

FUNCIONES UNIVALENTES OROCÍCLICAMENTE CONVEXAS

por

Juan Carlos López Ríos

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al Título de

Magíster en Ciencias - Matemáticas

Director: Juan Humberto Arango Escalante

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Marzo 2010

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por COLCIENCIAS, contrato 1118-405-20316 y DIME.

Resumen

En este trabajo se estudian algunas propiedades de una nueva clase de funciones conocidas como funciones orocíclicamente convexas; las cuales envían el disco unitario en dominios orocíclicamente convexos contenidos en el disco unitario. Estos dominios resultan de considerar el caso $|\kappa| = 2$, donde κ es la curvatura hiperbólica y que corresponden a orociclos en \mathbb{D} , o círculos en \mathbb{D} que tocan \mathbb{T} . Resulta que estas funciones son más difíciles de estudiar que las funciones h-convexas.

Contenido

Introducción	vi
1 Preliminares	1
1.1 Mapeos Conformes	1
1.2 Sucesiones de Mapeos Conformes	4
1.3 Continuidad	5
1.4 Cortes Transversales y Terminales Primos	5
1.5 Espacios de Hardy H^p	8
2 Funciones Univalentes Orocíclicamente Convexas	10
2.1 Algunas Propiedades Generales	10
2.2 El Ejemplo Canónico	15
2.3 El Argumento de La Derivada	19
2.4 Algunos Estimativos Precisos	21
Bibliografía	28

Agradecimientos

Mi primera mención a mis padres: José Domingo y Luz Elena, quienes me apoyaron incondicionalmente durante todo este tiempo y me indicaron el camino a seguir, mucho antes de que siquiera yo lo entendiera.

Agradezco a la Universidad Nacional, para mí la mejor Universidad de Colombia, por acogerme y con ella a los profesores de la Facultad de Ciencias; el mejor equipo humano que se podría desear.

Al profesor Juan Humberto Arango le agradezco su apoyo constante, sus ideas y sugerencias durante el desarrollo de este trabajo.

Quiero mencionar también a los siguiente profesores a los cuales les debo, de manera especial, un agradecimiento por su cercanía conmigo: Diego Mejía Duque, Carlos Mejía Salazar, Margarita Toro Villegas, Jorge Mejía Laverde, Hugo Arbelaez, Elder Villamizar.

Introducción

Un dominio G en \mathbb{C} es convexo si y sólo si, para todo $w \in \partial G$, existe un semiplano H tal que $w \in \partial H$ y $G \cap H = \emptyset$. El hecho de que $C = \partial H$ es una recta puede ser expresado de dos maneras equivalentes:

- (i) C es una curva maximal de curvatura cero;
- (ii) C es una curva maximal no compacta de curvatura constante.

Consideremos la métrica hiperbólica $ds = (1 - |z|^2)^{-1} |dz|$ en el disco unitario \mathbb{D} . Sea $C : w(s)$, $s \in I = [0, 1]$, una curva de clase C^2 en \mathbb{D} que está parametrizada por la longitud de arco hiperbólica; esto es,

$$|w'| = 1 - |w|^2, \quad w'' \text{ es continua en } I.$$

Entonces la curvatura hiperbólica κ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{w''}{w'} + \frac{2\bar{w}w'}{1 - |w|^2} = i\kappa.$$

Algunas propiedades de la curvatura hiperbólica son las siguientes:

1. Las curvaturas hiperbólica y euclidiana coinciden en el origen.
2. Si γ es una trayectoria en \mathbb{D} , entonces γ tiene curvatura hiperbólica constante si y sólo si γ tiene curvatura euclidiana constante.
3. La curvatura hiperbólica es invariante bajo $\text{Aut}(\mathbb{D})$.

Sea $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. Si $C \subset \mathbb{D}$ es una curva maximal (es decir que no puede ser extendida a una curva mayor en \mathbb{D}) de curvatura hiperbólica constante κ , entonces se tienen los siguientes tres casos:

- $|\kappa| < 2$: C es un arco circular de \mathbb{T} a \mathbb{T} .
- $|\kappa| = 2$: C es un círculo en \mathbb{D} que toca a \mathbb{T} .
- $|\kappa| > 2$: C es un círculo contenido en \mathbb{D} .

(Recuérdese que las geodésicas tienen curvatura hiperbólica constante igual a 0).

Así, las curvas maximales no compactas de curvatura constante son aquéllas para las que $|\kappa| \leq 2$, y se tiene que las condiciones (i) y (ii) son diferentes en el caso hiperbólico (en el caso euclidiano

se cumple (i) si y sólo si se cumple (ii).

Ma y Minda [MaM1] consideraron la condición (i): Un dominio $G \subset \mathbb{D}$ es hiperbólicamente convexo (h-convexo) si, para todo $w \in \mathbb{D} \cap \partial G$, existe un semiplano hiperbólico H con $w \in \partial H$ y $G \cap H = \phi$. Véase, por ejemplo, [MaM1; MaM2; MeP2; MeP3; MePV] para resultados sobre mapeos conformes de \mathbb{D} en dominios h-convexos.

Mejía y Pommerenke [MeP1] consideraron la condición (ii), a saber, el caso extremo $|\kappa| = 2$: Un orodisco es, por definición, el dominio interior de un círculo en \mathbb{D} que toca a \mathbb{T} . Un dominio $G \subset \mathbb{D}$ será llamado orocíclicamente convexo (oro-convexo) si, para todo $w \in \mathbb{D} \cap \partial G$, existe un orodisco H tal que

$$w \in \partial H \quad \text{y} \quad G \cap H = \phi.$$

Una función orocíclicamente convexa f es un mapeo conforme de \mathbb{D} sobre un dominio oro-convexo $G \subset \mathbb{D}$. Resulta que estas funciones son más difíciles de estudiar que las funciones h-convexas.

El objetivo del trabajo es estudiar el artículo: *Horocyclically Convex Univalent Functions* [MeP1], en el cual se presentan varios resultados sobre una nueva clase de funciones conformes del disco en dominios oroconvexos, conocidas como funciones oroconvexas; se hace una presentación adecuada y clara de éstos resultados de manera que sean más entendibles para el lector.

En el capítulo 1 haremos un recuento de algunas propiedades que se utilizarán más adelante en el capítulo 2; la mayoría de ellas están recopiladas en el libro de Christian Pommerenke: *Boundary Behaviour of Conformal Maps*.

En el capítulo 2 se demuestran algunos resultados conocidos sobre funciones oroconvexas contenidos en [MeP1]. En la sección 2.1 se muestra que toda función oroconvexa f es continua en $\overline{\mathbb{D}}$, en la sección 2.2 se presenta un ejemplo canónico de las funciones oroconvexas y finalmente en la sección 2.4 se establecen algunos estimativos para $f(\zeta)$ y $f'(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{T}$.

Capítulo 1

Preliminares

A continuación presentamos algunos resultados que serán utilizados en el trabajo más adelante. La mayoría se encuentran en [P2].

Usaremos las siguientes notaciones:

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\} \quad (a \in \mathbb{C}, r > 0)$$

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} = D(0, 1) \quad (\text{Disco unitario})$$

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \partial\mathbb{D} \quad (\text{Círculo unitario})$$

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \quad (\text{Esfera de Riemann})$$

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{\infty\} \quad (\text{Exterior del círculo unitario})$$

La métrica esférica en $\widehat{\mathbb{C}}$ está definida por

$$d^\#(z, w) = \frac{|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}} \quad \text{para } z, w \in \mathbb{C};$$

además,

$$d^\#(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} \quad \text{para } z \in \mathbb{C}.$$

Las métricas esférica y euclidiana son equivalentes en conjuntos acotados en \mathbb{C} .

Definición 1 *Un conjunto compacto conexo con más de un punto es llamado un continuo.*

Definición 2 *Decimos que dos puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$ están separados por el conjunto cerrado A si pertenecen a diferentes componentes de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus A$. Así, los dos puntos no están separados por A si, es posible conectarlos por una curva sin tocar A .*

Similarmente, si $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ es un dominio, se dice que z y w están separados por K en U si ellos pertenecen a componentes diferentes de $U \setminus K$.

1.1 Mapeos Conformes

Decimos que f mapea el dominio $H \subset \widehat{\mathbb{C}}$ conformemente sobre $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ si [P2, pág. 4]:

- (i) f es meromorfa en H ;
- (ii) f es inyectiva;

(iii) $f(H) = G$.

Se dice que f mapea H conformemente en G si (iii) es reemplazada por $f(H) \subset G$. Una función univalente es lo mismo que un mapeo conforme.

Algunas propiedades sobre mapeos conformes:

(a) La inversa es también un mapeo conforme.

(b) Un mapeo conforme es un homeomorfismo, i.e. un mapeo inyectivo y continuo con inversa continua.

(c) Ángulos entre curvas, incluyendo la orientación, son preservados por mapeos conformes.

Teorema 1 (*Principio de Reflexión*) [Pa, pág. 453] Sea D un dominio en el plano complejo, simétrico con respecto al eje real. Sean G y G^* las dos componentes de $D \setminus \mathbb{R}$ y sea $I = D \cap \mathbb{R}$. Si $f : G \cup I \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua que es analítica en G y real valuada en I entonces la función $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in G \cup I, \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{si } z \in G^*, \end{cases}$$

es una función analítica.

Definición 3 Un dominio G en $\widehat{\mathbb{C}}$ es llamado simplemente conexo si el conjunto cerrado $\widehat{\mathbb{C}} \setminus G$ es conexo.

Teorema 2 (*Teorema del Mapeo de Riemann*) [P2, pág. 4] Sea $G \subsetneq \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo y sean $w_0 \in G$ y $0 \leq \alpha < 2\pi$. Entonces existe un único mapeo conforme de \mathbb{D} sobre G tal que $f(0) = w_0$ y $\arg f'(0) = \alpha$.

Sea \mathbf{S} la clase de las funciones analíticas y univalentes en \mathbb{D} normalizadas en la forma $f(0) = 0, f'(0) = 1$; esto es, $f \in \mathbf{S}$ si

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \quad (|z| < 1).$$

Sea Σ la clase de las funciones

$$g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + \dots \quad (|z| > 1)$$

que son univalentes en $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{\infty\}$.

Si $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ pertenece a \mathbf{S} entonces la función

$$g(z) = \frac{1}{f(z^{-1})} = \frac{z}{1 + a_2 z^{-1} + \dots} = z - a_2 + \dots \quad (|z| > 1)$$

pertenece a Σ y satisface $g(z) \neq 0$.

