Con esto nos queda

$$M(z) = \frac{2}{\pi\sqrt{t}}\tan\left(\frac{\pi\sqrt{t}}{2}z\right) = \int_0^z \sec^2\left(\frac{\pi\sqrt{t}}{2}\varsigma\right)d\varsigma = \int_0^z h^{-2}(\varsigma)d\varsigma.$$

Así, de (2.8) y (2.47), tenemos

$$\left|f'(z)\right| = |u(z)|^{-2} \leq h^{-2}(|z|) = M'(|z|),$$

lo cual establece la cota superior para $|f'|$ en (2.46), y puesto que

$$|f(z)| = \left|\int_0^z u^{-2}(\varsigma)d\varsigma\right| \leq \int_0^z |u(\varsigma)|^{-2}|d\varsigma| \leq \int_0^z h^{-2}(|\varsigma|)\,|d\varsigma| = \int_0^z M'(|\varsigma|)\,|d\varsigma| = M(|z|),$$

también se sigue la cota superior para $|f|$ en (2.45).

Para establecer las correspondientes cotas inferiores consideramos la solución v del problema de valor inicial

$$v'' - pv = 0, \quad v(0) = 1, \quad v'(0) = 0.$$

Se sigue de la Proposición 2.2.7 que $|u(z)| \leq v(|z|)$ para todo $z \in \mathbb{D}$. De nuevo, v puede ser encontrada explicitamente

$$v(z) = \cosh\left(\frac{\pi\sqrt{t}}{2}z\right).$$

Entonces con

$$m(z) = \int_0^z \cosh^{-2}\left(\frac{\pi\sqrt{t}}{2}\varsigma\right)d\varsigma,$$

obtenemos

$$m'(|z|) = \cosh^{-2}\left(\frac{\pi\sqrt{t}}{2}\,|z|\right) = v^{-2}(|z|) \leq |u(z)|^{-2} = \left|f'(z)\right|;$$

esto es, la cota inferior para $|f'|$ en (2.46). Por otro lado, supongamos que el mínimo de $|f|$, en el círculo $C_r = \{z \mid |z| = r < 1\}$, es asumido en un punto z_0. Sea I el segmento que une 0 con $\varsigma_0 = f(z_0)$, se sigue de Lema 1.2.3 que existe una trayectoria J en $|z| < r$ que une 0 con z_1; de tal manera que $I = f(J)$, con lo cual tenemos

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |f(z_0)| = |\varsigma_0| = \int_I |d\varsigma| \\ &= \int_J \left|f'(z)\right| |dz| \geq \int_J m'(|z|)\,|dz| \\ &\geq \int_0^{|z_0|} m'(|z|)\,|dz| = m(|z_0|) = m(|z|), \qquad z \in C_{r,} \end{aligned} \tag{2.49}$$

donde la integral final es a lo largo del segmento de 0 a z_0. Y como $r \in [0,1)$ es arbitrario, tenemos la cota inferior para $|f|$ en (2.45).

Ahora consideramos los casos de la igualdad:

(i) $|f(z_0)| = M(|z_0|)$,

(ii) $|f'(z_0)| = M'(|z_0|)$,

(iii) $|f(z_0)| = m(|z_0|)$,

(iv) $|f'(z_0)| = m'(|z_0|)$,

para algún $z_0 \neq 0$. Tomando $e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)$, $e^{i\theta} = z_0/|z_0|$, podemos asumir que $z_0 = x_0 > 0$. El caso (i) será reducido al caso (ii), y el caso (iii) reducido al caso (iv).

Supongamos que $|f'(x_0)| = M'(x_0)$. Entonces, así como en la Proposición 2.2.2 donde $|u| = |f'|^{-\frac{1}{2}}$, la función $y = |f'|^{-\frac{1}{2}} - (M')^{-\frac{1}{2}}$ satisface

$$y''(x) + p(x)y(x) \geq 0, \quad y \geq 0, \quad y'(0) = 0$$

y $y(x_0) = 0$, para $x \in [0, x_0]$. Se sigue de la Proposición 2.2.5 que $y \equiv 0$, esto es, $|f'(x)| = M'(x)$ para todo $x \in [0, x_0]$. Veamos que $2q(x) = S_f(x) = S_M(x) = 2p(x)$ para todo $x \in [0,1)$. Sea

$\varphi = |f'|^{-1} = |u|^2 = (M')^{-1} = h^2$ en $[0, x_0]$. Entonces, como en la Proposición 2.2.2,

$$\begin{aligned} -\frac{\pi^2 t}{2}\cos\left(\pi\sqrt{t}z\right) &= \varphi'' = -(q+\overline{q})\,|u|^2 + 2\,|u'|^2 \\ &\geq -2ph^2 + 2(h')^2 = -\frac{\pi^2 t}{2}\cos\left(\pi\sqrt{t}z\right). \end{aligned}$$