Nota 1 [Véase P1, pág. 11] La función f del Teorema del Mapeo de Riemann no necesariamente pertenece a la clase \mathbf{S} pero puede ser escrita como

$$w_0 + r_0 e^{i\alpha} g(z), \quad g \in \mathbf{S}$$

donde $r_0 = r_0(G, w_0)$ es el (único) "radio interior del mapeo" del dominio G con respecto a w_0 .

Un ángulo de Stolz en $\zeta \in \mathbb{T}$ es un conjunto de la forma

$$\Delta = \{z \in \mathbb{D} : |\arg(1 - \bar{\zeta}z)| < \alpha, |z - \zeta| < \rho\} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \rho < 2 \cos \alpha\right).$$

Sea f una función de \mathbb{D} en $\widehat{\mathbb{C}}$. Decimos que f tiene el límite angular $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ en $\zeta \in \mathbb{T}$ si

$$f(z) \longrightarrow a \text{ cuando } z \longrightarrow \zeta, \quad z \in \Delta$$

para cada ángulo de Stolz en ζ . Decimos que f tiene el límite irrestricto $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ en ζ si

$$f(z) \longrightarrow a \text{ cuando } z \longrightarrow \zeta, \quad z \in \mathbb{D};$$

Si se define $f(\zeta) = a$ entonces f es continua en ζ como función en $\mathbb{D} \cup \{\zeta\}$. Se usará el símbolo $f(\zeta)$ para denotar el límite angular cuando éste exista (su existencia no implica que f tenga un límite irrestricto).

Si f es una función de \mathbb{D} sobre $G \subset \mathbb{C}$, se define la derivada angular de f en $\zeta \in \mathbb{T}$ como

$$f'(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta, z \in \Delta} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}, \quad \Delta \text{ un ángulo de Stolz.}$$

Definición 4 [P2, pág. 80] Sea f analítica en \mathbb{D} . Decimos que f es conforme en $\zeta \in \mathbb{T}$ si la derivada angular $f'(\zeta)$ existe y es diferente de $0, \infty$. Decimos que f es isogonal en ζ si existe un límite angular finito $f(\zeta)$ y si

$$\arg \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \longrightarrow \gamma \text{ cuando } z \longrightarrow \zeta, \quad z \in \Delta$$

para γ finito y para todo ángulo de Stolz Δ .

Nota 2 Es claro que si f es conforme en ζ entonces f es isogonal en ζ .

Proposición 1 [P2, pág. 81] Si el mapeo conforme f es isogonal en $\zeta \in \mathbb{T}$, entonces curvas suaves en un ángulo de Stolz en ζ son enviadas en curvas suaves y los ángulos entre curvas son preservados.

El siguiente corolario es una consecuencia del Teorema de distorsión de Koebe [P2, pág. 9].

Corolario 1 *Si f mapea \mathbb{D} conformemente en \mathbb{C} entonces*

$$\frac{1}{4}(1 - |z|^2) |f'(z)| \leq \text{dist}(f(z), \partial f(\mathbb{D})) \leq (1 - |z|^2) |f'(z)| \quad \text{para } z \in \mathbb{D}.$$

Proposición 2 (Principio de la frontera) [P2, pág. 16]. *Si f es analítica en \mathbb{D} y continua e inyectiva sobre \mathbb{T} entonces f es inyectiva en \mathbb{D} .*

Proposición 3 (Lema de Julia - Wolff) [P2, pág. 71] *Sea φ una función analítica en \mathbb{D} con $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Si $\zeta \in \mathbb{T}$ y $\varphi(\zeta) \in \mathbb{T}$ entonces $\varphi'(\zeta)$ existe y satisface $1 \leq |\varphi'(\zeta)| \leq \infty$.*

Proposición 4 (Lema de Schwarz) [Pa, pág. 172] *Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una función analítica tal que $f(0) = 0$. Entonces*

(i) $|f(z)| \leq |z|$, $z \in \mathbb{D}$,

(ii) $|f'(0)| \leq 1$.

Además, a menos que f sea una función de la forma $f(z) = cz$, $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, la desigualdad es estricta en (i) y (ii).

1.2 Sucesiones de Mapeos Conformes

Definición 5 *Sea $w_0 \in \mathbb{C}$ y sean G_n dominios con $w_0 \in G_n \subset \mathbb{C}$ y $G \subset \mathbb{C}$. Decimos que*

$$G_n \rightarrow G \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \quad \text{con respecto a } w_0$$

en el sentido del kernel si

(i) *O bien $G = \{w_0\}$, o G es un dominio distinto de \mathbb{C} con $w_0 \in G$ tal que para todo $w \in G$ existen una vecindad $V(w)$ y un $N \in \mathbb{N}$ tales que para todo $n \geq N$ y todo $w' \in V(w)$, $w' \in G_n$.*

(ii) *Para $w \in \partial G$ existe $w_n \in \partial G_n$ tal que $w_n \rightarrow w$ cuando $n \rightarrow \infty$.*

Teorema 3 (Teorema del Kernel de Carathéodory) [P2, pág. 14] *Sean f_n funciones conformes de \mathbb{D} sobre $G_n \subset \mathbb{C}$, con $f_n(0) = w_0$ y $f'_n(0) > 0$. Si $G = \{w_0\}$, sea $f(z) \equiv w_0$; en otro caso, sea f una función conforme de \mathbb{D} sobre G con $f(0) = w_0$ y $f'(0) > 0$. Entonces, cuando $n \rightarrow \infty$, $f_n \rightarrow f$ uniformemente en subconjuntos compactos de \mathbb{D} si y sólo si $G_n \rightarrow G$ con respecto a w_0 en el sentido de convergencia del kernel.*

1.3 Continuidad

Definición 6 El conjunto cerrado $A \subset \mathbb{C}$ es llamado localmente conexo si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para cualquier par de puntos $a, b \in A$ con $|a - b| < \delta$, podemos encontrar un continuo B con

$$a, b \in B \subset A, \quad \text{diam } B < \epsilon.$$

Teorema 4 [P2, pág. 20] Sea f una función que mapea \mathbb{D} conformemente sobre el dominio acotado G . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) f tiene una extensión continua a $\overline{\mathbb{D}}$;
- (ii) ∂G es una curva;
- (iii) ∂G es localmente conexa;
- (iv) $\mathbb{C} \setminus G$ es localmente conexo.

1.4 Cortes Transversales y Terminales Primos

Las definiciones y resultados que se presentan a continuación hacen parte de las secciones 2.4 y 2.5 del libro Boundary Behaviour of Conformal Maps [P2].

Consideramos dominios simplemente conexos en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Definición 7 Sea G un dominio simplemente conexo en $\widehat{\mathbb{C}}$. Un Corte transversal (crosscut) C de G es un arco de Jordan abierto en G tal que $\overline{C} = C \cup \{a, b\}$ con $a, b \in \partial G$. Se permite que $a = b$.

Proposición 5 [P2, pág. 27] Si C es un corte (corte transversal) de un dominio $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ simplemente conexo entonces $G \setminus C$ tiene exactamente dos componentes G_0 y G_1 que satisfacen

$$G \cap \partial G_0 = G \cap \partial G_1 = C.$$

Proposición 6 [P2, pág. 29] Si f es una función que mapea \mathbb{D} conformemente sobre G , entonces la preimagen de una curva en G que termina en un punto de ∂G es una curva en \mathbb{D} que termina en un punto de \mathbb{T} ; y curvas con puntos terminales distintos sobre ∂G tienen preimágenes con puntos terminales distintos sobre \mathbb{T} .

Definición 8 Sea G un dominio simplemente conexo en $\widehat{\mathbb{C}}$. Decimos que $(C_n)_n$ es una nulcadena de G si:

- (i) C_n es un corte de G ($n=0,1,\dots$);
- (ii) $\overline{C_n} \cap \overline{C_{n+1}} = \phi$ ($n=0,1,\dots$);

- (iii) C_n separa C_0 y C_{n+1} en G ($n=1,2,\dots$);
 - (iv) $\text{diam}^\# C_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$,
- donde $\text{diam}^\# C_n$ es el diámetro esférico de C_n .

Si ∂G es acotada, podemos reemplazar el diámetro esférico $\text{diam}^\#$ por el diámetro euclidiano diam . Por la proposición 5 y por (i) hay exactamente una componente V_n de $G \setminus C_n$ que no contiene a C_0 . Así podemos escribir (iii) como

$$V_{n+1} \subset V_n \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Sea (C'_n) otra nulcadena de G . Decimos que (C'_n) es *equivalente* a (C_n) si, para todo m suficientemente grande, existe n tal que

$$C'_m \text{ separa } C_n \text{ de } C_0, \quad C_m \text{ separa } C'_n \text{ de } C'_0.$$

Si V'_n es la componente de $G \setminus C'_n$ que no contiene a C'_0 , lo anterior puede ser expresado como

$$V_n \subset V'_m, \quad V'_n \subset V_m. \quad (\#)$$

Es fácil ver que esto define una relación de equivalencia entre nulcadenas. Las clases de equivalencia son llamadas los *terminales primos* de G . Denotemos por $P(G)$ el conjunto de todos los terminales primos de G . A continuación se enuncia el siguiente resultado importante debido a Carathéodory:

Teorema 5 (*Teorema del terminal primo*) [P2, pág. 30] *Sea f una función que mapea \mathbb{D} conformemente sobre G . Entonces existe un mapeo biyectivo*

$$\widehat{f}: \mathbb{T} \longrightarrow P(G)$$

tal que, si $\zeta \in \mathbb{T}$ y si (C_n) es una nulcadena que representa el terminal primo $\widehat{f}(\zeta)$, entonces existen sucesiones $(\delta_n), (\delta'_n)$ con $0 < \delta_n < \delta'_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) tales que

$$f^{-1}(C_n) \subset \{z \in \mathbb{D} : \delta_n < |z - \zeta| < \delta'_n\} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Sea G un dominio simplemente conexo en $\widehat{\mathbb{C}}$ y sea p un terminal primo de G representado por la nul-cadena (C_n) . Denotamos, de nuevo, por V_n la componente de $G \setminus C_n$ que no contiene a C_0 . Entonces $(\overline{V_n})$ es una sucesión decreciente de conjuntos compactos conexos no vacíos en $\widehat{\mathbb{C}}$. La *impresión* de p definida por

$$I(p) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n}$$

es por lo tanto un conjunto compacto conexo no vacío y así, es un solo punto o un continuo; si $I(p)$ es un punto se dice que el terminal primo es *degenerado*.

Veamos que la anterior definición de $I(p)$ es independiente de la escogencia de la nulcadena que representa el terminal primo p : Sea (C'_n) otra nulcadena que represente a p . Dado $m \in \mathbb{N}$, m suficientemente grande, por $(\#)$ existe n tal que

$$V_n \subset V'_m, \quad V'_n \subset V_m.$$

Luego $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n \subset \overline{V}'_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, m grande; por lo tanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n \subset \bigcap_{k \geq m}^{\infty} \overline{V}'_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}'_n$. Análogamente se prueba que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}'_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n$. Se concluye entonces que $I(p) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}'_n$.

Definición 9 Sea f una función en \mathbb{D} con valores en $\widehat{\mathbb{C}}$. Se define el conjunto de agrupación (irrestricto) $C(f, \zeta)$ de f en $\zeta \in \mathbb{T}$ como el conjunto de todos los $\omega \in \widehat{\mathbb{C}}$ para los cuales existen sucesiones (z_n) con

$$z_n \in \mathbb{D}, \quad z_n \rightarrow \zeta, \quad f(z_n) \rightarrow \omega \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Puede verse que

$$C(f, \zeta) = \bigcap_{r>0} \overline{\{f(z) : z \in \mathbb{D}, |z - \zeta| < r\}}.$$

Si f es continua en \mathbb{D} se sigue que $C(f, \zeta)$ es compacto y conexo en $\widehat{\mathbb{C}}$ y por lo tanto un continuo o un punto.

Teorema 6 [P2, pág. 34] Sea f una función que mapea \mathbb{D} conformemente sobre $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$. Si $\zeta \in \mathbb{T}$ y $\widehat{f}(\zeta)$ denota el único terminal primo de G que corresponde a ζ entonces

$$I(\widehat{f}(\zeta)) = C(f, \zeta).$$

Corolario 2 Si f es una función que mapea \mathbb{D} conformemente sobre $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$, entonces f tiene el límite irrestricto a en ζ si y sólo si $I(\widehat{f}(\zeta)) = \{a\}$.

Así, f es continua en ζ si y sólo si el terminal primo $\widehat{f}(\zeta)$ es degenerado.

El siguiente resultado puede encontrarse en el libro Univalent Functions de Christian Pommerenke [P1] y será utilizado para demostrar que la familia de las funciones oroconvexas no es equicontinua.

Corolario 3 [P1, pág. 345] Sea $g \in \Sigma$, $z_1, z_2 \in \partial\Delta$. Si el corte C de $g(\Delta)$ separa a (ambos) $g(z_1)$ y $g(z_2)$ de ∞ entonces

$$l(C) \geq \frac{1}{4} |z_1 - z_2|^2,$$

donde l es la longitud euclidiana de C .

1.5 Espacios de Hardy H^p

Los siguientes resultados sobre Espacios de Hardy pueden ser encontrados en el libro de Peter Duren [D] llamado "Theory of H^p Spaces".

Para funciones analíticas f en el disco y $0 \leq r < 1$, consideremos las integrales

$$M_p(r, f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p}, \quad 0 < p < \infty;$$

$$M_\infty(r, f) = \max_{0 \leq \theta < 2\pi} |f(re^{i\theta})|.$$

Una función f analítica en el disco unitario $|z| < 1$ se dice de clase H^p ($0 < p \leq \infty$) si $M_p(r, f)$ permanece acotada cuando $r \rightarrow 1$.

Es claro que $H^p \supset H^q$ si $0 < p < q \leq \infty$.

Fórmula integral de Poisson [P1, pág. 295]: Si f es analítica en \mathbb{D} y la función $v(z) = \text{Im } f(z)$ es continua en $\bar{\mathbb{D}}$ entonces

$$f(z) = \text{Re } f(0) + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} v(e^{it}) dt$$

y por lo tanto

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} v(e^{it}) dt.$$

Definición 10 (Subordinación) [D, pág. 10] Sean f y g funciones analíticas en \mathbb{D} . Decimos que f está subordinada a g si existe una función φ analítica (no necesariamente univalente) en \mathbb{D} que satisface $\varphi(0) = 0$, $|\varphi(z)| < 1$ tal que $f(z) = g(\varphi(z))$ ($|z| < 1$). La subordinación se denota por $f \prec g$.

Lema 1 [P1, pág. 36] Sea g una función univalente en \mathbb{D} . Entonces $f \prec g$ si y sólo si $f(0) = g(0)$ y $f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D})$.

Teorema 7 (Teorema de subordinación de Littlewood) [D, pág. 10] Sean f y g funciones analíticas en \mathbb{D} y supongamos que $f \prec g$. Entonces $M_p(r, f) \leq M_p(r, g)$, $0 < p \leq \infty$.

Teorema 8 [D, pág. 34] Una función f analítica en \mathbb{D} es representable en la forma

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) \varphi(t) dt$$

como la integral de Poisson de una función $\varphi \in L^1$ si y sólo si $f \in H^1$. En este caso, $\varphi(t) = f(e^{it})$ c.t.p y $P(r, \theta) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2}$ es el Kernel de Poisson.

Teorema 9 [D, pág. 34] Toda función analítica f con parte real positiva en \mathbb{D} es de clase H^p para todo $p < 1$.

Capítulo 2

Funciones Univalentes Orocíclicamente Convexas

2.1 Algunas Propiedades Generales

Definición 11 Sea H una circunferencia (euclidiana) en \mathbb{D} . Si H toca a \mathbb{T} entonces decimos que H es un orociclo en \mathbb{D} .

Definición 12 Un dominio $G \subset \mathbb{D}$ será llamado orocíclicamente convexo (oroconvexo) si, para todo $\omega \in \mathbb{D} \cap \partial G$, existe un orociclo H tal que

$$\omega \in \partial H \quad \text{y} \quad G \cap H = \phi.$$

Definición 13 Una función f se dice orocíclicamente convexa si f es un mapeo conforme de \mathbb{D} sobre un dominio oroconvexo $G \subset \mathbb{D}$.

Como los automorfismos del disco envían orociclos en orociclos entonces se obtiene fácilmente el siguiente resultado.

Teorema 10 Si f es una función oroconvexa y $\sigma, \tau \in M\ddot{o}b(\mathbb{D})$ entonces $\sigma \circ f \circ \tau$ es una función oroconvexa.

Como consecuencia del teorema anterior, siempre podemos suponer la normalización $f(0) = 0$ y $f'(0) > 0$.

Teorema 11 [MeP1] Toda función orocíclicamente convexa tiene una extensión continua a $\overline{\mathbb{D}}$.

Prueba. Sea f oroconvexa tal que $f(0) = 0$, $G = f(\mathbb{D})$. Como G es simplemente conexo, podemos tomar $(C_n)_n$ una nul-cadena de G . Sean w_n^+, w_n^- los extremos de C_n en ∂G y V_n la componente de $G \setminus C_n$ tal que $0 \notin V_n$. Veamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } V_n = 0$.

Como G es oroconvexo existen orociclos $H_n^\pm \subset \mathbb{D} \setminus G$ con $w_n^\pm \in \partial H_n^\pm$, siempre que $w_n^\pm \in \mathbb{D}$. Podemos suponer que existe $w_0 \in \partial G$ tal que $w_n^\pm \rightarrow w_0$ pues $\{w_n^+\}, \{w_n^-\}$ son sucesiones acotadas en $\overline{\mathbb{D}}$, luego existen subsucesiones $\{w_n^+\}, \{w_n^-\}$ convergentes; es decir, $w_n^+ \rightarrow w_0^+, w_n^- \rightarrow w_0^-$. Pero

$$d(w_0^+, w_0^-) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(w_n^+, w_n^-) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } C_n = 0,$$

por lo tanto $w_0^+ = w_0^- =: w_0$. Es posible diferenciar w_n^+ y w_n^- de la siguiente manera: Sea γ una curva contenida en G , que termina en w_0 , pasa por 0 y va desde 0 hasta un punto de la frontera de G que sea opuesto de w_0 ; este arco divide el dominio G en dos componentes G^+ y G^- tales que $\partial G^+ \cap \partial G^- = \gamma$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por la proposición 6, $f^{-1}(\gamma)$ es una curva en \mathbb{D} desde 0 hasta un punto en \mathbb{T} y también $f^{-1}(C_n)$ es un arco en \mathbb{D} con puntos terminales en \mathbb{T} . Entonces $f^{-1}(C_n)$ y $f^{-1}(\gamma)$ se cortan en algún punto pues, de lo contrario, $f(0) = 0 \in V_n$ lo cual es absurdo; por lo tanto, C_n y γ se cortan en algún punto. Así, w_n^+ será el correspondiente extremo de C_n tal que $w_n^+ \in \partial G^+$ y w_n^- el extremo tal que $w_n^- \in \partial G^-$.

Caso 1: $w_0 \in \mathbb{D}$.

En este caso podemos suponer que $w_n^+, w_n^- \in \mathbb{D}$ y que H_n^\pm convergen a orociclos H^\pm respectivamente cuando $n \rightarrow \infty$ (en el sentido de que los centros convergen): Sea c_n^+ el centro del orociclo H_n^+ , $n \in \mathbb{N}$. $\{c_n^+\}$ es una sucesión en $\overline{\mathbb{D}}$ compacto, luego podemos suponer que $\{c_n^+\}$ converge (basta tomar una subsucesión); digamos que $c_n^+ \rightarrow c^+$. Entonces $c^+ \in \mathbb{D}$; de lo contrario $\{r_n^+\}$, la sucesión de radios euclidianos de H_n^+ , es tal que $r_n^+ \rightarrow 0$, pero $r_n^+ = |w_n^+ - c_n^+|$, por lo tanto $\lim r_n^+ = |w_0 - c^+| = 0$, luego $w_0 \in \mathbb{T}$ que es una contradicción. Supongamos entonces que $r_n^+ \rightarrow r^+ = 1 - |c^+|$. Sea $H^+ = D(c^+, r^+)$. Entonces

$$|w_0 - c^+| \leq |w_0 - w_n^+| + |w_n^+ - c_n^+| + |c_n^+ - c^+| \rightarrow r^+ \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Además, si $|w_0 - c^+| < r^+$ entonces $\forall n \in \mathbb{N}$

$$r_n^+ = |w_n^+ - c_n^+| \leq |w_n^+ - w_0| + |w_0 - c^+| + |c_n^+ - c^+|$$

y por lo tanto

$$r^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n^+ \leq |w_0 - c^+| < r^+.$$

O sea que $r^+ = |w_0 - c^+|$; así $w_0 \in \partial H^+ \subset \mathbb{D} \setminus G$. Análogamente $H_n^- \rightarrow H^-$, con $w_0 \in \partial H^- \subset \mathbb{D} \setminus G$.