Pero $|u'|^2 \geq (|u|')^2 = (h')^2$ y $-(q+\overline{q}) \geq -2p$. Así debemos tener que $|u'|^2 = (h')^2$ y $-(q+\overline{q}) = -2p$, de donde $q = p$ en $[0,1)$ y así en el disco entero; luego por la Proposición 1.1.1 $f = \sigma \circ M$, $\sigma \in M\ddot{o}b$ pero como antes, resulta que $\sigma(z) = z$ a causa de las normalizaciones y por tanto $f = M$ en $\mathbb{D}$; lo cual establece el caso (ii). Para establecer el caso (i), supongamos $|f(x_0)| = M(x_0)$. Entonces la cadena de desigualdades,

$$|f(x_0)| \leq \int_0^{x_0} \left|f'(x)\right| dx \leq \int_0^{x_0} N'(x)dx = N(x_0),$$

implica $|f'(x)| = M'(x)$ para toda $x \in [0, x_0]$ y estamos nuevamente en el caso (ii).

Ahora reducimos el caso (iii) al caso (iv). Supongamos $|f(x_0)| = m(x_0)$, $x_0 \in [0,1)$, entonces en las desigualdades en (2.49) tenemos igualdad en todas partes. Esto implica que J es el intervalo $[0, x_0]$ y que $|f'(x)| = n'(x)$ a lo largo del intervalo $(0, x_0]$. Ahora con

$$|u(x_0)| = \left|f'(x_0)\right|^{-\frac{1}{2}} = \left(m'(x_0)\right)^{-\frac{1}{2}} = v(x_0), \qquad x_0 \in (0,1)$$

se sigue de la Proposición 2.2.7 que $|f'(x)| = m'(x)$, para todo x en $[0,1)$, y usando el mismo argumento anterior, con $q = -\frac{1}{2}S_f$, se tiene que $S_f = S_n$ en $\mathbb{D}$, y así que $f = n$ en $\mathbb{D}$, lo cual termina la prueba del teorema. ■

Así como se hizo con el Teorema 2.2.8, derivamos algunas consecuencias del Teorema 2.4.1

Corolario 2.4.2 *Si $f \in \mathcal{F}_o^t$, $0 \leq t < 1$. Entonces f tiene una extensión a $\overline{\mathbb{D}}$, la cual es Lipschitz continua con constante $c = \frac{\pi}{2}\cos^{-2}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t}\right)$, para cada t fijo en $[0,1)$.*

Prueba. Supongamos que $f \in \mathcal{F}_o^t$, $0 \leq t < 1$. Así, de (2.46) obtenemos

$$\left|f'(z)\right| \leq \cos^{-2}\left(\frac{\pi\sqrt{t}}{2}\,|z|\right),$$

para $0 \leq t < 1$. Puesto que $0 \leq \frac{\pi\sqrt{t}}{2}\,|z| < \frac{\pi\sqrt{t}}{2} < \frac{\pi}{2}$, y la función coseno es decreciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, se sigue

$$\cos^{-2}\left(\frac{\pi\sqrt{t}}{2}\,|z|\right) \leq \cos^{-2}\left(\frac{\pi\sqrt{t}}{2}\right), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Sean z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$ y, como antes, Γ el segmento hiperbólico que une z_1 y z_2. Entonces por el Lema 1.2.5, Γ tiene longitud euclidiana $l \leq \frac{\pi}{2}\,|z_1 - z_2|$. Así, para $\xi \in \Gamma$

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &\leq \int_\Gamma \left|f'(\xi)\right| |d\xi| \leq \cos^{-2}\left(\frac{\pi\sqrt{t}}{2}\right)\int_\Gamma |d\xi| = \cos^{-2}\left(\frac{\pi\sqrt{t}}{2}\right) l \\ &\leq \frac{\pi}{2}\cos^{-2}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t}\right)|z_1 - z_2|, \end{aligned}$$

de donde f es uniformemente continua en $\mathbb{D}$ y así, por el Teorema 1.2.4, f puede ser extendida de manera continua a $\overline{\mathbb{D}}$ y dicha extensión satisface la misma condición de Lipschitz. ■

También de manera análoga al Corolario 2.2.10 tenemos el siguiente

Corolario 2.4.3 *Sea $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ analítica y localmente univalente en $\mathbb{D}$. Si f satisface (2.33) entonces f no asume el valor $-a_2^{-1}$ en $\mathbb{D}$.*