Construyamos un arco $A_n \subset \mathbb{D} \setminus G$ de w_n^+ a w_n^- de la siguiente manera: Tomamos un arco a lo largo de la normal interior a ∂H_n^+ en w_n^+ hasta tocar ∂H^+ (siempre es posible a partir de un $n \in \mathbb{N}$ pues $H_n^+ \rightarrow H^+$); luego vamos a lo largo de ∂H^+ hasta w_0 ; análogamente tomamos un arco a lo largo de la normal interior a ∂H_n^- en w_n^- hasta tocar ∂H^- y de allí hasta w_0 . Sea U_n el dominio acotado por A_n y C_n . Entonces $V_n \subset U_n$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{diam } V_n &\leq \text{diam } U_n = \text{diam } \partial U_n \\ &= \text{diam}(A_n \cup C_n) \leq \text{diam } A_n + \text{diam } C_n \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Caso 2: $w_0 \in \mathbb{T}$.

Supongamos que $w_n^+, w_n^- \in \mathbb{D}$. Probemos que $H_n^+ \cap H_n^- = \phi$. Consideremos γ_1 una curva contenida en G desde 0 hasta w_0 ; y γ_2 el radio $[0, -w_0]$. Si $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \phi$, tomemos $p \in \gamma_1 \cap \gamma_2$ de manera que p sea el punto más cercano a \mathbb{T} . Sea γ la curva por γ_1 , desde w_0 hasta p , unida a la curva por γ_2 , desde p hasta \mathbb{T} . Si $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \phi$, basta tomar $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Entonces, análogamente al caso anterior, γ corta a C_n en algún punto y por lo tanto γ divide a \mathbb{D} en dos componentes \mathbb{D}^+ y \mathbb{D}^- tales que $\mathbb{D}^+ \cap \mathbb{D}^- = \phi$ y $\mathbb{D}^+ \cup \mathbb{D}^- = \mathbb{D} \setminus \gamma$, además $w_n^+ \in \mathbb{D}^+, w_n^- \in \mathbb{D}^-$. Así, $H_n^+ \subset \mathbb{D}^+$ y $H_n^- \subset \mathbb{D}^-$, por lo tanto $H_n^+ \cap H_n^- = \phi$.

Sean ρ_n^\pm los radios euclidianos de H_n^\pm y ξ_n^\pm los puntos donde ∂H_n^\pm toca a \mathbb{T} . Por lo tanto si c_n^\pm es el centro de H_n^\pm , por la ley del coseno aplicada al triángulo con vértices en $0, w_n^\pm, c_n^\pm$ se obtiene

$$1 \geq \cos(\arg w_n^\pm - \arg \xi_n^\pm) = \frac{|w_n^\pm|^2 + (1 - \rho_n^\pm)^2 - (\rho_n^\pm)^2}{2|w_n^\pm|(1 - \rho_n^\pm)} = \frac{1 + |w_n^\pm|^2 - 2\rho_n^\pm}{2|w_n^\pm|(1 - \rho_n^\pm)}.$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + |w_n^\pm|^2 - 2\rho_n^\pm}{2|w_n^\pm|(1 - \rho_n^\pm)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 2\rho_n^\pm}{2(1 - \rho_n^\pm)} = 1$$

pues $\rho_n^\pm < \frac{1}{2}$ y $|w_n^\pm| \rightarrow |w_0| = 1$, entonces $\arg w_n^\pm - \arg \xi_n^\pm \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, luego $\lim_{n \rightarrow \infty} \arg \xi_n^\pm = \lim_{n \rightarrow \infty} \arg w_n^\pm = \arg w_0$, además $|w_n^\pm| \rightarrow |w_0| = 1 = |\xi_n^\pm|$, y con eso $\xi_n^\pm \rightarrow w_0$.

Tenemos entonces $H_n^\pm \subset \mathbb{D} \setminus G$, $w_n^\pm, \xi_n^\pm \in \partial H_n^\pm$ y $w_n^\pm \rightarrow w_0, \xi_n^\pm \rightarrow w_0$. Entonces V_n está contenida en la componente U_n de $\mathbb{D} \setminus (\overline{H_n^+} \cup \overline{H_n^-} \cup C_n)$ tal que $0 \notin U_n$. Así,

$$\begin{aligned} \text{diam } V_n &\leq \text{diam } U_n \\ &\leq |\xi_n^+ - w_0| + |\xi_n^- - w_0| + |w_n^+ - \xi_n^+| + \text{diam } C_n + |w_n^- - \xi_n^-| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Caso 3: Si $w_n^+ \in \mathbb{D}$ y $w_n^- \in \mathbb{T}$, procediendo como en el caso 2, $V_n \subset U_n$ donde U_n es la componente de $\mathbb{D} \setminus (\overline{H_n^+} \cup C_n)$ tal que $0 \notin U_n$. Así,

$$\text{diam } V_n \leq \text{diam } U_n \leq |\xi_n^+ - w_0| + |w_n^- - w_0| + \text{diam } C_n + |w_n^+ - \xi_n^+| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Caso 4: Si $w_n^+, w_n^- \in \mathbb{T}$,

$$\text{diam } V_n \leq \text{diam } C_n + |w_n^+ - w_n^-| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Hemos visto hasta ahora que dada una nulcadena (C_n) de G existe una subsucesión de la nulcadena (C_{n_k}) tal que $\text{diam } V_{n_k} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Sea $\zeta \in \mathbb{T}$. Veamos que existe

el límite (irrestricto) $\lim_{z \rightarrow \zeta} f(z)$ para $z \in \mathbb{D}$.

Nótese que (C_n) y (C_{n_k}) representan el mismo terminal primo. Por el Teorema del Terminal Primo de Carathéodory, sea $\widehat{f}(\zeta)$ el único terminal primo de G que corresponde a ζ . Por el Teorema 6 $I(\widehat{f}(\zeta)) = C(f, \zeta) = \bigcap_{r>0} \overline{\{f(z) : z \in \mathbb{D}, |z - \zeta| < r\}}$; pero, igual que en la prueba del Teorema del Terminal Primo, puede verse que para cada $r > 0$, existe un n tal que

$$\overline{\{f(z) : z \in \mathbb{D}, |z - \zeta| < r\}} \subset V_n$$

luego, como $\text{diam } V_n \rightarrow 0$ entonces $I(\widehat{f}(\zeta)) = C(f, \zeta) = \{a\}$ para algún a , pues es una sucesión decreciente de conjuntos compactos; por lo tanto, por el corolario 2, f tiene el límite irrestricto a en ζ . ■

Ejemplo: La familia de las funciones oroconvexas normalizada por $f(0) = 0$ no es equicontinua.

Sea $\theta_n = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Consideremos los dos orociclos:

$$H_n^\pm = \left\{ w : \left| w - \frac{2}{3} e^{\pm i\theta_n} \right| < \frac{1}{3} \right\}.$$

H_n^\pm son disjuntos y no tocan el eje real.

Sea $G_n = \mathbb{D} \setminus (\overline{H_n^+} \cup \overline{H_n^-})$. G_n es simplemente conexo y oroconvexo. Por el Teorema del mapeo de Riemann existe $f_n : \mathbb{D} \rightarrow G_n$ conforme tal que $f_n(0) = 0$ y $f_n'(0) > 0$. Sean

$$w_n^\pm = \frac{e^{\pm \frac{i}{n}}}{\sqrt{3}}$$

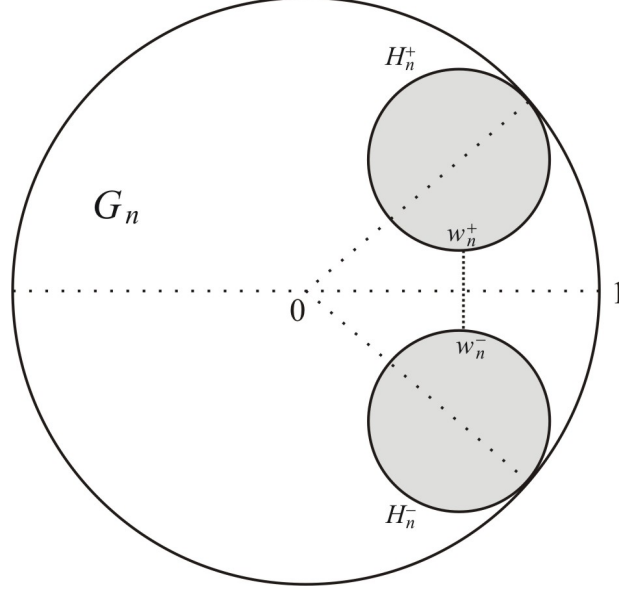
Entonces $w_n^- = \overline{w_n^+}$ y además $w_n^\pm \in \partial H_n^\pm$:

$$\left| \frac{e^{\pm \frac{i}{n}}}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3} e^{\pm i(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{n})} \right| = \frac{1}{3} \left| \sqrt{3} e^{\pm \frac{i}{n}} - 2 e^{\pm i(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{n})} \right| = \frac{1}{3} \left| \sqrt{3} - 2 e^{\pm i\frac{\pi}{6}} \right| = \frac{1}{3}.$$

Sean $z_n^\pm \in \mathbb{T}$ tales que $f_n(z_n^\pm) = w_n^\pm$. Por el principio de reflexión de Schwarz (Preliminares, pág. 2) podemos suponer que $\overline{z_n^+} = z_n^-$. Por el Teorema anterior f tiene una extensión continua a $\overline{\mathbb{D}}$ y como el dominio es simétrico con respecto al eje real entonces $f_n(1) = 1$. Sea

$$g_n(z) = \frac{f_n(z)}{f_n'(0)} = c f_n(z), \quad c > 0.$$

Como $g_n \in \mathbf{S}$ entonces $h_n(z) := \frac{1}{g_n(1/z)} \in \Sigma$, $z \in \Delta$; nótese que $|h_n(z)| \geq \frac{1}{c}$ y $z_n^\pm \in \partial \Delta$;



además,

$$h_n(z_n^\pm) = \frac{1}{g_n(\frac{1}{z_n^\pm})} = \frac{1}{g_n(z_n^\mp)} = \frac{1}{cw_n^\mp} \in \partial H_n,$$

donde $H_n := h_n(\Delta)$.

Si C_n es el segmento de recta que une $\frac{1}{cw_n^+}$ y $\frac{1}{cw_n^-}$, entonces C_n es un corte de H_n pues $f_n'(0)h_n^{-1}(C_n)$ es un corte de G_n ; luego es posible tomar C'_n corte de H_n (a la derecha de C_n) de manera que

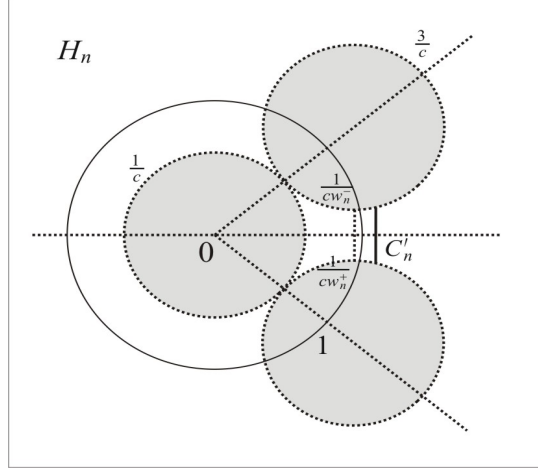
$$l(C'_n) = l(C_n) + \frac{1}{n}$$

donde $l(C_n)$ y $l(C'_n)$ denotan las longitudes euclidianas de los cortes C_n y C'_n respectivamente.

Con eso, $\frac{1}{cw_n^+}$ y $\frac{1}{cw_n^-}$ están separados en H_n de ∞ por el corte C'_n .

Así, por el corolario 3,

$$\begin{aligned} |z_n^+ - z_n^-| &\leq 2l(C'_n)^{1/2} = 2 \left(l(C_n) + \frac{1}{n} \right)^{1/2} = 2 \left(\left| \frac{1}{cw_n^+} - \frac{1}{cw_n^-} \right| + \frac{1}{n} \right)^{1/2} \\ &= \frac{2}{c^{1/2} |w_n^+ w_n^-|^{1/2}} \left(|w_n^+ - w_n^-| + \frac{c |w_n^+ w_n^-|}{n} \right)^{1/2} \\ &\leq k \left(|w_n^+ - w_n^-| + \frac{c'}{n} \right)^{1/2} \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \longrightarrow \infty, \text{ para } k, c' \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$



Como

$$|z_n^+ - z_n^-| = \left| \frac{z_n^+}{z_n^-} - 1 \right| = |(z_n^+)^2 - 1|$$

entonces $z_n^+ \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$. Nótese que z_n^+ no puede converger a -1 pues en este caso se tendría que el ángulo entre los segmentos $[0, 1]$ y $[0, z_n^+]$ tendería a π mientras que el ángulo entre los segmentos $[0, 1]$ y $[0, w_n^+]$ tendería a 0 , lo cual no es posible pues f_n es conforme.

Por otro lado se tiene que

$$|f_n(z_n^+) - f_n(1)| = |w_n^+ - 1| \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}},$$

es decir, la familia $\{f_n\}$ no es equicontinua.

2.2 El Ejemplo Canónico

La siguiente función juega un papel importante en la teoría de funciones oroconvexas. Sea $0 < \lambda < 1$. Definimos

$$h_\lambda(z) = \frac{\log \frac{1+e^{i\pi\lambda}z}{1+e^{-i\pi\lambda}z}}{2\pi\lambda i - \log \frac{1+e^{i\pi\lambda}z}{1+e^{-i\pi\lambda}z}}. \quad (2.1)$$

- h_λ es analítica en \mathbb{D} :

La función \log es analítica en $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$; por lo tanto, si

$$\frac{1 + e^{i\pi\lambda}z}{1 + e^{-i\pi\lambda}z} = t < 0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

entonces, despejando z :

$$z = \frac{e^{i\pi\lambda}(t-1)}{e^{2i\pi\lambda} - t}$$

pero $|e^{2i\pi\lambda} - t| < 1 + |t| \leq 1 - t \leq |1 - t|$, luego

$$|z| = \left| \frac{t-1}{e^{2i\pi\lambda} - t} \right| > 1;$$

es decir, $h_\lambda(z)$ es analítica para $|z| < 1$.

Se observa además que

$$2\pi\lambda i - \log \frac{1 + e^{i\pi\lambda}z}{1 + e^{-i\pi\lambda}z} = 0 \quad \text{sii} \quad \lambda = 0.$$

- h_λ tiene una extensión continua a $\overline{\mathbb{D}}$:

Si $|z_0| = 1$ entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} h_\lambda(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\log \frac{1 + e^{i\pi\lambda}z}{1 + e^{-i\pi\lambda}z}}{2\pi\lambda i - \log \frac{1 + e^{i\pi\lambda}z}{1 + e^{-i\pi\lambda}z}}$$

y este último límite existe siempre que

$$\frac{1 + e^{i\pi\lambda}z_0}{1 + e^{-i\pi\lambda}z_0} \neq 0 \quad \text{y} \quad \infty$$

en cuyo caso: $z_0 \neq -e^{-i\pi\lambda}$ y $z_0 \neq -e^{i\pi\lambda}$; pero en estos dos casos, por L'Hôpital:

$$\lim_{z \rightarrow -e^{-i\pi\lambda}} h_\lambda(z) = -1 = \lim_{z \rightarrow -e^{i\pi\lambda}} h_\lambda(z); \text{ es decir, } h_\lambda(e^{\pm i\pi(1-\lambda)}) = -1.$$

Se tiene además que

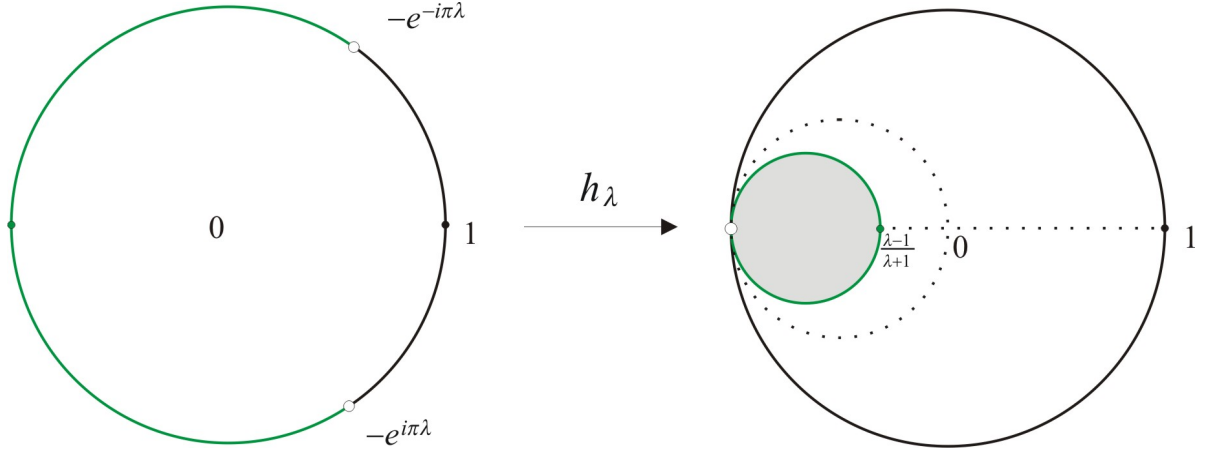
$$h_\lambda(1) = \lim_{z \rightarrow 1} h_\lambda(z) = \frac{\log \frac{1 + e^{i\pi\lambda}}{1 + e^{-i\pi\lambda}}}{2\pi\lambda i - \log \frac{1 + e^{i\pi\lambda}}{1 + e^{-i\pi\lambda}}} = \frac{\log e^{i\pi\lambda}}{2\pi\lambda i - \log e^{i\pi\lambda}} = \frac{i\pi\lambda}{2\pi\lambda i - i\pi\lambda} = 1$$

- $h_\lambda : \{e^{it} : |t| < \pi(1-\lambda)\} \rightarrow \mathbb{T} \setminus \{-1\}$ es biyectivo:

Sean

$$\varphi(z) = \frac{1 + e^{i\pi\lambda}z}{1 + e^{-i\pi\lambda}z}, \quad \sigma(z) = \log z, \quad \tau(z) = \frac{z}{2\pi\lambda i - z}.$$

Entonces $h_\lambda = \tau \circ \sigma \circ \varphi$. Así, $\{e^{it} : |t| < \pi(1-\lambda)\}$ es enviado por $\varphi(z)$ en la semirrecta desde 0 que tiene ángulo de inclinación $\pi\lambda$; después, $\sigma(z) = \log z$ envía, inyectivamente, la semirrecta en la recta horizontal que pasa por $i\pi\lambda$, y por último τ envía la recta horizontal en $\mathbb{T} \setminus \{-1\}$. Como τ y φ son transformaciones de Möbius entonces $h_\lambda : \{e^{it} : |t| < \pi(1-\lambda)\} \rightarrow \mathbb{T} \setminus \{-1\}$ es biyectivo.



- $h_\lambda : \{e^{it} : \pi(1-\lambda) < t < \pi(1+\lambda)\} \longrightarrow \partial H_\lambda \setminus \{-1\}$ es biyectivo donde

$$H_\lambda = \left\{ w : \left| w + \frac{1}{1+\lambda} \right| < \frac{\lambda}{1+\lambda} \right\}. \quad (2.2)$$

Veamos primero que $h_\lambda(-1) = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$:

$$\begin{aligned} h_\lambda(-1) &= \lim_{z \rightarrow -1} h_\lambda(z) = \frac{\log \frac{1-e^{i\pi\lambda}}{1-e^{-i\pi\lambda}}}{2\pi\lambda i - \log \frac{1-e^{i\pi\lambda}}{1-e^{-i\pi\lambda}}} = \frac{\log(-e^{i\pi\lambda})}{2\pi\lambda i - \log(-e^{i\pi\lambda})} \\ &= \frac{i \arg(-e^{i\pi\lambda})}{2\pi\lambda i - i \arg(-e^{i\pi\lambda})} = \frac{i(\pi\lambda - \pi)}{2\pi\lambda i - i(\pi\lambda - \pi)} = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}. \end{aligned}$$

Además,

$$\left| \frac{\lambda-1}{\lambda+1} + \frac{1}{1+\lambda} \right| = \frac{\lambda}{1+\lambda}$$

luego $\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \in \mathbb{R}$ y $\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \in \partial H_\lambda \setminus \{-1\}$. Razonando como en el caso anterior, es fácil ver que al aplicar φ , σ y τ , el arco circular $\{e^{it} : \pi(1-\lambda) < t < \pi(1+\lambda)\}$ es enviado inyectivamente en el arco $\partial H_\lambda \setminus \{-1\}$.

Claramente $\mathbb{D} \setminus \overline{H_\lambda}$ es simétrico respecto al eje real y por lo tanto puede escribirse como la unión de dos componentes disjuntas, digamos $\mathbb{D} \setminus \overline{H_\lambda} = D^+ \cup D^-$. Entonces, por el principio de la frontera (proposición 2), h_λ mapea la parte superior del disco conformemente sobre D^+ y análogamente con la parte inferior del disco, luego h_λ mapea \mathbb{D} conformemente sobre $\mathbb{D} \setminus \overline{H_\lambda}$ y así h_λ es oroconvexa.