Prueba. Sea $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ y consideremos $g = f/(1 + a_2 f) = z + \left(a_3 - a_2^2\right) z^3 + \cdots$. La función g es claramente meromorfa en $\mathbb{D}$ y el problema es ver si ésta tiene un polo en un punto z_0, donde $f(z_0) = -a_2^{-1}$. Supongamos primero que f satisface (2.33). Luego por la Proposición 1.1.1, g satisface (2.33), donde sabemos que la derivada Schwarziana en un polo está definida vía inversión. Si $|z| < r \leq 1$ es el disco más grande sobre el cual g es analítica, entoces se sigue del Teorema 2.4.1 que

$$|g(z)| \leq M(|z|) = \frac{2}{\pi\sqrt{t}}\tan\left(\frac{\pi\sqrt{t}}{2}\,|z|\right)$$

en $|z| < r$. Luego g es acotada sobre $|z| < r$ y así no puede tener polos en $\mathbb{D}$. Por lo tanto f no asume el valor $-a_2^{-1}$ en $\mathbb{D}$. ■

Como consecuencia del Teorema 2.4.1, podemos dar una prueba mucho más simple del criterio de Nehari, enunciado en el Teorema 2.3.1, de la siguiente manera:

Corolario 2.4.4 *Sea f analítica y localmente univalente en $\mathbb{D}$, cuya derivada Schwarziana satisface la condición (2.33), entonces f es univalente en $\mathbb{D}$.*

Prueba. Supongamos que f es analítica, satisface (2.33) y que $f(z_1) = f(z_2)$, para z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$. La condición (2.33) es invariante bajo la composición $M \circ f$, $M \in M\ddot{o}b(\mathbb{D})$, y podemos por lo tanto suponer que $z_1 = 0$. Ahora, normalizamos f por medio de una transformación de Möbius, de tal forma que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $f''(0) = 0$. Entonces la función normalizada f es de nuevo analítica, y se sigue de (2.45) que

$$m(|z_2|) = \frac{2}{\pi\sqrt{t}} \tanh\left(\frac{\pi\sqrt{t}}{2}|z_2|\right) \leq |f(z_2)| = |f(z_1)| = 0$$

de lo cual se sigue que $z_2 = 0 = z_1$. ■

2.5 Conclusión

En este trabajo se mostró un teorema de acotamiento establecido por Chuaqui y Osgood para funciones en las familias de Nehari $\mathcal{N}_o$ y $\mathcal{N}_o^t$, $0 \leq t < 1$. Usando un resultado de Nehari y, una generalización de este, debida a Gehring y Pommerenke, definimos una nueva familia de funciones $\mathcal{F}_0^t$, $0 \leq t < 1$ y, usando las ideas del teorema mostrado por Chuaqui y Osgood, mostramos un nuevo teorema de acotamiento para las funciones en la familia $\mathcal{F}_0^t$, $0 \leq t < 1$.
Los teoremas de acotamiento, antes mencionados, nos permiten concluir que las funciones en las familias de Nehari, $\mathcal{N}_o$ y $\mathcal{N}_o^t$, $0 \leq t < 1$, y en la nueva familia $\mathcal{F}_0^t$, $0 \leq t < 1$, las cuales se suponen meromorfas y localmente inyectivas en $\mathbb{D}$, resultan ser funciones analíticas e inyectivas, al estar acotada por funciones de las cuales conocemos explicitamente su comportamiento.
Algo interesante, que se podría hacer en un trabajo posterior, es analizar la geometría de las funciones extremales, m y M, definidas para el nuevo teorema de acotamiento.

Bibliografía

[1] Ahlfors, L.V. y Weill, G. A uniqueness theorem for Beltrami equations. *Proc. Amer. Soc.,* 13:975-978, 1962.

[2] Chuaqui, M. y Osgood, B. Sharp distortion theorems associated with the Schwarzian derivative. *Jour. London Math. Soc.* (2), 48:289-298, 1993.

[3] Conway, J. Functions of One Complex Variable. Springer-Verlag, 1995.

[4] Essén, M. y Keogh, F. The Schwarzian derivative and estimates of functions analytic in the unit disk. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **78** (1975), 501-511.

[5] Gehring, F. W. y Pommerenke, Ch. On the Nehari univalence criterion and quasicircles. *Comment. Math. Helv.,* 59:226-242, 1984.

[6] Hille, E. Remarks on a paper by Zeev Nehari. *Bull. Amer. Math. Soc.,* **55** (1949), 552-553.

[7] Krauss, W. Über den Zusammenhang einiger Charakteristiken eines einfach zusammenhängenden Bereiches mit der Kreisabbildung. *Mitt. Math. Sem. Giessen,* 21:1-28, 1932.

[8] Lehto, O. Quasiconformal Mappings in the Plane. Springer-Verlag, 1973.

[9] Lehto, O. Univalent functions and Teichmüller spaces. Springer-Verlag, 1987.

[10] Nehari, Z. Conformal Mapping. Dover Publications, 1975.

[11] Nehari, Z. The Schwarzian derivative and schlicht functions. *Bull. Amer. Math. Soc.,* 55:545-551, 1949.

[12] Palka, B. An Introduction to Complex Function Theory. Springer-Verlag, 1991.

[13] Simmons, G. Introduction to Topology and Modern Analysis. Mac Graw Hill, 1963.