- El desarrollo en serie de Taylor de h_λ alrededor de cero es:

$$h_\lambda(z) = \frac{\sin \pi \lambda}{\pi \lambda} z + \left(\left(\frac{\sin \pi \lambda}{\pi \lambda} \right)^2 - \frac{\sin 2\pi \lambda}{2\pi \lambda} \right) z^2 + \dots$$

- La función inversa de h_λ es

$$h_\lambda^{-1}(w) = \frac{p(w) - 1}{e^{i\pi\lambda} - e^{-i\pi\lambda}p(w)} \quad \text{con } p(w) = \exp \frac{2\pi i \lambda w}{1+w}. \quad (2.3)$$

-

$$\min_t |h'_\lambda(e^{it})| \geq \frac{2\lambda}{\pi(1+\lambda)^2} \cot \frac{\pi\lambda}{2} \quad (2.4)$$

con igualdad en $t = \pi$:

(i) Si $|t| \leq \pi(1-\lambda)$ entonces $h_\lambda(e^{it}) \in \mathbb{T}$; y ya que $h_\lambda(0) = 0$, se sigue del lema de Julia-Wolff (proposición 3) que

$$|h'_\lambda(e^{it})| \geq 1 > \frac{2\lambda}{\pi(1+\lambda)^2} \cot \frac{\pi\lambda}{2},$$

con lo cual se obtiene (2.4).

(ii) Sea $\pi(1-\lambda) < t < \pi(1+\lambda)$ y escribamos $w = h_\lambda(e^{it})$. De (2.3) tenemos que

$$\frac{d}{dw} h_\lambda^{-1}(w) = -\frac{2 \sin \pi \lambda}{(e^{i\pi\lambda} - e^{-i\pi\lambda}p(w))^2} \frac{2\pi\lambda p(w)}{(1+w)^2}. \quad (2.5)$$

Como $w \in \partial H_\lambda$; $-\frac{1}{1+\lambda}$ y $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ son el centro y radio de H_λ entonces

$$w = -\frac{1}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda} e^{2i\theta} = -\frac{1+\lambda e^{2i\theta}}{1+\lambda}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2};$$

así,

$$1+w = 1 - \frac{1+\lambda e^{2i\theta}}{1+\lambda} = \frac{\lambda - \lambda e^{2i\theta}}{1+\lambda} = \frac{\lambda - \lambda(1+2ie^{i\theta} \sin \theta)}{1+\lambda} = -\frac{2i\lambda e^{i\theta} \sin \theta}{1+\lambda},$$

y con lo anterior

$$\begin{aligned}
p(w) &= \exp \frac{\pi(1 + \lambda e^{2i\theta})}{e^{i\theta} \sin \theta} \\
&= \exp \frac{\pi e^{-i\theta} + \lambda \pi e^{i\theta}}{\sin \theta} \\
&= \exp(\pi \cot \theta - \pi i + \lambda \pi \cot \theta + \lambda \pi i) \\
&= -e^{i\pi\lambda} \exp[\pi(1 + \lambda) \cot \theta].
\end{aligned}$$

Escribiendo $c := \pi(1 + \lambda)^2 \sin(\pi\lambda)/(2\lambda)$ y como

$$h'_\lambda(e^{it}) = \frac{1}{\frac{d}{dw} h_\lambda^{-1}(w)},$$

obtenemos de (2.5)

$$\begin{aligned}
c |h'_\lambda(e^{it})| &= \frac{\pi(1 + \lambda)^2 \sin(\pi\lambda)}{2\lambda} \frac{|e^{i\pi\lambda} - e^{-i\pi\lambda} p(w)|^2}{2 \sin \pi\lambda} \frac{|1 + w|^2}{2\pi\lambda |p(w)|} \\
&= \frac{(1 + \lambda)^2}{8\lambda^2} \frac{(e^{i\pi\lambda} - e^{-i\pi\lambda} p(w)) \left(e^{-i\pi\lambda} - e^{i\pi\lambda} \overline{p(w)} \right)}{\exp(\pi(1 + \lambda) \cot \theta)} \left| \frac{-4\lambda^2 e^{2i\theta} \sin^2 \theta}{(1 + \lambda)^2} \right| \\
&= \frac{\sin^2 \theta}{2} \left[\frac{1 - 2 \operatorname{Re}(e^{2i\pi\lambda} \overline{p(w)}) + e^{2\pi(1+\lambda) \cot \theta}}{\exp(\pi(1 + \lambda) \cot \theta)} \right] \\
&= \sin^2 \theta [\cosh(\pi(1 + \lambda) \cot \theta) + \cos \pi\lambda] \tag{*} \\
&\geq \sin^2 \theta \left[1 + \frac{\pi^2(1 + \lambda)^2 \cot^2 \theta}{2} + \cos \pi\lambda \right] \\
&\geq \sin^2 \theta (1 + \cos \pi\lambda) \\
&\geq 1 + \cos \pi\lambda. \tag{**}
\end{aligned}$$

Así,

$$|h'_\lambda(e^{it})| \geq \frac{4\lambda}{\pi(1 + \lambda)^2 \sin \pi\lambda} \cos^2\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) = \frac{2\lambda}{\pi(1 + \lambda)^2} \cot \frac{\pi\lambda}{2}$$

Se observa que si $\theta = \frac{\pi}{2}$ entonces se da la igualdad entre (*) y (**); es decir que en (2.4) se da la igualdad para $t = \pi$.

2.3 El Argumento de La Derivada

Sea Γ un arco de Jordan o una curva de Jordan de la forma $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$, donde los Γ_ν ($\nu = 1, \dots, n$) son arcos suaves disjuntos, desde $p_{\nu-1}$ hasta p_ν . Sea $\Delta(\Gamma_\nu)$ el cambio del ángulo tangente a lo largo del arco Γ_ν y sea $\Delta(p_\nu)$ ($\nu = 1, \dots, n - 1$) el cambio del ángulo

tangente en la esquina p_ν . Entonces

$$\Delta(\Gamma) = \sum_{\nu=1}^n \Delta(\Gamma_\nu) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \Delta(p_\nu)$$

es, por definición, el cambio del ángulo tangente a lo largo de Γ .

En este caso, $\Delta(\Gamma_\nu)$ es la diferencia de los ángulos de los vectores tangentes en p_ν y $p_{\nu-1}$; es decir, si $\Gamma_\nu : \gamma(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ es la parametrización del arco Γ_ν entonces $\Delta(\Gamma_\nu) = \arg \gamma'(\beta) - \arg \gamma'(\alpha)$.

Si Γ es una curva de Jordan orientada positivamente, entonces

$$\Delta(\Gamma) = 2\pi.$$

Proposición 7 [P2, Prop. 4.22] *Sea f una función que mapea \mathbb{D} conformemente sobre $G \subset \mathbb{C}$ y sea S un segmento hiperbólico en \mathbb{D} . Si D es un disco en G tal que ∂D es tangente a $f(S)$ entonces $D \cap f(S) = \emptyset$.*

Teorema 12 [MeP1] *Sea f una función que mapea \mathbb{D} conformemente sobre $G \subset \mathbb{C}$ y supongamos que, para cualquier par de puntos $w_1, w_2 \in \partial G$, existe un arco de Jordan A , suave a tramos, desde w_1 a w_2 tal que*

$$A \subset \mathbb{C} \setminus G \text{ y } |\Delta(A)| \leq a,$$

donde a es una constante. Si $z \in \mathbb{D}$ entonces

$$|\arg f'(z) - \arg f'(0)| \leq a + 10\pi,$$

y $\log f'$ pertenece al espacio de Hardy H^p ($0 < p < \infty$).

Prueba. Sean $z_1 = 0$, $z_2 = z$ y $S = [0, z]$. Como f es conforme, $f(S)$ es un segmento hiperbólico en G . Sea D_1 el disco más grande en G tal que ∂D_1 es tangente a $f(S)$ en el punto $f(0)$ desde la izquierda (se entiende aquí que cuando se recorre la curva según la parametrización, el disco está a la izquierda de la curva); lo anterior siempre es posible de la siguiente manera: Se traza la recta l tangente a $f(S)$ en $f(0)$; después se considera la recta l' perpendicular a l en $f(0)$. Se empieza a trazar círculos que pasan por $f(0)$ y cuyo centro pertenece a l' . Entonces en alguna de las dos direcciones existen $w_1 \in \mathbb{C}$ y un disco D_1 tales que $w_1 \in \partial D_1 \cap \partial G$, pues de lo contrario $\partial G = \emptyset$; parametrizando adecuadamente, podemos suponer que D_1 está a la izquierda de $f(S)$.

De igual manera, sea D_2 el disco más grande en G tal que ∂D_2 es tangente a $f(S)$ en $f(z_2)$ desde la izquierda. Sea $w_2 \in \partial D_2 \cap \partial G$.

Por la proposición 7,

$$D_1 \cap f(S) = \phi = D_2 \cap f(S).$$

Consideremos a C_j ($j = 1, 2$) el arco de ∂D_j , orientado positivamente, entre $f(z_j)$ y w_j y tomados de tal forma que $\Delta(f(z_j)) = 0$.

Nótese que $C_1 \cap C_2 = \phi$, aunque puede ocurrir el caso $w_1 = w_2$.

Como $w_1, w_2 \in \partial G$, por hipótesis existe un arco de Jordan A , suave a tramos, desde w_1 hasta w_2 tal que $A \subset \mathbb{C} \setminus G$ y $|\Delta(A)| \leq a$.

Entonces $\Gamma = f(S) \cup C_1 \cup A \cup C_2$ es una curva de Jordan orientada positivamente. Así,

$$2\pi = \Delta(f(S)) + \Delta(C_1) + \Delta(A) + \Delta(C_2) + \Delta(w_1) + \Delta(w_2)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} |\Delta(f(S))| &\leq 2\pi + |\Delta(C_1)| + |\Delta(A)| + |\Delta(C_2)| + |\Delta(w_1)| + |\Delta(w_2)| \\ &\leq a + 10\pi. \end{aligned}$$

Como $\arg f'(z) - \arg f'(0) = \Delta(f(S))$ entonces

$$|\arg f'(z) - \arg f'(0)| < a + 10\pi. \quad (*)$$

En el caso en que $w_1 = w_2$, $\Gamma = f(S) \cup C_1 \cup C_2$ y entonces $2\pi = \Delta(\Gamma) = \Delta(f(S)) + \Delta(C_1) + \Delta(C_2) + \Delta(w_1)$; con lo cual $|\Delta(f(S))| \leq 8\pi < a + 10\pi$.

Por lo tanto, como $\arg f'(z) - \arg f'(0) = \text{Im}(\log f'(z) - \log f'(0))$ entonces se sigue de (*) que el rango de la función $\log f'(z) - \log f'(0)$ está contenido en la franja horizontal $\{z \in \mathbb{C} : -a - 10\pi < \text{Im } z < a + 10\pi\}$. Sea

$$g(z) = \frac{b}{2} \log \frac{1+z}{1-z} \quad (z \in \mathbb{D}), \quad \text{donde } b = \frac{4a}{\pi} + 40.$$

Entonces, para $z \in \mathbb{D}$, $\text{rango}(g) = \{z \in \mathbb{C} : -a - 10\pi < \text{Im } z < a + 10\pi\}$; así, como g es conforme, $\log f'(z) - \log f'(0)$ está subordinada a g .

Como $g \in H^p$ [D, pág. 56], por el Teorema de subordinación de Littlewood, $\log f' \in H^p$.

■

2.4 Algunos Estimativos Precisos

Teorema 13 [MeP1] *Sea f orocíclicamente convexa y sea $f(0) = 0$. Entonces*

$$|\arg f'(z) - \arg f'(0)| < 2\pi \quad \text{para } z \in \mathbb{D}, \quad (2.6)$$

Además,

$$f' \in H^p \text{ para } 0 < p < \frac{1}{4}. \quad (2.7)$$

Prueba. Sea $G = f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y tomemos $\zeta \in \mathbb{T}$ tal que la derivada angular $f'(\zeta) \neq 0, \infty$ existe. Supongamos que $w = f(\zeta) \in \mathbb{D}$. Como G es oroconvexo existe un orociclo $H \subset \mathbb{D} \setminus G$ con $w \in \partial H$. Como f es conforme en ζ entonces f es isogonal en ζ [P2, pag 80]. Por lo tanto, probemos que $C = \{f(r\zeta) : 0 \leq r \leq 1\}$ es normal a ∂H en w : Por la proposición 1, el ángulo entre el segmento $r\zeta$, $0 \leq r \leq 1$ y la recta frontera de cualquier ángulo de Stolz se preserva, luego tomando el límite sobre el ángulo de Stolz cuando tiende a $\frac{\pi}{2}$, se ve que C es normal a ∂H en w . Sea e^{it} el punto donde ∂H toca a \mathbb{T} .

Sea D_0 el disco más grande en G que es tangente a C en $f(0) = 0$ desde la derecha. Por la proposición 7, $C \cap D_0 = \emptyset$. Supongamos que $\overline{D_0} \subset \mathbb{D}$. Entonces existe un orociclo H_0 que toca a $\overline{D_0}$ en algún punto $w_0 \in \partial H_0 \cap \partial D_0$. Sea e^{it_0} el punto donde ∂H_0 toca \mathbb{T} .

Sean Γ_0 el arco de ∂H_0 , orientado positivamente, desde e^{it_0} hasta w_0 y Γ_1 el arco de ∂D_0 , orientado negativamente, desde w_0 hasta 0 ; usaremos T para denotar el arco de \mathbb{T} , orientado positivamente, desde e^{it} hasta e^{it_0} . Supongamos que $H_0 \neq H$. Sean Γ^\pm los arcos de ∂H , orientados positivamente/negativamente, desde w hasta e^{it} .

Entonces

$$J^\pm = C \cup \Gamma^\pm \cup T \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \quad (*)$$

son curvas cerradas, suaves a tramos.

Nótese que los únicos puntos en donde J^\pm puede no ser una curva de Jordan están sólo en $\Gamma^\pm \cap \Gamma_0$; pero como $w_0 \neq w$ (proposición 7), $t_0 > t$ y $H_0 \neq H$ entonces una de las dos J^+ o J^- es una curva de Jordan.

Sean $\theta_0, \theta \in [0, 2\pi)$ los ángulos de inclinación de las rectas tangentes a C en 0 y w . Entonces

$$\Delta(T) = t_0 - t.$$

Para Γ^+ tenemos

$$\Delta(\Gamma^+) = t + \frac{\pi}{2} - (\theta - \frac{\pi}{2}) = t - \theta + \pi, \quad \Delta(w) = -\frac{\pi}{2}, \quad \Delta(e^{it}) = 0,$$

mientras que para Γ^- tenemos

$$\Delta(\Gamma^-) = t - \frac{\pi}{2} - (\theta + \frac{\pi}{2}) = t - \theta - \pi, \quad \Delta(w) = \frac{\pi}{2}, \quad \Delta(e^{it}) = \pi,$$

y como $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ es suave en w_0 entonces

$$\Delta(\Gamma_0 \cup \Gamma_1) = \theta_0 - (t_0 - \frac{3\pi}{2}).$$

Por lo tanto de (*), en ambos casos,

$$\begin{aligned}\Delta(J^\pm) &= \Delta(C) + \Delta(\Gamma^\pm) + \Delta(T) + \Delta(\Gamma_0 \cup \Gamma_1) + \Delta(w) + \Delta(e^{it}) \\ &= \theta_0 - \theta + 2\pi + \Delta(C).\end{aligned}$$

Pero J^\pm es una curva de Jordan orientada positivamente si se escoge adecuadamente el signo; así,

$$|\arg f'(\zeta) - \arg f'(0)| = |\Delta(C)| = |\theta - \theta_0| \leq 2\pi \text{ siempre que } f'(\zeta) \neq 0, \infty \text{ exista.} \quad (2.8)$$

Hasta aquí se han hecho las tres suposiciones de que $w \in \mathbb{D}$, $\overline{D_0} \subset \mathbb{D}$ y $H_0 \neq H$. La prueba anterior es similar en cualquiera de los casos en que alguna de las suposiciones no se tenga.

Como f es oroconvexa, para cualquier par de puntos en ∂G siempre existe un arco A en $\mathbb{C} \setminus G$ tal que $|\Delta(A)| < 2\pi$, luego por el Teorema anterior $\log f' \in H^1$; por lo tanto, por el teorema 8 tenemos la representación integral de Poisson:

$$\arg \left[\frac{f'(z)}{f'(0)} \right] = \text{Im} \left[\log \frac{f'(z)}{f'(0)} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \arg \frac{f'(\zeta)}{f'(0)} |d\zeta|.$$

Entonces se sigue de (2.8):

$$\begin{aligned}|\arg f'(z) - \arg f'(0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} |\arg f'(\zeta) - \arg f'(0)| |d\zeta| \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} |d\zeta| \\ &< 2\pi,\end{aligned}$$

siempre que $z \in \mathbb{D}$; lo cual completa la prueba de (2.6).

Consideremos ahora la función

$$g(z) = f'(0) \exp \left[4 \log \frac{1+z}{1-z} \right].$$

Entonces, $\arg g(z) = \arg f'(0) + \arg \left\{ \exp \left[4 \log \frac{1+z}{1-z} \right] \right\} < \arg f'(0) + 2\pi$. Por (2.6) tenemos que $\arg f' < \arg f'(0) + 2\pi$, luego como g es conforme entonces f' está subordinada a la función

$$g(z) = f'(0) \exp \left[4 \log \frac{1+z}{1-z} \right] = f'(0) \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^4.$$

Por el teorema 9 la función $\frac{1+z}{1-z} \in H^p$ para $p < 1$ y por lo tanto $\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^4 \in H^p$ para $p < \frac{1}{4}$;

así, $g \in H^p$ para $p < \frac{1}{4}$, y con eso se tiene (2.7). ■

Teorema 14 [MeP1] *Sea f orocíclicamente convexa tal que*

$$f(0) = 0 \quad y \quad |f'(0)| = \frac{\sin \pi \lambda}{\pi \lambda} \quad (0 < \lambda < 1). \quad (2.9)$$

Entonces

$$\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \leq |f(z)| \leq 1 \quad para \quad z \in \mathbb{T}. \quad (2.10)$$

La derivada angular existe y satisface

$$\frac{2\lambda}{\pi(1+\lambda)^2} \cot \frac{\pi \lambda}{2} \leq |f'(z)| \leq +\infty \quad para \quad z \in \mathbb{T}. \quad (2.11)$$

Si $f = h_\lambda$, donde h_λ es la función de la sección 2.2, entonces se tienen igualdades en (2.10) y (2.11) para un $z \in \mathbb{T}$ adecuado.

Como $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y $f(0) = 0$, por el lema de Schwarz (Preliminares, pág. 4) $0 < |f'(0)| < 1$, luego se puede escoger un $\lambda \in (0, 1)$ tal que (2.9) se tiene (excepto obviamente en el caso trivial $f(z) = e^{i\theta}z$).

Prueba. Sea $z \in \mathbb{T}$. Supongamos primero que $f(z) \in \mathbb{D}$. Entonces existe un orociclo H tal que $f(z) \in \partial H$ y $H \cap G = \phi$, donde $G = f(\mathbb{D})$. Sea $\zeta \in \partial H \cap \mathbb{T}$. Por lo tanto, rotando hasta -1 el punto ζ , existen H_μ orociclo como en (2.2) y un ángulo θ tales que

$$e^{-i\theta}f(z) \in \partial H_\mu \quad y \quad (e^{i\theta}H_\mu) \cap f(\mathbb{D}) = H \cap f(\mathbb{D}) = \phi.$$

Nótese que $\text{rango}(e^{-i\theta}f) \subset \text{rango}(h_\mu)$, luego la función $e^{-i\theta}f$ está subordinada a la función h_μ ; por lo tanto existe una función g tal que

$$f = e^{i\theta}h_\mu \circ g \quad \text{con} \quad g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}, \quad g(0) = 0.$$

Luego, por el Lema de Schwarz y (2.9)

$$\frac{\sin \pi \lambda}{\pi \lambda} = |f'(0)| = |h'_\mu(0)| |g'(0)| \leq |h'_\mu(0)| = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu}.$$

Así $\mu \leq \lambda$, ya que la función $\frac{\sin \theta}{\theta}$ es decreciente en el intervalo $(0, \pi)$; y como $e^{-i\theta}f(z) \in \partial H_\mu$ entonces

$$|f(z)| = \left| e^{-i\theta}f(z) \right| \geq \frac{1-\mu}{1+\mu} \geq \frac{1-\lambda}{1+\lambda},$$

lo cual concluye la prueba de (2.10) pues siempre se tiene que $|f(z)| \leq 1$.

Por otro lado como $e^{-i\theta}f(z) \in \partial H_\mu$, existe $\zeta \in \mathbb{T}$ tal que $h_\mu(\zeta) = e^{-i\theta}f(z)$ y, por (2.4), la derivada angular $h'_\mu(\zeta)$ existe y es tal que $0 < |h'_\mu(\zeta)| \leq +\infty$; de otra parte como $g(0) = 0$, $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, $z \in \mathbb{T}$ y $g(z) = \zeta \in \mathbb{T}$, entonces por El Lema de Julia-Wolff $g'(z)$ existe y $1 \leq |g'(z)| \leq +\infty$. Por lo tanto, $f'(z)$ existe y es tal que $0 < |f'(z)| \leq +\infty$. Luego, por la regla de la cadena, obtenemos

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= \left| e^{i\theta} h'_\mu(g(z)) \cdot g'(z) \right| \\ &= |h'_\mu(g(z))| |g'(z)| \\ &\geq |h'_\mu(g(z))| \\ &\geq \frac{2\mu \cot(\pi\mu/2)}{\pi(1+\mu)^2} \geq \frac{2\lambda \cot(\pi\lambda/2)}{\pi(1+\lambda)^2}, \end{aligned}$$

que prueba (2.11) en el caso $f(z) \in \mathbb{D}$.

Supongamos ahora que $f(z) \in \mathbb{T}$. Entonces (2.10) se tiene inmediatamente. Como $f(0) = 0$, se sigue del lema de Julia-Wolff que la derivada angular existe y satisface

$$+\infty \geq |f'(z)| \geq 1 > \frac{2\lambda \cot(\pi\lambda/2)}{\pi(1+\lambda)^2}.$$

Finalmente, consideremos $f = h_\lambda$. De la sección 2.2 teníamos que $h_\lambda(-1) = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$ y que $h_\lambda(1) = 1$. Además, por (2.4) y (2.5) la igualdad se cumple en (2.11) para $z = -1$ y $z = -e^{i\pi\lambda}$. ■

Teorema 15 [MeP1] *Existe una función positiva $\eta(x)$ ($0 \leq x < 1$) tal que $\eta(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 1$ y existen una función f oro-cíclicamente convexa y una sucesión $(x_k)_k$ con $x_k < 1$ y $x_k \rightarrow 1$ cuando $k \rightarrow \infty$ tales que*

$$|f'(x_k)| \geq \frac{\eta(x_k)}{1-x_k} \quad \text{para todo } k. \quad (2.12)$$

Prueba. Se construirán recursivamente funciones oroconvexas f_n ($n = 1, 2, \dots$) tales que

$$f_n(\mathbb{D} \cap \mathbb{R}) = \mathbb{D} \cap \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \{z \in \mathbb{D} : |z-1| < \rho\} \subset f_n(\mathbb{D}) \quad (2.13)$$

para un número real fijo $0 < \rho < 1$; se construirán además números $x_n \in (1 - \frac{1}{n}, 1)$ tales que

$$(1-x_k) f'_n(x_k) > \left(1 + \frac{1}{n}\right) \eta(x_k) \quad \text{para } k = 1, \dots, n. \quad (2.14)$$

Empezamos con $f_1(z) \equiv z$, y x_1 "suficientemente cercano a 1" para que se cumpla

(2.14) (basta tomar la función η tal que $\eta(1 - \frac{1}{n}) < \frac{1}{2n}$). Claramente f_1 satisface (2.13).

Supongamos que f_k y x_k ya han sido construidos para $k \leq n$. Veamos la construcción de f_{n+1} y x_{n+1} :

Consideremos los dos orociclos

$$H_n^\pm = H_n^\pm(\epsilon, \delta) = \left\{ \left| z - (1 - \delta)e^{\pm i(\epsilon + \pi\delta/2)} \right| < \delta \right\},$$

donde $0 < \epsilon < \delta < \rho/5$. Nótese que $e^{\pm i(\epsilon + \pi\delta/2)} \in \partial H_n^\pm$ y $H_n^+ \cap H_n^- = \emptyset$.

Probemos que $H_n^\pm \subset \{z \in \mathbb{D} : |z - 1| < \rho\}$: Sea $z \in H_n^\pm$. Entonces

$$\begin{aligned} |z - 1| &\leq \left| z - (1 - \delta)e^{\pm i(\epsilon + \pi\delta/2)} \right| + \left| (1 - \delta)e^{\pm i(\epsilon + \pi\delta/2)} - e^{\pm i(\epsilon + \pi\delta/2)} \right| + \left| e^{\pm i(\epsilon + \pi\delta/2)} - 1 \right| \\ &< 2\delta + \left(\epsilon + \frac{\pi\delta}{2} \right) \\ &< \delta \left(3 + \frac{\pi}{2} \right) \\ &< \rho \left(\frac{6 + \pi}{10} \right) \\ &< \rho, \end{aligned}$$

luego por (2.13) $\overline{H_n^\pm} \subset f_n(\mathbb{D})$.

Por el Teorema del Mapeo de Riemann, sea $\varphi_n(z) = \varphi_n(z, \epsilon, \delta)$ una función que mapea \mathbb{D} sobre $f_n(\mathbb{D}) \setminus (\overline{H_n^+} \cup \overline{H_n^-})$ tal que $\varphi_n(0) = 0$ y $\varphi_n(1) = 1$. Por lo tanto φ_n es oroconvexa.

Si hacemos $\delta \rightarrow 0$ entonces $f_n(\mathbb{D}) \setminus (\overline{H_n^+} \cup \overline{H_n^-}) \rightarrow f_n(\mathbb{D})$ en el sentido del kernel, luego por el Teorema del Kernel de Carathéodory, $\varphi_n(z, \epsilon, \delta) \rightarrow f_n(z)$ localmente uniformemente. Por lo tanto, $\varphi_n'(z, \epsilon, \delta) \rightarrow f_n'(z)$ cuando $\delta \rightarrow 0$. Pero, por (2.14) podemos escoger δ_n suficientemente pequeño para que

$$(1 - x_k) \varphi_n'(x_k, \epsilon, \delta_n) > \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \eta(x_k) \quad (k = 1, \dots, n), \quad (2.15)$$

donde $0 < \epsilon < \delta_n$.

Podemos encontrar $u_n \in (0, 1)$ (u_n cercano a 1) y $v_n > 0$ (v_n independiente de ϵ) tales que

$$\text{dist}(H_n^\pm(\epsilon, \delta_n), u_n) > v_n \quad \text{y} \quad 1 - u_n > v_n.$$

Por el principio de reflexión de Schwarz, podemos suponer que $\varphi_n(z, \epsilon, \delta_n)(\mathbb{D} \cap \mathbb{R}) = \mathbb{D} \cap \mathbb{R}$ y como $u_n \in (0, 1)$ entonces sea $\xi_n(\epsilon) \in \mathbb{D} \cap \mathbb{R}$ tal que $\varphi_n(\xi_n(\epsilon), \epsilon, \delta_n) = u_n$ (se puede hacer depender ξ_n sólo de ϵ ; se acercan al eje real los orociclos y cambia u_n).

Entonces, por el Teorema del Kernel de Carathéodory, $\xi_n(\epsilon) \rightarrow 1$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Por

lo tanto, como $\eta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$, existe $\epsilon_n \in (0, \delta_n)$ tal que

$$\eta(x_{n+1}) < \frac{v_n}{4}. \quad \text{donde } x_{n+1} := \xi_n(\epsilon_n) > 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Sea $f_{n+1}(z) = \varphi_n(z, \epsilon_n, \delta_n)$, $z \in \mathbb{D}$. Entonces por el corolario 1,

$$\begin{aligned} (1 - x_{n+1})f'_{n+1}(x_{n+1}) &\geq (1 - x_{n+1}) \frac{\text{dist}(f_{n+1}(x_{n+1}), \partial f_{n+1}(\mathbb{D}))}{1 - x_{n+1}^2} \\ &= \frac{\text{dist}(\varphi_n(\xi_n, \epsilon_n, \delta_n), \partial \varphi_n(\mathbb{D}))}{1 + x_{n+1}} \\ &> \frac{\text{dist}(u_n, \partial \varphi_n(\mathbb{D}))}{2} \\ &> \frac{1}{2}v_n \\ &> 2\eta(x_{n+1}) \\ &> \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\eta(x_{n+1}); \end{aligned}$$

lo cual muestra, junto con (2.15), que (2.14) es cierto para $n+1$ en vez de n ; además, (2.13) se tiene para $n+1$ por la construcción.

Lo anterior completa la construcción. Ahora haciendo $n \rightarrow \infty$, se tiene que $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ existe localmente uniformemente en \mathbb{D} (Teorema del Kernel de Carathéodory), y f es oroconvexa. Luego de (2.14) se sigue el resultado en (2.12). ■

Como consecuencia del Teorema anterior se obtiene de (2.12) que

$$|f'(x_k)| \geq \frac{\eta(x_k)}{1 - x_k} = o\left(\frac{1}{1 - x_k}\right) \quad \text{cuando } x_k \rightarrow 1;$$

pero por El Teorema "de un cuarto" de Koebe (corolario 1), para cualquier mapeo conforme de \mathbb{D} sobre un dominio acotado G ,

$$|f'(z)| \leq \frac{4}{1 - |z|^2} \text{dist}(f(z), \partial G) = o\left(\frac{1}{1 - |z|}\right) \quad \text{cuando } |z| \rightarrow 1.$$

Es decir, que el acotamiento dado por El Teorema de Koebe es lo mejor posible, incluso para la clase de las funciones oroconvexas.

Bibliografía

- [D] P. Duren, *Theory of H^p spaces*, Academic Press, New York and London, 1970.
- [MaM1] W. Ma and D. Minda, *Hyperbolically convex functions*, Ann. Polon. Math. 60 (1994), 81-100.
- [MaM2] ———, *Hyperbolically convex functions II*, Ann. Polon. Math. 71 (1999), 273-285.
- [MeP1] D. Mejía and Ch. Pommerenke, *Horocyclically convex univalent functions*, Michigan Math. J. 53 (2005), 483-496.
- [MeP2] ———, *On hyperbolically convex functions*, J. Geom. Anal. 10 (2000), 365-378.
- [MeP3] ———, *On the derivative of hyperbolically convex functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 27 (2002), 47-56.
- [MePV] D. Mejía and Ch. Pommerenke and A. Vasilev, *Distortion theorems for hyperbolically convex functions*, Complex Variables Theory Appl. 44 (2001), 117-130.
- [Pa] B. P. Palka, *An introduction to complex function theory*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [P1] Ch. Pommerenke, *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [P2] ———, *Boundary behaviour of conformal maps*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.